ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Цыбышев Алексей Евгеньевич

Оснащенные соответствия Воеводского и их применения

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н., гл. науч. сотр. ПОМИ РАН
И. А. Панин

Санкт-Петербург
2020

Оглавление

Введение

Актуальность темы, степень ее разработанности

Настоящая диссертация посвящена развитию и применению техники фрейм-соответствий.

Использование методов алгебраической топологии в алгебраической геометрии возникло практически одновременно с возникновением алгебраической геометрии. По-видимому, А. Вейль был первым, кто предложил построить на алгебраических многообразиях над замыканием конечного поля теорию когомологий со свойствами, аналогичными свойствам сингулярных когомологий. Это предложение вместе с гипотезами А. Вейля послужило колоссальным толчком к развитию алгебраической геометрии и привело к созданию А. Гротендиком теории этальных когомологий алгебраических многообразий. А. Гротендик предположил, что должна существовать категория мотивов (абелианизация категории алгебраических многообразий). Разработка этих идей привела А. Бейлинсона в середине 1980-х годов к созданию серии гипотез (гипотезы А. Бейлинсона) о существовании мотивных комплексов $\mathbb{Z}(n)$ с предписанными свойствами. Данные гипотезы вдохновили А. Суслина и В. Воеводского. А. Суслин каждому гладкому многообразию над полем k сопоставил некоторый комплекс $C_*(X)$, называемый теперь комплексом Суслина, и попытался доказать свойство Майера—Виеториса. В. Воеводский сопоставил каждому многообразию комплекс пучков Нисневича с трансферами, назвал его мотивом многообразия и построил триангулированную категорию мотивов как полную подкатегорию в производной категории пучков Нисневича с трансферами. Это позволило Воеводскому определить как мотивные когомологии, так и мотивные гомологии алгебраических многообразий и доказать их базовые свойства. На этом пути Воеводский построил комплексы $\mathbb{Z}(n)$ и вместе с Суслиным доказал все их базовые свойства. Комплекс Суслина оказался равным значению мотива многообразия на точке. Поэтому этот комплекс вычисляет мотивные гомологии веса ноль. Последнее сразу доказало свойство Майера—Виеториса комплекса Суслина. Наконец, последнее в этом ряду это теорема Воеводского — Суслина, утверждающая, что для комплексного алгебраического многообразия гомологии его комплекса Суслина с конечными коэффициентами равны сингулярным гомологиям с теми же коэффициентами этого комплексного многообразия.

Построив триангулированную категорию мотивов $DM(k)$, Воеводский пошел дальше и стал строить нестабильную (совместно с Ф. Морелем) и стабильную мотивные гомотопические категории $H(k)$ и $SH(k)$ соответственно (при этом $SH(k)$ — триангулированная категория). Последние необходимы для многих целей. Во-первых, стабильная категория открывает путь к систематическому построению теорий когомологий на алгебраических многообразиях, теорий с заранее заданными свойствами. Например, Воеводский построил спектр алгебраических кобордизмов $MGL_\bullet$, мотивный спектр Эйленберга—Маклейна и спектр алгебраической K-теории. Во-вторых, стабильная категория необходима для определения и вычисления алгебры Стинрода для мотивных когомологий. Одной из главных целей Воеводского стало доказательство гипотезы Милнора, утверждающей, что канонический гомоморфизм $K_n^M(k)/2K_n^M(k) \to H^n(k, \mathbb{Z}/2)$ является изоморфизмом. Эта программа была им успешно реализована, за что он был удостоен Филдсовской медали на ICM-конгрессе в Пекине.

В результате этой деятельности был создан новый математический язык и развиты методы, позволившие как атаковать многочисленные классические задачи, так и ставить естественные новые. Все это привело к тому, что целые школы математиков освоили предложенный язык и успешно применили его к решению ряда классических проблем, включая проблемы о проективных модулях, о квадратичных формах, о многообразиях Калаби—Яо. Возникла теория ориентированных когомологий на алгебраических многообразиях,

Отличительная черта триангулированной категории $SH(k)$ состоит в том, что в ней есть два функтора надстройки. Один — это функтор сдвига [1] (симплициальная надстройка), другой — смэш-произведение с «окружностью » Тейта $\mathbb{G}_m^{\wedge 1}$. Стоит отметить, что вычислять в стабильной мотивной гомотопической категории $SH(k)$ весьма трудно, поскольку она построена методом локализации по Бусфелду. Основными инвариантами объекта E из $SH(k)$ являются его пучки (Нисневича) стабильных $\mathbb{A}^1$-гомотопических групп $\pi_{a,b}^{\mathbb{A}^1}$. Биградуировка связана с тем, что имеются упомянутые две надстройки. Необходимость ассоциировать со спектром E пучки связана с тем, что для построения категории $SH(k)$ используется сайт Нисневича на категории всех гладких схем конечного типа. Точками для него являются все локальные гензелевы схемы (существенно гладкие над k).

Поскольку вычислять в стабильной мотивной гомотопической категории $SH(k)$ весьма трудно, Воеводский ввел в 2001 году категории оснащенных (фрtйм-) соответствий $\mathrm{Fr}_+(k)$, оснащенных предпучков и оснащенных пучков множеств. Ввел с надеждой построить новую модель для $SH(k)$. Модель, более дружелюбную для вычислений.

Г. Гаркуша и И. Панин с помощью А. Ананьевского, А. Нешитова и А. Дружинина реализовали эту программу. В итоге, первые два автора построили новую модель SH_{nis}^{fr} для $SH(k)$. Для этого в [GP] была развита теория фрэйм-мотивов. Ключевым объектом в их теории является введенный Воеводским симплициальный пунктированный оснащенный пучок $\mathrm{Fr}(\Delta^\bullet \times -, X)$, где X

— это гладкая схема или симплициальный объект в категории гладких схем. Один из фундаментальных результатов, полученных в [GP], это мотивный вариант теоремы Сегала. А именно, доказано, что канонический морфизм мотивных пространств

$$C_* \operatorname{Fr}(X) \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)} \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X_+)$$

локально является групповым пополнением. Последняя теорема сводит вычисление $\mathbb{A}^1$-пучков стабильных гомотопических групп веса ноль для указанного X к вычислению пучков Нисневича обычных гомотопических групп симплициального множества $\operatorname{Fr}(\Delta^\bullet \times -, X)$. Это позволило А. Нешитову, в частности, передоказать чисто геометрическими методами теорему Ф. Мореля, утверждающую равенство $\pi_{00}^{\mathbb{A}^1}(S^0)(k) = GW(k)$, где k — поле характеристики ноль.

Настоящая диссертация посвящена дальнейшему развитию и применению методов оснащенных соответствий. В частности, мы далеко обобщаем указанный мотивный вариант теоремы Сегала из [GP] на пары. Для полноты картины отметим здесь одно следствие из этой нашей теоремы, не вошедшее в диссертацию, но очень хорошо указывающее на роль мотивных пространств $\operatorname{Fr}(\Delta^\bullet \times -, X/U)$. Она вместе с одной теоремой М. Левина показывает равенство

$$\pi_r(\operatorname{Fr}(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, X/U; \mathbb{Z}/n) = \pi_r^{stable}((X(\mathbb{C}), U(\mathbb{C})); \mathbb{Z}/n)$$

Здесь слева стоят обычные гомотопические группы с конечными коэффициентами симплициального множества $\operatorname{Fr}(\Delta^\bullet_{\mathbb{C}}, X/U; \mathbb{Z}/n)$, а справа — обычные стабильные гомотопии с теми же коэффициентами от пары топологических пространств $(X(\mathbb{C}), U(\mathbb{C}))$. Данная теорема является аналогом упомянутой выше теоремы Воеводского — Суслина для контекста мотивных стабильных гомотопий.

Цели и задачи, научная новизна

Сформулируем теперь основные цели настоящей диссертации. Её первая глава посвящена изучению свойств фрейм-мотивов открытых пар гладких многообразий над бесконечным полем k. Вторая глава посвящена введению кобордизм-фрейм-соответствий и вычислениям с ними.

Основная цель в первой главе — доказательство мотивной теоремы Сегала в как можно большей общности. Гаркуша и Панин доказали такой результат для гладкой схемы X, которой в терминах пар соответствует $(X, \emptyset)$. Также из этого результата тривиальным образом получается результат для пар вида $(X \times \mathbb{A}^m, X \times (\mathbb{A}^m - 0))$, который имеет более простой вид. Соискатель рассматривал вначале случай пар, в которых дополнение к открытой подсхеме является гладким, что было мотивировано данным результатом, а также записками А. Мингазова [Min] по этой теме. В ходе исследования оказалось возможным доказать случай любой пары из открытой гладкой над полем схемы и ее всюду непустой открытой подсхемы. При этом характеристика поля предполагается отличной от 2.

Одной из задач на пути к основной цели первой главы являлось доказательство следующего промежуточного результата, представляющего самостоятельную ценность: теоремы о конусе для произвольных открытых пар гладких схем. Подобный результат доказан Гаркушей, Нешитовым и Паниным для пар вида $(X \times \mathbb{A}^m, X \times (\mathbb{A}^m - 0))$. Данное утверждение связывает в один выделенный треугольник мотивы гладкой схемы, ее открытой подсхемы и пары, которую они образуют, и позволяет вычислять инварианты одного из этих объектов через инварианты двух других.

Другая цель первой главы — доказательство локальной высшей связности фрейм-мотивов открытых пар в предположении, что сами пары обладают необходимой высшей связностью. Данная цель является логичным продолжением одной из задач на пути к основной цели, а именно, доказательства локальной 0-связности фрейм-мотивов связных открытых пар. В то же время, данное доказательство являет собой пример явного вычисления гомотопических инвариантов мотивов с использованием (по крайней мере, локально) явного геометрического вида фрейм-мотивов.

Основная цель во второй главе — вычисление нулевой группы гомологий комплекса линейных кобордизм-фрейм-соответствий из $\Delta^\bullet$ в ${\mathbb{G}_m}^{\wedge m}$. Данное вычисление мотивировано тем, что вычисляемый объект отождествлен с гомотопической группой $\pi^{\mathbb{A}^1}_{m,m}(MGL_\bullet)(pt)$ симметрического спектра кобордизмов. В работе Нешитова приведено подобное вычисление для обыкновенных фрейм-соответствий.

Методология и методы диссертационного исследования

В первой главе мы используем многие теоремы и технические утверждения о фрейм-мотивах и комплексах линейных фрейм-соответствий, разработанные в работах Ананьевского, Гаркуши, Нешитова и Панина. Кроме того, соискателем разработана оригинальная техника, позволяющая доказывать многочисленные леммы о сдвигах Именно эта новая техника и позволяет работать в общности произвольных пар.

Во второй главе мы используем метод доказательства, восходящий к вычислению мотивных когомологий точки Воеводским и Суслиным, с некоторыми содержательными особенностями. Для доказательства строится гомоморфизм сравнения из групп обыкновенных фрейм-соответствий в группы кобордизм-фрейм-соответствий (его можно понимать как гомоморфизм, индуцированный вложением сферического спектра $S_\bullet$ в $MGL_\bullet$).

$$H_0 - cob : H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m})) \to H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m})).$$

Используя геометрические методы, мы доказываем сюръективность этого гомоморфизма.

Так как левая группа это $K_m^{MW}(k)$, мы получаем сюръективный гомоморфизм

$$K_m^{MW}(k) \twoheadrightarrow H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m})).$$

Оказывается, что он пропускается через $K_m^M(k)$.

К индуцируемому сюръективному гомоморфизму

$$K_m^M(k) \twoheadrightarrow H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m}))$$

строится левый обратный. Корректность его определения проверяется при помощи закона взаимности Вейля. Наличие указанного левого обратного завершает наше доказательство.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказательство мотивной теоремы Сегала для открытых пар (X, U) гладких схем над бесконечным совершенным полем характеристики, отличной от 2, где U всюду непусто.

2. Доказательство теоремы о конусе для открытых пар (X, U) гладких схем над бесконечным совершенным полем характеристики, отличной от 2.

3. Доказательство локальной r-связности симплициального пучка $C_*Fr(-, (X, U))$ для открытых пар (X, U) гладких схем над бесконечным совершенным полем характеристики, отличной от 2, где $X - U$ всюду имеет коразмерность более r.

4. Построение и обоснование изоморфизма между группой $H_0(C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m}))$ и K-группой Милнора $K_m^M(k)$ над полем k характеристики 0.

Приведем более конкретные формулировки положений 1 — 4.

Для $(\mathbb{P}^1, \infty)$-спектра E пусть $\mathcal{E}$ – это Ω-спектр, мотивно стабильно эквивалентный E. Под $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(E)$ имеется ввиду мотивное пространство $\mathcal{E}_0$ (нулевое пространство $(\mathbb{P}^1, \infty)$-спектра $\mathcal{E}$). Если $E = \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\mathcal{X}$ — это $(\mathbb{P}^1, \infty)$-надстроечный спектр пунктированного мотивного пространства $\mathcal{X}$, то мы будем писать $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathcal{X})$, чтобы обозначить $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(E)$.

Теорема A. *(пункт 3 Теоремы 1.1.17) Пусть X — гладкая k-схема, S — замкнутая подсхема в X, не содержащая целиком компонент связности X. Рассмотрим пару $\mathbb{B} = (X, X - S) \in SmOp(Fr_0(k))$ и соответствующее ей мотивное пространство $B = X/(X - S) \in Shv_\bullet(Sm/k)$.*

Канонический морфизм симплициальных пучков Нисневича

$$C_*Fr(-, (X, X - S)) \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X/(X - S))$$

является локальной гомотопической эквивалентностью . В частности, для любого расширения полей конечной степени трансцендентности K/k, канонический морфизм симплициальных множеств

$$C_*Fr(Spec(K), (X, X - S)) \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X/(X - S))(Spec(K))$$

является слабой эквивалентностью.

Теорема B. *(Теорема 1.3.1) Пусть $\mathbb{B} = (X, U), \mathbb{M} = (X', U')$ — пары из гладкой схемы и открытой подсхемы, объекты $SmOp(Fr_0(k))$. Тогда последовательность комплексов линейных фрейм-соответствий*

$$C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge U) \to C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge X) \to C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$$

включается в выделенный треугольник в производной категории пучков Нисневича.

Из этой теоремы легко выводится теорема 1.1.34, которая является теоремой о конусе для мотивных S^1-спектров. В частном случае, когда $\mathbb{M} = (X \times \mathbb{A}^n, X \times \mathbb{A}^n - X \times 0), \mathbb{B} = (\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1 - 0)$, это теорема [GNP, Теорема 1.3].

Теорема C. *(Теорема 1.6.10) Пусть $r > 0$, и $(X, U = X - S) \in SmOp(Fr_0(k))$ — такая пара из гладкой схемы и ее открытой подсхемы, что $codim_{X_i}(S \cap X_i) > r$ в каждой связной компоненте $X_i \subseteq X$. Тогда симплициальный пучок $C_*Fr(-, (X, U))$ локально r-связен в топологии Нисневича.*

В формулировке следующей теоремы участвуют понятия и обозначения из главы 2, раздела 2.1.

Теорема D. *Сопоставление символу $\{g_1, \ldots, g_m\} \in K^M_m(k)$ линейного кобордизм-фрейм-соответствия уровня 0, то есть отображения*

$$\widetilde{\sigma}_m(g_1, \ldots, g_m)\colon \mathrm{pt} \to \mathbb{G}_m^m,$$

задаваемого координатами $(g_1, \ldots, g_m)$, индуцирует гомоморфизм абелевых групп

$$\sigma_m\colon K^M_m(k) \to H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})\big).$$

Вместе эти гомоморфизмы образуют гомоморфизм градуированных колец

$$\oplus\sigma_m\colon \bigoplus K_m^M(k) \to \bigoplus H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})\big).$$

Этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Настоящая теорема распространяет известное вычисление Воеводского и Суслина в контекст линейных кобордизм-фрейм-соответствий.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть применены для явного вычисления гомотопических инвариантов открытых пар гладких схем, для перехода от гладких схем к открытым подсхемам или обратно, а также для вычислений, связанных со спектром кобордизмов. Материалы диссертации могут быть использованы для проведения спецкурсов и спецсеминаров по теме «Теория $\mathbb{A}^1$-гомотопий», «Алгебраическая K-теория», «Алгебраическая топология», «Алгебраическая геометрия».

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в печатных работах соискателя [an-pairs], [cob-Fr]. Все они вышли в журналах, входящих в список ВАК. Кроме того, некоторые результаты соискателя, не являющиеся основными результатами диссертации, включены в нее для полноты картины. Данные результаты опубликованы в препринтах [pairs], [MGL].

По результатам диссертационной работы были сделаны доклады на семинаре «Теория $\mathbb{A}^1$-гомотопий» в лаборатории Чебышева.

1 Фрейм-мотивы пар

1.1 Формулировка мотивной теоремы Сегала для пар, и ее вывод из остальных утверждений

Сперва договоримся о соглашениях и напомним необходимые определения. Эти определения, а также определения прочих упоминаемых фрейм-объектов взяты из [VoNote, Section 2] и [GP].

На протяжении данной главы, пусть k — бесконечное совершенное поле, и $char(k) \neq 2$.

Замечание 1.1.1. *Благодаря [DP, Теорема 1.1], можно избавиться от ограничения на характеристику поля k.*

Для читателя, знакомого с общими понятиями и обозначениями теории фрейм-соответствий и желающего сразу прочитать формулировки результатов, игнорируя предварительные построения, приводится список тех обозначений в данной работе, которые не общеприняты.

Обозначения 1.1.2. *Объект (Обычно $\mathbb{B}$ или $\mathbb{T}$), записанный жирным шрифтом для доски, обозначает открытую пару гладких многообразий. В случае $\mathbb{B}$ она означает некоторое $(X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$, где $U = X - S$, а в случае $\mathbb{T}$ это фиксированный объект — пара $(\mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m)$. (см. Определение 1.1.4, Обозначение 1.1.14)*

Объект (Обычно B или T), записанный обычным шрифтом, обозначает пунктированный пучок Нисневича, получаемый из соответствующей пары, записанной жирным шрифтом для доски, применением функтора spc. В случае B это X/U, а в случае T это привычный пучок $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$. (см. Обозначение 1.1.12, Замечание 1.1.15)

Функтор $Fr_m(-, \mathbb{B})$ задается геометрически (см. Определение 1.1.7), но, благодаря лемме Воеводского, его можно понимать как $\mathcal{F}r_m(-, B)$. (см Замечание 1.1.6)

Любое многообразие X понимается также как пара $(X, \emptyset)$. При таком отождествлении, получается $spc(X) = Hom_{Sm}(-, X_+)$. (См. Замечание 1.1.13)

Почти всюду в формулах в скобках стоят не мотивные пространства, а симплициальные пары, объекты $\Delta^{op}SmOp(Fr_0(k))$.

Для данной работы важным объектом является топология Нисневича, которую можно определить как минимальную топологию Гротендика на некоторой категории схем, в которой каждый элементарный квадрат Нисневича представляет собой покрытие.

Обозначение 1.1.3. *В данной работе Nis обозначает топологию Нисневича на категории k-гладких схем Sm/k.*

Имеется два важных соглашения. Пусть $sShv_\bullet(Sm/k)$ — это категория симплициальных пучков Нисневича на категории k-гладких схем Sm/k (ее часто называют категорией мотивных пространств). Согласно [Jar1, 2.7] категория $sShv_\bullet(Sm/k)$ симплициальных пучков Нисневича снабжена *инъективной локальной модельной структурой*, в которой корасслоения – это мономорфизмы, а слабые эквивалентности – это локальные слабые эквивалентности. Зафиксируем некоторую функториальную фибрантную замену $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}_f$ в соответствии с инъективной локальной модельной структурой на категории $sShv_\bullet(Sm/k)$. Будем пользоваться ею на протяжении всей статьи.

Под мотивной модельной структурой на категории симплициальных пунктированных пучков Нисневича понимается конструкция модельной категории Воеводского–Мореля [MV].

Рассмотрим пунктированный пучок Нисневича (не путать с обозначением для открытых пар ниже) $(\mathbb{P}^1, \infty)$. В. Воеводский в [VoCong, Раздел 5] определяет мотивные спектры, в частности, $(\mathbb{P}^1, \infty)$-спектры. В работах, таких, как [GP] и [GNP], те же самые объекты называются $\mathbb{P}^1$-спектрами, а пунктированный пучок $(\mathbb{P}^1, \infty)$ называется $\mathbb{P}^{\wedge 1}$. В настоящем тексте, во имя внутренней согласованности и следуя изначальному определению Воеводского, используется обозначение $(\mathbb{P}^1, \infty)$. Символом T будем обозначать, как и принято, пунктированный пучок Нисневича $\mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - \{0\})$.

Определение 1.1.4. *$SmOp(Fr_0(k))$ — категория пар $\mathbb{B} = (X, U)$, где X — k-гладкая схема, а U его открытая подсхема. Морфизмы из (X, U) в (X', U') — фрейм-соответствия уровня 0 из X в X', индуцирующие соответствия из U в U'.*

Формула $(X, U) \wedge (X', U') = (X \times X', (X \times U' \cup U \times X'))$ задает на $SmOp(Fr_0(k))$ структуру симметрической моноидальной категории.

Приведем мотивировку того, почему мы решили уточнить (изменить) ниже одно из базовых обозначений статьи [GP]. В [GP, Definition 2.5, 2.8] для каждой пары $(X, X - S) \in SmOp(Fr_0(k))$, каждого $U \in Sm/k$ и каждого $m \geqslant 0$ определены множества с отмеченной точкой $Fr_m(U, X/(X - S)$ и $Fr(U, X/(X - S))$. Там же проверено, что $Fr(-, X/(X - S))$ — это фрейм-предпучок и даже фрейм-пучок Нисневича.

В [GP, Definition 5.2.(2)] фрейм-мотив $M_{fr}(X/(X-S))$ пары $(X, X-S) \in SmOp(Fr_0(k))$ определен как некоторый ковариантный функтор на категории $SmOp(Fr_0(k))$ со значениями в категории S^1-спектров в категории $sShv_\bullet(Sm/k)$. Этот функтор на категории $SmOp(Fr_0(k))$ строится с использованием симплициальных пучков вида $Fr(-, X/(X - S))$, однако символ $X/(X - S)$ часто используется для обозначения пунктированного фактор-пучка, а не пары $(X, X-S)$. Чтобы избежать такого смешения в обозначениях мы решили для пары $(X, X - S) \in SmOp(Fr_0(k))$ ввести следующее

Обозначение 1.1.5. *Введем новые обозначения:*
будем писать $Fr_m(U, (X, X - S))$ вместо $Fr_m(U, X/(X - S))$,
$Fr(U, (X, X - S))$ вместо $Fr(U, X/(X - S))$,
где $Fr_m(U, X/(X - S))$, и $Fr(U, X/(X - S))$ определены в [GP, Определение 2.5], и [GP, Определение 2.8] соответственно.

Новые обозначения позволяют определить ковариантный функтор

$$Fr : SmOp(Fr_0(k)) \to Shv_\bullet(Fr_*(k))$$

по правилу $Fr(X, X-S) = Fr(-,(X, X-S))$. Забегая вперед, отметим, что имеется априори другой ковариантный функтор

$$\mathfrak{F}r \circ spc : SmOp(Fr_0(k)) \to Shv_\bullet(Fr_*(k)),$$

переводящий пару $(X, X-S)$ в оснащенный пучок $\mathfrak{F}r(-, X/(X-S))$. Здесь $X/(X-S)$ — это пунктированный фактор-пучок Нисневича, а для произвольного пунктированного пучка Нисневича $\mathcal{F}$ через $\mathfrak{F}r(-,\mathcal{F})$ обозначен фрейм-пучок Нисневича, определенный в [GP, Определение 3.10].

Замечание 1.1.6. *Подчеркнем, что, согласно следствию [GP, Isomorphisms (6)] из леммы Воеводского, указанные два функтора*

$$Fr,\ (\mathfrak{F}r \circ spc) : SmOp(Fr_0(k)) \rightrightarrows Shv_\bullet(Fr_*(k))$$

канонически изоморфны. В частности, они имеют одни и те же свойства. Иногда удобно работать с одним из них, иногда с другим. Но оба функтора определены на парах, а именно, определены на категории $SmOp(Fr_0(k))$.

Напомним здесь [GP, Определения 2.5, 2.8], используя уточненные обозначения из 1.1.5.

Определение 1.1.7. *[GP, Определения 2.5, 2.8]*

(I) Пусть Y — схема, пусть $S \subset Y$ — замкнутое подмножество, и пусть U — схема. *Явное фрейм-соответствие уровня* $m \geqslant 0$ *из* U *в* $(Y, Y-S)$ состоит из наборов:

$$(Z, W, \varphi_1, \ldots, \varphi_m; g : W \to Y),$$

где Z это замкнутое подмножество в $U \times \mathbb{A}^m$, конечное над U (будучи понято как соответствующая приведенная схема), W это этальная окрестность Z в $U \times \mathbb{A}^m$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ это регулярные функции на W, g это регулярное отображение, такое, что $Z = Z(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \cap g^{-1}(S)$. Множество Z называется *носителем* явного фрейм-соответствия. Мы также используем четверки $c = (Z, W, \varphi; g)$ для обозначения явных фрейм-соответствий.

(II) Два явных фрейм-соответствия $(Z, W, \varphi; g)$ и $(Z', W', \varphi'; g')$ уровня m *эквивалентны,* если $Z = Z'$ и существует этальная окрестность W'' Z в $W \times_{\mathbb{A}^m_U} W'$, такая, что $\varphi \circ pr$ совпадает с $\varphi' \circ pr'$ и морфизм $g \circ pr$ совпадает с $g' \circ pr'$ на W''.

(III) *Фрейм-соответствие уровня* m *из* U *в* $(Y, Y-S)$ это класс эквивалентности явных фрейм-соответствий уровня m из U в $(Y, Y-S)$. Будем обозначать через $Fr_m(U,(Y, Y-S))$ множество фрейм-соответствий уровня m из U в $(Y, Y-S)$. Будем понимать его как пунктированное множество с отмеченной точкой $0_{(Y,Y-S),m}$ явного соответствия $(Z, W, \varphi; g)$ с $W = \emptyset$.

(IV) Если $S = Y$, то пунктированное множество $Fr_m(U,(Y,Y-S))$ совпадает с множеством $Fr_m(U,Y)$ фрейм-соответствий уровня m из U в Y.

(V) Обозначим при помощи $\sigma_{(Y,(Y-S))} : Fr_m(U,(Y,(Y-S))) \to Fr_{m+1}(U,(Y,(Y-S)))$ отображение, переводящее $c = (Z, W, \varphi; g)$ в $\sigma_{(Y,(Y-S))}(c) = (Z \times \{0\}, W \times \mathbb{A}^1, \varphi \circ pr_W, pr_{\mathbb{A}^1}; g)$. Положим $\sigma := \sigma_{(Y,(Y-S))}$ и назовем, подобно [GP, Определение 2.8], множество

$$Fr(U,(Y,(Y-S))) := \operatorname{colim}[Fr_0(U,(Y,(Y-S))) \xrightarrow{\sigma} Fr_1(U,(Y,(Y-S))) \xrightarrow{\sigma} \dots]$$

множеством стабильных фрейм-соответствий из U *в* $(Y,(Y-S))$.

Определение 1.1.8. *Дав это определение, можно сразу же распространить [GP, Определения 8.3, 8.4, 8.5, и 8.7] на данную ситуацию, задавая линейные фрейм-соответствия* $\mathbb{Z}F_n(B,(X,U))$ *с внешним произведением на них, гомоморфизм надстройки* $\sigma : \mathbb{Z}F_n(B,(X,U)) \to \mathbb{Z}F_{n+1}(B,(X,U))$, *стабильные линейные фрейм-соответствия* $\mathbb{Z}F(B,(X,U))$ *и линейный фрейм-мотив* $LM_{fr}((X,U))$.

Заметим, что $\mathbb{Z}F_n(B,(X,U))$ *это свободная абелева группа с базисом, состоящим из фрейм-соответствий со связным носителем. Такое базисное множество мы обозначаем* $F_n(B,(X,U))$. *Этот объект «плохой», в том смысле, что соответствия из такого подмножества не попадают в другое такое подмножество под действием отображения замены базы* B *и композиции, но, тем не менее, он обладает пользой для нас.*

Определение 1.1.9. *([GP2, Определения 2.4, 2.5, 2.11, Замечание 2.12]) Внешняя композиция фрейм-соответствий (или линейных фрейм-соответствий) между объектами* Sm/k *определяет категории:*

Fr_* *это категория с объектами* $Ob(Sm/k)$ *и морфизмами*

$$Fr_*(X,Y) = \coprod_{m \geqslant 0} Fr_m(X,Y).$$

Fr_+ *это категория с объектами* $Ob(Sm/k)$ *и морфизмами*

$$Fr_+(X,Y) = \bigvee_{m \geqslant 0} Fr_m(X,Y).$$

$\mathbb{Z}F_*$ *это категория с объектами* $Ob(Sm/k)$ *и морфизмами*

$$\mathbb{Z}F_*(X,Y) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathbb{Z}F_m(X,Y).$$

Фрейм-предпучок это предпучок на категории Fr_+. *Фрейм-предпучок* $\mathcal{F}$ *абелевых групп называется раддитивным, если* $\mathcal{F}(X_1 \coprod X_2) = \mathcal{F}(X_1) \oplus \mathcal{F}(X_2)$.

Это то же, что предпучок $\mathcal{F}$, *приходящий с предпучка на категории* $\mathbb{Z}F_*$.

Нам также понадобится следующее понятие, введенное Воеводским, также приведенное в [GP2].

Определение 1.1.10. *(=[GP2, Определение 2.7]) Fr_+-предпучок $\mathcal{F}$ абелевых групп стабилен, если для любого k-гладкого многообразия X отображение пуллбэка $\sigma_X^* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ совпадает с тождественным, где $\sigma_X = (X \times 0, X \times \mathbb{A}^1, t; pr_X) \in Fr_1(X, X)$. Похожим образом, $\mathcal{F}$ квазистабилен, если для любого k-гладкого многообразия отображение пуллбэка $\sigma_X^* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ это изоморфизм.*

Определение 1.1.11. *Пусть $Shv_\bullet(Sm/k)$ – это категория пунктированных пучков Нисневича на Sm/k. Имеется функтор $spc : SmOp(Fr_0(k)) \to Shv_\bullet(Sm/k)$ переводящий пару (X, U) в фактор пучок Нисневича X/U с отмеченной точкой U/U. Если $U = \emptyset$, то, по определению, $X/U = X_+$.*

Функтор $spc : SmOp(Fr_0(k)) \to Shv_\bullet(Sm/k)$ индуцирует функтор $spc : \Delta^{op}SmOp(Fr_0(k)) \to sShv_\bullet(Sm/k)$ переводящий объект $[n] \mapsto (Y_n, U_n)$ в симплициальный пучок Нисневича $[n] \mapsto (Y_n/U_n)$.

Обозначение 1.1.12. *Для пары, обозначаемой жирным шрифтом для доски, как $\mathbb{B} = (X, U)$, обозначим через ту же букву в обыкновенном шрифте, как B пунктированный фактор-пучок X/U, с отмеченной точкой U/U.*

Замечание 1.1.13. *Каждому гладкому многообразию $X \in Fr_0(k)$ естественным образом соответствует пара $(X, \emptyset) \in SmOp(Fr_0(k))$. Пренебрегая обозначениями, будем эту пару также обозначать через X.*

Это сопоставление задает вложение моноидальных категорий: $(X \times X', \emptyset) = (X, \emptyset) \wedge (X', \emptyset)$.

При таких обозначениях, $spc(X)$ это пучок X_+ в обычном понимании.

Обозначение 1.1.14. *Пара $(\mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m)$ играет особую роль. Обозначим ее через $\mathbb{T}$.*

Замечание 1.1.15. *$spc(\mathbb{T})$ — это пучок $T = \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$, введенный в работе Воеводского и Мореля [MV].*

Для пучка $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ на $Fr_*(k)$ имеется симплициальный пучок $C_*(\mathcal{F})$, равный $U \mapsto \mathcal{F}(\Delta^\bullet \times U)$, где $\Delta^\bullet$– стандартная косимплициальная схема. Следующее ключевое определение дано в [GP, Section 4].

Определение 1.1.16. *Для каждой пары $\mathbb{B} = (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$ зададим $(\mathbb{P}^1, \infty)$-спектр $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})$ следующим образом:*

$$M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B}) = (C_*Fr(-, \mathbb{B}), C_*Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}), C_*Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge 2}) \cdots),$$

где структурные морфизмы — это $C_*(\sigma_n)$, и где $\sigma_n : Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^n) \to \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{n+1}))$ определены в [GP, Section 4].

Имеется канонический морфизм $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектров

$$\varkappa : \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)} B \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B}),$$

заданный тождественным морфизмом $\mathrm{id}_{\mathbb{B}} \in Fr_0(\mathbb{B},\mathbb{B})$. Возьмем фибрантную замену $C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n) \to C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n)_f$ каждого из мотивных пространств в соответствии с инъективной локальной модельной структурой. Мы тогда получим $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектр

$$M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f = (C_*Fr(-,\mathbb{B})_f, C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T})_f, C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^2)_f, \ldots).$$

Заметим, что $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$ – это фибрантная замена $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектра $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})$ в соответствии с поуровневой инъективной локальной модельной структурой на категории $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектров. Пусть

$$\varkappa_f : \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)} B \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B}) \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$$

— это композиция морфизмов.

Чтобы сформулировать третий пункт нижеследующей теоремы, напомним еще одно определение. Для $(\mathbb{P},\infty)$-спектра E пусть $\mathcal{E}$ — это Ω-спектр мотивно стабильно эквивалентный E. Под $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(E)$ имеется ввиду мотивное пространство $\mathcal{E}_0$ (нулевое пространство $(\mathbb{P},\infty)$-спектра $\mathcal{E}$). Если $E = \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\mathcal{X}$ – это $(\mathbb{P}^1,\infty)$-надстроечный спектр пунктированного мотивного пространства $\mathcal{X}$, то мы будем писать $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathcal{X})$, чтобы обозначить $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(E)$.

Теорема 1.1.17. *(ср. [GP, Теорема 4.1]) Пусть X — гладкая k-схема, S — замкнутая подсхема в X, не содержащая целиком компонент связности X. Рассмотрим пару $\mathbb{B} = (X, X - S) \in SmOp(Fr_0(k))$ и соответствующее ей мотивное пространство $B = X/(X - S) \in Shv_\bullet(Sm/k)$. Верно следующее:*

1. *Морфизм $\varkappa_f : \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(B) \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$ это стабильная мотивная эквивалентность $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектров.*

2. *$(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектр $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$ это мотивно фибрантный Ω-спектр. Это означает, что для каждого целого $n \geqslant 0$, каждое мотивное пространство $C_*(Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n))_f$ мотивно фибрантно в мотивной модельной категории Воеводского–Мореля [MV] симплициальных пучков Нисневича, и структурный морфизм*

   $$C_*(Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n))_f \to \Omega_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(C_*(Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}))_f)$$

   это посхемная слабая эквивалентность.

3. Канонический морфизм симплициальных пучков Нисневича

$$C_*Fr(-,(X,X-S))_f \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X/(X-S))$$

является посхемной гомотопической эквивалентностью. В частности, для любого расширения полей конечной степени трансцендентности K/k, канонический морфизм симплициальных множеств

$$C_*Fr(Spec(K),(X,X-S)) \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X/(X-S))(Spec(K))$$

является слабой эквивалентностью.

Кроме того, имеет место следующая Теорема.

Теорема 1.1.18. *Пусть $r > 0$, и $(X, X-S) \in SmOp(Fr_0(k))$ — такая пара, что $codim_{X_i}(S \cap X_i) > r$ в каждой связной (или, что то же самое для k-гладкой схемы, неприводимой) компоненте $X_i \subseteq X$. Тогда симплициальный пучок $C_*Fr(-,(X,X-S))$ локально r-связен в топологии Нисневича.*

Часть (1) Теоремы 1.1.17 доказана в [GP, Подраздел 9.2], даже в большей общности. Часть (3) является прямым следствием частей (1) и (2). Часть (2) требует доказательства в нашем случае и является одним из основных результатов данной диссертации.

Доказательство этой теоремы использует теорию оснащенных мотивов, введенную и разработанную в [GP]. Согласно [GP, Definition 5.2.(2)] функтор оснащенного мотива – это функтор

$$M_{fr} : \Delta^{op}SmOp(Fr_0(k)) \to Sp_{S^1}(k),$$

где $Sp_{S^1}(k)$ –это категория S^1-спектров над категорией пучков Нисневича пунктированных множеств на Sm/k. Напомним, что оснащенный мотив $M_{fr}(\mathbb{B})$ пары $\mathbb{B} = (X,U) \in SmOp(Fr_0(k))$ – это S^1-спектр Сегала

$$M_{fr}(\mathbb{B}) = (C_*Fr(-,\mathbb{B}), C_*Fr(-,\mathbb{B}\otimes S^1), C_*Fr(-,\mathbb{B}\otimes S^2), \ldots),$$

отвечающий Γ-пространству $K \mapsto C_*Fr(-,\mathbb{B}\otimes K) = Fr(\Delta^\bullet \times -, \mathbb{B}\otimes K)$. Внутренний смысл оснащенного мотива $M_{fr}(\mathbb{B})$ пары $\mathbb{B} = (X,U) \in SmOp(Fr_0(k))$ состоит в том, что в мотивной категории $SH_{S^1}(k)$ имеется канонический изоморфизм $\Omega^\infty_{\mathbb{G}}\Sigma^\infty_{\mathbb{G}}\Sigma^\infty_{S^1}(B) \to M_{fr}(\mathbb{B})$ (см. [GP, Introduction]).

Замечание 1.1.19. *В ходе доказательства потребуются следующие категории, функторы и естественные преобразования функторов, введенные в [GP]: симметрические моноидальные категории $SmOp(Fr_0(k))$, $\Delta^{\mathrm{op}}SmOp(Fr_0(k))$, функтор $//$: $SmOp(Fr_0(k)) \to \Delta^{\mathrm{op}}SmOp(Fr_0(k))$, переводящий (X,U) в $X//U$ и его обобщения, взятые из [GP, Section 5] и [GP, Section 8].*

Определение 1.1.20. *Для любого морфизма $f : Y \to Z$ в $Fr_0(k)$ обозначим через $Z//_fY$ симплициальный объект в категории $Fr_0(k)$, являющийся корасслоенным копроизведением в $\Delta^{op}Fr_0(k)$, копределом диаграммы*

$$Z \xleftarrow{f} Y \hookrightarrow Y \otimes I.$$

Здесь для пунктированного множества $(K,*)$ объект $Y \otimes K \in Fr_0(k)$ понимается как в [GP, раздел 8]. Для пунктированного симплициального множества A_*, $Y \otimes A_*$ понимается как симплициальный объект $(Y \otimes A)_n = Y \otimes A_n$. (Определение взято из [GP, раздел 8].)

Замечание 1.1.21. *Для любых $Y, Z \in Fr_0(k)$ имеем: $Z//_fY$ — симплициальная гладкая схема над k.*

Замечание 1.1.22. *Имеется естественный по паре $\mathbb{B} := (X,U) \in SmOp(Fr_0(k))$ морфизм $\alpha_{\mathbb{B}} : X//U \to (X,U) = \mathbb{B}$ в постоянный симплициальный объект $[n] \mapsto (X,U) = \mathbb{B}$ в категории $\Delta^{\mathrm{op}}SmOp(Fr_0(k))$; конструкция $\alpha_{\mathbb{B}}$ дана во введении к [GNP], где он обозначен α.*

Определение 1.1.23. *Если $X \in Sm/k$ и $x \in X$ – k-рациональная точка, то мы пишем $X^{\wedge 1}$ вместо $X//x$. В частности, мы пишем $\mathbb{G}_m^{\wedge 1}$ вместо $\mathbb{G}_m//1$.*

Рассматривая $\Delta^{\mathrm{op}}Fr_0(k)$ как полную подкатегорию в симметрической моноидальной категории $\Delta^{\mathrm{op}}SmOp(Fr_0(k))$, мы можем взять n-ю моноидальную степень $X//x$ для каждого $n > 0$. Мы будем обозначать ее $X^{\wedge n}$. Примером является $\mathbb{G}_m^{\wedge n}$.

В ходе доказательства потребуются утверждения четырех типов:

1. Доказанные ранее утверждения;

2. Утверждения, у которых доказательство переносится с имеющегося случая с несущественными изменениями;

3. Локальная связность пространств вида $C_*Fr(-,(X, X - S))$;

4. Морфизм $\alpha_{(X,U)} : X//U \to (X,U)$ в категории $\Delta^{\mathrm{op}}SmOp(Fr_0(k))$ из Замечания 1.1.22 индуцирует стабильную локальную эквивалентность $M_{fr}(\alpha_{(X,U)}) : M_{fr}(X//U) \to M_{fr}(X,U)$ в категории $Sp_{S^1}(k)$.

Утверждения третьего и четвертого типов составляют основную сложность в доказательстве теоремы 1.1.17.

Ниже приведены утверждения из групп (2)-(4), и некоторые утверждения из группы (1).

1.1.1 Группа 1 — Доказанное ранее

Определение 1.1.24. *(= [GP, Definition 5.2.(1)]) Оснащенный мотив $\mathcal{M}_{fr}(\mathcal{G})$ пунктированного симплициального пучка Нисневича $\mathcal{G}$ — это S^1-спектр Сегала $(C_*\mathcal{F}r(-,\mathcal{G}), C_*\mathcal{F}r(-,\mathcal{G}\wedge S^1), C_*\mathcal{F}r(-,\mathcal{G}\wedge S^2), \ldots)$, ассоциированный с Γ-пространством $K \in \Gamma^{\mathrm{op}} \mapsto C_*\mathcal{F}r(-,\mathcal{G}\wedge K) = \mathcal{F}r(\Delta^\bullet_+ \wedge -, \mathcal{G}\wedge K)$.*

Замечание 1.1.25. *Оснащенный мотив $M_{fr}(\mathbb{B}_\bullet)$ симплициальной пары $\mathbb{B}_\bullet \in \Delta^{op}SmOp(Fr_0(k))$ равен оснащенному мотиву $\mathcal{M}_{fr}(spc(\mathbb{B}_\bullet))$ мотивного пространства $spc(\mathbb{B}_\bullet)$. Априори имеется два функтора*

$$\mathcal{M}_{fr} \circ spc, M_{fr} : \Delta^{op}SmOp(Fr_0(k)) \rightrightarrows Sp_{S^1}(k).$$

Однако они совпадают благодаря Замечанию 1.1.6. Иногда удобно пользоваться одним из них, а иногда другим.

Напомним, что в [GP, Раздел 9.1] для конечно представленного $A \in sShv_\bullet(Sm/k)$ введены канонические морфизмы

$$C_*\mathcal{F}r(L) \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, C_*\mathcal{F}r(L\wedge A)) \text{ и } \mathcal{M}_{fr}(L) \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathcal{M}_{fr}(L\wedge A)). \qquad (1)$$

Они индуцируют морфизмы

$$C_*\mathcal{F}r(L)_f \xrightarrow{\alpha_A} \underline{\mathrm{Hom}}(A, C_*\mathcal{F}r(L\wedge A)_f), \text{ и } \mathcal{M}_{fr}(L)_f \xrightarrow{\alpha_A} \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathcal{M}_{fr}(L\wedge A)_f), \quad (2)$$

где смысл нижнего индекса f для пространств указан в начале статьи, а его смысл в случае S^1-спектров – это взятие поуровневой Nis-локально фибрантной замены в категории обычных S^1-спектров.

Лемма 1.1.26. *(= [GP, Лемма 9.1]) Пусть $u : A \to B$ это мотивная слабая эквивалентность в $sShv_\bullet(Sm/k)$ между конечно представимыми объектами, такая, что индуцированный морфизм $u_* : \mathcal{M}_{fr}(L\wedge A) \to \mathcal{M}_{fr}(L\wedge B)$ это Nis-локально стабильная слабая эквивалентность спектров. Предположим, что фибрантные замены в поуровневой Nis-локальной модельной структуре $\mathcal{M}_{fr}(L)_f, \mathcal{M}_{fr}(L\wedge A)_f, \mathcal{M}_{fr}(L\wedge B)_f$ все являются мотивно фибрантными S^1-спектрами. Тогда $\alpha_A : \mathcal{M}_{fr}(L)_f \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathcal{M}_{fr}(L\wedge A)_f)$ это посхемная стабильная эквивалентность если и только если таковой является $\alpha_B : \mathcal{M}_{fr}(L)_f \to \underline{\mathrm{Hom}}(B, \mathcal{M}_{fr}(L\wedge B)_f)$.*

Следствие 1.1.27. *(= [GP, Следствие 7.5]) Пусть k это бесконечное совершенное поле, а Y — симплициальный объект в $SmOp(Fr_0(k))$. Предположим, что симплициальный пучок Нисневича $C_*Fr(Y)$ локально связен в топологии Нисневича. Пусть $M_{fr}(Y) \to M_{fr}(Y)_f$ это фибрантная замена в поуровневой инъективной модельной структуре на обыкновенных пучках S^1-спектров. Тогда:*

1. *$M_{fr}(Y)_f$ фибрантен в стабильной инъективной мотивной модельной категории S^1-спектров;*

2. *Для любого $n \geqslant 0$ и любой фибрантной замены $C_*(Fr(-, Y \otimes S^n)) \to C_*(Fr(-, Y \otimes S^n))_f$ в $sShv_\bullet(Sm/k)$, пространство $C_*(Fr(-, Y \otimes S^n))_f$ мотивно фибрантно в $sShv_\bullet(Sm/k)$.*

1.1.2 Группа 2 — Переносящееся без изменений

Пусть $\mathbb{B} \in SmOp(Fr_0(k))$. Рассмотрим коммутативную диаграмму в $\Delta^{\mathrm{op}} Fr_0(k)$ (= [GP, стр. 33 Формула (12)]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbb{G}_m^{\wedge 1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{A}^{\wedge 1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^{\wedge 1}//\mathbb{G}_m^{\wedge 1} \arrow[d, "\beta"] \\
\mathbb{G}_m^{\wedge 1} \arrow[r] & \emptyset \arrow[r] & \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Она индуцирует морфизм фрейм-мотивов

$$\beta_* \alpha_* : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1), \quad n \geqslant 0,$$

Теорема 1.1.28. *(ср. [GP, Теорема 8.2]) Морфизм $\beta_* \alpha_*$ это Nis-локально стабильная слабая эквивалентность S^1-спектров, если $char(k) \neq 2$.*

1.1.3 Группа 3 — Локальная связность

Определение 1.1.29. *Назовем пару $\mathbb{B} = (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$ связной, если U пересекает каждую связную (=неприводимую) компоненту X по непустому подмножеству.*

Замечание 1.1.30. *В случае $k = \mathbb{C}$, пара (X, U) связна тогда и только тогда, когда пара топологических многообразий (X^{an}, U^{an}) связна в общепринятом топологическом смысле.*

Пример 1.1.31. *Для любой пары* $\mathbb{B}$ *и* $n \geqslant 1$, *пара* $\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n}$ *связна.*

Предложение 1.1.32. *Для любого целого* $n \geqslant 0$ *и любой связной пары* $\mathbb{B} = (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$ *пространства*

$$C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n}), C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)), C_*(Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1))$$

локально связны в топологии Нисневича.

Отсюда имеем:

Предложение 1.1.33. *Пусть* $E \mapsto E_f$ *это фибрантная замена в поуровневой инъективной модельной структуре на обыкновенных пучках* S^1*-спектров. Для каждого натурального* $n \geqslant 0$ *и каждой связной пары* $\mathbb{B} = (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$, S^1*-спектры*

$$M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f, M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1)_f \text{ и } M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m))_f$$

фибрантны в стабильной инъективной мотивной модельной категории S^1*-спектров. В частности, они являются фибрантными заменами в стабильной* Nis*-локальной модельной структуре.*

Кроме того, для связных пар $\mathbb{B}$ *мотивные пространства*

$$C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f, C_*(Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1))_f \text{ и } C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m))_f$$

мотивно фибрантны в мотивной модельной структуре Мореля-Воеводского на $sShv_\bullet(Sm/k)$.

1.1.4 Группа 4 — Теорема о конусе

Теорема 1.1.34. *(ср. [GNP, Теорема 1.1]) Пусть* $char(k) \neq 2$. *Пусть* $S \subset X$ *— замкнутая подсхема* k*-гладкой схемы. Положим* $U = X - S$ *и обозначим пару* (X, U) *через* $\mathbb{B} \in SmOp(Fr_0(k))$, *а пару* $(\mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m)$ *через* $\mathbb{T}$. *Рассмотрим морфизмы* $\alpha_{\mathbb{B}} : (X//U) \to \mathbb{B}$ *и* $\alpha_{\mathbb{T}} : (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m) \to \mathbb{T}$ *в категории* $\Delta^{op}Fr_0(k)$ *из Замечания 1.1.22. Для любого* $n \geqslant 0$ *рассмотрим морфизм*

$$\alpha_{\mathbb{B}} \wedge \alpha_{\mathbb{T}}^{\wedge n} : (X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n} \to \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n},$$

определенный как в [GNP, Introduction]. Тогда индуцированный морфизм

$$M_{fr}(\alpha_{\mathbb{B}} \wedge \alpha_{\mathbb{T}}^{\wedge n}) : M_{fr}((X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n}) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})$$

Nis*-локально является стабильной слабой эквивалентностью* S^1*-спектров.*

Следствие 1.1.35. *(ср. [GNP, Следствие 8.1]) В условиях и обозначениях теоремы 1.1.34 для каждого* $n \geqslant 0$ *и каждого* $\mathbb{B} \in SmOp(Fr_0(k))$ *морфизм*

$$M_{fr}(id_{\mathbb{B}} \wedge id_{\mathbb{T}}^{\wedge n} \wedge \alpha_{\mathbb{T}}) : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})$$

это Nis*-локально стабильная слабая эквивалентность* S^1*-спектров.*

1.1.5 Вывод основной теоремы

Вывод теоремы 1.1.17. Заметим, что пара $\mathbb{B}$ из теоремы 1.1.17 связна в смысле Определения 1.1.29. По Предложению 1.1.33, для каждого целого $n \geqslant 0$, S^1-спектр $M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f$ мотивно фибрантен, и мотивное пространство $C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f$ мотивно фибрантно. Пусть $u : (\mathbb{P}^1, \infty) \to T$ это каноническая мотивная слабая эквивалентность в $sShv_\bullet(Sm/k)$. Рассмотрим индуцированный морфизм мотивных пространств

$$u^* : \underline{\mathrm{Hom}}(T, C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f) \to \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f).$$

Воспользуемся теперь морфизмами a_T и α_T, определенными перед леммой 1.1.26. А именно, по [GP, Лемма 9.3], морфизм

$$u^* \circ a_T : C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \to \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f)$$

это посхемная слабая эквивалентность тогда и только тогда, когда морфизм $\alpha_T : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \to \underline{\mathrm{Hom}}(T, M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f)$ это посхемная стабильная эквивалентность спектров.

Рассмотрим следующий домик в категории $\Delta^{op}SmOp(Fr_0(k))$:

$$\mathbb{T} \leftarrow (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m) \to \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1,$$

где правая стрелка равна $\beta\alpha$, определенному в (3). Его стрелки превращаются в слабые мотивные эквивалентности при применении функтора spc.

По Предложению 1.1.33, для каждого натурального $n \geqslant 0$, S^1-спектры

$$M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1)_f, M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m))_f$$

мотивно фибрантны, а

$$C_*(Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1))_f, C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m))_f$$

это мотивно фибрантные пространства. По Следствию 1.1.35

$$M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})$$

является Nis-локально стабильной слабой эквивалентность спектров. По Теореме 1.1.28,

$$M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge {\mathbb{G}_m}^{\wedge 1} \otimes S^1)$$

это Nis-локальная стабильная эквивалентность спектров. По Лемме 1.1.26,

$$\alpha_T : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \to \underline{\mathrm{Hom}}(T, M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f)$$

это посхемная стабильная эквивалентность спектров тогда и только тогда, когда морфизм спектров

$$\alpha_{\mathbb{G}_m{}^{\wedge 1}\otimes S^1} : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \to \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1), M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^n \wedge \mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1)_f).$$

это посхемная стабильная эквивалентность спектров. Обозначим временно $X//U$ через $c(\mathbb{B})$, $\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m$ через $c(\mathbb{T})$ и рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
M_{fr}(c(\mathbb{B}) \wedge c(\mathbb{T})^{\wedge n})_f \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{G}_m{}^{\wedge 1}\otimes S^1}"] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1), M_{fr}(c(\mathbb{B}) \wedge c(\mathbb{T})^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1)_f) \arrow[d] \\
M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{G}_m^{\wedge 1}\otimes S^1}"] & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1), M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1)_f)
\end{tikzcd},$$

где нижний индекс f означает взятие стабильной Nis-локально фибрантной замены обыкновенных спектров, а $c(\mathbb{T})^{\wedge n} = (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n} \in \Delta^{op}Fr_0(k)$ построено в Определении 1.1.23.

Из Теоремы 1.1.34 и Замечания 1.1.36 ниже следует, что левая вертикальная стрелка это посхемная стабильная слабая эквивалентность спектров, значит, также и правая стрелка. Значит, нижняя стрелка является посхемной стабильной слабой эквивалентностью спектров в том и только в том случае, когда ей является верхняя. Но верхняя — это посхемная стабильная слабая эквивалентность по теореме Сокращения для фрейм-мотивов алгебраических многообразий [AGP, Theorem A], примененной совместно с [GP, Теорема 6.5]. Итак, морфизм α_T, а вместе с ним и морфизм $u^* \circ a_T$ являются мотивными эквивалентностями. □

Замечание 1.1.36. *Пусть $A_f \to B_f$ это слабая эквивалентность между фибрантными объектами в стабильной инъективной локальной модельной структуре на S^1-спектрах симплициальных пучков на Sm/k. Тогда это посхемная стабильная эквивалентность S^1-спектров.*

Действительно, простая проверка свойства поднятия показывает, что гомотопический слой морфизма $A_f \to B_f$ фибрантен. Он также (локально) слабо эквивалентен точке $*$. Применим свойство подъема этого слабого расслоения к корасслоениям $B \otimes S^m \to B \otimes (S^m \wedge I_*)$, где I_* это пунктированный отрезок. Свойство подъема показывает, что пространство гомотопического слоя не имеет гомотопических групп над произвольной схемой B.

Ниже докажем утверждения из групп (3) и (4).

1.2 Сведение Теоремы 1.1.34 к линейной Теореме о Конусе

Следующая теорема обобщает [GNP, Теорема 1.2].

Теорема 1.2.1. *Пусть $char(k) \neq 2$. Для любой пары $\mathbb{B} \in SmOp(Fr_0(k))$, следующий естественный морфизм фрейм-S^1-спектров является посхемной стабильной эквивалентностью:*

$$\lambda_{\mathbb{B}} : \mathbb{Z}\,\mathrm{Fr}_*^{S^1}(\mathbb{B}) \to EM(\mathbb{Z}\mathrm{F}_*(-, \mathbb{B})).$$

Более того, естественный морфизм фрейм-S^1-спектров

$$l_{\mathbb{B}} : \mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}) \to LM_{fr}(\mathbb{B})$$

это посхемная стабильная эквивалентность. В частности, для каждого $U \in Sm/k$ верно

$$\pi_*(\mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B})(U)) = H_*(\mathbb{Z}\mathrm{F}(\Delta^\bullet \wedge U, \mathbb{B})) = H_*(C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(U, \mathbb{B})).$$

Обозначения, используемые в этой формулировке, вводятся аналогично [GNP, Раздел 8].

Доказательство. Рассуждения [GNP, Дополнение B] переносятся без изменений на ситуацию произвольной гладкой пары $\mathbb{B}$ вместо $X \wedge \mathbb{T}^{\wedge n}$. □

Выведем Теорему 1.1.34 из Теоремы 1.3.1 ниже.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. База — случай $n = 0$. По Теореме 1.3.1, морфизм комплексов предпучков абелевых групп

$$C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(X)/C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(X - S) \to C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}) \tag{4}$$

это локальный квазиизоморфизм.

Из [GNP, Раздел 8], S^1-спектры

$$LM_{fr}(X), LM_{fr}(X - S) \text{ и } LM_{fr}(\mathbb{B})$$

это S^1-спектры Эйленберга—Маклейна комплексов $C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(X)$, $C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(X-S)$ и $C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B})$ соответственно. Поэтому морфизм

$$LM_{fr}(X)/LM_{fr}(X - S) \to LM_{fr}(\mathbb{B}),$$

индуцированный (4), это локальная стабильная слабая эквивалентность, и значит ей является морфизм

$$\mathbb{Z}M_{fr}(X)/\mathbb{Z}M_{fr}(X-S)\to\mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}),$$

по Теореме 1.2.1. S^1-спектры $M_{fr}(X)$, $M_{fr}(X-S)$, $M_{fr}(\mathbb{B})$ (-1)-связны, поскольку являются спектрами Сегала (см. [GP, Определение 5.2], [Seg, Предложение 1.4]).

Стабильная теорема Уайтхеда [Sch, II.6.30] означает, что морфизм

$$M_{fr}(X)/M_{fr}(X-S)\to M_{fr}(\mathbb{B}) \tag{5}$$

это локальная стабильная слабая эквивалентность.

База индукции доказана, перейдем к доказательству перехода индукции $n\to n+1$.

$$C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)/C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)\to C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}) \tag{6}$$

это локальный квазиизоморфизм, по Теореме 1.3.1.

Из [GNP, Раздел 8] (Или по аналогичному рассуждению для последнего спектра), S^1-спектры

$$LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1), LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m) \text{ и } LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1})$$

это S^1-спектры Эйленберга—Маклейна комплексов

$$C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1), C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m) \text{ и } C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1})$$

соответственно. Поэтому морфизм

$$LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)/LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)\to LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}),$$

индуцированный (6), это локальная стабильная слабая эквивалентность, и значит, ей же является и морфизм

$$\mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)/\mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)\to\mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}),$$

по Теореме 1.2.1.

S^1-спектры $M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)$, $M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)$, $M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1})$ (-1)-связны, поскольку являются спектрами Сегала (см. [GP, Определение 5.2], [Seg, Предложение 1.4]).

По стабильной теореме Уайтхеда [Sch, II.6.30], морфизм

$$M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)/M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)\to M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}) \tag{7}$$

это локальная стабильная слабая эквивалентность. Рассмотрим следующую последовательность естественных морфизмов

$$M_{fr}((X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n+1}) = M_{fr}((X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)) \xrightarrow{(i)}$$
$$Cone[M_{fr}((X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m) \to M_{fr}((X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n} \wedge \mathbb{A}^1)] \xrightarrow{(ii)}$$
$$Cone[M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{A}^1)] \xrightarrow{(iii)}$$
$$M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{A}^1)/M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m) \xrightarrow{(iv)} M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1}).$$

Стрелки (i) и (iii) являются посхемными стабильными слабыми эквивалентностями по стандартным рассуждениям. Стрелка (ii) это локальная стабильная слабая эквивалентность по предположению индукции. Стрелка (iv) это в точности морфизм (7), значит, это локальная стабильная слабая эквивалентность.

Значит, для всех $\ell \geqslant 0$, канонический морфизм

$$M_{fr}((X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge \ell}) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\ell}) \tag{8}$$

это локальная стабильная слабая эквивалентность.

□

По аналогии с [GNP, Следствие 8.1], из данной теоремы получаем Следствие 1.1.35 (в действительности, используется аналог теоремы для симплициальных пар).

1.3 Линейная теорема о конусе.

В данном разделе изложен план доказательства следующей Теоремы.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\mathbb{B} = (X, U), \mathbb{M} = (X', U')$ *— пары, объекты* $SmOp(Fr_0(k)$. *Тогда последовательность*

$$C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge U) \to C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge X) \to C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$$

включается в выделенный треугольник в производной категории пучков Нисневича.

Доказательство. Выведем Теорему из Предложения 1.3.2 ниже. Доказательство Предложения завершается в Разделе 1.5.

Пусть $X = \bigcup X_i$ это аффинное покрытие схемы X. Занумеруем элементы покрытия ординалами. Докажем Теорему для $\mathbb{B} = (\bigcup\limits_{i \leqslant k} X_i, U \cap \bigcup\limits_{i \leqslant k} X_i), \mathbb{M} = (X', U')$ трансфинитной индукцией по k.

Поскольку для равенства пучков достаточно показать совпадение на аффинных гладких схемах (которые квазикомпактны), трансфинитный переход индукции достигается переходом к фильтрованному копределу комплексов абелевых групп (что является точным функтором). База индукции $k = 0$ это утверждение Предложения 1.3.2. Докажем переход индукции $k \to k+1$.

Введем временные краткие обозначения

$$F_k = \bigcup_{i \leqslant k} X_i, C_\bullet(\mathbb{B}) = C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, Q \wedge \mathbb{B}).$$

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet(U \cap F_k \cap X_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & C_\bullet(F_k \cap X_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & C_\bullet(F_k \cap X_{k+1}, U \cap F_k \cap X_{k+1}) \arrow[d] \\
C_\bullet(U \cap F_k) \oplus C_\bullet(U \cap X_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & C_\bullet(F_k) \oplus C_\bullet(X_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & C_\bullet(F_k, U \cap F_k) \oplus C_\bullet(X_{k+1}, U \cap X_{k+1}) \arrow[d] \\
C_\bullet(U \cap F_{k+1}) \arrow[r] & C_\bullet(F_{k+1}) \arrow[r] & C_\bullet(F_{k+1}, U \cap F_{k+1})
\end{tikzcd} .$$

Ее столбцы это треугольники Майера-Виеториса, которые выделены по Предложению 1.7.1. Первая строка выделена по Предложению 1.3.2, примененному к квазиаффинной схеме $F_k \cap X_{k+1}$. Вторая строка это прямая сумма треугольника, выделенного по предположению индукции, и треугольника, выделенного по Предложению 1.3.2, примененному к аффинной схеме X_{k+1}. Следовательно, третья строка также выделена; тем самым, переход индукции $k \to k+1$ доказан.

$\square$

Предложение 1.3.2. *Пусть* $\mathbb{B} = (X, U), \mathbb{M} = (X', U')$ *это пары, объекты* $SmOp(Fr_0(k)$.

Предположим, что схема X *квазиаффинна.*

Тогда последовательность

$$C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge U) \to C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge X) \to C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$$

включается в выделенный треугольник в производной категории пучков Нисневича абелевых групп.

Далее (до Раздела 1.6) будем считать схему X квазиаффинной.

Обозначим $S = X - U, S' = X' - U'$. $S = X - U$ можно задать как множество нулей некоторых функций $f_1, \cdots, f_n \in k[X]$. Зафиксируем такой набор функций. Теперь наши объекты удовлетворяют следующим условиям:

Условия 1.3.3. *$\mathbb{B} = (X, U), \mathbb{M} = (X', U') \in SmOp(Fr_0(k))$ это пары гладких схем; $S = X - U, S' = X' - U'$ (необязательно гладкие); выбраны такие $f_1, \dots f_n \in k[X]$, что $S = V(f_1, \dots, f_n)$.*

Определение 1.3.4. *В Условиях 1.3.3, $Fr_m^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ это подмножество в $Fr_m(B, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$, состоящее из классов, содержащих такие явные соответствия (Z, W, φ, g), что $\{\varphi = 0\} \cap g^{-1}(S' \times \{f_1 = 0, \cdots f_k = 0\}) \subset W$ квазиконечно над B.*

Замечание 1.3.5. *Свойство явных фрейм-соответствий, описанное в Определении 1.3.4 выше, не сохраняется при переходе к эквивалентному фрейм-соответствию. Уменьшение W может сделать множество $\{\varphi = 0\} \cap g^{-1}(S' \times \{f_1 = 0, \cdots f_k = 0\}) \subset W$ меньше, и оно может стать квазиконечным над B, даже не будучи таковым ранее. В то же время, если оно было квазиконечным, то останется таковым и после уменьшения W.*

Отсюда, перенося аналогичные конструкции для фрейм-соответствий, можно ввести

- $Fr^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$;
- $F_m^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$;
- $F^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$;
- $\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$;
- $\mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$;
- $C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$.

Из определения ясно, что $Fr_m^{qf,n}(B, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) = Fr_m(B, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$.

$Fr_m^{qf,0}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ не зависит от $f_1, \cdots f_n$, а лишь от их общих нулей S. Поэтому обозначим его отдельно.

Определение 1.3.6. *$Fr_m^{qf}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B})$ это подмножество в $Fr_m(B, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$, состоящее из классов, содержащих такие соответствия (Z, W, φ, g), что $\{\varphi = 0\} \cap g^{-1}(S' \times X) \subset W$ квазиконечно над B.*

Доказательство Предложения 1.3.2 разбивается на два шага.

Доказательство. Утверждение Предложения следует из Теорем 1.3.7 и 1.3.8 ниже. □

Теорема 1.3.7. *Пусть* $\mathbb{B} = (X, U), \mathbb{M} = (X', U')$ *— пары, объекты* $SmOp(Fr_0(k)$. *Тогда последовательность*

$$C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge U) \to C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, \mathbb{M} \wedge X) \to C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B})$$

является точной локально в топологии Нисневича.

Доказательство. Доказательство пререносится без изменений со случая $\mathbb{B} = (\mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m)$, доказанного в [GP, Раздел 5]. □

Теорема 1.3.8. *В Условиях 1.3.3, пусть* B *—* k*-гладкая аффинная схема. Если* i *— вложение* $Fr^{qf}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}) \hookrightarrow Fr(B, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$, *то*

$$C_*\mathbb{Z}i : C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}) \hookrightarrow C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(B, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$$

— квазиизоморфизм.

Построенные нами множества $Fr^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots, f_n)$ позволяют разбить i в композицию $i_k : Fr^{qf,k-1}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots, f_n) \hookrightarrow Fr^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots, f_n)$. Поэтому достаточно будет доказать, что $C_*\mathbb{Z}i_k$ — квазиизоморфизм. Это происходит в Разделе 1.5.

1.4 Фильтрации $(\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k})^{<d}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ и $(\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1})^{<d,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$

Определение 1.4.1. *Пусть* $B \in Sm(k)$ *аффинна, и* $c = (Z, W, \varphi, g) \in Fr_m^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$. *Набор многочленов* $F_1, \cdots F_r \in k[B] \times \mathbb{A}^{m+1}$ *называется* c*-определяющим, если для каждой точки* $b \in B$ *найдется* $i \in \{1, \cdots, r\}$, *такой, что:*

- $F_i(-, u) \neq 0 \in k(u)[\mathbb{A}^{n+1}]$;
- $(\varphi, f_k \circ g)(W_u) \subseteq Z(F_i(-, u))$.

Лемма 1.4.2. *(ср. [GNP, Следствие 6.3])*

Пусть $B \in Sm(k)$ *аффинна, и* $c = (Z, W, \varphi, g) \in Fr_m^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$. *Тогда существует* c*-определяющий набор* $F_1, \cdots F_r$.

Более того, если $f{:}B' \to B$ *— морфизм аффинных* k*-гладких схем, то* $f^*F_1, \cdots f^*F_r$ *—* $f^*(c)$*-определяющий набор.*

Доказательство. Первое утверждение получается применением [GNP, Лемма 6.2] к случаю $Y = B, n = 0, \psi = (\varphi, f_k \circ g)$.

Второе утверждение очевидно из определений. □

Определение 1.4.3. *Для* $d \in \mathbb{N}$, $(Fr_m^{qf,k})^{<d}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ — *подмножество в* $Fr_m^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$, *состоящее из таких соответствий* c, *для которых существует* c*-определяющий набор, в котором степени всех многочленов* F_i *меньше* d.

$(Fr_m^{qf,k-1})^{<d,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ — *множество*

$$Fr_m^{qf,k-1}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) \cap (Fr_m^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n))^{<d}.$$

Лемма 1.4.4. *Для любых* $m, k \geqslant 0$ *и* $d > 0$, *верно следующее:*

(i) $(Fr_m^{qf,k})^{<d}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ *это подпредпучок на* $AffSm/k$ *предпучка* $Fr_m^{qf,k}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$*;*

(ii) Возрастающая фильтрация предпучка $Fr_m^{qf,k}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)|_{AffSm/k}$ *подпредпучками* $(Fr_m^{qf,k})^{<d}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ *является исчерпывающей;*

(iii) $(Fr_m^{qf,k-1})^{<d,k}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ *это подпредпучок на* $AffSm/k$ *предпучка* $Fr_m^{qf,k-1}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$*;*

(iv) Возрастающая фильтрация предпучка $Fr_m^{qf,k-1}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)|_{AffSm/k}$ *подпредпучками* $(Fr_m^{qf,k-1})^{<d,k}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ *является исчерпывающей.*

Ожидаемым образом определяются подгруппы

$$(\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k})^{<d}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) \leqslant \mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$$

и

$$(\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1})^{<d,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) \leqslant \mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n).$$

Следствие 1.4.5. *Верны следующие равенства предпучков на* $AffSm/k$

$$\mathrm{colim}_d(\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k})^{<d}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) = \mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$$

и

$$\mathrm{colim}_d(\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1})^{<d,k}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) = \mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1}(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n).$$

1.5 Лемма о смещении

Замечание 1.5.1. *Пусть* $c = (Z, W, \varphi; g) \in Fr_m^{qf,k}(B, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$. *Пусть* π — *композиция* $W \to \mathbb{A}_B^m \to B$. *Тогда морфизм*

$$(\pi, \varphi, f_1 \circ pr_2 \circ g, \cdots, f_k \circ pr_2 \circ g)|_{g^{-1}(S' \times X}: g^{-1}(S' \times X) \to B \times \mathbb{A}^{m+k}$$

квазиконечен над $B \times 0$, *поэтому, по полунепрерывности размерности слоев на области определения морфизма, после уменьшения* W, *можно считать его квазиконечным морфизмом. В дальнейшем будем предполагать это.*

Пусть $c \in Fr_m^{qf,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots, f_n)$. Введем гомотопию $h_d^k(c) \in Fr_m(B \times \mathbb{A}^1, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$:

$$h_d(c) := (Z \times \mathbb{A}^1, W \times \mathbb{A}^1, \varphi_1 - s(f_k \circ g)^d, \varphi_2 - s(f_k \circ g)^{d^2}, \cdots \varphi_m - s(f_k \circ g)^{d^m}; g).$$

Обозначим $t_d^k = h_d^k \circ in_1$, где in_1 — вложение 1 в $\mathbb{A}^1$.

Лемма 1.5.2. *Если* $B \in AffSm/k$, *то верно следующее:*

(i) Если $c \in (Fr_m^{qf,k})^{<d}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \dots f_n)$, *то* $t_d^k(c) \in Fr_m^{qf,k-1}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$;

(ii) Если $c \in (Fr_m^{qf,k-1})^{<d,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$, *то* $h_d^k(c) \in Fr_m^{qf,k-1}(B \times \mathbb{A}^1, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $c = (Z, W, \varphi; g) \in (Fr_m^{qf,k})^{<d}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \dots f_n)$. Пусть $F_1, \dots F_r \in k[\mathbb{A}_U^{m+1}]$ это c-определяющий набор с $\deg F_i < d$ для каждого $i = 1, \dots, r$. Необходимо проверить, что $t_d^k(c)$ лежит в $Fr_m^{qf,k-1}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$. Обозначим кратко $\tilde{f}_k = f_k \circ pr_2 \circ g$. Зададим

$$\begin{array}{c} Y \\ \| \\ Z(\varphi_1 - (\tilde{f}_k)^d, \varphi_2 - (\tilde{f}_k)^{d^2}, \dots \varphi_m - (\tilde{f}_k)^{d^m}, f_1 \circ pr_2 \circ g, \dots, f_{k-1} \circ pr_2 \circ g) \cap g^{-1}(S' \times X) \\ \big\downarrow \\ W. \end{array}$$

(загнутая стрелка здесь обозначает включение в виде подмножества). Необходимо проверить, что для каждой точки $b \in B$ слой $Y(b)$ Y над b конечен. Пусть

$\theta : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^{m+1}$ это морфизм, отправляющий точку t в точку $(t^d, t^{d^2}, ..., t^{d^m}, t)$. Это замкнутое вложение с образом $C = \theta(\mathbb{A}^1)$.

По Замечанию 1.5.1, морфизм

$$\psi = (\pi, \varphi, f_1, \cdots, f_k)|_{g^{-1}(S' \times X)}$$

квазиконечен. Для точки $b \in B$ найдется полином F из c-определяющего множества, такой, что $F(-, b)$ ненулевой, и его нули $Z(F(-, b))$ в $\mathbb{A}^{m+1}_b$ содержат $(\varphi, f_k \circ pr_2 \circ g)(W(b))$. Последнее условие эквивалентно требованию того, чтобы для полинома $\widetilde{F} \in k[x_1, \dots x_{m+k}]$, определенного как

$$\widetilde{F}(x_1, \dots x_{m+k}) = F(x_1, \dots, x_m, x_{m+k}),$$

$$Z(\widetilde{F}) \supseteq \psi\big(W(b)\big).$$

Ясно, что $Y(b)$ содержится в

$$\psi^{-1}(Z(\widetilde{F}(-, b)) \cap C).$$

$Z(\widetilde{F}(-, b)) \cap C$ изоморфно схеме нулей полинома $F(t^d, t^{d^2}, ..., t^{d^{m+n}}, t)$ на прямой $\mathbb{A}^1$ с координатой t. По [GNP, Лемма 7.1] множество $Z(F(-, b)) \cap C$ конечно, а значит и $Y(b)$. Первое утверждение доказано.

Проверим второе утверждение. Пусть

$$c = (Z, W, \varphi; g) \in (Fr_m^{qf,k-1})^{<d,k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n),$$

и пусть $F_1, \dots F_r \in k[\mathbb{A}_U^{m+n+1}]$ это c-определяющее множество, с $\deg F_i < d$ для всех $i = 1, \dots, r$. Необходимо проверить, что $h_d^k(c)$ лежит в $Fr_m^{qf,k-1}(B \times \mathbb{A}^1, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$. Обозначим кратко $\tilde{f}_k = f_k \circ pr_2 \circ g$. Зададим

$$\begin{array}{c} Y_s \\ \| \\ Z(\varphi_1 - s(\tilde{f}_k)^d, \varphi_2 - s(\tilde{f}_k)^{d^2}, \dots \varphi_m - s(\tilde{f}_k)^{d^m}, f_1, \dots, f_{k-1}) \cap g^{-1}(S' \times X) \\ \big\downarrow \\ W \times \mathbb{A}^1, \end{array}$$

где s это координата на добавленном сомножителе $\mathbb{A}^1$. (Изогнутая стрелка здесь означает включение в виде подмножества) Необходимо проверить, что для каждой точки $v \in B \times \mathbb{A}^1$ слой $Y_s(v)$ Y_s над v конечен. Обозначим образ координаты s в $k(v)$ через a.

Пусть $\theta_a : \mathbb{A}^1_{k(v)} \to \mathbb{A}^{m+1}_{k(v)}$ это морфизм, отправляющий точку t в $(at^d, at^{d^2}, ..., at^{d^m}, t)$. Это замкнутое вложение с образом $C_a = \theta_a(\mathbb{A}^1)$. В частности, для $a = 0$, $\theta_0 : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^{m+1}$ это морфизм, отправляющий точку t в $(0, 0, ..., 0, t)$. Это замкнутое вложение с образом $C_0 = \theta_0(\mathbb{A}^1)$. Это последняя координатная ось $\mathbb{A}^1_{m+1}$ в $\mathbb{A}^{m+1}$. По Замечанию 1.5.1 морфизм

$$\psi = (\pi, \varphi, f'_1, \cdots, f'_{n'}, f_1, \cdots, f_k)|_{g^{-1}(S' \times X)}$$

квазиконечен. Для точки $b = pr_1(v) \in U$ есть полином F из c-определяющего набора, такой, что $F(-, b)$ ненулевой, и его нули $Z(F(-, b))$ в $\mathbb{A}^{m+1}_b$ содержат $\psi(W(b))$. Для данного $0 \neq a \in k(v)$ схема $Y_a(b)$ содержится в схеме

$$\psi^{-1}(Z(F(-, b)) \cap C_a).$$

Схема $Z(F(-, b)) \cap C_a)$ изоморфна схеме нулей полинома $F(at^d, at^{d^2}, ..., at^{d^m}, t)$ на прямой $\mathbb{A}^1$ с координатой t. Поэтому по [GNP, Лемма 7.1] множество $Z(F(-, b)) \cap C_a)$ конечно в этом случае, а значит, и $Y_a(b)$.

Для $a = 0$, множество $Y_0(b)$ совпадает с замкнутым подмножеством $Z(\varphi_1, ..., \varphi_m, f_1, \ldots, f_{k-1}) \cap g^{-1}(S' \times X)$ в W. Оно квазиконечно над U, потому что $c = (Z, W, \varphi; g) \in (Fr^{qf,k-1}_m)^{<d,k}(B, Q, P; f_1, \cdots f_n)$. Тем самым, второе утверждение доказано. $\square$

Предложение 1.5.3. *Для любых целых $m, k \geqslant 0$, морфизм*

$$C_* In^k : C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf,k-1}_m(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) \to C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf,k}_m(-, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$$

комплексов предпучков абелевых групп это посхемный квазиизоморфизм на категории $AffSm/k$.

Доказательство. После применения комплекса Суслина C_* к Следствию 1.4.5 и взятия l-ых когомологий имеем диаграмму копредела

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] \\
H^l\Big((C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1})^{<d-1,k}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddd, bend right] & H^l\Big((C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k})^{<d-1}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big) \arrow[d] \arrow[ddd, bend left] \\
H^l\Big((C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1})^{<d,k}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & H^l\Big((C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k})^{<d}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big) \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
\cdots & \cdots \\
H^l\Big(C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big) \arrow[r] & H^l\Big(C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big).
\end{tikzcd}$$

Также из Леммы 1.5.2, и гомотопической инвариантности когомологий комплекса Суслина, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^l\Big((C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1})^{<d,k}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big) \arrow[r, "H^l(C_*In_d^k)"] \arrow[d, "H^l(C_*J_d^k)"] & H^l\Big((C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k})^{<d}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big) \arrow[d, "H^l(C_*I_d^k)"] \arrow[dl, "H^l(C_*T_d^k)"'] \\
H^l\Big(C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big) \arrow[r, "H^l(C_*In^k)"] & H^l\Big(C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k}(-,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\Big)
\end{tikzcd}.$$

Поскольку морфизмы предпучков определяются образами конкретных сечений, из этого следует, что $H^l(C_*In^k)$ — изоморфизм. Действительно, каждый класс

$$c \in H^l\left(C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k}(B,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\right)$$

лежит в образе некоторого $H^l(C_*I_d^k)$. Но тогда, из коммутативности диаграммы, оно и в образе $H^l(C_*In^k)$. Для инъективности, пусть

$$c \in H^l\left(C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1}(B,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\right),$$

и $H^l(C_*In^k)(c) = 0$. Существует

$$\tilde{c} \in H^l\left((C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}_m^{qf,k-1})^{<d,k}(B,\mathbb{M},\mathbb{B};f_1,\cdots f_n)\right),$$

такой, что $c = H^l(C_*J_d^k)(\tilde{c})$. Поскольку

$$H^l(C_*I_d^k)\circ H^l(C_*In_d^k)(\tilde{c}) = 0,$$

то, переходя к достаточно большому d, можно считать, что $H^l(C_*In^k_d)(\tilde{c}) = 0$. Но тогда

$$c = H^l(C_*T^k_d) \circ H^l(C_*In^k_d)(\tilde{c}) = 0.$$

Поскольку l может быть любым, рассуждение выше доказывает, что C_*In^k — квазиизоморфизм. $\square$

Теперь можно доказать Теорему 1.3.8.

Доказательство. Имеем цепочку

$$\begin{tikzcd}
C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}) \arrow[d, equal] \arrow[dddddd, bend right=60, "C_*\mathbb{Z}i"'] \\
C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf,0}_m(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) \arrow[d, "C_*In^1"] \\
C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf,1}_m(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) \arrow[d, "C_*In^2"] \\
\cdots \arrow[d, "C_*In^n"] \\
C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}^{qf,n}_m(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n) \arrow[d, equal] \\
C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(B, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B}).
\end{tikzcd}$$

В ней все морфизмы C_*In^k — квазиизоморфизмы по Предложению 1.5.3, поэтому их композиция $C_*\mathbb{Z}i$ тоже квазиизоморфизм.

$\square$

В дальнейшем нам понадобится еще один вариант moving-леммы. Чтобы сформулировать его, индуктивно определим еще один объект.

Определение 1.5.4. *Для* $d_1, \dots d_k \in \mathbb{N}$, $(Fr^{qf,k}_m)^{<d_1,\dots,<d_k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$*— подмножество в* $(Fr^{qf,k}_m)^{<d_k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$*, состоящее из таких соответствий* c*, для которых* $t_{d_k}(c) \in (Fr^{qf,k-1}_m)^{<d_1,\dots,<d_{k-1}}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$.

При $k > 1$, $(Fr^{qf,k}_m)^{<d_1,\dots,<d_k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ могут не быть вложены друг в друга, но в объединении они дают множество $Fr^{qf,k}_m(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$.

Если$c \in (Fr^{qf,k}_m)^{<d_1,\dots,<d_k}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$, то $t_{d_1} \circ \cdots \circ t_{d_k}(c)$ дает элемент в $Fr^{qf,0}_m(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$, образ которого в $Fr^{qf,k}_m(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$ связан цепочкой из k гомотопий с c.

В частности, при $k = n$ получаем следующее.

Лемма 1.5.5. *Для каждого* $c \in Fr_m(B, \mathbb{M} \wedge \mathbb{B})$, *существует* $\tilde{c} \in Fr_m^{qf}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B})$, *такой, что* $i(\tilde{c})$ *связан цепочкой гомотопий с* c.

Нам понадобится следующий вариант утверждения о том, что эти подмножества покрывают все:

Лемма 1.5.6. *Для любого конечного множества соответствий* c_i *из аффинных* A_i *в* (X, U), *существует последовательность* $d_1, \cdots, d_n$, *такая, что все* c_i *лежат в* $(Fr_m^{qf,n})^{<d_1,\dots,<d_n}(B, \mathbb{M}, \mathbb{B}; f_1, \cdots f_n)$

Доказательство. Достаточно выбрать d_i для соответствия $\coprod c_i : \coprod A_i \to (X, U)$. □

1.6 Локальная связность пространств $C_*Fr(-, (X, U))$

Поскольку пространства вида $C_*Fr(-, (X, U))$ являются нулевыми пространствами интересующих нас спектров, докажем вначале, что они локально связны, что позволит доказать, что эти спектры являются Ω-спектрами. После этого докажем, что эти пространства при подходящих условиях обладают высшей связностью, что означает соответствующую высшую связность спектров.

Лемма 1.6.1. *Для любого* $X \in Sm/k$ *и любого открытого* $U \subseteq X$, *если* U *пересекает каждую связную компоненту* X, *то симплициальный предпучок множеств с отмеченной точкой* $C_* \operatorname{Fr}(-, (X, U))$ *локально связен в топологии Нисневича на* Sm/k

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1.6.2. *(см. [E, Corollary 16.17(b)]) Пусть* k *это совершенное поле. Тогда любое конечно порожденное расширение* k *можно представить в виде башни, в которой за чисто трансцендентным расширением следует конечное сепарабельное расширение.*

Лемма 1.6.3. *Пусть* R *это равнохарактеристическое локальное гензелево кольцо, содержащее совершенное поле* k, *с полем вычетов, конечно порожденным над* k. *Тогда канонический эпиморфизм* $R \twoheadrightarrow R/m$ *расщепляется.*

Доказательство. По предположению, поле k вложено в R. По предыдущей Лемме 1.6.2, R/m можно представить как конечное сепарабельное расширение некоторого чисто трансцендентного расширения $k(\{x_i\})$. Можно найти семейство $\{\tilde{x_i}\}$ прообразов этого базиса трансцендентности Благодаря локальности кольца, этот выбор задает вложение $k(\{\tilde{x_i}\}) \hookrightarrow R$. Далее, используя сепарабельность оставшегося расширения и определение гензелева кольца, распространим это вложение на все поле R/m. □

Мы также используем следующую лемму, чтобы избежать постоянного уменьшения области определения фрейм-соответствий при исследовании локальных свойств.

Лемма 1.6.4. *(ср. [GP2, Лемма 2.23])*

Пусть Y — аффинное k-гладкое многообразие, пусть $y \in Y$ — точка (необязательно замкнутая), и пусть $(X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$ это пара. Пусть J индексирует семейство всевозможных аффинных этальных окрестностей Y_i точки y в Y $(i \in J)$, с точностью до изоморфизма.

Тогда

$$Fr_m(Y_y^h, (X, U)) = \operatorname{colim}_{i \in J} Fr_m(Y_i, (X, U)).$$

Левая сторона равенства понимается как те же геометрические данные, которые обыкновенно используются для гладких схем (см. Определение 1.1.7, заметьте его общность)

Доказательство Леммы 1.6.4. Сперва докажем инъективность. Обозначим канонический морфизм $Y_y^h \to Y_i$ через $\hat{e}_i$, и соответствующий морфизм обратного образа в Y_y^h из Y_i на фрейм-соответствиях — через $\hat{e}_i^*$.

Пусть $i \in I$, $c, c' \in Fr_m(Y_i, (X, U))$ будут таковы, что $\hat{e}_i(c_1) = \hat{e}_i(c_2)$. Пусть $c = (Z, W, \varphi, g), c' = (Z', W', \varphi', g')$. Рассмотрим обратные образы $(Z_y, W_y, \varphi_y, g_y)$ и $(Z'_y, W'_y, \varphi'_y, g'_y)$ этих соответствий на локальную схему $Y_{i,y}$. Поскольку Y_y^h строго плоский над $Y_{i,y}$ и $\hat{e}_i(c_1) = \hat{e}_i(c_2)$, имеем $Z_y = Z'_y$. Если идеалы, определяющие Z и Z' в $\mathbb{A}^m_{Y_i}$ это I и I', то $((I + I')/I)_y = 0$, и $((I + I')/I')_y = 0$. Поскольку Y Нетерово, эти равенства верны уже после перехода к некоторой окрестности Зариского точки y в Y. Таким образом, увеличивая i до i_1, можно предполагать, что $Z_{i_1} = Z'_{i_1}$.

Переходя к расслоенному произведению W_{i_1} и W'_{i_1}, можно считать их равными. Увеличивая i_1 до i_2, можно предполагать, что W_{i_2} не имеет компонент связности (или, что здесь то же самое, неприводимых компонент) с пустым ростком в точке y. Тогда отображение $Hom(W_{i_2}, \mathbb{A}^m \times X) \to Hom(W_{i_2} \times_{Y_i} Y_y^h, \mathbb{A}^m \times X)$ инъективно. Таким образом, из $\hat{e}_i(c_1) = \hat{e}_i(c_2)$ следует, что $\varphi_{i_2} = \varphi'_{i_2}, g_{i_2} = g'_{i_2}$. Два соответствия c и c' стали равными после ограничения на Y_{i_2}, а значит, они имеют один и тот же образ в копределе (правой части необходимого равенства).

Теперь покажем сюръективность. Пусть $c = (Z, W, \varphi, g) \in Fr_m(Y_y^h, (X, U))$. Пусть $I = (a_1, \cdots, a_k)$ это идеал, задающий Z в $\mathbb{A}^m_{Y_y^h}$. Он конечно порожден, а значит, его порождающие все являются обратными образами элементов какого-то одного $k[\mathbb{A}^m_{Y_i}]$. Пусть эти элементы порождают в нем некий идеал I_i.

Вновь, поскольку Y_y^h строго плоско над $Y_{i,y}$, имеем, что $V(I_i)_y$ конечно над $Y_{i,y}$. Тогда, переходя к некоторой окрестности Зариского (увеличивая i до

i_2), можно полагать, что $Z_{i_2} = V(I_{i_2})$ конечно над Y_{i_2}. Действительно, достаточно выбрать такую окрестность, над которой все из конечного множества порождающих $k[\mathbb{A}^m_{Y_{i_2}}]/I_{i_2}$ как $k[Y_{i_2}]$-алгебры это целые элементы. Для этого достаточно взять окрестность Y_{i_1}, над которой все соотношения целой зависимости (над $Y_{i,y}$) определены. Получаем полиномы со старшим коэффициентом 1 над Y_{i_1}. Вычисляя их в порождающих, получаем элементы $k[\mathbb{A}^m \times Y_{i_1}]$, переходящие в 0 в стебле $k[\mathbb{A}^m \times Y_y]$. Следовательно, после еще одного увеличения i_1 до i_2 можно полагать их нулевыми. Таким образом, имеем конечное Z_{i_2}.

Далее, найдем некое W_{i_3} конечного типа, такое, что $W_{i_3} \times_{Y_{i_3}} Y^h_y = W$. (можно произвольным образом продолжить образующие и соотношения, задающие W, на некую окрестность). Сечение $Z_{i_3} \to W_{i_3}$ определено на стебле, поэтому может быть продолжено на некоторое Y_{i_4} после увеличения i_3 до i_4. Вновь благодаря тому, что гензелизация строго плоская, $W_{i_4,y}$ этально над $\mathbb{A}^m \times Y_{i_4,y}$. Поскольку свойство морфизма быть этальным локально по области определения, (и, более того, определяется на уровне ростков и локально в таком описании, см. [Mats, Теорема 24.3] или [EGA43, Теорема 11.1.1] для плоскости), морфизм $W_{i_4} \to \mathbb{A}^m \times Y_{i_4}$ этален после ограничения на некоторое $W'_{i_4}, W'_{i_4} \supset Z_y$. Переходя от Y_{i_4} к $Y_{i_5} = Y_{i_4} - \pi(Z_{i_4} - W'_{i_4})$, получаем этальную окрестность W'_{i_5} замкнутого подмножества Z_{i_5} в $\mathbb{A}^m \times Y_{i_5}$.

Далее, в качестве морфизма $(\varphi_{i_6}, g_{i_6}) : W_{i_6} \to \mathbb{A}^m \times X$ может быть взято произвольное продолжение морфизма (φ, g), определенного на W. Такое продолжение определено на некоторой меньшей окрестности Y_{i_6}. Подмножество $\{\varphi_{i_6} = 0\} \cap g^{-1}_{i_6}(S)$ может не быть равным Z_{i_6}, но (вновь по строгой плоскости) их стебли в y равны, а потому после увеличения i_6 до i_7 они становятся равны. Таким образом, имеем соответствие $c_{i_7} = (Z_{i_7}, W_{i_7}, \varphi_{i_7}, g_{i_7}) \in Fr_m(Y_{i_7}, (X, U))$, такое, что $\hat{e}_{i_7}(c_{i_7}) = c$.

□

Мы приводим одно доказательство Леммы 1.6.1 в общем случае, и одно для квазипроективного X.

«Элементарное Доказательство» более элементарно и обеспечивает достаточно явную конструкцию окончательной гомотопии. Кроме того, оно работает в общем случае. Вдобавок, оно сродни доказательству Теоремы 1.6.10 ниже, что может сделать восприятие этих доказательств заодно более легкой задачей для читателя.

«Изысканное Доказательство» более краткое и ссылается на другие результаты. В приведенном здесь виде оно требует, чтобы схема X была квазипроективна, хотя его можно модифицировать, чтобы покрыть и общий случай. По сути, это следствие теории почти элементарных расслоений (обобщения окрестностей Артина) и хороших троек; которая развита в статье [PSV]. Для технически подкованного читателя это доказательство может быть более простым из двух. Случай квазипроективного X покрывает многие интересные примеры, и может быть достаточным для многих читателей.

Элементарное доказательство. Пусть B — регулярная локальная Гензелева схема, $c = (Z, W, \varphi, g) \in Fr_m(B, (X, U))$. Докажем, что c связано цепочкой гомотопий с нулевым фреймом $\emptyset$.

По Лемме 1.5.5, примененной к случаю $\mathbb{M} = (pt, \emptyset), \mathbb{B} = (X, U)$, можно считать, что $c \in Fr_m^{qf}(B, (pt, \emptyset), (X, U)$. Это означает, что $\varphi^{-1}(0)$ квазиконечно над B.

Поскольку B локальная гензелева схема, по [Mil, I.4.2], $Y = \varphi^{-1}(0)$ распадается в несвязное объединение $Y = Y_0 \coprod Y_1 \coprod \cdots \coprod Y_r$, где слой Y_0 над замкнутой точкой пуст, а Y_i конечны. Поскольку Z конечно над B, все его компоненты имеют непустой слой над замкнутой точкой, и поэтому не содержатся в Y_0. Уменьшив W вычитанием замкнутой подсхемы Y_0, можно считать, что $\varphi^{-1}(0)$ конечно над B.

Построим гомотопию для одной компоненты связности Z_i. Общая гомотопия будет собрана из этих гомотопий.

Пусть Y_i — компонента, содержащая Z_i. Вычтем из W остальные Y_j, чтобы получить окрестность W_i.

Пусть $K = k(b)$, где b — замкнутая точка схемы B. Благодаря сопряженности $Fr_m(B, P_K) = Fr_m(B, P)$, можно расширить скаляры и считать, что замкнутая точка b схемы B рациональна.

Пусть z — замкнутая точка Z_i, $x = g(z)$. Поскольку Z_i это локальная гензелева схема, используя Лемму 1.6.3, можно считать, что морфизм в x определен на Z_i. Похожим образом, после уменьшения W_i, можно полагать, что он определен на W_i как морфизм $lift : W_i \to x$. Таким образом, фрейм-соответствие c приходит из некоторого фрейм-соответствия $\tilde{c} \in Fr_m(B, (X_{k(x)}, U_{k(x)})) = Fr_m(B, X_{k(x)}/U_{k(x)})$. (Заметим, что область значений — не пара k-гладких многообразий. Ср. Лемма 1.6.4). В то же время, точка x $k(x)$-многообразия $X_{k(x)}$ рациональна. Пусть $d = dim_x(X)$, $a_1, \dots a_d$ это локальные параметры в точке x на $X_{k(x)}$. Они задают этальный морфизм $e : \overset{\circ}{X} \to \mathbb{A}^d_{k(x)}$ из некоторой окрестности $\overset{\circ}{X}$ точки x. Уменьшая $\overset{\circ}{X}$, можно считать $\overset{\circ}{X}$ этальной окрестностью точки $0 \in \mathbb{A}^d_{k(x)}$. Поскольку $U_{k(x)}$, по условию, пересекает $\overset{\circ}{X}$, $dim(S_{k(x)} \cap U_{k(x)}) < d$. Обозначим $\overset{\circ}{S} = S \cap \overset{\circ}{X}$. По теореме Шевалле имеем, что теоретико-множественный образ $\overset{\circ}{S}$ в $\mathbb{A}^d_{k(x)}$ содержится в собственном замкнутом подмножестве $L \subset \mathbb{A}^d_{k(x)}$.

Следующие рассуждения, составляющие шаг в доказательстве теоремы Нетер о нормализации над бесконечным полем (использующим линейные проекции), показывает, что после замены координат можно считать, что проекция

$p_{1,\cdots,d-1} : \mathbb{A}^d \to \mathbb{A}^{d-1}$ на первые $d-1$ координат конечна в ограничении на L. Тогда конечно и ограничение морфизма $p_{1,\cdots,d-1} \times id : \mathbb{A}^d_{k(x)} \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^{d-1}_{k(x)} \times A^1$ на подсхему $L \times \mathbb{A}^1$).

Лемма 1.6.5. *Пусть k бесконечное поле. Пусть $L \subsetneq \mathbb{A}^d_k$ это замкнутое подмножество, отличное от всего $\mathbb{A}^d_k$. Тогда после линейной замены координат, проекция $p_{1,\cdots,d-1} : \mathbb{A}^d_k \to \mathbb{A}^{d-1}_k$ на первые $d-1$ координат конечна в ограничении на L.*

Доказательство. Пусть F — ненулевой многочлен в $I(L)$ степени N, F_N это его старшая однородная компонента. Поскольку она ненулевая и поле бесконечно, есть точка $a = [a_1, \ldots, a_d] \in \mathbb{P}^{d-1}(k)$, такая, что $F_N(a) \neq 0$. С точностью до перестановки координат и перемасштабирования, можно предполагать, что $a_1 = 1$. Тогда если $\widetilde{F}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = F(x_1, x_2 + a_2 \cdot x_1, \ldots, x_d + a_d \cdot x_1)$, имеем $\widetilde{F}_N(1, 0 \ldots, 0) \in k^*$, и старший коэффициент полинома $\widetilde{F}$ как полинома от x_1 лежит в k^*. Следовательно, x_1 цел над $k[x_2 + a_2 \cdot x_1, \ldots, x_d + a_d \cdot x_1]$, и при подходящей замене координат проекция из $V(F)$, и, тем более, из L оказывается конечной. $\square$

Будем полагать, что такая замена координат произведена, и соответствующая проекция конечна на L.

Определим морфизм $\tilde{g}_A : W_i \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^d_{k(x)} = \mathbb{A}^d \times x$ как $e \circ g + ((0, 0, \cdots, 0, s), lift \circ pr_1)$, где s это координата гомотопии. (Заранее уменьшим W_i так, чтобы $g(W_i) \subseteq \overset{\circ}{X}$.)

Пусть $Z_i' = (\tilde{g}_A|_{Y_i \times \mathbb{A}^1})^{-1}(L) \subset Y_i \times \mathbb{A}^1$. Тогда $Z_i' \subset Y_i \times L \times A^1$ задан уравнением $e \circ (g, lift)|_{Y_i}(y) + (0, 0, \ldots, 0, s) = l$ на тройки (y, l, s). Поэтому $Z_i' = (Y_i \times_{\mathbb{A}^d} (L \times \mathbb{A}^1))^{red}$. Здесь $L \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^d_{k(x)} = \mathbb{A}^d \times k(x)$ задан как $in \circ pr_1 - ((0, 0, \ldots, 0, s), can \circ pr_1)$, где can обозначает канонический морфизм $L \to x$. Но этот морфизм может быть получен из ограничения морфизма $p_{1,\cdots,d-1} \times id : \mathbb{A}^d_{k(x)} \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^{d-1}_{k(x)} \times \mathbb{A}^1$ на подсхему $L \times \mathbb{A}^1$) путем взятия композиции с автоморфизмом $(l, s) \mapsto (l, -s + p_d(l)) : L \times \mathbb{A}^1 \to L \times \mathbb{A}^1$, поэтому он конечен по замене базиса выше. Следовательно, Z_i' конечен над Y_i, а значит, и над B. Заметим, что он содержит $Z_i \times 0$

Поскольку Y_i локальная гензелева схема, Z_i' состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых является локальной гензелевой схемой. Выберем из них ту, которая содержит $Z_i \times 0$, и обозначим ее через Z_i^0 Обозначив $W_i^0 \subseteq W \times \mathbb{A}^1$ дополнение к остальным компонентам Z_i', имеем замкнутое вложение $Z_i^0 \subseteq W_i^0$. Поскольку e этален, и у точки $0 \in \mathbb{A}^d$ есть выбранный подъем $x \in \overset{\circ}{X}$, некоторая окрестность $\widetilde{W_i}$ точки $(z, 0) \in W_i^0$ обладает свойством, что морфизм $\tilde{g}_A$, ограниченный на нее, поднимается до морфизма

$\tilde{g} : \widetilde{W_i} \to \overset{\circ}{X}$, отправляющего $(z, 0)$ в x. Поскольку Z_i^0 локальна и гензелева, она поднимается в $\widetilde{W_i}$ и превращается в его замкнутое подмножество (удаляя из $\widetilde{W}$ лишние компоненты прообраза, можно считать, что этот подъем составляет весь прообраз Z^0). Ограничение функций φ на любую окрестность будем обозначать той же буквой, поскольку они на данном этапе доказательства не изменяются существенным образом. Обозначим наконец $\left(\tilde{g}|_{Z_i^0}\right)^{-1}(\overset{\circ}{S})$ через $\widetilde{Z}_i$.

Имеем следующую ситуацию:

- Замкнутая точка $(z, 0) \in \mathbb{A}^m \times B \times \mathbb{A}^1$
- Этальная окрестность $\widetilde{W_i}$ точки $(z, 0)$ в $\mathbb{A}^m \times B \times \mathbb{A}^1$
- Приведенная замкнутая подсхема $\widetilde{Z}_i \subseteq \widetilde{W_i}$, содержащая точку $(z, 0)$, являющаяся локальной гензелевой схемой, и конечная над B
- Морфизм $\tilde{g} : \widetilde{W_i} \to \overset{\circ}{X}$ и функции $\varphi : \widetilde{W_i} \to \mathbb{A}^m$, такие, что $\varphi^{-1}(0) \cap \tilde{g}^{-1}(\overset{\circ}{S}) = \widetilde{Z}_i$.

По [GNP, Лемма 4.2], примененной к ситуации, когда в качестве набора (V, Z, U, Y) выступает $(\mathbb{A}^m \times B \times \mathbb{A}^1, (z, 0), B, \widetilde{Z}_i)$, $\widetilde{Z}_i$ отождествляется с замкнутой подсхемой в $\mathbb{A}^m \times B \times \mathbb{A}^1$. Тем самым, эти данные задают конкретное фрейм-соответствие уровня m из $B \times \mathbb{A}^1$ в $(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{X} - \overset{\circ}{S})$. Из определения $\overset{\circ}{X}$ и $\overset{\circ}{S}$ ясно, что тогда эти же данные в композиции с вложением $X^0 \hookrightarrow X_{k(x)}$ и естественной проекцией $X_{k(x)} \to X$ задают соответствие $h_i \in Fr_m(B \times A^1, (X, X - S))$.

Если c_i — компонента соответствия c с носителем Z_i, докажем, что h_i осуществляет гомотопию между c_i и $\emptyset$. Действительно, $i_0^* h_i$ задано данными

$$(\widehat{Z}_i^0 = \widetilde{Z}_i \times_{W \times \mathbb{A}^1} (W \times 0), \widehat{W}_i^0 = \widetilde{W_i} \times_{W \times \mathbb{A}^1} (W \times 0), \varphi|_{\widehat{W}_i^0}, \tilde{g}|\widehat{W}_i^0).$$

Заметим, что канонический морфизм $\widetilde{W_i} \to W \times \mathbb{A}^1$ снабжает $\widehat{W}_i^0$ этальным морфизмом can в W. Последние данные φ получаются из данных для фрейм-соответствия c_i путем композиции с can. Про данные g верно аналогичное утверждение после композиции с (определенным в некоторой окрестности) этальным морфизмом e :

$$e \circ \tilde{g}|_{\widehat{W}_i^0} = e \circ g \circ can.$$

После уменьшения окрестности $\widehat{W}_i^0$ (путем отбрасывания некоторых компонент связности), можно считать, что $\tilde{g}|_{\widehat{W}_i^0}) = g \circ can$. Для того, чтобы проверить, что $i_0^*h_i = c_i$, остается проверить, что $\widehat{W}_i^0$ является этальной окрестностью Z_i в W. Это верно, поскольку оно является этальной окрестностью точки z, и Z_i локальная гензелева схема.

Поскольку носитель $\widetilde{Z}_i$ является локальной гензелевой схемой, и его замкнутая точка лежит в слое над 0, слой $\widetilde{Z}_i \times_{W \times \mathbb{A}^1} (W \times 1)$ пуст, а значит, $i_1^*h_i = \emptyset$.

Переходя к несвязному объединению по i,

$$h = \left(\coprod \widetilde{Z}_i, \coprod \widetilde{W'}_i, \coprod \varphi, \coprod \tilde{g} \right) \in Fr_m(B \times \mathbb{A}^1, (X, U)).$$

При этом $(i_0)^*h = c, (i_1)^*h = \emptyset$. Построенная гомотопия h соединяет соответствие c с пустым соответствием. $\square$

Изысканное доказательство, в квазипроективном случае. Пусть X квазипроективно.

Пусть B регулярная локальная гензелева схема, $c = (Z, W, \varphi, g) \in Fr_m(B, (X, U))$. Докажем, что c можно связать цепью гомотопий с нулевым фрейм-соответствием $\emptyset$.

По Лемме 1.5.5, примененной к случаю $\mathbb{M} = (pt, \emptyset), \mathbb{B} = (X, U)$, можно полагать $c \in Fr_m^{qf}(B, (pt, \emptyset), (X, U)$. Это значит, что $\varphi^{-1}(0)$ квазиконечно над B.

Поскольку B это локальная гензелева схема, по [Mil, I.4.2], $Y = \varphi^{-1}(0)$ распадается в несвязное объединение $Y = Y_0 \coprod Y_1 \coprod \cdots \coprod Y_r$, где слой Y_0 над замкнутой точкой пуст, а остальные Y_i конечны и связны. Поскольку Z конечно над B, все его компоненты имеют ненулевой слой над замкнутой точкой, а значит, она не содержатся в Y_0. Уменьшая W путем удаления замкнутой подсхемы Y_0, можем полагать, что $\varphi^{-1}(0)$ конечно над B.

Теперь (после уменьшения W) набор (Y, W, φ, g) определяет соответствие $\tilde{c} \in Fr_m(B, X) = Fr_m(B, (X, \emptyset))$. Пусть $x_1, \cdots, x_l$ это все образы замкнутых точек Y под действием g. (эти точки в X, необязательно замкнутые.) Поскольку X квазипроективно, все они содержатся в некотором аффинном открытом подмножестве X. Пусть $V = Spec(\mathcal{O}_{X,\{x_1,\ldots,x_l\}})$ это полулокальная схема, играющая роль бесконечно малой окрестности Зариского точек $x_1, \ldots, x_l$. Докажем, что соответствие $\tilde{c}$ в некотором смысле пропускается через V.

Следуя замыслу [GP, Предложение 3.8 и Определение 3.10], введем для каждого k-гладкого многообразия $B' \in Sm(k)$ и пунктированного пучка Нисневича $\mathcal{F} \in Nis_*(Sm(k))$ множества $\mathcal{F}r_m(B', \mathcal{F})$ фрейм-соответствий уровня m из B' в $\mathcal{F}$.

Определение 1.6.6. *Пусть $B' \in Sm(k)$, $\mathcal{F} \in Nis_*(Sm(k))$. Множество $\mathcal{F}r_m(B', \mathcal{F})$ фрейм-соответствий уровня m из B' в $\mathcal{F}$ это множество $Hom_{Nis_*}(B_+ \wedge \mathbb{P}^{\wedge m}, \mathcal{F} \wedge T^{\wedge m})$.*

Замечание 1.6.7. *Если* $F = X''/U''$ *для* $(X'', U'') \in SmOp(Fr_0(k))$, *имеется естественная биекция* $\mathrm{Fr}_m(B', (X'', U'')) \simeq \mathfrak{F}r_m(B', X''/U'')$. *(См. [GP, Предложение 3.8].)*

Замечание 1.6.8. *Функтор* $\mathfrak{F}r_m(B', -)$ *точен слева, то есть, согласован с пределами. Действительно, смеш-произведение* $\wedge$ *и* $Hom_{Nis_*}(B' \wedge \mathbb{P}^{\wedge m}, -)$ *обладают таким свойством, а значит, также и их композиция.*

Заметим, что V это предел аффинных окрестностей V^j точек $x_1, \cdots, x_l$ (здесь мы пользуемся квазипроективностью X). Также, поскольку носитель Y соответствия $\tilde{c}$ полулокален, после перехода к меньшему W мы имеем единственную возможность пропустить соответствие $\tilde{c}$ через любую окрестность V^j. Следовательно, мы имеем совместимую систему элементов, то есть, элемент обратного предела. По Замечанию 1.6.8, это означает, что соответствие $\tilde{c} \in \mathrm{Fr}_m(B, X) = \mathfrak{F}r(B, Hom(-, X_+))$ распадается в композицию $\tilde{\tilde{c}} \in \mathfrak{F}r_m(B, Hom(-, V_+))$ и канонического вложения $in : Hom(-, V_+) \to Hom(-, X_+)$.

В то же время, исходное соответствие c можно представить в виде композиции $\tilde{c}$ с каноническим морфизмом факторизации $p : (X, \emptyset) \to (X, U)$, который тождествен на X. Переходя к языку пунктированных пучков Нисневича, p соответствует канонической проекции $X_+ \to X/U$. Комбинируя эти два разложения, имеем $c = p \circ in \circ \tilde{\tilde{c}}$. Достаточно показать, что морфизм $p \circ i : Hom(-, V_+) \to X/U$ наивно гомотопен выделенному постоянному морфизму $* \in Hom_{Nis_*}(Hom(-, V_+), X/U)$. Последнее утверждение доказано для квазипроективного X в [Pan, Теорема 2.1], с использованием техники почти элементарных расслоений и хороших троек.

□

Следствие 1.6.9. *Для любого симплициального объекта* $P_\bullet$ *в* $SmOp(Fr_0(k))$, *если* $P_0 = (X_0, U_0)$, *и* U_0 *пересекает каждую связную компоненту* X_0, *то бисимплициальный предпучок множеств с отмеченной точкой* $C_* \mathrm{Fr}(-, P_\bullet)$ *локально связен в топологии Нисневича на* Sm/k.

Доказательство. Достаточно доказать локальную связность нулевого пространства, а это содержание предыдущей Леммы 1.6.1. □

Докажем более общее утверждение о высшей связности:

Теорема 1.6.10. *Пусть* $r > 0$, *и* $(X, U = X - S) \in SmOp(Fr_0(k))$ — *такая пара, что* $codim_{X_i}(S \cap X_i) > r$ *в каждой связной (Или, что то же самое для* k*-гладкой схемы, неприводимой) компоненте* $X_i \subseteq X$. *Тогда симплициальный пучок* $C_* Fr(-, (X, U))$ *локально* r*-связен в топологии Нисневича.*

План доказательства. *Доказательство происходит по следующему плану:*

- *Поскольку $C_*Fr(-,(X,U))$ локально связен, по стабильной теореме Гуревича [Sch, Предложение II.6.30(i)] если $H_k(M_{fr}((X,U))$ локально ноль для $k \leqslant r$, то $M_{fr}((X,U))$ локально r-связен. Поскольку $M_{fr}((X,U))$ локально Ω-спектр, это то же, что локальная r-связность $C_*Fr(-,(X,U))$.*

- *Поскольку предпучки гомологий $H_k(M_{fr}((X,U)) = \pi_k(\mathbb{Z}M_{fr}((X,U))) = \pi_k(LM_{fr}((X,U))) = H_k(C_*\mathbb{Z}\mathrm{F}(-,(X,U))$ (Первое равенство следует из того, что морфизм сборки это стабильная эквивалентность, см [Sch, стр. 280-281]) это гомотопически инвариантные квазистабильные предпучки абелевых групп с $\mathbb{Z}\mathrm{F}_*$-трансферами, отображение $H_k(M_{fr}((X,U))(B) \to H_k(M_{fr}((X,U))(Spec(k(B)))$ инъективно, где B — гензелизация локального кольца k-гладкого многообразия.*

- *При помощи гомотопического треугольника Майера-Виеториса для пар общий случай сводится к случаю «достаточно маленького» X.*

- *Для поля F/k у функтора $Fr_m(-,(X,U))$ на категории $AffSm(F)$ строится семейство подфункторов $Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(-,(X,U);f_1,\dots f_n)$, причем любой конечный набор конкретных фрейм-соответствий из аффинных гладких F-схем относительной размерности не более r включается в один из таких подфункторов.*

- *Для каждого функтора $Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(-,(X,U);f_1,\dots f_n)$ строится стягивающая его внутри $Fr(-,(X,U))$ цепочка гомотопий. Тем самым, симплициальное подмножество*

$$C_*Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(Spec(F),(X,U);f_1,\dots f_n) \subset C_*Fr_m(Spec(F),(X,U))$$

можно стянуть внутри $C_*Fr_m(-,(X,U))$.

- *Любое отображение $S^k, k \leqslant r$, в геометрическую реализацию $|C_*Fr_m(Spec(F),(X,U))|$ гомотопно отображению в r-скелет. Тогда, поскольку образ этого отображения пересекается лишь с конечным числом симплексов, и они все имеют размерность $\leqslant r$, его можно пропустить через один из подкомплексов $C_*Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(-,(X,U);f_1,\dots f_n)$, который стягивается внутри $C_*Fr_m(-,(X,U))$.*

Лемма 1.6.11. *В условиях Теоремы 1.6.10, пучок $C_*Fr(-,(X,U))$ локально r-связен в топологии Нисневича, в том и только в том случае, когда спектр $(M_{fr}((X,U))$ локально r-ацикличен.*

Доказательство. По [GP, Теорема 6.5], $(M_{fr}((X,U))$ локально является Ω-спектром. Поэтому локальная r-связность его нулевого пространства $C_*Fr(-,(X,U))$ равносильна локальной r-связности всего спектра $(M_{fr}((X,U))$. По стабильной теореме Гуревича [Sch, Предложение II.6.30(i)], первая ненулевая группа гомотопий изоморфна соответствующей группе гомологий. Поэтому локальная r-ацикличность равносильна локальной r-связности. $\square$

Лемма 1.6.12. *В условиях Теоремы 1.6.10, если $B \in Sm(k), b \in B$, то для любого k, отображение $H_k(M_{fr}((X,U))((\mathcal{O}_{B,b})^h_b) \to H_k(M_{fr}((X,U))(Spec(k((\mathcal{O}_{B,b})^h_b)))$ инъективно.*

Доказательство. $H_k(M_{fr}((X,U))) = \pi_k(\mathbb{Z}M_{fr}((X,U)))$.

(См. [Sch, Definition II.6.24, конец стр. 280])

По Теореме 1.2.1, $\pi_k(\mathbb{Z}M_{fr}((X,U))) = \pi_k(LM_{fr}((X,U)))$. Последнее является гомотопически инвариантным квазистабильным предпучком с $\mathbb{Z}\mathrm{F}_*$-трансферами. Утверждение Леммы следует из [GP2, Теорема 3.15(3')]. [1] $\square$

Лемма 1.6.13. *Предположим, что утверждение Теоремы верно для всех пар (X',U'), где X' квазиаффинно и этально над некоторым аффинным пространством $\mathbb{A}^d$. Тогда оно верно для произвольной пары $(X,U) \in SmOp(Fr_0(k))$.*

Доказательство. Поскольку X — гладкая k-схема, X можно покрыть открытыми X_i, которые квазиаффинны и обладают этальными отображениями в $\mathbb{A}^{d_i}$. Будем считать, что X_i занумерованы ординалами, и докажем по индукции, что симплициальный пучок $C_*Fr_m(-,(\bigcup_{i\leqslant\alpha} X_i, U\cap\bigcup_{i\leqslant\alpha} X_i))$ локально r-связен. Докажем только переход индукции $\alpha \to \alpha+1$, поскольку база $\alpha=0$ и трансфинитный переход очевидны. По Предложению 1.7.8, обозначая $\bigcup_{i\leqslant\alpha} X_i$ через $\widetilde{X}$,имеем выделенный треугольник

$$\begin{gathered}
M_{fr}\left(\left(X_{\alpha+1}\cap\widetilde{X}, U\cap X_{\alpha+1}\cap\widetilde{X}\right)\right)\\
\downarrow\\
M_{fr}\left((X_{\alpha+1}, U\cap X_{\alpha+1})\right)\vee M_{fr}((\widetilde{X}, U\cap\widetilde{X}))\\
\downarrow\\
M_{fr}\left(\left(X_{\alpha+1}\cup\widetilde{X}, U\cap\left(X_{\alpha+1}\cup\widetilde{X}\right)\right)\right).
\end{gathered}$$

[1] В предыдущей версии цитируемого текста данное утверждение было [GP2, Теорема 2.15(3')].

Мы уже знаем, по Лемме 1.6.1, что нулевые пространства спектров в этом треугольнике связны, и тогда, по [GP, Теорема 6.5], эти спектры локально являются Ω-спектрами. Тем самым, они имеют такую же локальную связность, как их нулевые пространства. Но написанный выше треугольник дает длинную точную последовательность гомотопий:

$$
\begin{gathered}
\pi_i\left(M_{fr}\left((X_{\alpha+1}, U\cap X_{\alpha+1})\right)\vee M_{fr}((\widetilde{X}, U\cap\widetilde{X}))\right)\\
\downarrow\\
\pi_i\left(M_{fr}\left(\left(X_{\alpha+1}\cup\widetilde{X}, U\cap\left(X_{\alpha+1}\cup\widetilde{X}\right)\right)\right)\right)\\
\downarrow\\
\pi_{i-1}\left(M_{fr}\left(\left(X_{\alpha+1}\cap\widetilde{X}, U\cap X_{\alpha+1}\cap\widetilde{X}\right)\right)\right),
\end{gathered}
$$

Для каждого $i\leqslant r$, поскольку крайние члены выписанной части последовательности нулевые по предположению индукции, средний член тоже будет нулевым. Тем самым, переход индукции доказан.

$\square$

В дальнейшем будем предполагать, что

Условия 1.6.14. *X квазиаффинно, S задано n уравнениями $f_1,\dots f_n$, и на X задан этальный морфизм $e: X\to\mathbb{A}^d$, $L\subset\mathbb{A}^d$ — замкнутая подсхема в $\mathbb{A}^d$ коразмерности $>r$, через которую пропускается $e|_S$; F — поле рациональных функций схемы вида $(\mathcal{O}_{B,b})^h_b$.*

Определение 1.6.15. *В условиях 1.6.14, пусть A — гладкая аффинная схема над $Spec(F)$. Определим подмножество*

$$
Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(A,(X,U);f_1,\dots f_n)\subseteq (Fr_m^{qf,n})^{<d_1,\dots<d_n}(A,(pt,\emptyset),(X,U);f_1,\dots f_n)
$$

(См. Определение 1.5.4) следующим условием:

Пусть $c\in Fr_m^{<d_1,\dots<d_n}(A,(X,U);f_1,\dots f_n)$. Рассмотрим соответствие $(Z,W,\varphi,g)=t_0\circ\dots\circ t_n(c)$. Для него F-многообразие нулей $Y=\{\varphi=0\}$ квазиконечно над A. Определен морфизм схем (многообразий над разными полями) $e\circ g|_Y: Y\to\mathbb{A}^d$.

Пусть $v\in F^d-0$. Рассмотрим линейную гомотопию $\tilde{g}_v=g+sv: W\times\mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^d$. Скажем, что $c\in Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(A,(X,U);f_1,\dots f_n)$, если $(e\circ g|_Y)^{-1}(L)\times 0$ является компонентой связности в $\tilde{g}_v^{-1}(L)\cap(Y\times\mathbb{A}^1)$.

Лемма 1.6.16. *В условиях 1.6.14,*

для любого $A \in AffSm(Spec(F)), dim(A) \leqslant r$,

для любого $c \in Fr_m^{<d_1,\dots<d_n}(A,(X,U);f_1,\dots f_n)$,

$c \in Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(A,(X,U);f_1,\dots f_n)$ для почти всех v.

Доказательство. Рассмотрим морфизм $line : (Y \times_k L) - \Gamma(e \circ g|_Y) \to \mathbb{P}_F^{d-1}$, соответствующий проведению прямой через две (различные) данные точки. У морфизма F-многообразий $line$ размерность области определения не больше $r + (d - r - 1) = d - 1$, а размерность области значений $d - 1$, поэтому этот морфизм квазиконечен над общей точкой, а значит, почти всюду. Пусть v таково, что слой над $[v] \in \mathbb{P}^{d-1}$ конечен. Для гомотопии $\tilde{g}_v = g + sv : W \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^d$, $\tilde{g}_v^{-1}(L) \cap (Y \times \mathbb{A}^1)$, помимо $(e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0$, содержит лишь конечное число точек M, поскольку остальные точки образуют слой отображения $line$ над $[v]$. Поскольку $(e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0$ замкнуто, и конечное множество точек M тоже замкнуто, $(e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0$ это компонента связности. □

Лемма 1.6.17. *В условиях 1.6.14, для каждого функтора $Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(-,(X,U);f_1,\dots f_n)$ существуют $n+1$ естественных гомотопий*

$$\tilde{h}_0,\dots,\tilde{h}_n : Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(-,(X,U);f_1,\dots f_n) \to Fr_m(- \times \mathbb{A}^1,(X,U)),$$

осуществляющих гомотопию между вложением $Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(-,(X,U);f_1,\dots f_n) \to Fr_m(-,(X,U))$ и постоянным естественным преобразованием $const_\emptyset$.

Доказательство. В качестве $\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_n$ нужно взять

$$h_{d_1} \circ t_{d_2} \circ \dots \circ t_{d_n}, h_{d_2} \circ t_{d_3} \circ \dots \circ t_{d_n}, \dots, h_{d_n}.$$

Эти гомотопии приводят любое соответствие к «квазиконечному». Построению последней гомотопии посвящен остаток доказательства.

Имеем соответствие $t_{d_1} \circ t_{d_2} \circ \dots \circ t_{d_n}(c)$. У него $Y = \varphi^{-1}(0)$ квазиконечно над A. Предположим, переходя к меньшей этальной окрестности, что W не имеет компонент связности, не содержащих компонент Z. Рассмотрим линейную гомотопию $\tilde{g}_v = g + sv : W \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^d$. Для нее $\tilde{g}_v^{-1}(L) \cap (Y \times \mathbb{A}^1)$ имеет $(e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0$ в качестве компоненты связности. $X \times_{A^d} (W \times \mathbb{A}^1 - M)$ этальным образом отображается в $(W \times \mathbb{A}^1 - M)$, и обладает поднятием $g|_Z \circ pr_1$ на замкнутом подмногообразии $Z \times 0$.

Рассмотрим слой $X \times_{\mathbb{A}^d} (W \times 0)$ над 0. В этой схеме выделяется как компонента связности относительный график $\Gamma_{\mathbb{A}^d}(g)$ морфизма g $\mathbb{A}^d$-схем. Остальные компоненты связности образуют замкнутое подмножество в слое

$X \times_{\mathbb{A}^d} (W \times 0)$, а значит, и во всем $X \times_{\mathbb{A}^d} (W \times \mathbb{A}^1 - M)$. После выбрасывания этого замкнутого множества, состоящего из «лишних» компонент, имеем окрестность Нисневича $\widetilde{W}$ замкнутого подмногообразия $Z \times 0 \subset \mathbb{A}^m \times A \times \mathbb{A}^1$. Обозначим

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ pr_1 \circ i \circ pr_2 \circ i : \widetilde{W} \to X \times_{A^d} (W \times \mathbb{A}^1 - M) \to (W \times \mathbb{A}^1 - M) \to W \times \mathbb{A}^1 \to W \to \mathbb{A}^m.$$

(Здесь и далее i используется в смысле подразумеваемого структурного морфизма, задающего некоторую окрестность, это обобщенный морфизм «вложения открытого подмножества».) Обозначим $\tilde{g}$ — морфизм $pr_1 \circ i : \widetilde{W} \to X$. Тогда

$$\tilde{\varphi}^{-1}(0) \cap \tilde{g}^{-1}(S) = i^{-1}(X \times_{\mathbb{A}^d} ((e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0)) \cap \tilde{g}^{-1}(S)$$

. Заметим, что данное подмножество содержится в слое $\widetilde{W}$ над 0. Поэтому:

$$i^{-1}(X \times_{\mathbb{A}^d} ((e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0)) \cap \tilde{g}^{-1}(S) = i^{-1}(X \times_{\mathbb{A}^d} ((e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0)) \cap (\Gamma_{\mathbb{A}^d}(g) \times 0) \cap \tilde{g}^{-1}(S).$$

Но

$$\Gamma_{\mathbb{A}^d}(g) \times 0) \cap \tilde{g}^{-1}(S) = (\Gamma_{\mathbb{A}^d}(g) \times 0) \cap (g \circ pr_1 \circ i \circ pr_2 \circ i)^{-1}(S).$$

В итоге имеем:

$$\begin{gathered}
\tilde{\varphi}^{-1}(0) \cap \tilde{g}^{-1}(S) = \\
i^{-1}(X \times_{\mathbb{A}^d} ((e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0)) \cap \tilde{g}^{-1}(S) = \\
i^{-1}(X \times_{\mathbb{A}^d} ((e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0)) \cap (\Gamma_{\mathbb{A}^d}(g) \times 0) \cap \tilde{g}^{-1}(S) = \\
i^{-1}(X \times_{\mathbb{A}^d} ((e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0)) \cap (\Gamma_{\mathbb{A}^d}(g) \times 0) \cap (g \circ pr_1 \circ i \circ pr_2 \circ i)^{-1}(S) = \\
i^{-1}(X \times_{\mathbb{A}^d} ((e \circ g|_Y)^{-1}(L) \times 0) \cap (g^{-1}(S) \times \mathbb{A}^1 - M)) \cap (\Gamma_{\mathbb{A}^d}(g) \times 0) = \\
i^{-1}(X \times_{\mathbb{A}^d} (Z \times 0)) \cap (\Gamma_{\mathbb{A}^d}(g) \times 0) = \\
Z \times 0.
\end{gathered}$$

Этот носитель конечен над $A \times 0$, и, тем более, над $A \times \mathbb{A}^1$. В то же время, слой носителя соответствия над 1 пуст, поэтому построенная гомотопия переводит $t_1 \circ \cdots \circ t_n(c)$ в пустое соответствие $\emptyset$.

Нетрудно проверить, что эти построения согласованы с морфизмами между различными аффинными гладкими F-схемами A, и поэтому задают естественное преобразование

$$\tilde{h}_0 : Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(-,(X,U);f_1,\dots f_n) \to Fr_m(-\times\mathbb{A}^1,(X,U)).$$

□

Лемма 1.6.18. *В условиях 1.6.14, симплициальное множество $C_*Fr(Spec(F),(X,U))$ r-связно.*

Доказательство. Пусть $p : S^k \to |C_*Fr(Spec(F),(X,U))|$ — непрерывное отображение пунктированных топологических пространств, $k \leqslant r$. С точностью до (пунктированной) гомотопии, можно считать, что $p(S^k)$ лежит в r-скелете. Из соображений компактности, $p(S^k)$ пересекается лишь с конечным числом невырожденных симплексов. Пусть m — уровень, на котором все эти симплексы представлены конкретными фрейм-соответствиями.

По Лемме 1.5.6, все они лежат в некоторых $(Fr_m^{qf,n})^{<d_1,\dots<d_n}(-,(pt,\emptyset),(X,U);f_1,\dots f_n)$. По лемме 1.6.16, все они лежат в $Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(-,(X,U);f_1,\dots f_n)$ для почти любого v. Выберем такое v.

Тогда p пропускается через симплициальное подмножество $C_*Fr_m^{<d_1,\dots<d_n,v}(-,(X,U);f_1,\dots f_n)$. Но это симплициальное подмножество стягиваемо, по Лемме 1.6.17. Значит, отображение p гомотопно тривиальному, и симплициальное множество $C_*Fr(Spec(F),(X,U))$ r-связно. □

Перейдем к доказательству Теоремы 1.6.10.

Доказательство. По Лемме 1.6.11, утверждение Теоремы равносильно локальной r-ацикличности спектра $M_{fr}((X,U))$, то есть, утверждению о том, что для гладкого B, и $b \in B$, $H_k(M_{fr}((X,U)))(Spec((\mathcal{O}_{B,b})_b^h)) = 0$.

По Лемме 1.6.12, эта группа инъективно отображается в $H_k(M_{fr}((X,U)))(Spec(F))$, где F — поле частных локального гензелева кольца. Значит, достаточно доказать, что $C_*Fr(Spec(F),(X,U))$ локально r-связен.

По Лемме 1.6.13, достаточно рассмотреть случай, когда X квазиаффинно и этально над некоторым $\mathbb{A}^d$. Можно считать, что мы оказываемся в условиях 1.6.14.

По Лемме 1.6.18, в частном случае условий 1.6.14, $C_*Fr(Spec(F),(X,U))$ локально r-связен. □

1.7 Треугольники Майера-Виеториса

Нам понадобится следующее утверждение о треугольниках Майера-Виеториса:

Предложение 1.7.1. *Пусть*

$$\begin{tikzcd} V - Z \arrow[r, hook] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ X - Z \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

— квадрат Нисневича в Sm/k.

1. *Естественные морфизмы*

$$C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(V - Z) \to C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(X - Z) \oplus C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(V) \to C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(X),$$

   индуцированные вложениями, превращаются в выделенный треугольник в производной категории комплексов пучков Нисневича.

2. *Пусть $W \subset X$ — открытая подсхема. Естественные морфизмы*

$$\begin{gathered} C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}((V - Z, W \times_X V - Z \cap (W \times_X V))) \\ \downarrow \\ C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}((X - Z, W - Z \cap W)) \oplus C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}((V, W \times_X V)) \\ \downarrow \\ C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}((X, W)), \end{gathered}$$

   индуцированные вложениями пар, превращаются в выделенный треугольник в производной категории комплексов пучков Нисневича.

Доказательство. Предложение следует из двух лемм 1.7.2 и 1.7.6 ниже, учитывая Замечание 1.7.5. $\square$

Лемма 1.7.2. *В условиях Предложения 1.7.1*

1. *Последовательность пучков Нисневича*

$$0 \to \mathbb{Z}\mathrm{F}(V - Z) \to \mathbb{Z}\mathrm{F}(X - Z) \oplus \mathbb{Z}\mathrm{F}(V) \to \mathbb{Z}\mathrm{F}(X) \to 0,$$

   индуцированная вложениями, точна.

2. *Пусть $W \subset X$ — открытая подсхема. Последовательность пучков Нисневича*

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{Z}\mathrm{F}((V - Z, W \times_X V - Z \cap (W \times_X V))) \\ \downarrow \\ \mathbb{Z}\mathrm{F}((X - Z, W - Z \cap W)) \oplus \mathbb{Z}\mathrm{F}((V, W \times_X V)) \\ \downarrow \\ \mathbb{Z}\mathrm{F}((X, W)) \\ \downarrow \\ 0, \end{array}$$

индуцированная вложениями пар, точна.

Доказательство. (1)

Последовательность получается из декартовых и кодекартовых квадратов пучков множеств

$$\begin{array}{ccc} F_n(-, V - Z) & \longrightarrow & F_n(-, V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_n(-, X - Z) & \longrightarrow & F_n(-, X). \end{array}$$

Кодекартовость сводится к тому, что над локальной гензелевой схемой носитель Z фрейм-соответствия тоже будет локальной гензелевой схемой, и поэтому над ним квадрат Нисневича станет тривиальным. Наличие сечения над Z позволяет поднять соответствие до соответствия либо в V, либо в $X - Z$.

(2)

Последовательность получается из декартовых и кодекартовых квадратов пучков множеств

$$\begin{array}{ccc} F_n(-, (V - Z, W \times_X V - Z \cap (W \times_X V))) & \longrightarrow & F_n(-, (V, W \times_X V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_n(-, (X - Z, W - Z \cap W)) & \longrightarrow & F_n(-, (X, W)). \end{array}$$

Кодекартовость сводится к тому, что над локальной гензелевой схемой носитель Z фрейм-соответствия тоже будет локальной гензелевой схемой, и поэтому над ним квадрат Нисневича станет тривиальным. Наличие сечения над Z

позволяет поднять соответствие до соответствия либо в $(V, W \times_X V)$, либо в $(X - Z, W - Z \cap W)$.

$\square$

Определение 1.7.3. *Предучок $\mathcal{G}$ абелевых групп с $\mathbb{Z}\mathrm{F}_*$-трансферами называется **пред-квазистабильным**, если предпучки $H^i(C_*\mathcal{G})$ квазистабильны (и, очевидным образом, гомотопически инвариантны).*

Замечание 1.7.4. *Категория пред-квазистабильных пучков замкнута относительно пределов, копределов и расширений.*

Замечание 1.7.5. *Пучки вида $\mathbb{Z}F((X,U))$ пред-квазистабильны. Это последствие того, что пучки $F((X,U))$ квазистабильны «с точностью до наивной $\mathbb{A}^1$-гомотопии».*

Лемма 1.7.6. *Пусть*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность пред-квазистабильных пучков Нисневича абелевых групп с $\mathbb{Z}\mathrm{F}_*$-трансферами. Тогда морфизмы

$$C_*\mathcal{F}_1 \to C_*\mathcal{F}_2 \to C_*\mathcal{F}_3$$

включаются в выделенный треугольник в производной категории комплексов пучков Нисневича с трансферами.

Доказательство. Точная последовательность пучков задает последовательность комплексов предпучков

$$0 \to C_*\mathcal{F}_1 \to C_*\mathcal{F}_2 \to C_*\mathcal{F}_3 \to 0,$$

в которой когомологиями выступают предпучки вида $C_*(\mathcal{G})$, где $\mathcal{G}$ — квазистабильный предпучок с $(\mathcal{G})_{Nis} = 0$. По Лемме 1.7.7 ниже, предпучки $H^i(C_*\mathcal{G})_{Nis} = 0$.

Значит, последовательность комплексов предпучков

$$0 \to C_*\mathcal{F}_1 \to C_*\mathcal{F}_2 \to C_*\mathcal{F}_3 \to 0$$

имеет ацикличные комплексы когомологий, будучи рассмотренной как последовательность комплексов пучков Нисневича. Несложно связать такую последовательность цепочкой, например, из трех покомплексных квазиизоморфизмов с точной последовательностью комплексов. Точная последовательность комплексов соответствует треугольнику в производной категории. $\square$

Лемма 1.7.7. *Пусть* $\mathcal{G}$ — *пред-квазистабильный предпучок на категории* $\mathbb{Z}\mathrm{F}_*$, *такой, что* $\mathcal{G}_{Nis} = 0$. *Тогда комплекс пучков* $(C_*\mathcal{G})_{Nis}$ *ацикличен.*

Доказательство. Докажем, что для каждого i, $H^i(C_*\mathcal{G})_{Nis} = 0$. Проведем индукцию по i. Для $i < 0$ утверждение очевидно. Предположим, что это известно для всех $j < i$. Тогда $\tau_i(C_*\mathcal{G})_{Nis} \to C_*\mathcal{G}_{Nis}$ — квазиизоморфизм, где

$$\tau_i(C_*\mathcal{G})_{Nis} = \cdots \to C_{i-1}\mathcal{G}_{Nis} \to Z_i(C_*\mathcal{G})_{Nis} \to 0 \to \cdots .$$

При этом есть очевидный морфизм $f : \tau_i(C_*\mathcal{G})_{Nis} \to H^i(C_*\mathcal{G})_{Nis}[i]$, индуцирующий изоморфизм на i-ом пучке когомологий. Достаточно доказать, что этот морфизм f равен 0. Заметим, что он задает морфизм в $D^-(Sm_{Nis})$ из $(C_*\mathcal{G})_{Nis}$ в $H^i(C_*\mathcal{G})_{Nis}[i]$.

Предпучки $H^i(C_*\mathcal{G})$ являются гомотопически инвариантными и квазистабильными предпучками с $\mathbb{Z}\mathrm{F}_*$-трансферами. По [GP2, Теорема 1.1], $H^r(-, H^i(C_*\mathcal{G})_{Nis})$ гомотопически инвариантны для всех r.

Теперь, по [VoLec, Предложение 12.19] для обычных пучков Нисневича,

$$\begin{array}{c} Hom_{D^-_{Nis}}((C_*\mathcal{G})_{Nis}, H^i(C_*\mathcal{G})_{Nis}[i]) \\ \| \\ Hom_{D^-_{Nis}}(G_{Nis}, H^i(C_*\mathcal{G})_{Nis}[i]) \\ \| \\ Hom_{D^-_{Nis}}(0, H^i(C_*\mathcal{G})_{Nis}[i]) \\ \| \\ 0, \end{array}$$

поскольку $G_{Nis} = 0$. Следовательно, $f = 0$, и $H^i(C_*\mathcal{G})_{Nis} = 0$. Переход индукции доказан.

□

Докажем гомотопическую версию треугольника Майера-Виеториса:

Предложение 1.7.8. *Пусть*

$$\begin{tikzcd} V - Z \arrow[r, hook] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ X - Z \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

— *квадрат Нисневича в* Sm/k.

1. *Естественные морфизмы*

$$M_{fr}(V-Z) \to M_{fr}(X-Z) \vee M_{fr}(V) \to M_{fr}(X),$$

индуцированные вложениями, образуют выделенный треугольник в стабильной гомотопической категории симплициальных пучков Нисневича.

2. *Пусть* $W \subset X$ *— открытая подсхема. Естественные морфизмы*

$$\begin{array}{c} M_{fr}((V-Z, W\times_X V - Z\cap(W\times_X V))) \\ \Big\downarrow \\ M_{fr}((X-Z, W-Z\cap W)) \vee M_{fr}((V, W\times_X V)) \\ \Big\downarrow \\ M_{fr}((X,W)), \end{array}$$

индуцированные вложениями пар, образуют выделенный треугольник в стабильной гомотопической категории симплициальных пучков Нисневича.

Доказательство. Докажем случай пар, случай пространств доказывается аналогично.

По Предложению 1.7.1, морфизм комплексов предпучков абелевых групп

$$\begin{array}{c} \frac{C_*\mathbb{Z}\mathrm{F}((X-Z,W-Z\cap W))\oplus C_*\mathbb{Z}\mathrm{F}((V,W\times_X V))}{C_*\mathbb{Z}\mathrm{F}((V-Z,W\times_X V-Z\cap(W\times_X V)))} \\ \Big\downarrow \\ C_*\mathbb{Z}\mathrm{F}((X,W)) \end{array} \tag{9}$$

это локальный квазиизоморфизм.

Аналогично [GNP, Раздел 8], S^1-спектры

$$\begin{aligned} &LM_{fr}((X-Z, W-Z\cap W)),\ LM_{fr}((V, W\times_X V)), \\ &\qquad LM_{fr}((V-Z, W\times_X V - Z\cap(W\times_X V))) \text{ and } LM_{fr}((X,W)) \end{aligned}$$

это S^1-спектры Эйленберга—Маклейна комплексов

$$C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}((X-Z, W-Z\cap W)),\ C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}((V, W\times_X V)),$$
$$C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}((V-Z, W\times_X V - Z\cap(W\times_X V)))\ \text{и}\ C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}((X,W))$$

соответственно. Поэтому морфизм

$$\frac{LM_{fr}((X-Z, W-Z\cap W))\oplus LM_{fr}((V, W\times_X V))}{LM_{fr}((V-Z, W\times_X V - Z\cap(W\times_X V)))}\to LM_{fr}((X,W)),$$

индуцированный (9), это локальная стабильная слабая эквивалентность, и значит ей является морфизм

$$\frac{\mathbb{Z}M_{fr}((X-Z, W-Z\cap W))\oplus \mathbb{Z}M_{fr}((V, W\times_X V))}{\mathbb{Z}M_{fr}((V-Z, W\times_X V - Z\cap(W\times_X V)))}\to \mathbb{Z}M_{fr}((X,W)),$$

по Теореме 1.2.1. S^1-спектры

$$M_{fr}((X-Z, W-Z\cap W)),\ M_{fr}((V, W\times_X V)),$$
$$M_{fr}((V-Z, W\times_X V - Z\cap(W\times_X V))),\ M_{fr}((X,W))$$

(-1)-связны, поскольку являются спектрами Сегала (см. [GP, Определение 5.2], [Seg, Предложение 1.4]).

Стабильная теорема Уайтхеда [Sch, II.6.30] означает, что морфизм

$$\frac{M_{fr}((X-Z, W-Z\cap W))\vee M_{fr}((V, W\times_X V))}{M_{fr}((V-Z, W\times_X V - Z\cap(W\times_X V)))}\to M_{fr}((X,W)) \tag{10}$$

это локальная стабильная слабая эквивалентность.

□

2 Кобордизм-фрейм-соответствия

2.1 Определение кобордизм-фрейм-соответствий и формулировка теоремы сравнения нулевых когомологий комплекса линейных кобордизм-фрейм-соответствий из pt в $\mathbb{G}_m^{\wedge m}$ с группой K_m Милнора

Вначале напомним некоторые определения основных объектов.

На протяжении данной главы, пусть k — поле характеристики 0.

Определение 2.1.1. *Пусть $Z \subseteq X$ — замкнутая подсхема. Этальной окрестностью Z в X называется этальный морфизм $e\colon W \to X$, такой, что $W \times_X Z \to Z$ — изоморфизм.*

Также в такой ситуации этальной окрестностью может называться сама схема W, при этом морфизм e подразумевается.

Определение 2.1.2. *Пусть e, e' — две этальные окрестности Z в X. Окрестность e' называется утончением e, если e' пропускается через e, то есть существует такой морфизм f (который автоматически этален), что $e' = e \circ f$.*

Следующее определение является основным для теории фрейм-соответствий и изначально дано Воеводским в [VoNote, раздел 2] как "глобальное фрейм-соответствие". Также оно является частным случаем $\mathbb{B} = (X, \emptyset)$ Определения 1.1.7, приведенного в данной работе.

Определение 2.1.3. *Пусть X, Y — схемы. Явным фрейм-соответствием уровня n называется набор данных:*

- *Замкнутое подмножество $Z \subseteq \mathbb{A}^n_X$, конечное над X, называемое* ***носителем*** *данного соответствия;*
- *Этальная окрестность $W \supset Z$ в $\mathbb{A}^n_X$;*
- *Морфизм схем $\varphi\colon W \to \mathbb{A}^n$, такой, что подмножество $Z \subseteq W$ является прообразом нуля относительно φ;*
- *Морфизм $g\colon W \to Y$.*

Обозначим кратко такое соответствие набором (Z, W, φ, g), или одним символом c.

Два явных соответствия называются эквивалентными:

$$(Z, W, \varphi, g) \sim (Z, W', \varphi', g'),$$

если они имеют общий носитель Z и существует W'', являющаяся общим утончением W и W' (что подразумевает морфизмы $i\colon W'' \to W$ и $i'\colon W'' \to W'$ над $\mathbb{A}^n_X$), такая, что

$$\varphi \circ i = \varphi' \circ i',$$

$$g \circ i = g' \circ i'.$$

Множество $Fr_n(X, Y)$ фрейм-соответствий уровня n из X в Y — это множество классов эквивалентности по этому отношению эквивалентности.

Замечание 2.1.4. *Множество $Fr_n(X,Y)$ естественным образом обладает отмеченной точкой — соответствием $\varnothing$, единственным классом соответствий с пустым носителем.*

Замечание 2.1.5. *На основе этого определения Воеводский в [VoNote] определяет пунктированные множества $Fr(X,Y)$. На этой же основе в [GP, определения 2.8, 8.3, 8.5] определены группы линейных и стабильных линейных фрейм-соответствий $\mathbb{Z}F_n(X,Y)$, $\mathbb{Z}F(X,Y)$ соответственно. Все эти определения воспроизведены в [Nes, раздел 1]. Эти объекты используются в настоящей работе.*

Введем аналогичное определение, центральное для настоящей работы.

Определение 2.1.6. *Пусть X — гладкое многообразие над полем k характеристики 0, а Y — предпучок на категории гладких многообразий над k. Явным кобордизм-фрейм-соответствием уровня (n,N) из X в Y называется следующий набор данных:*

- *Замкнутое подмножество $Z \subseteq \mathbb{A}^n_X$, конечное над X;*
- *Этальная окрестность $W \supset Z$ в $\mathbb{A}^n_X$;*
- *Регулярное отображение $\varphi\colon W \to \tau_{n,N}$, где $\tau_{n,N}$ — тотальное пространство тавтологического расслоения $\tau^{\mathrm{Sh}}_{n,N}$ над грассманианом $\mathrm{Gr}_{n,N}$. При этом требуется, чтобы подмножество $Z \subseteq W$ являлось прообразом нулевого сечения относительно φ;*
- *Морфизм $g\colon W \to Y$, или же $g \in \Gamma(W,Y)$.*

Обозначим кратко такое соответствие набором (Z,W,φ,g), или одним символом c.

Два явных соответствия называются эквивалентными

$$(Z,W,\varphi,g) \sim (Z,W',\varphi',g'),$$

если они имеют общий носитель Z, и существует W'', являющаяся общим измельчением W и W' (что подразумевает морфизмы $i\colon W'' \to W$ и $i'\colon W'' \to W'$ над $\mathbb{A}^n_X$), такая, что $\varphi \circ i = \varphi' \circ i'$, $g \circ i = g' \circ i'$. Множество $Fr^{\mathrm{cob}}_{n,N}(X,Y)$ кобордизм-фрейм-соответствий уровня (n,N) из X в Y — множество классов эквивалентности по этому отношению эквивалентности.

Замечание 2.1.7. *В то время, как регулярные отображения $X \to \mathrm{Gr}_{n,N}$ соответствуют эпиморфизмам $\mathcal{O}^N_X \to E$, где E — локально свободный пучок ранга n, регулярные отображения $X \to \tau_{n,N}$ соответствуют тем же данным (поскольку есть канонический морфизм $\tau_{n,N} \to \mathrm{Gr}_{n,N}$), и вдобавок к ним выбору сечения $s \in \Gamma(X,E)$.*

Замечание 2.1.8. *Обозначение (Z, W, φ, g) краткое, но неявное, потому что «$W \supset Z$ — этальная окрестность в $\mathbb{A}^n_X$» подразумевает наличие этального морфизма $W \to \mathbb{A}^n_X$, и замкнутого вложения $Z \to W$, делающего треугольник коммутативным:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & W \arrow[dl] \\ \mathbb{A}^n_X & \end{tikzcd} .$$

Определение 2.1.9. *Множество стабильных кобордизм-фрейм-соответствий из X в Y $Fr^{\mathrm{cob}}(X, Y)$ — индуктивный предел $Fr^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X, Y)$ при $N \to \infty$ и $n \to \infty$ относительно следующих отображений:*

по N: $\tau_{n,n+N} \to \tau_{n,n+N+1}$, задаваемого на представленных функторах при помощи естественного преобразования

$$(\mathcal{O}^{n+N} \twoheadrightarrow E, s) \mapsto (\mathcal{O}^{n+N+1} \twoheadrightarrow E, s),$$

где последняя координата полученного эпиморфизма — ноль;

по n: $(Z, W, \varphi, g) \mapsto (Z', W', \varphi', g')$, где:

- *Подмножество Z' задаётся как образ $Z \hookrightarrow \mathbb{A}^n \overset{i_2}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}^{1+n}$, где i_2 — вложение в качестве второго сомножителя, первая его координата — ноль;*
- *Окрестность W' задаётся как $\mathbb{A}^1 \times W$;*
- *Регулярное отображение φ', если φ задавалось $\mathcal{O}^{n+N} \twoheadrightarrow E$ и $s \in \Gamma(X, E)$, задаётся $\mathcal{O}^{1+n+N} \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{n+N} \twoheadrightarrow \mathcal{O} \oplus E$ и сечением (x_{-n-1}, s), где x_{-n-1} — координатная функция $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{A}^1 \times W \to \mathbb{A}^1$;*
- *Морфизм g' — это $\mathbb{A}^1 \times W \to W \to Y$.*

Замечание 2.1.10. *В этом определении необходимо проверить корректность: то, что новое Z высекается как множество нулевым сечением, верно, так как одна из координат высекает W в $\mathbb{A}^1 \times W$, а остальные — Z в W. Кроме того, чтобы переходить к пределу по n и N одновременно, необходимо проверить, что отображения перехода коммутируют друг с другом. Это достигается тем, что одно наращивает координаты слева, а другое справа.*

Определение 2.1.11. *Группа $\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X, Y)$ линейных кобордизм-фрейм-соответствий уровня $(n, n+N)$ из X в Y — абелева группа с образующими $Fr^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X, Y)$ и соотношениями*

$$[(Z, W, \varphi, g)] + [(Z', W', \varphi', g')] = [(Z \amalg Z', W \amalg W', \varphi \amalg \varphi', g \amalg g')] .$$

В частности, требуется, чтобы $Z \cap Z' = \varnothing$.

Замечание 2.1.12. *$\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X,Y)$ также является свободной абелевой группой, в которой в качестве базиса выступает множество тех соответствий, носитель которых связен.*

Определение 2.1.13. *Группа $\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,Y)$ линейных стабильных кобордизм-фрейм-соответствий из X в Y — индуктивный предел групп $\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}_{n,n+N}(X,Y)$ при $N \to \infty$ и $n \to \infty$.*

Подставляя в качестве X из предыдущего определения члены косимплициального объекта $\Delta^{\bullet}_k \times X$, получим комплекс $C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,Y)$, который мы будем обозначать $C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,Y)$.

Лемма 2.1.14. *Внутри группы $C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,{\mathbb{G}_m}^{\{1\ldots m\}})$ сумма подгрупп*

$$C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}\big(X,{\mathbb{G}_m}^{\{1\ldots\widehat{i}\ldots m\}}\big)$$

выделяется прямым слагаемым.

Доказательство. Обозначим идемпотентное соответствие

$$\mathbb{G}_m \to \mathrm{pt} \xrightarrow{1} \mathbb{G}_m$$

через e. На ${\mathbb{G}_m}^{\times m}$ имеется m идемпотентных соответствий, по одному на каждый сомножитель. Будем обозначать их $e_1,\ldots,e_m$. Заметим, что e_i коммутируют между собой, так как произведение любого набора $\{e_i, i \in I\}$ получается из идемпотентного морфизма

$${\mathbb{G}_m}^I \to \mathrm{pt} \xrightarrow{(1\ldots1)} {\mathbb{G}_m}^I$$

добавлением тождественных сомножителей. В частности, произведения e_i также идемпотентны. То же можно сказать про $(1-e_i)$. Композицией с этими идемпотентами получаются соответствующие идемпотенты на

$$C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}\big(X,{\mathbb{G}_m}^{\{1\ldots m\}}\big).$$

Идемпотент

$$1-\prod_{i=1}^{m}(1-e_i)$$

выделяет прямым слагаемым сумму подгрупп $C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,{\mathbb{G}_m}^{\{1\ldots\widehat{i}\ldots m\}})$, соответственно, идемпотент

$$\prod_{i=1}^{m}(1-e_i)$$

выделяет прямым слагаемым его дополнение. □

Определение 2.1.15. *В соответствии с [SV] и [Nes], прямое дополнение в*

$$C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}\big(X, {\mathbb{G}_m}^{\{1\dots m\}}\big)$$

к сумме подгрупп

$$C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}\big(X, {\mathbb{G}_m}^{\{1\dots\widehat{i}\dots m\}}\big)$$

(выделяемое идемпотентом $\prod_{i=1}^m (1-e_i)$ из доказательства выше) обозначается через $C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m})$.

Подробнее рассмотрим случай, когда $X = \mathrm{pt}$ — одна рациональная точка: основной результат настоящей работы состоит в отождествлении в этом случае нулевой группы когомологий последнего комплекса с m-ой K-группой поля k. (Напомним, что Нешитов в [Nes] отождествил нулевые когомологии комплекса $\mathbb{Z}F(\Delta_k^\bullet; {\mathbb{G}_m}^{\wedge m})$ с K-группой Милнора–Витта $K_m^{MW}(k)$.)

Чтобы сформулировать более полное утверждение, введем структуру внешнего произведения на группах $H_0(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X, Y))$. Эта конструкция аналогична [Nes, раздел 3], но использует отображение прямой суммы.

Определение 2.1.16. *Пусть*

$$\begin{aligned} c &= (Z, W, \varphi, g) \in Fr^{\mathrm{cob}}_{n,N}(X, Y),\\ c' &= (Z', W', \varphi', g') \in Fr^{\mathrm{cob}}_{n',N'}(X', Y'). \end{aligned}$$

Тогда их внешним произведением называется явное кобордизм-фрейм-соответствие

$$c \times c' = \big((Z\times Z', W\times W', i_{((n,N),(n',N'))}) \circ (\varphi\times\varphi'), g\times g' \in Fr^{\mathrm{cob}}_{n+n',N+N'}(X\times X', Y\times Y')\big),$$

где морфизм $i_{((n,N),(n',N'))}\colon \tau_{n,N}\times\tau_{n',N'} \to \tau_{n+n',N+N'}$ определен на представленных функторах при помощи взятия прямой суммы следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} \tau_{n,N}\times\tau_{n',N'} & & \big((p\colon \mathcal{O}^{n+N} \twoheadrightarrow E, s), (p'\colon \mathcal{O}^{n'+N'} \twoheadrightarrow E', s')\big) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \tau_{n+n',N+N'} & & \big(p\oplus p'\circ T_{n,N,n',N'}\colon \mathcal{O}^{n+n'+N+N'} \twoheadrightarrow E\oplus E', (s,s')\big). \end{array}$$

Здесь

$$T_{n,N,n',N'}\colon$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^{n+N+n'+N'} \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathcal{O}^{n} \oplus \mathcal{O}^{N} \oplus \mathcal{O}^{n'} \oplus \mathcal{O}^{N'} \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathcal{O}^{n} \oplus \mathcal{O}^{n'} \oplus \mathcal{O}^{N} \oplus \mathcal{O}^{N'} \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathcal{O}^{n+n'+N+N'}
\end{tikzcd}$$

меняет местами два средних слагаемых.

Замечание 2.1.17. *Это произведение не согласовано с отображениями стабилизации и поэтому не задает умножения на стабильных группах, но это верно с точностью до гомотопии, поэтому верна следующая лемма.*

Лемма 2.1.18. *Внешнее произведение явных кобордизм-фрейм-соответствий корректно задает ассоциативную операцию внешнего произведения*

$$H_0(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X,Y)) \otimes H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X',Y')\big) \to H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(X \times X', Y \times Y')\big).$$

Теорема 2.1.19. *Сопоставление символу* $\{g_1,\dots,g_m\}$ *соответствия уровня* 0, *то есть, отображения*

$$\widetilde{\sigma}_m(g_1,\dots,g_m)\colon \mathrm{pt} \to \mathbb{G}_m^m,$$

задаваемого координатами $(g_1,\dots,g_m)$, *с последующим взятием класса этого соответствия в* $H_0(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt},\mathbb{G}_m^{\wedge m}))$ *(сперва по стабилизации, потом по факторизации при переходе от* $\mathbb{G}^m$ *к* $\mathbb{G}^{\wedge m}$, *и, наконец, по отношению гомотопности), корректно задаёт гомоморфизм абелевых групп*

$$\sigma_m\colon K_m^M(k) \to H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt},\mathbb{G}_m^{\wedge m})\big).$$

Вместе эти гомоморфизмы образуют гомоморфизм градуированных колец

$$\oplus\sigma_m\colon \bigoplus K_m^M(k) \to \bigoplus H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt},\mathbb{G}_m^{\wedge m})\big).$$

Этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Следующее определение понадобится для того, чтобы связать вычисляемые в Теореме Сравнения гомологии с гомотопическими группами спектра кобордизмов.

Определение 2.1.20. *(Аналогично [GP, Определение 5.2])*
кобордизм-фрейм-мотив $\mathcal{M}^{cob}_{fr}(\mathcal{G})$ *пунктированного пучка Нисневича* $\mathcal{G}$ *— это* S^1*-спектр Сегала*

$$(C_*\mathcal{F}r^{cob}(-,\mathcal{G}), C_*\mathcal{F}r^{cob}(-,\mathcal{G}\wedge S^1),_*\mathcal{F}r^{cob}(-,\mathcal{G}\wedge S^2),\dots),$$

получаемый из Γ*-пространства* $K \mapsto C_{\mathcal{F}}r^c ob(-,\mathcal{G}_+ \wedge K)$ *при помощи процедуры, описанной в [Seg, Определение 1.3 и рассуждения сразу после] как* $A \mapsto \mathbf{B}A$.

В случае, если $\mathcal{G} = spc(Y) = Hom(-,Y)$ *— пучок, представленный* Y, $\mathcal{M}^{cob}_{fr}(\mathcal{G})$ *обозначается также как* $M^{cob}_{fr}(Y)$.

Лемма 2.1.21. *(Аналог части [GNP, Теорема 1.2])*
Для любого целого $m \geqslant 0$*, для любого* $U \in Sm/k$ *имеем*

$$\pi_*(\mathbb{Z}M^{cob}_{fr}(X\wedge T^{\wedge m})(U)) = H_*(\mathbb{Z}\mathrm{F}(\Delta^\bullet \times U, X_+ \wedge T^m)) = H_*(C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(U, X_+\wedge T^m)).$$

Доказательство. Получается дословным переносом [GP, Приложение B] на случай кобордизм-фрейм-соответствий. □

2.2 Сравнение кобордизм-фрейм-соответствий и фрейм-соответствий

В этом разделе используются некоторые обозначения и определения из статьи [Nes].

Построим для всевозможных $N \geqslant n$ отображения

$$cob_{n,N} : Fr_n(X,Y) \to Fr^{cob}_{n,N}(X,Y),$$

естественные по объектам X и Y (в категориях многообразий и предпучков соответственно), и которые в совокупности согласованы с отображениями стабилизации.

Зададим образ соответствия (Z,W,φ,g) как $(Z,W,i_{n,N}\circ\varphi,g)$, где $i_{n,N}$ определяется следующим образом: Точка $* \in Gr_{n,N}$ задаётся проекцией на первые n координат $k^N \to k^n$. Поэтому слой $\tau^{Sh}_{N,n}|_*$ тавтологического расслоения на $Gr_{N,n}$ канонически изоморфен k^n. Значит, слой тотального пространства $\mathbb{A}^n \simeq \tau_{n,N} \times_{Gr_{n,N}} *$ канонически. Беря композицию этого отождествления с вложением слоя, получаем

$$i_{n,N} : \mathbb{A}^n \simeq \tau_{n,N} \times_{Gr_{n,N}} * \hookrightarrow \tau_{n,N}.$$

Несложная проверка согласованности отображений $cob_{n,N}$ и отображений стабилизации, а также согласованности с дополнительными соотношениями аддитивности на $\mathbb{Z}F$ и $\mathbb{Z}F^{cob}$ позволяет определить естественные отображения

$$cob : Fr(X,Y) \to Fr^{cob}(X,Y)$$

и естественные гомоморфизмы

$$\mathbb{Z}cob : \mathbb{Z}F(X,Y) \to \mathbb{Z}F^{cob}(X,Y).$$

Тем самым, имеется гомоморфизм

$$\widetilde{\mathrm{H_0\text{-}cob}}_{X,Y} : H_0(C_*\mathbb{Z}F(X,Y) \to H_0(C_*\mathbb{Z}F^{cob}(X,Y),$$

и, для каждого m, главное прямое слагаемое в $\widetilde{\mathrm{H_0\text{-}cob}}_{pt,\mathbb{G}_m^{\times m}}$:

$$\mathrm{H_0\text{-}cob} : H_0(C_*\mathbb{Z}F(pt,\mathbb{G}_m^{\wedge m}) \to H_0(C_*\mathbb{Z}F^{cob}(pt,\mathbb{G}_m^{\wedge m}).$$

Вскоре мы докажем, что этот гомоморфизм сюръективен.

Для этого параметризуем естественным образом данные $Fr^{cob}_{n,N}(X,Y)$, у которых расслоение E тривиально, данными с выбранной тривиализацией; исследуем свойства этой параметризации.

Определение 2.2.1. $Fr^{cob,triv}_{n,N}(X,Y)$ *— множество классов наборов* (Z,W,A,v,g)*, где* Z,W *и* g *такие же, как в определении 2.1.6, и отношение эквивалентности определяется аналогично (по измельчению* W*), но вместо* φ *используются следующие «численные» данные: матрица* A *размера* $N \times n$ *и ранга* n *(во всех точках) и вектор* v *— столбец высоты* n*. Элементы* A *и* v *лежат в кольце* $k[W]$*. Требуется, чтобы* $\{v = 0\} = Z$*.*

По таким данным легко построить морфизм $\varphi_{A,v} : W \to \tau_{n,N}$, взяв в качестве расслоения E тривиальное расслоение $\mathcal{O}^n$, в качестве эпиморфизма взяв линейный оператор $\mathcal{O}^N \to \mathcal{O}^n$, задаваемый A, который эпиморфен по условию на ранг; в качестве сечения s берётся сечение, задаваемое вектором v. Фактически, выбор прообраза $\varphi = (\mathcal{O}^N \twoheadrightarrow E, s)$ при отображении $(A,v) \to \varphi_{A,v}$ равносилен выбору тривиализации E. Применительно к $Fr^{cob,triv}_{n,N}(pt,Y)$, W — сколь угодно малая окрестность конечного числа точек. Но любое расслоение E будет тривиализуемо на достаточно маленькой W. Тем самым,

Лемма 2.2.2. *Если* $X = pt$*, то отображение*

$$Forget_{n,N} : Fr^{cob,triv}_{n,N}(X,Y) \to Fr^{cob}_{n,N}(X,Y)$$

сюръективно.

При $N > n$ метод Гаусса приводит посредством применения элементарных операций первого рода над столбцами A к матрице проекции на первые n координат. Каждой элементарной операции $t_{i,j}(\lambda)$ соответствует элементарная операция $t_{i,j}(\lambda x)$ над $k[W][x]$. Рассмотрев элемент

$$\big(Z \times \mathbb{A}^1, W \times \mathbb{A}^1, A \cdot t_{i,j}(\lambda x), v, g\big) \in Fr_{n,N}^{cob,triv}(\mathbb{A}^1, Y),$$

увидим, что он осуществляет гомотопию между (Z, W, A, v, g) и $(Z, W, A \cdot t_{i,j}(\lambda), v, g)$.

Из этого и предыдущего замечаний следует

$$[(Z, W, A, v, g)] = [(Z, W, P, v, g)] \in \pi_0\left(Fr_{n,N}^{cob,triv}(X \times \Delta_k^\bullet, Y)\right), \qquad (11)$$

где P — матрица проекции на первые n координат.

Заметим, что, если обозначить соответствующее v по универсальному свойству отображение $W \to \mathbb{A}^n$ за a_v, то

$$\varphi_{P,v} = i_{n,N} \circ a_v.$$

Тогда

$$forget_{n,N}\,(Z, W, A, v, g) = cob_{n,N}(Z, W, a_v, g). \qquad (12)$$

Следствие 2.2.3. *Гомоморфизм* $\widetilde{\mathrm{H}_0\text{-cob}}_{X,Y}$ *сюръективен, если* $X = pt$. *Следовательно, гомоморфизм* H_0-cob *сюръективен, как его прямое слагаемое.*

Доказательство. Отображения $Forget_{n,N}$ сюръективны по Лемме 2.2.2. Допустим, наш элемент равен

$$Forget_{n,N}(Z, W, A, v, g).$$

Из Равенства 11 получаем гомотопность «тривиальному» соответствию

$$Forget_{n,N}(Z, W, P, v, g).$$

Из Равенства 12, оно лежит в образе $cob_{n,N}$. □

Кроме того, замена базиса в E дает другой параметр с тем же образом под действием $Forget_{n,N}$. Это отражено в равенстве:

$$\forall M \in GL_n(k[W]), forget_{n,N}(Z, W, A, v, g) = forget_{n,N}(Z, W, MA, Mv, g). \qquad (13)$$

Следующую лемму можно понимать как утверждение о том, что для $X = pt$, для класса в $H_0(\mathbb{Z}F^{cob}(pt, Y))$ не имеет значения дифференциал отображения фрейминга φ.

Лемма 2.2.4. *Для $X = pt$,*

$$\forall M \in GL_n(k), cob_{n,N}(Z, W, a_v, g) \sim cob_{n,N}(Z, W, a_{Mv}, g),$$

то есть, их классы в $H_0(\mathbb{Z}F^{cob}(X, Y)$ равны.

$$\begin{aligned}
\mathrm{cob}_{n,N}(Z, W, a_v, g) &\overset{\text{равенство 12}}{=} \mathrm{Forget}_{n,N}(Z, W, P, v, g) \\
&\overset{\text{равенство 13}}{=} \mathrm{Forget}_{n,N}(Z, W, MP, Mv, g) \\
&\overset{\text{равенство 11}}{\sim} \mathrm{Forget}_{n,N}(Z, W, P, Mv, g) \\
&\overset{\text{равенство 12}}{=} \mathrm{cob}_{n,N}(Z, W, a_{Mv}, g).
\end{aligned}$$

Это позволяет привести многие соответствия к отображениям:

Предложение 2.2.5. *Если $X = pt$, Y — открытое подмногообразие в аффинном пространстве, то каждое кобордизм-фрейм-соответствие Z, W, φ, g с $Z \simeq Spec(k)$ — одной рациональной точкой, высекаемой трансверсально нулевым сечением, имеет тот же класс в $H_0(C_*\mathbb{Z}F^{cob}(pt, Y))$, что отображение (соответствие уровня 0) $g|_Z$.*

Доказательство. По Следствию 2.2.3, класс нашего кобордизм-фрейм-соответствия равен образу какого-то фрейм-соответствия с теми же Z и $g|_Z$ относительно отображения$\widetilde{H_0 - cob}_{X,Y}$.

По [Nes][4.10] (где в действительности доказывается эквивалентность одному соответствию уровня 1, а не их сумме, причём с тем же $g|_Z$), сводим к случаю соответствия уровня 1. По лемме [Nes][5.2], это соответствие эквивалентно как кобордизм-фрейм-соответствие, соответствию вида

$$\mathbb{A}^1_k, \{\mu(t - \lambda) = 0\}, i_{1,1} \circ a_{\mu(t-\lambda)}, g(\{\mu(t - \lambda) = 0\}).$$

По Лемме 2.2.4, μ можно считать равным 1. Далее легко построить гомотопию, переводящую λ в 0. В результате получаем в точности образ соответствия

$$(Spec(k), Spec(k), id, g(Z))$$

уровня 0 под действием отображения, увеличивающего n. □

Естественное преобразование $\widetilde{\mathrm{H}_0\text{-}\mathrm{cob}}_{-,-}$ согласовано с внешними произведениями на фрейм-соответствиях и кобордизм-фрейм-соответствиях:

Лемма 2.2.6. *Имеются операции внешнего произведения на группах $H_0(C_*\mathbb{Z}F(-,-))$ (см [Nes, Раздел 3]), и $H_0(C_*\widetilde{\mathbb{Z}F^{cob}}(-,-))$ (см. 2.1.16). Они совместимы с естественным преобразованием $\mathrm{H}_0\text{-}\mathrm{cob}_{-,-}$, что означает, что следующий квадрат коммутативен:*

$$\begin{tikzcd}
H_0(C_*\mathbb{Z}F(X,Y)) \otimes H_0(C_*\mathbb{Z}F(X',Y')) \arrow[r, "m_F"] \arrow[d, "H_0-cob\otimes H_0-cob"'] & H_0(C_*\mathbb{Z}F(X\times X', Y\times Y')) \arrow[d, "H_0-cob"] \\
H_0(C_*\mathbb{Z}F^{cob}(X,Y)) \otimes H_0(C_*\mathbb{Z}F^{cob}(X',Y')) \arrow[r, "m_{F^{cob}}"'] & H_0(C_*\mathbb{Z}F^{cob}(X\times X', Y\times Y')).
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Аналогично [Nes, Раздел 3]. Согласованность следует из коммутативности квадрата

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{n'} \arrow[r, "i_{n,N}\times i_{n',N'}"] \arrow[d] & \tau_{n,N} \times \tau_{n',N'} \arrow[d] \\
\mathbb{A}^{n+n'} \arrow[r, "i_{n+n',N+N'}"] & \tau_{n+n',N+N'}.
\end{tikzcd}$$

□

Следствие 2.2.7. *Определенное выше умножение задает структуру градуированного кольца с единицей на*

$$\bigoplus_{m\geqslant 0} H_0(\mathbb{Z}F^{cob}(pt,\mathbb{G}_m^{\wedge m})),$$

и отображения $H_0 - cob$ задают гомоморфизм градуированных колец с единицей

$$\bigoplus_{m\geqslant 0} H_0(\mathbb{Z}F(pt,\mathbb{G}_m^{\wedge m})) \to \bigoplus_{m\geqslant 0} H_0(\mathbb{Z}F^{cob}(pt,\mathbb{G}_m^{\wedge m})).$$

Доказательство. Единицей является тождественное отображение $pt \to pt$. Оно переходит в себя под действием cob. □

2.3 Доказательство теоремы сравнения

План доказательства. *В этой части мы докажем, что σ_m из теоремы 2.1.19 являются изоморфизмами.*

$$\sigma_m : K_m^M(k) \simeq H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt},\mathbb{G}_m^{\wedge m})\big).$$

Доказательство следует такому же общему плану, как доказательство Воеводского–Суслина (см. [SV, теорема 3.4]) для случая соответствий Cor, *и доказательство Нешитова (см [Nes]) для соответствий* $\mathbb{Z}F$.

Вначале проверим в предложении 2.3.1, что введенные в формулировке теоремы 2.3.1 отображения корректно определены и задают морфизм градуированных колец.

После этого в предложении 2.3.3 докажем, что отображение σ_m *сюръективно.*

Далее для каждого m *в предложении 2.3.5 зададим корректно определенное отображение*

$$\rho_m \colon H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})\big) \to K_m^M(k).$$

Они действуют в обратную σ_m *сторону:*

$$\sigma_m \colon K_m^M(k) \to H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})\big),$$

и ρ_m *является претендентом на роль обратного отображения к* σ_m. *Из определений легко получится, что* $\rho_m \circ \sigma_m = \mathrm{id}$. *Про композицию в другом порядке* $\sigma_m \circ \rho_m$ *не так очевидно, но благодаря тому, что* σ_m *сюръективен, они оказываются взаимно обратными изоморфизмами.*

Построим правый обратный σ_m к ρ_m.

Предложение 2.3.1. *Сопоставление символу* $\{g_1, \ldots, g_m\}$ *соответствия уровня* 0, *то есть отображения*

$$\widetilde{\sigma}_m(g_1, \ldots, g_m) \colon \mathrm{pt} \to \mathbb{G}_m^m,$$

задаваемого координатами $(g_1, \ldots, g_m)$, *с последующим взятием класса этого соответствия в* $H_0(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m}))$ *(сперва по стабилизации, потом по факторизации при переходе от* $\mathbb{G}^m$ *к* $\mathbb{G}^{\wedge m}$, *и, наконец, по отношению гомотопности), корректно задаёт гомоморфизм абелевых групп*

$$\sigma_m \colon K_m^M(k) \to H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})\big).$$

Вместе эти гомоморфизмы образуют гомоморфизм градуированных колец

$$\oplus\sigma_m \colon \bigoplus K_m^M(k) \to \bigoplus H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})\big).$$

Доказательство. Из конструкции умножения на

$$\bigoplus H_0\big(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})\big)$$

очевидно, что сопоставление некоммутативному моному $g_1 \dots g_m$ соответствия уровня 0, то есть отображения

$$\widetilde{\sigma}_m(g_1 \dots g_m) \colon \mathrm{pt} \to \mathbb{G}_m^m,$$

задаёт гомоморфизм (некоммутативных) градуированных колец

$$\oplus \widetilde{\sigma}_m \mathbb{Z}\{|k^*|\} \to \bigoplus H_0\bigl(C_* \mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})\bigr).$$

(Умножение в кольце некоммутативных многочленов будем записывать приписыванием, а в k^* — точкой $\cdot$).

Если проверить, что этот гомоморфизм переводит в 0 некоммутативные многочлены, соответствующие линейности по каждой координате, а также выполнению соотношений Стейнберга (эти соотношения задают K-теорию Милнора), можно увидеть, что этот гомоморфизм пропускается через градуированное кольцо $\bigoplus K_m^M(k)$, причем из определений следует, что пропускается он при помощи гомоморфизма $\oplus \sigma_m$, который, в частности, оказывается корректно определенным. Проверим вначале мультилинейность:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\sigma}_m(g_1 \dots g_i' \dots g_m) + \widetilde{\sigma}_m(g_1 \dots g_i'' \dots g_m) \\ &\qquad\qquad = \widetilde{\sigma}_m(g_1 \dots (g_i' \cdot g_i'') \dots g_m) + \widetilde{\sigma}_m(g_1 \dots 1 \dots g_m). \end{aligned}$$

Для этого построим гомотопию между многочленами, задающими пару точек g_i' и g_i'' и пару $g_i' \cdot g_i''$ и 1. Гомотопия задается многочленом

$$x^2 + \bigl(-g_i' - g_i'' + t(g_i' + g_i'' - g_i' g_i'' - 1)\bigr) + g_i' g_i''.$$

Если рассмотреть его как функцию на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, он задаст конечное над $\mathbb{A}^1$ (по t) множество Z и обратимую функцию x на его окрестности. По Предложению 2.2.5 нулевое и единичное сечение этой гомотопии эквивалентны левой и правой частям равенства.

Соотношения Стейнберга выполняются уже в K-теории Милнора–Витта. В [Nes, п. 8.9] доказывается выполнение таких соотношений между соответствиями $[x-a]$ уровня 1 в

$$H_0(C_* \mathbb{Z}F(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge 1})).$$

По предложению 2.2.7, H_0- cob задает гомоморфизм градуированных колец с 1. Поэтому такие же соотношения выполнены для образов этих элементов в $H_0(C_* \mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge 1}))$. С другой стороны, по лемме 2.3.2 ниже, классы этих соответствий равны классам отображений (или соответствий уровня 0) $\widetilde{\sigma}_1(a)$.
□

Лемма 2.3.2. *Пусть* $[x-a]$ — *соответствие, которое неявно определяется в [Nes, лемма 6.3], то есть фрейм-соответствие уровня* 1 *из* pt *в* $\mathbb{G}_m$, *задаваемое данными*

$$\big(X = \mathrm{pt}, Y = \mathbb{G}_m, Z = \mathrm{pt}, \mathrm{id}\colon Z \to X, W = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\},$$
$$W \xrightarrow{i} \mathbb{A}^1, Z \xrightarrow{(a)} W, \varphi = (x-a)\colon W \to \mathbb{A}^1, g = \mathrm{id}\colon W \to Y\big).$$

Тогда в $H_0(C_*\mathbb{Z}F(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m))$ *он имеет тот же класс, что отображение* $\mathrm{const}_a\colon \mathrm{pt} \to \mathbb{G}_m$.

Доказательство. Применив к const_a отображение стабилизации, получим соответствие уровня 1

$$\beta = \big(X = \mathrm{pt}, Y = \mathbb{G}_m, Z = \mathrm{pt}, \mathrm{id}\colon Z \to X, W = \mathbb{A}^1, W \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{A}^1,$$
$$Z \xrightarrow{(0)} W, \varphi = (x)\colon W \to \mathbb{A}^1, g = \mathrm{const}_a\colon W \to Y\big).$$

Построим две гомотопии. Первая задана данными

$$H_1 = \big(X = \mathbb{A}^1, Y = \mathbb{G}_m, Z = \mathbb{A}^1, \mathrm{id}\colon Z \to X, W = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 - \{x - at + a = 0\},$$
$$W \xrightarrow{i} \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1, Z \xrightarrow{(t,at)} W, \varphi = t - x - a\colon W \to \mathbb{A}^1, g = x - at + a\colon W \to \mathbb{G}_m\big).$$

(Здесь t — координата гомотопии, на X и Z, а x — вторая координата на W, то есть задающая координатную функцию на слоях $W \to X$.) Вычисление даёт $H_1 \circ i_1 = [x-a]$.

$H_1 \circ i_0 = \alpha$ задаётся данными

$$\big(X = \mathrm{pt}, Y = \mathbb{G}_m, Z = \mathrm{pt}, \mathrm{id}\colon Z \to X, W = \mathbb{A}^1 - \{x = -a\},$$
$$W \xrightarrow{i} \mathbb{A}^1, Z \xrightarrow{(0)} W, \varphi = (x)\colon W \to \mathbb{A}^1, g = x + a\colon W \to Y\big).$$

Вторая гомотопия имеет вид

$$H_2 = \big(X = \mathbb{A}^1, Y = \mathbb{G}_m, Z = \mathbb{A}^1, \mathrm{id}\colon Z \to X, W = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 - \{tx = -a\},$$
$$W \xrightarrow{i} \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1, Z \xrightarrow{(t,0)} W, \varphi = x\colon W \to \mathbb{A}^1, g = tx + a\colon W \to \mathbb{G}_m\big).$$

Вычисление показывает $H_2 \circ i_0 = \beta, H_2 \circ i_1 = \alpha$. Тем самым двумя гомотопиями мы соединили две части равенства. □

Отображение σ_m обратно справа к ρ_m, которое определено в предложении 2.3.5. Это очевидно следует из замечания 2.3.4. Остается доказать следующее утверждение.

Предложение 2.3.3. *Отображение* σ_m *сюръективно для каждого* m.

Доказательство. Обозначим $\mathrm{can}_m\colon K_m^{MW}(k) \to K_m^M(k)$. Как следует из леммы 2.3.2, в обозначениях [Nes, п. 8.3], имеется следующий коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd} K_m^{MW}(k) \arrow[r, two heads, "\Psi_m"] \arrow[d, "\mathrm{can}_m"] & H_0(C_*\mathbb{Z}F(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m}) \arrow[d, two heads, "H_0\text{-}\,\mathrm{cob}"] \\ K_m^M(k) \arrow[r, "\sigma_m"] & H_0(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})). \end{tikzcd}$$

H_0- cob сюръективно по следствию 2.2.3, Ψ_m сюръективно по основному результату работы [Nes]. Значит, σ_m сюръективно. $\square$

Построим отображение

$$\rho_{m,n,N}\colon Fr_{n,N}^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\times m}) \to K_m^M(k).$$

Пусть имеется соответствие (Z, W, φ, g). Поскольку Z — конечное число точек (назовём их $z_1, \ldots, z_k$), то

$$\varphi^{-1}(s_0(\mathrm{Gr}_{n,N}))$$

— схема, которая в окрестности каждой из этих точек z_i является спектром локального артинова кольца длины d_i. На W, и, в частности, на Z, заданы m обратимых функций $g_1, \ldots, g_m$. Если $z_i \simeq \mathrm{Spec}(F_i)$, то в $K_m^M(F_i)$ есть символ $\{g_1|_{z_i}, \ldots, g_m|_{z_i}\}$. Взяв сумму норм этих символов, помноженных на d_i

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \,\mathrm{Tr}\,\Big|_k^{F_i} \big(\{g_1|_{z_i}, \ldots, g_m|_{z_i}\}\big), \tag{14}$$

получим элемент в K-теории Милнора поля k. Несложно понять, что заданное таким образом отображение корректно спускается на

$$Fr_{n,N}^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m}),$$

поскольку символ, включающий в себя 1, равен 0. Также очевидна согласованность как со стабилизацией по n и N, так и с дополнительными соотношениями аддитивности на $\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge n})$. Тем самым отображения $\rho_{m,n,N}$ продолжаются до гомоморфизма

$$\mathring{\rho}_m\colon \mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m}) \to K_m^M(k).$$

Замечание 2.3.4. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ и любых $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{G}_m(k)$:*

$$\mathring{\rho}_m(\widetilde{\sigma}_m(g_1 \ldots g_m)) = \{g_1, \ldots, g_m\}.$$

Предложение 2.3.5. *Отображение* $\mathring{\rho}_m$ *корректно спускается до отображения*

$$\rho_m\colon H_0(C_*\mathbb{Z}F^{\mathrm{cob}}(\mathrm{pt}, \mathbb{G}_m^{\wedge m})) \to K_m^M(k).$$

Для доказательства этого утверждения нам нужно будет исследовать поведение элементов K-теории Милнора на кривой Z, которая является частью гомотопии между двумя соответствиями $\mathrm{pt} \to \mathbb{G}_m^M$. Поэтому исследуем поведение K-теории на кривых с морфизмом в $\mathbb{P}^1$ и докажем в различных ситуациях утверждения о том, что сумма, аналогичная данной в формуле 14, взятая для слоя над 0, будет равна такой же сумме для слоя над 1. Начнём со случая гладкой кривой.

Лемма 2.3.6. *Пусть* C *— гладкая проективная кривая;* $g_1, \dots, g_m, f$ *— рациональные функции на* C*, такие, что* $f = 1$ *в нулях и полюсах* g_i*. Пусть* f *имеет нули*

$$\text{в точках } p_1^0, \dots, p_{r^0}^0, \text{ с кратностями } \mathrm{mul}_1^0, \dots, \mathrm{mul}_{r^0}^0,$$

а рациональная функция $\dfrac{1}{f}$ *—*

$$\text{в точках } p_1^\infty, \dots, p_{r^\infty}^\infty, \text{ с кратностями } \mathrm{mul}_1^\infty, \dots, \mathrm{mul}_{r^\infty}^\infty.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{r^0} \mathrm{mul}_i^0 \operatorname{Tr}\Big|_k^{k(p_i^0)} \{g_1|_{p_i^0}, \dots, g_m|_{p_i^0}\} = \sum_{i=1}^{r^\infty} \mathrm{mul}_i^\infty \operatorname{Tr}\Big|_k^{k(p_i^\infty)} \{g_1|_{p_i^\infty}, \dots, g_m|_{p_i^\infty}\}.$$

Доказательство. Рассмотрим символ

$$\{g_1, \dots, g_m, f\} \in K_{m+1}(k(Z)).$$

По закону взаимности Вейля [BT, теорема 5.6]

$$\sum_{\nu \in \widetilde{Z}} \operatorname{Tr}\Big|_k^{k(\nu)} \partial_\nu \{g_1, \dots, g_m, f\} = 0.$$

Суммирование здесь идёт по замкнутым точкам (другими словами, по дискретным нормированиям). Напомним, что ∂_ν — отображение норменного вычета, определённое в [BT, стр. 22, перед предложением 4.4].

Вычислим вычет $\partial_\nu\{g_1, \dots, g_m, f\}$ в каждой точке ν. Есть лишь две (совместимые) возможности: $f(\nu) = 1$ или $g_1, \dots g_m \in \mathcal{O}_\nu^*$.

В первом случае наш символ можно представить в виде алгебраической суммы символов вида $\{f, h_1, \dots, h_m\}$, где $h_1, \dots, h_{m-1} \in \mathcal{O}_\nu^*$. Из [BT, предложение 4.5(c)],

$$\partial_\nu\bigl(\{f, h_1, \dots, h_m\}\bigr) = \nu(h_m) \cdot \bigl\{\overline{f}, \overline{h_1}, \dots, \overline{h_{m-1}}\bigr\},$$

где черта означает обыкновенный вычет, или значение в точке.

В другом случае применяется то же предложение, но без предварительных манипуляций. В точках, где f обратима, получается 0. Остаются лишь точки $\{f = 0, \infty\}$. Сопоставляя каждой точке p_i^j нормирование ν_i^j, увидим, что

$$\nu_i^0(f) = m_i^0, \quad \nu_i^\infty(f) = -m_i^\infty,$$

и тем самым закон взаимности Вейля вместе с явным видом отображения вычета дают утверждение леммы. □

Лемма 2.3.7. *Пусть C — одномерная проективная схема над k без вложенных точек, такая, что C^{red} — гладкая кривая; $g_1, \dots, g_m, f$ — рациональные функции на C, такие, что $f = 1$ в нулях и полюсах g_i. Пусть f имеет нули*

$$\text{в точках } p_1^0, \dots, p_{r^0}^0, \text{ с кратностями } \mathrm{mul}_1^0, \dots, \mathrm{mul}_{r^0}^0,$$

а рациональная функция $\dfrac{1}{f}$ —

$$\text{в точках } p_1^\infty, \dots, p_{r^\infty}^\infty \text{ с кратностями } m_1^\infty, \dots, m_{r^\infty}^\infty.$$

(*Здесь мы имеем в виду, обобщая гладкий случай, что кратности — это длины артиновых колец — колец функций артиновых схем, высекаемых функцией f или $\frac{1}{f}$.*) *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{r^0} m_i^0 \operatorname{Tr}\big|_k^{k(p_i^0)} \Bigl\{g_1|_{p_i^0}, \dots, g_m|_{p_i^0}\Bigr\} = \sum_{i=1}^{r^\infty} m_i^\infty \operatorname{Tr}\big|_k^{k(p_i^\infty)} \Bigl\{g_1|_{p_i^\infty}, \dots, g_m|_{p_i^\infty}\Bigr\}.$$

Доказательство. Разобьем C на компоненты связности C_k. Требуемое равенство для C получается суммированием равенств для C_k. По предыдущей лемме 2.3.6 равенство верно для каждого из C_k^{red}. Достаточно доказать, что равенство для C_k получается из равенства для C_k^{red} умножением на некоторое число r_k. Это вытекает из следующего утверждения в области коммутативной алгебры. □

Лемма 2.3.8. *Пусть C — связная одномерная проективная схема над k без вложенных точек, такая, что C^{red} — гладкая кривая. Существует такое число r, что для каждой замкнутой точки $p \in C$ и ненильпотентной функции $f \in \mathcal{O}_{C,p}$, кратность нуля f в p на C в r раз больше кратности нуля f в p на C^{red}.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}$ — нильпотентный радикал в $\mathcal{O}_C$. Введем

$$\mathcal{M}_n = (0 : \mathcal{I}^n) \subset \mathcal{O}_C.$$

$\mathcal{O}_C$ не имеет кручения как $\mathcal{O}_C$-модуль, поэтому $\mathcal{M}_n$, как подмодуль в нем, тоже не имеет кручения. Докажем, что тогда и $\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_{n-1}$ не имеет кручения.

Действительно, если для аффинного открытого $U \subset C$ имеем $a \cdot m \in \mathcal{M}_{n-1}(U)$, $m \notin \mathcal{M}_{n-1}(U)$, $a \notin \mathcal{I}(U)$, то существует такой $s \in \mathcal{I}^{n-1}(U)$, что $s \cdot m \neq 0$. Но при этом $a \cdot s \cdot m = s \cdot a \cdot m = 0$, то есть $s \cdot m$ — элемент кручения. Противоречие.

Тем самым, градуированный $\mathcal{O}_C$-модуль, ассоциированный с фильтрацией $\mathcal{M}_n$, не имеет кручения. Поскольку на C нет вложенных точек, это означает, что он не имеет кручения как $\mathcal{O}_C/\mathcal{I}$-модуль. Так как кривая C^{red} гладкая, это означает, что этот модуль локально свободен. Пусть r — его ранг, а r_n — ранг n-го промежуточного фактора.

Пусть $p \in C$ — замкнутая точка, $f \in \mathcal{O}_{C,p}$, $f(p) = 0$. Локализация в точке p дает фильтрацию $\mathcal{M}_{n,p}$. На ее подфакторах f — не делитель нуля, поэтому $(f) \cap \mathcal{M}_{n,p} = f \cdot \mathcal{M}_{n,p}$. Тем самым ассоциированная фильтрация модуля $\mathcal{O}_{C,p}/(f)$ равна

$$\mathcal{M}_{n,p}/\big((f) \cap \mathcal{M}_{n,p}\big) = \mathcal{M}_{n,p}/(f \cdot \mathcal{M}_{n,p}).$$

Ее промежуточные факторы равны $\frac{\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{M}_{n-1,p}}{f \cdot (\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{M}_{n-1,p})}$. Модуль $\frac{\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{M}_{n-1,p}}{f \cdot (\mathcal{M}_{n,p}/\mathcal{M}_{n-1,p})}$ изоморфен $(\mathcal{O}_{C,p}/(\mathcal{I} + (f)))^{\oplus r_n}$, поэтому его длина равна $d \cdot r_n$, если d — длина $\mathcal{O}_{C,p}/(\mathcal{I} + (f))$, то есть кратность нуля f в p на кривой C^{red}. Поскольку эти пространства являются промежуточными факторами фильтрации кольца $\mathcal{O}_{C,p}/(f)$, его длина равна их сумме $\sum d \cdot r_i = d \cdot r$. То есть кратность нуля f в p на C равна $d \cdot r$. □

Перейдем к доказательству предложения.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой гомотопии

$$h \colon (Z, W, \varphi, g) \colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{G}_m,$$

$$\mathring{\rho}_m(h \circ j_0) = \mathring{\rho}_m(h \circ j_1),$$

где j_0, j_1 — вложение 0 и 1 в $\mathbb{A}^1_k$.

Обозначим через Z_{Sch} теоретико-схемный прообраз нулевого сечения относительно φ, а структурное отображение $Z_{\mathrm{Sch}} \to \mathbb{A}^1$ обозначим через π.

Заметим, что поскольку Z_{Sch} регулярно вложена в гладкое многообразие, на ней нет вложенных точек.

Не меняя обозначений, заменим Z_{Sch} на её проективное замыкание. На Z_{Sch} имеются рациональные функции g_i и $f = \frac{\pi^* t}{\pi^* t - 1}$, причём $g_1, \ldots, g_m$ — обратимые регулярные функции на дополнении к $\{f = 1\}$.

Нормализация Z — гладкая проективная кривая $\widetilde{Z}$. Воспользуемся тем, что нормализация кривой может быть получена последовательным раздутием в точках. Пусть $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}} \supset \widetilde{Z}$ — схема, получающаяся применением соответствующих раздутий к Z_{Sch}.

При каждом раздутии вклеивается эффективный дивизор Картье (см. [FOAG, определение 22.2.0.1]), поэтому на $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$ нет вложенных точек. По [FOAG, лемма 22.2.6], собственный прообраз Z в $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$ равен $\widetilde{Z}$. Поскольку при каждом раздутии вклеивался дивизор Картье, новых неприводимых компонент у $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$ по сравнению с Z_{Sch} тоже не появилось. Поэтому, так как у $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}^{\mathrm{red}}$ такое же количество компонент, приведённая часть $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}^{\mathrm{red}} = \widetilde{Z}$ — гладкая кривая. Таким образом, $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы 2.3.7.

Обозначим нули и полюсы f на Z_{Sch} через

$$p_1^0, \dots p_{r^0}^0; p_1^\infty \dots p_{r^\infty}^\infty, \text{ с кратностями } \mathrm{mul}_1^0, \dots \mathrm{mul}_{r^0}^0; \mathrm{mul}_1^\infty, \dots \mathrm{mul}_{r^\infty}^\infty .$$

На $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$ — через

$$\widetilde{p}_1^0, \dots \widetilde{p}_{\widetilde{r}^0}^0; \widetilde{p}_1^\infty \dots \widetilde{p}_{\widetilde{r}^\infty}^\infty, \text{ с кратностями } \widetilde{\mathrm{mul}}_1^0, \dots \widetilde{\mathrm{mul}}_{\widetilde{r}^0}^0; \widetilde{\mathrm{mul}}_1^\infty, \dots \widetilde{\mathrm{mul}}_{\widetilde{r}^\infty}^\infty.$$

Тогда имеем три равенства в следующей цепочке, завершение которой приведет к доказательству предложения.

$$\begin{array}{ccc}
\mathring{\rho}_m(h \circ j_0) & & \mathring{\rho}_m(h \circ j_1) \\
\Vert & & \Vert \\
\sum\limits_{i=1}^{r^0} \mathrm{mul}_i^0 \operatorname{Tr}\big|_k^{k(p_i^0)} \{g_1|_{p_i^0}, \cdots, g_m|_{p_i^0}\} & & \sum\limits_{i=1}^{r^\infty} \mathrm{mul}_i^\infty \operatorname{Tr}\big|_k^{k(p_i^\infty)} \{g_1|_{p_i^\infty}, \cdots, g_m|_{p_i^\infty}\} \\
\vdots & & \vdots \\
\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{r}^0} \widetilde{\mathrm{mul}}_i^0 \operatorname{Tr}\big|_k^{k(\widetilde{p}_i^0)} \{g_1|_{\widetilde{p}_i^0}, \cdots, g_m|_{\widetilde{p}_i^0}\} & = & \sum\limits_{i=1}^{\widetilde{r}^\infty} \widetilde{\mathrm{mul}}_i^\infty \operatorname{Tr}\big|_k^{k(\widetilde{p}_i^\infty)} \{g_1|_{\widetilde{p}_i^\infty}, \cdots, g_m|_{\widetilde{p}_i^\infty}\}
\end{array}.$$

Два пунктирных равенства аналогичны друг другу, поэтому докажем только левое из них. Оно гласит, что сумма для Z_{Sch} равна аналогичной сумме для $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$. Это неочевидно, поскольку, например, точка с нильпотентами на Z_{Sch} может превратиться в несколько точек на $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$, с другими полями вычетов и нильпотентами. Более того, в силу конструкции $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$, нильпотенты над этими точками “схлопываются” при отображении в Z_{Sch}.

Для доказательства возьмём пуллбэк на схему $V = \operatorname{Spec} k[[t]]$. Поскольку вне точек раздутия раздутие не меняет схему, $\widetilde{-}_V \colon (\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}})_V \to Z_{\mathrm{Sch},V}$ — изоморфизм над дополнением $V - v$ к замкнутой точке.

Если Y — компонента связности $Z_{\mathrm{Sch},V}$ (локальная схема), а $\widetilde{Y}_k$ — все компоненты связности её прообраза в $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$, то Y и $\coprod \widetilde{Y}_k$ конечны и плоские (поскольку их структурные кольца не имеют кручения как $k[[t]]$-модули) над V. Они также одинаковой степени над V, поскольку изоморфны над $V - v$. Требуемое равенство получается суммированием равенств из следующей леммы для всех компонент связности Y (при этом сумма для $\widetilde{Z_{\mathrm{Sch}}}$ разобьется на подсуммы).

Лемма 2.3.9. *Пусть $S, \widetilde{S}$ — две конечные схемы одинаковой степени над полем k, причем S локальна, и есть морфизм $\widetilde{-}\colon \widetilde{S} \to S$. Обозначим точки S и $\widetilde{S}$ через s и $\{\widetilde{s_i}\}$. Пусть S_i — связная компонента $\widetilde{S}$, содержащая s_i. Обозначим индуцированный морфизм $\pi_i\colon s_i \to s$. Пусть $a \in K_m^M(k(s))$. Обозначим длину S через d, длину S_i через d_i. Тогда*

$$d \cdot \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)}(a) = \sum_k d_i \,\mathrm{Tr}\big|_k^{k(s_i)}((\pi_i)^* a).$$

Доказательство. Обозначим степени расширений:

$$p = [k(s) : k], \quad p_i = [k(s_i) : k].$$

Тогда

$$\mathrm{Tr}\big|_k^{k(s_i)} = \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)} \circ \mathrm{Tr}\big|_{k(s)}^{k(s_i)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_i d_i \cdot \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s_i)}((\pi_i)^* a) &= \sum_i d_i \cdot \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)}\left(\mathrm{Tr}\big|_{k(s)}^{k(s_i)}((\pi_i)^* a)\right) \\ &= \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)}\left(\sum_i d_i \cdot \mathrm{Tr}\big|_{k(s)}^{k(s_i)}((\pi_i)^* a)\right).\end{aligned}$$

Поскольку для K-теории Милнора композиция расширения скаляров и взятия нормы — это умножение на степень расширения, то

$$\mathrm{Tr}\big|_{k(s)}^{k(s_i)}((\pi_i)^* a) = \frac{p_i}{p} a.$$

Так что

$$\mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)}\left(\sum_i d_i \cdot \mathrm{Tr}\big|_{k(s)}^{k(s_i)}((\pi_i)^* a)\right) = \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)}\left(\sum_i d_i \frac{p_i}{p} a\right) = \frac{1}{p} \cdot \sum_i (d_i \cdot p_i) \cdot \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)} a.$$

Поскольку S и $\widetilde{S}$ одинаковой степени, $\sum_i (d_i \cdot p_i) = d \cdot p$. Поэтому

$$\frac{1}{p} \cdot \sum_i (d_i \cdot p_i) \cdot \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)} a = \frac{1}{p} \cdot d \cdot p \cdot \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)} a = d \cdot \mathrm{Tr}\big|_k^{k(s)} a. \qquad \square$$

$\square$

Тем самым мы показали, что ρ_m и σ_m — взаимно обратные изоморфизмы и завершили доказательство теоремы 2.1.19.

2.4 Грассманианы и спектры кобордизмов: определения.

Введем некоторые определения.

Грассманиан $Gr_{n,N}$ определен как схема, представляющая функтор $(X \mapsto$ $\{$Множество классов изоморфизма всевозможных эпиморфизмов $\mathcal{O}_X^N \twoheadrightarrow \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный $\mathcal{O}_X$модуль ранга $n\})$.

$\tau_{n,N}$ — тавтологическое расслоение над $Gr_{n,N}$.

Замечание 2.4.1. *Имеется естественная по X биекция $Hom(X, \tau_{n,N}) =$ $\{$Множество пар из эпиморфизма и сечения $\big(\mathcal{O}_X^N N \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X)\big)$, где $\mathcal{E}$ — некоторый локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль ранга $n\}$.*

Определение 2.4.2. ***Обыкновенный спектр кобордизмов*** *$E = MGL_\bullet$ — T-спектр из пунктированных пучков Нисневича, задаваемый следующими данными:*

$E_n = MGL_n$ — копредел пространств Тома $Th(\tau_{n,N})$ при $N \to \infty$. Пространство Тома $Th(\tau_{n,N})$ — фактор-пучок Нисневича $\tau_{n,N}/\tau_{n,N} - 0$ по дополнению к нулевому сечению. Морфизмы стабилизации по N, относительно которых берется копредел, получаются факторизацией из морфизмов схем $\tau_{n,N} \to \tau_{n,N+1}$, заданных на представленных функторах сопоставлениями

$$\begin{gathered}\big(\mathcal{O}^N \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X)\big)\\ \downarrow\\ \big(\mathcal{O}^{N+1} = \mathcal{O}^N \oplus \mathcal{O} \xrightarrow{pr_1} \mathcal{O}^N \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X)).\end{gathered}$$

Морфизмы стабилизации по n, $MGL_n \wedge T \to MGL_{n+1}$, получаются факторизацией из морфизмов схем, заданных на представленных функторах сопоставлениями

$$\begin{gathered}\big(\mathcal{O}_X^N \twoheadrightarrow \mathcal{E}, s \in \mathcal{E}(X), t \in \mathcal{O}_X(X)\big)\\ \downarrow\\ \big(\mathcal{O}_X^{1+N} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X^N \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E}, (t,s) \in (\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E})(X)\big).\end{gathered}$$

Данная формула задает морфизмы стабилизации на конечных членах копредела. Из-за того, что координаты наращиваются с разных сторон, данное *отображение стабилизации согласовано с отображением стабилизации по N и задает морфизм на предельных членах.*

Замечание 2.4.3. *Несложно проверить, благодаря тому, что копредел является направленным, что для Нетеровой схемы X, $MGL_n(X) = colim_{N\to\infty}Th(\tau_{n,N})(X)$. (Нетривиальна только сюръективность стрелки справа-налево, а она следует из возможности выбора конечного подпокрытия.)*

Определение 2.4.4. ***Симметрический спектр кобордизмов*** $E^{sym} = MGL_\bullet^{sym}$ *— симметрический T-спектр из пунктированных пучков Нисневича, задаваемый следующими данными:*

$E_n = MGL_n^{sym}$ *— копредел пространств Тома $Th(\tau_{n,n\times N})$ при $N\to\infty$. Пространство Тома $Th(\tau_{n,N})$ — фактор-пучок Нисневича $\tau_{n,n\times N}/\tau_{n,N\times n}-0$ по дополнению к нулевому сечению. Морфизмы стабилизации по N, относительно которых берется копредел, получаются факторизацией из морфизмов схем $\tau_{n,N\times n}\to\tau_{n,(N+1)\times n}$, заданных на представленных функторах сопоставлениями*

$$\begin{gathered}\big(\mathcal{O}^{N\times n}\twoheadrightarrow\mathcal{E}, s\in\mathcal{E}(X)\big)\\ \Big\downarrow\\ \big(\mathcal{O}^{(N+1)\times n}=(\mathcal{O}^N\oplus\mathcal{O})^{\oplus n}\xrightarrow{pr_1^{\oplus n}}(\mathcal{O}^N)^{\oplus n}=\mathcal{O}^{N\times n}\twoheadrightarrow\mathcal{E}, s\in\mathcal{E}(X)\big).\end{gathered}$$

Знаки равенства в данной формуле означают канонические изоморфизмы.

Действие симметрической группы на MGL_n^{sym} задается перестановкой слагаемых в $\mathcal{O}^{N\times n}=(\mathcal{O}^N)^{\oplus n}$.

Морфизмы стабилизации по n, $MGL_n\wedge T\to MGL_{n+1}$, получаются факторизацией из морфизмов схем, заданных на представленных функторах сопоставлениями

$$\begin{gathered}\big(p:\mathcal{O}_X^{N\times n}\twoheadrightarrow\mathcal{E}, s\in\mathcal{E}(X), t\in\mathcal{O}_X(X)\big)\\ \Big\downarrow\\ \big(\mathcal{O}_X^{(N+1)\times n}=\mathcal{O}_X^N\oplus\mathcal{O}_X^{N\times n}\xrightarrow{pr_1\oplus p}\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{E}, (t,s)\in(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{E})(X)\big).\end{gathered}$$

Замечание 2.4.5. *Спектры $MGL_\bullet$ и $MGL_\bullet^{sym}$ являются спектрами Тома с константой ограничения 1 в смысле [GarNesh, Определение 2.8].*

Лемма 2.4.6. *Симметрический спектр $MGL_\bullet^{sym}$ является спектром со стягиваемым действием знакопеременной группы, в смысле [GarNesh, Определение 2.7].*

Доказательство. Пусть σ — четная перестановка на n элементах. Тогда соответствующий ей линейный оператор на $\mathcal{O}^n$ $\mathbb{A}^1$-гомотопен тождественному. Пусть $h \in GL_n(k[t])$ — некая такая гомотопия. Тогда гомотопия

$$\mathcal{O}^{N\times n}_{X\times\mathbb{A}^1} = \mathcal{O}^{n\times N}_{X\times\mathbb{A}^1} = (\mathcal{O}^{n}_{X\times\mathbb{A}^1})^N \xrightarrow{h^N} (\mathcal{O}^{n}_{X\times\mathbb{A}^1})^N = \mathcal{O}^{n\times N}_{X\times\mathbb{A}^1} = \mathcal{O}^{N\times n}_{X\times\mathbb{A}^1}$$

задает гомотопию между тождественным морфизмом на $\tau_{n,N\times n}(X)$ и морфизмом, индуцированным перестановкой σ. Поскольку нулевое сечение при этой гомотопии переходит в себя, она также задает гомотопию на пространстве Тома. Благодаря определению гомотопии в виде прямой суммы по N, она согласована с морфизмами стабилизации по N в определении MGL_n^{sym}, а значит, это семейство гомотопий задает гомотопию на предельном члене MGL_n^{sym}. $\square$

Следуя [GarNesh], введем для спектра E понятие E-фрейм-соответствий:

Определение 2.4.7. *(см. [GarNesh, Определение 7.1]) Для $X \in Sm/k$ и T-спектра E, обозначим*

$$Fr_n^E(X) := \underline{Hom}(\mathbb{P}^{\wedge n}, X_+ \wedge E_n).$$

$$Fr^E(X) := \operatorname{colim}_{n\to\infty} Fr_n^E(X).$$

Лемма 2.4.8. *Для k-гладких X,Y, $Fr^{MGL_\bullet}(X,Y)$ естественно изоморфно $Fr^{cob}(X,Y)$.*

Доказательство. Прямая проверка по определениям. $\square$

Следствие 2.4.9. *Для k-гладкой X и симплициальной k-гладкой Y_*, $C_*Fr^{MGL_\bullet}(X,Y_*)$ естественно изоморфно $C_*Fr^{cob}(X,Y_*)$,*

Доказательство. Получается из предыдущей леммы добавлением C_* и переходом к диагонали. $\square$

2.5 Построение изоморфизма между множествами стабильных фрейм-соответствий, оснащенных обыкновенным и симметрическим спектрами кобордизмов.

Лемма 2.5.1. *Существует естественная по X и S биекция между $Fr^{MGL_\bullet}(X)(S)$ и $Fr^{MGL_\bullet^{sym}}(X)(S)$.*

Доказательство. Эти множества параметризуются следующими геометрическими данными:

$Fr^{MGL_\bullet}(X)(S)$ — данными вида

- Замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$, конечное над S;
- Этальная окрестность W множества Z в $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$;
- Счетномерный локально свободный пучок $\mathcal{O}_W$-модулей $\mathcal{F}$;
- Сечение s пучка $\mathcal{F}$ на W, нулями которого является Z;
- Сюръекция пучков $p : \mathcal{O}_W^{\mathbb{N}} \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{N}} \to \mathcal{F}$.

При этом данные должны «приходить с конечного уровня», то есть, иметь следующий специальный вид для некоторых n, N (здесь $\mathbb{A}^{>n}$ — подпространство, соответствующее координатам с номерами больше n):

- $Z \subset \mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$;
- $W = W_0 \times \mathbb{A}^{>n}$, где W_0 — окрестность Z в $\mathbb{A}^n$;
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{A}^{>n}}$, где $\mathcal{F}_0$ — локально свободный ранга n;
- $s = (s_0, pr_2 \circ can) \in \Gamma(W, \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{A}^{>n}})$. Здесь $pr_2 \circ can : W \to \mathbb{A}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{A}^{>n}$;
- На втором слагаемом $p|_{0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{N}_{>n}}}$ осуществляет тождественный изоморфизм со вторым слагаемым в разложении $\mathcal{F}$;
- На первом слагаемом $p|_{\mathcal{O}_W^{\mathbb{N}_{>N}} \oplus 0} = 0$.

Эти данные понимаются с точностью до изоморфизма и замены W на меньшую окрестность.

Замечание 2.5.2. *Заметим, что позволяя увеличивать N, последнее условие можно заменить на*

> *На первом слагаемом $p|_{\mathcal{O}_W^{\mathbb{N}} \oplus 0}$ ноль почти на всех координатных векторах.*

$Fr^{MGL_\bullet^{sym}}(X)(S)$ — данными вида

- Замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$, конечное над S;
- Этальная окрестность W множества Z в $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$;
- Счетномерный локально свободный пучок $\mathcal{O}_W$-модулей $\mathcal{F}$;
- Сечение s пучка $\mathcal{F}$ на W, нулями которого является Z;
- Сюръекция пучков $p : \mathcal{O}_W^{\mathbb{N}} \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \to \mathcal{F}$.

При этом данные должны «приходить с конечного уровня», то есть иметь следующий специальный вид для некоторого n (здесь $\mathbb{A}^{>n}$ — подпространтво, соответствующее координатам с номерами больше n, аналогично
$\mathbb{N}_{>n} = \{k \in \mathbb{N} | k > n\}$):

- $Z \subset \mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$;
- $W = W_0 \times \mathbb{A}^{>n}$, где W_0 — окрестность Z в $\mathbb{A}^n$;
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{A}^{>n}}$, где $\mathcal{F}_0$ — локально свободный ранга n;
- $s = (s_0, pr_2 \circ can) \in \Gamma(W, \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{A}^{>n}})$. Здесь $pr_2 \circ can : W \to \mathbb{A}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{A}^{>n}$;
- На втором слагаемом $p|_{0 \oplus \mathcal{O}_W^{\mathbb{N}_{>n}}}$ осуществляет тождественный изоморфизм со вторым слагаемым в разложении $\mathcal{F}$;
- На первом слагаемом $p|_{(\mathcal{O}_W^{\mathbb{N}_{>n} \times \mathbb{N}} + \mathcal{O}_W^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{>N}}) \oplus 0} = 0$.

Эти данные понимаются с точностью до изоморфизма и замены W на меньшую окрестность.

Замечание 2.5.3. *Заметим, что позволяя увеличивать n и N, последнее условие можно заменить на следующее:*

- *На первом слагаемом $p|_{\mathcal{O}_W^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \oplus 0}$ ноль почти на всех координатных векторах.*

Легко видеть, что с учетом замечаний, эти геометрические описания превращаются друг в друга при помощи любой биекции $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Но одной и той же для всех X и S). $\square$

Пользуясь приведенными построениями, можно доказать следующее.

Теорема 2.5.4. *$\pi_{-n,-n}(MGL_\bullet^{sym})(pt) = K_n^M(k)$ — K-группа Милнора.*

Доказательство. Поскольку спектр $MGL_\bullet^{sym}$ является симметрическим T-спектром Тома с константой ограничения 1 и со стягиваемым действием знакопеременной группы (См. Замечание 2.4.5 и Лемма 2.4.6), к нему применима [GarNesh, Теорема 9.13(1)].

Следовательно, группы $\pi_{-n,-n}(MGL_\bullet)(pt)$ можно получить как $\pi_0(M_{MGL_\bullet^{sym}}(\mathbb{G}_m^{\wedge n})_f)(pt)$. Поскольку значения вычислены на точке, локальная фибрантная замена не меняет значений симплициальных пучков. Тем самым, необходимо вычислить

$$\pi_0(M_{MGL_\bullet^{sym}}(\mathbb{G}_m^{\wedge n}))(pt).$$

Из Леммы 2.5.1 следует, что это естественно изоморфно

$$\pi_0(M_{MGL_\bullet}(\mathbb{G}_m^{\wedge n}))(pt).$$

Из Следствия 2.4.9, это естественно изоморфно

$$\pi_0(M_{fr}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m^{\wedge n})).$$

Далее, поскольку этот спектр (-1)-связен, то его нулевые гомотопические группы совпадают с нулевыми группами гомологий

$$H_0(M_{fr}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m^{\wedge n})).$$

Из [Sch, Определение II.6.24, конец стр. 280], это изоморфно

$$\pi_0(\mathbb{Z}M_{fr}^{cob}(pt, \mathbb{G}_m^{\wedge n})).$$

По Лемме 2.1.21,

$$H_0(C_*\mathbb{Z}F^{cob}(pt, \mathbb{G}_m^{\wedge n})).$$

Но в Теореме 2.1.19 построен изоморфизм этих групп с K-группами Милнора $K_n^M(k)$.

Тем самым, построена цепочка изоморфизмов, соединяющая $\pi_{-n,-n}(MGL_\bullet)(pt)$ с $K_n^M(k)$. □

Заключение

Итак, подведем итоги настоящей работы.

1. Доказана мотивная теорема Сегала для открытых пар (X, U) гладких схем над бесконечным совершенным полем характеристики, отличной от 2, где U всюду непусто.

2. Доказана теорема о конусе для открытых пар (X, U) гладких схем над бесконечным совершенным полем характеристики, отличной от 2.

3. Доказана локальная r-связность симплициального пучка $C_*Fr(-, (X, U))$ для открытых пар (X, U) гладких схем над бесконечным совершенным полем характеристики, отличной от 2, где $X - U$ всюду имеет коразмерность более r.

4. Построен и обоснован изоморфизм между группой $H_0(C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}^{cob}(pt, {\mathbb{G}_m}^{\wedge m}))$ и K-группой Милнора $K_m^M(k)$ над полем k характеристики 0.

Список литературы

[BT] *H. Bass, J. Tate*, «The Milnor ring of a global Field, Algebraic K-theory II: „Classical“ Algebraic K-Theory and Connections with Arithmetic» (Proc. Conf., Seattle, Wash., Battelle Memorial Inst., 1972), Springer, Berlin, 1973, pp. 349—446, Lecture Notes in Math., Vol. 342. MR0442061 (56 #449).

[Nes] *A. Neshitov*, 2016, «Framed correspondences and the Milnor—Witt K-theory», Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 1—30. doi:10.1017/S1474748016000190.

[SV] A. Suslin, V. Voevodsky, «Bloch—Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients», The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000), pp. 117—189.

[FOAG] *R. Vakil*, «The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry», Available at http://math.stanford.edu/ vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf.

[GarNesh] G. Garkusha, A. Neshitov, «Fibrant resolutions for motivic Thom spectra», arXiv:1804.07621 [math.AG].

[Pan] I. A. Panin, «A moving lemma for motivic spaces», St. Petersburg Math. J., 29:6 (2018), 993—995.

[GP] G. Garkusha, I. Panin, 2014, «Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky)», J. Amer. Math. Soc., to appear. DOI: 10.1090/jams/958, arXiv:1409.4372 [math.KT].

[GNP] G. Garkusha, A. Neshitov, I. Panin, 2016, «Framed motives of relative motivic spheres», arXiv:1604.02732 [math.KT].

[MV] F. Morel, V. Voevodsky, «$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes», Publ. Math. IHES 90 (1999), 45—143.

[AGP] A. Ananyevskiy, G. Garkusha, I. Panin, 2016, «Cancellation theorem for framed motives of algebraic varieties», arXiv:1601.06642 [math.KT].

[DP] A. Druzhinin, I. Panin, 2018, «Surjectivity of the étale excision map for homotopy invariant framed presheaves» arXiv:1808.07765 [math.KT].

[Jar1] J. F. Jardine, Simplicial presheaves, J. Pure Appl. Algebra 47 (1987), 35—87.

[Sch] S. Schwede, An untitled book project about symmetric spectra, available at www.math.uni- bonn.de/people/schwede/SymSpec-v3.pdf (version April 2012).

[GP2] G. Garkusha, I. Panin, 2015, «Homotopy invariant presheaves with framed transfers», Cambridge J. Math. 8(1) (2020), 1—94, arXiv:1504.00884 [math.AG].

[SV1] A. Suslin, V. Voevodsky (2000) «Bloch-Kato Conjecture and Motivic Cohomology with Finite Coefficients», In: Gordon B. B., Lewis J. D., Müller-Stach S., Saito S., Yui N. (eds) The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles. NATO Science Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences), vol. 548, Springer, Dordrecht.

[Seg] G. Segal, «Categories and cohomology theories», Topology 13 (1974), 293—312.

[Mil] J. Milne, «Étale cohomology», Princeton Mathematical Series 33, Princeton University Press, 1980.

[VoLec] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, «Lectures on motivic cohomology», 2006, Clay Mathematics Monographs, vol. 2.

[VoNote] V. Voevodsky, «Notes on framed correspondences», unpublished, 2001.

[VoCong] V. Voevodsky, «A^1-homotopy theory», Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998), 1998.

[Min] A. A. Mingazov, «Some remarks on relative framed motives», 2019, arXiv:1911.04860.

[E] D. Eisenbud, «Commutative Algebra with a View to Algebraic Geometry», Grad. Texts in Math. 150, Springer-Verlag, New York, 1995.

[EGA43] Alexander Grothendieck, «Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie», Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 28 (1966), p. 5—255.

[Mats] Hideyki Matsumura, «Commutative rings», translated by M. Reid, Cambridge university press, 1986, 2008 digital printing.

[cob-Fr] А. Цыбышев, «Кобордизм-фрейм-соответствия и K-теория Милнора», Алгебра и анализ, 32:1 (2020), 244—264.

[an-pairs] А. Цыбышев, «Мотивный аналог теоремы Сегала для пар (анонс)», Записки научных семинаров ПОМИ, Том 484, «Вопросы теории представлений алгебр и групп. 35», редакторы: Н. А. Вавилов, А. И. Генералов, Б. Б. Лурье, стр.165.

[pairs] Aleksei Tsybyshev, «A motivic Segal theorem for open pairs of smooth schemes over an infinite perfect field», arXiv:2003.06892 [math.AG].

[MGL] А. Цыбышев, «Пучки гомотопий спектра $MGL_\bullet$ и кобордизм-фрейм-соответствия», Препринт ПОМИ 03/2020.

[PSV] I. Panin, A. Stavrova, N. Vavilov, «On Grothendieck-Serre's conjecture concerning principal G-bundles over reductive group schemes: I», *Compos. Math.*, 151(3):535—567, 2015.