Санкт-Петербургское отделение Математического института им.
В.А.Стеклова РАН

На правах рукописи

Медведев Алексей Николаевич

Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., академик РАН
С. В. Кисляков

Санкт-Петербург – 2017

Оглавление

Введение

В диссертации рассматривается вопрос о сравнении гладкости аналитической в круге или верхней полуплоскости функции и гладкости ее модуля. Классический результат, доказанный, но не опубликованный Карлесоном и Якобсом, а затем переоткрытый и существенно дополненный В. П. Хавиным и Ф. А. Шамояном, говорит нам, что в случае круга типично падение гладкости вдвое. Как само это утверждение, так и все его обобщения, известные до недавнего времени, носили глобальный характер: модуль функции предполагался гладким всюду на окружности, а сама она оказывалась тогда лежащей в «половинном» классе Гёльдера во всем единичном круге.

В диссертацией рассматривается «поточечный» или «локальный» вариант той же задачи. Доказанные в ней теоремы примерно укладываются в следующую схему: при некоторых естественных условиях, гёльдерова гладкость модуля аналитической функции всего лишь в одной граничной точке влечет половинную гладкость самой функции в той же точке. Ниже мы приведем более детальные и аккуратные формулировки, которые отражают также и многочисленные новые явления, незаметные в глобальной постановке и проявившиеся лишь при поточечных оценках. Начнем мы, однако, с истории вопроса.

Итак, рассмотрим некоторую аналитическую в единичном круге функцию F, непрерывную вплоть до границы. Как было упомянуто выше, нас интересует вопрос о том, как связаны между собой гладкость функции F и $\varphi = |F|$?

В первую очередь следует отметить, что этот вопрос достаточно изучать лишь для сужений функций F и φ на окружность. Впервые подобного типа утверждение было получено Харди и Литтлвудом в работе [5], где было доказано, что принадлежность аналитической функции F классу Гёльдера Lip_α с показателем $\alpha \in (0, 1)$ на границе единичного круга влечет принадлежность F классу Гёльдера с тем же показателем α уже во всем круге. Укажем дополнительно на результат [6], обобщающий теорему Харди и Литтлвуда на классы

Гёльдера с произвольными мажорантами модуля непрерывности.

Вернемся теперь к вопросу о функции и ее модуле. Ответ на него известен: при некоторых естественных предположениях для F гарантирована гладкость, вдвое меньшая, чем у φ, причем результат неулучшаем в общем случае. Однако, если контролировать ряд определенных параметров функции F, то можно добиться уменьшения падения гладкости, вплоть до его полного исчезновения. Обсудим два ключевых фактора, влияющих на ответ в задаче.

Поведение нулей функции F. Отметим, что без каких-либо ограничений на нули F, задача и вовсе не будет разрешима. Здесь мы приведем упомянутые естественные условия на нули F, приводящие к содержательному ответу. Обратимся к канонической факторизации функции F (см. [7] и [8]) $F = \mathcal{O}_\varphi SB$, где:

- $\mathcal{O}_\varphi$ — внешняя функция, построенная по φ, и заданная формулой

$$\mathcal{O}_\varphi(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log\varphi(e^{i\theta})d\theta\right]; \tag{1}$$

- S — сингулярная внутренняя функция, чьи значения заданы формулой

$$S(z) = \exp\left[-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(\theta)\right], \tag{2}$$

  а μ — некоторая сингулярная мера на окружности;

- B — произведение Бляшке, построенное по последовательности нулей $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ функции F кратности $p, p_1, p_2, \ldots$, заданное формулой

$$B(z) = z^p\prod_{s=1}^{\infty}\left[\frac{\bar{\alpha}_s}{|\alpha_s|}\frac{\alpha_s - z}{1-\bar{\alpha}_s z}\right]^{p_s}. \tag{3}$$

Как было сказано выше, нас интересует гладкость функций F и φ на границе. Поэтому целесообразно обсудить граничные значения трех параметров канонической факторизации. Приводимые ниже факты можно найти в [7].

Рассмотрим оператор гармонического сопряжения $\mathcal{H}$, значения которого на 2π-периодической функции f задаются по формуле

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} p.v. \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-t}{2}\right) f(t)dt, \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Отождествим функцию φ с ее 2π-периодичной версией на прямой. Отметим, что, во первых, $\log\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, а во вторых, граничные значения внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ будут заданы по формуле

$$\mathcal{O}_\varphi = \varphi \exp(i\mathcal{H}(\log\varphi)). \tag{5}$$

Далее, граничные значения функции S, порожденной некоторой положительной сингулярной мерой μ на $\mathbb{T}$, почти всюду совпадают с функцией $\exp(-i\mathcal{H}\mu)$. Более того, для непрерывной вплоть до границы функции F носитель меры μ содержится в множестве $\{t \in \mathbb{T} \ : \ \varphi(t) = 0\}$. Нули же произведения Бляшке B могут накапливаться только к точкам данного множества.

Вернемся теперь к объявленным условиям на нули F. В работе [9] было доказано, что без дополнительных ограничений на нули функции F упомянутой выше нижней границы на падение гладкости не получится. Исторически, существуют два способа преодолеть данное препятствие. Первый способ — предположить, что у функции F нету нулей внутри круга. Точнее, в терминах канонической факторизации, мы предполагаем $S = B = 1$, т. е. функция $F = \mathcal{O}_\varphi$ является внешней. Для этого случая в 50-е годы XX века Карлесон и Якобс доказали, что если φ принадлежит $Lip_\alpha(\mathbb{T})$, $\alpha \in (0,1)$, то $F = \mathcal{O}_\varphi \in Lip_{\alpha/2}(\mathbb{T})$. Однако, доказательство не было опубликовано. Следует заметить, что в совсем простом случае, когда значения φ на границе строго отделены от нуля, подобного результата не наблюдается. А именно, в тех же предположениях, что и выше, если дополнительно $\varphi \geq C > 0$ на окружности, то, согласно известной теореме Зигмунда–Привалова [10], внешняя функция $\mathcal{O}_\varphi$ будет принадлежать классу $Lip_\alpha(\mathbb{T})$. Позже результат Карлесона и Якобса был переоткрыт В. П.

Хавиным и Ф. А. Шамояном (см. [11]), а также обобщен для случая $\alpha = 1$. В дальнейшем, как известно, Дж. Бреннан [12] распространил этот результат на случай $1 < \alpha < 2$, а затем Н. А. Широков [13] представил доказательство данной теоремы для всех $\alpha > 0$. Следует пояснить, что последний результат подразумевает в случае $\alpha/2 = n$ принадлежность $f = \mathcal{O}_\varphi^{(n-1)}$ классу Зигмунда, т.е. выполнение условия

$$\left| f(z_2) - f\Big(\frac{z_2 + z_1}{2}\Big) + f(z_1) \right| \le C|z_2 - z_1|$$

по всем $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$. Более того, в работе [9], которую мы обсудим ниже в несколько ином ключе, результат статьи [11] был обобщен на случай Lip_ω с произвольной регулярной мажорантой модуля непрерывности ω.

В упомянутой статье [9] рассматривается второй тип условий на нули F. А именно, нулям произведения Бляшке (3) из канонического разложения F запрещается накапливаться к окружности касательным образом. Следуя [9] и нашим обозначениям в (3), запишем это условие в следующем виде:

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{|\alpha_s - \eta|}{1 - |\alpha_s|} < \infty, \quad \eta \in \mathbb{T}. \tag{6}$$

При таком предположении, в статье [9] было доказано, что для функции $F = \mathcal{O}_\varphi BS$ наличие оценки $|\varphi(s) - \varphi(t)| \le \omega(|t - s|)$ во всех точках s и t окружности с достаточно регулярной мажорантой ω, влечет оценку $|F(s) - F(t)| \le C\omega(\sqrt{|t-s|})$. Условия на ω, накладываемые в [9], являются стандартными и будут представлены в п. 0.2. Пока что упомянем, что в содержательном смысле они соответствуют гладкости не больше единицы. Помимо данного результата, в [9] был построен пример функции, показывающий, что падение гладкости ровно в два раза точно. Более того, на основании конструкции, использованной при его построении, можно утверждать, что количественно разница между гладкостью F и φ может оказаться любой: от вышеупомянутого падения гладкости F вдвое, до наличия у F той же гладкости, что и у φ. Однако, до недавнего времени достаточные условия падения гладкости F в сравнении с гладкостью φ в фиксированном соотношении оставались неизвестными. Таким образом, мы переходим к следующей важной задаче: достаточно полно описать условия на функцию F, наличие которых гарантирует ей гладкость лучше, чем описанное априорное падение гладкости вдвое по сравнению с гладкостью функции φ. Довольно долго была распространена гипотеза о том, что за подобного типа соотношения отвечает второй ключевой фактор в задаче: граничное поведение функции $\log\varphi$. Как оказалось, данная гипотеза подтвердилась, и мы, соответственно, приступим ниже к обсуждению роли функции $\log\varphi$ в задаче. Но, прежде чем сделать это, необходимо отметить, что дальше мы будем рассматривать исключительно **внешние функции**. Дело в том, что как только получено количественное соотношение между соответствующими гладкостями для внешних функций, вопрос о распространении этого результата на аналитические функции носит чисто технический характер. Более того, ничего нового в эти соотношения «контролируемое добавление нулей» (как упоминалось, без условия типа (6) задача неразрешима) не привносит. Оба этих утверждения были продемонстрированы в [9] и [1]. Для полноты картины мы продемонстрируем упомянутую технику «присоединения нулей» из [1] в п. 1.4, но еще раз подчеркнем, что все выносимые на защиту результаты будут касаться только внешних функций.

Поведение функции $\log\varphi$. Упомянем условие, которое неявным образом было вовлечено во все приводимые выше результаты:

$$\int_{\mathbb{T}} |\log\varphi| < \infty. \tag{7}$$

Заметим, что граничные значения любой ограниченной аналитической функции в круге заведомо ему удовлетворяют (см. [7]). В работе 2013 года [14] Н. А. Широков доказал, что можно гарантировать гладкость порядка $p\alpha/(p+1)$ для внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ с модулем $\varphi \in Lip_\alpha$ $(\alpha > 0)$, если

$$\Big(\int_{\mathbb{T}} |\log\varphi|^p\Big)^{1/p} < \infty. \tag{8}$$

В случае $\log\varphi \in L^\infty$ гладкость не падает вовсе, что отлично коррелирует с пределом в показателе выше при $p \to \infty$. В каком-то смысле, это все та же теорема Зигмунда–Привалова, ведь условие $\log\varphi \in L^\infty$ гарантирует $\varphi \geq C > 0$ почти всюду. В связи с этим, интересен второй результат статьи [14], утверждающий что, подобно случаю $\log\varphi \in L^\infty$, падения гладкости не наблюдается и если $\log\varphi$ принадлежит пространству функций ограниченной средней вариации на окружности $BMO(\mathbb{T})$. При $0 < \alpha < 1$ это последнее утверждение было установлено [15], а также в [16], где использовалось описание пространств BMO в терминах нормы Гарсия (см. [8] по этому поводу).

Аналогичный результат, но уже в поточечной форме, для случая $\log\varphi \in L^p$ и произвольных мажорант модуля непрерывности, соответствующих гладкости не больше 1, был получен в [1]. В той же работе рассматривались и условия типа $\log\varphi \in BMO$ (аналогично установлено отсутствие падения гладкости) а также случай степенных мажорант, соответствующих гладкости между 1 и 2 (обобщение для произвольных мажорант было позже представлено в [2]).

Подобное поведения ответа в задаче естественным образом подталкивает к следующему тезису: достаточные условия для падения гладкости функции $\mathcal{O}_\varphi$ в сравнении с гладкостью φ в фиксированном соотношении следует искать в виде условий на средние значения $\log\varphi$ на дугах окружности. С такого типа описанием замечательно справляется теория симметричных пространств функций (англ. rearrangement invariant Banach function spaces). Необходимые детали будут изложены в 1.1. А пока скажем лишь, что это банаховы пространства функций, в которых нормы равноизмеримых функций равны. Последнее позволяет рассматривать такой параметр пространства как *фундаментальная функция*. Если $\mathbb{X}$ — это симметричное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$, то значения его фундаментальной функции $\Phi_{\mathbb{X}}$ определяются по формуле

$$\Phi_{\mathbb{X}}(t) = \|\chi_{(-t/2,t/2)}\|_{\mathbb{X}}. \tag{9}$$

Например, рассмотренные ранее пространства L^p являются симметричными с фундаментальными функциями $\Phi_{L^p}(t) = t^{1/p}$. В целом, эти функции ведут себя так же, как и стандартные мажоранты типа модуля непрерывности (имеется ввиду их квазивогнутость), что позволяет должным образом контролировать поведение средних значений $\log\varphi$ на духах окружности всякий раз, когда мы накладываем условие $\log\varphi \in \mathbb{X}$.

В статье [3] было установлено, что если $\varphi \in Lip_\omega$ с регулярной мажорантой модуля непрерывности ω и $\log\varphi \in \mathbb{X}$, то для $\mathcal{O}_\varphi$ гарантированна принадлежность классу $Lip_{\omega\circ\psi}$, где $\psi(t) = (t\Phi_{\mathbb{X}}(t))^{-1}$. В случае $\omega = ct^\alpha$ и $\mathbb{X} = L^p$, рассмотренном в начале, получаем уже известное $\omega\circ\psi(t) = Ct^{p\alpha/(p+1)}$. Интересно, например, то, что для стандартных пространств Лоренца $L^{p,q}$ падение гладкости будет таким, же как и для $L^p = L^{p,p}$. Достаточно развитый аппарат теории симметричных пространств позволяет описать все симметричные пространства с заданной фундаментальной функцией, а значит и набор достаточных условий вида $\log\varphi \in \mathbb{X}$, соответствующих падению гладкости в фиксированном соотношении. Необходимо отметить, что автором также доказана точность найденного показателя ψ. Таким образом была построена весьма обширная шкала достаточных условий. Описанные результаты будут представлены в главе 1.

Задача в верхней полуплоскости. Теория аналитических функций в круге и верхней полуплоскости по праву считаются «теориями близнецами». Обычно большинство утверждений, доказанных для круга, переносятся стандартным образом на случай полуплоскости. Так, например, мере Лебега на окружности соответствует мера Пуассона $dP(t) = \frac{dt}{1+t^2}$ на прямой. А внешней функции в круге будет соответствовать *внешняя функция в верхней полуплоскости*, которая задается следующей конструкцией (см. [7]).

Определение. Пусть h — вещественнозначная функция на прямой, для которой $h \in L^1(dP)$. Определим ее *интеграл Шварца* формулой

$$\mathcal{S}h(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{1+t^2}\right)h(t)dt,\ \ z \in \mathbb{H}_+. \tag{10}$$

Также определим *преобразование Гильберта* функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ формулой

$$\mathcal{H}f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-t}+\frac{t}{1+t^2}\right)f(t)dt,\ x\in\mathbb{R}, \tag{11}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Значения $\mathcal{H}f(x)$ определены почти во всех точках x, если $f\in L^1(dP)$.

Пусть теперь задана неотрицательная функция φ на прямой, удовлетворяющая условию $\log\varphi\in L^1(dP)$. Значения *внешней функции* $\mathcal{O}_\varphi$ внутри полуплоскости и на границе имеют вид

$$\mathcal{O}_\varphi(z)=\exp(\mathcal{S}\log\varphi(z)),\ z\in\mathbb{H}_+;\ \mathcal{O}_\varphi(x)=\varphi(x)\exp(i\mathcal{H}\log\varphi(x)),\ x\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Тем не менее, в вопросах граничной гладкости описанный выше принцип переноса нарушается. Достаточно легко проверить, что условия типа Гёльдера на окружности и на прямой не переходят друг в друга при естественном конформном изоморфизме круга и полуплоскости. В связи с этим, напрямую получить теорию в верхней полуплоскости из уже достаточно развитой теории для круга не представляется возможным. Исторически, задача для верхней полуплоскости не рассматривалась и вовсе до работы автора [4], за исключением разве что статьи [12], которую мы сейчас подробно обсудим. В ней рассматривались условия на гладкость модуля φ внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ порядка меньше 2 в одной точке прямой — точке 0. Удалось установить уже ставшее стандартным падение гладкости вдвое, а затем при помощи конформного переноса был получен уже результат для круга. Однако, дело в том, что такое возможно только для одной точки прямой — той самой точки 0. Если мы докажем такой же результат, скажем, для некоторой удаленной от нуля точки, то попытка перенести полученный результат на случай круга напрямую не даст условие на гладкость внешней функции в некоторой точке круга, ввиду того, что мажоранты в оценках перестанут быть функциями от расстояния между точками (мы говорим о гёльдеровых условиях). И обратно — перенос поточечного результата с круга на полуплоскость не даст условия на гладкость (кроме, соответственно, одного случая). Тем не менее, нам удалось разработать новую технику для случая внешних функций в верхней полуплоскости и получить ряд результатов для этого направления задачи в [4]. Точные формулировки результатов, полученных нами для $\mathbb{H}_+$ мы приведем в п. 0.4, а их доказательство в главе 3.

Прежде чем двинуться дальше, введем стандартные обозначения, которые в дальнейшем облегчат формулировки результатов и вычисления.

Определение. Для числовых функций f и g, заданных на одном и том же множестве, условимся писать $f \lesssim g$, если $f(x) \le Cg(x)$, при всех x с постоянной C, не зависящей от x. Если же $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$, то будем писать $f \asymp g$.

Вернемся теперь к главной особенности полученных результатов, выносимых на защиту, о которой мы упоминали в самом начале введения. Напомним, что они носят *поточечный* характер. Общая формула для них такова: стандартные условия на гладкость φ *в одной точке* x гарантируют функции $\mathcal{O}_\varphi$ в той же точке x гладкость «в два раза хуже» чем у φ, но не в стандартном виде, а в смысле интегральных оценок, должным образом соотвествующих гладкости не больше 2. Из этих оценок, в случае равномерного выполнения исходных условий на функцию φ во всех точках, уже получаются «классические» результаты, касающиеся «обыкновенной» гладкости $\mathcal{O}_\varphi$, которые обсуждались ранее. За исключением разве что [12], подобные результаты до выхода работы [1] получены не были.

С одной стороны, часть полученных поточечных результатов, а точнее их равномерные версии, возможные в силу описанной выше возможности перехода к равномерным следствиям, достаточно хорошо дополняют описанную в начале картину (например, полученные достаточные условия для падения гладкости в фиксированной пропорции). С другой стороны, часть результатов не были предсказаны «классической» теорией. Например, хотелось бы особенно выделить эффект зависимости точечных оценок гладкости внешней функции от точки, в которой эта гладкость измеряется, для случая верхней полуплоскости. Точнее, если для случая круга наличие поточечных аналогов описанных выше результатов вполне ожидаемо, т.е. общая формула не изменилась (гладкость падает в два раза; правильный контроль $\log\varphi$ позволяет улучшить этот показатель, но все верно в одной точке), то для верхней полуплоскости описанный эффект (обусловленность положением точки) в некотором смысле является новым.

К сожалению, на данный момент в поточечном направлении задачи изучен лишь случай малых гладкостей — не больше 2. Существует серьезная техническая преграда, не позволяющая пока данный порог преодолеть. Помимо автора, попытки распространить поточечные результаты на гладкости большего порядка предпринимались и другими исследователями, но пока они не увенчались успехом. Отметим, что в «равномерной» теории тоже был период (между [12] и [13]), когда результат был известен только для гладкостей не больше 2. В то же самое время, после достаточно длинной паузы задача стала развиваться вновь. В пример тому, достаточно перечислить публикации по данному кругу вопросов за последние 4 года: [1–4], [14], [17].

0.1. Как измерять гладкость внешней функции в точке?

Самой большой трудностью, которая связана с рассматриваемой задачей, является то, что необходимо иметь дело с сингулярным интегралом $\mathcal{H}$. В связи с этим, нам удобно измерять гладкость функций в терминах средних осцилляций, либо с помощью усредненных конечных разностей.

Определение. Рассмотрим некоторое симметричное пространство функций $\mathbb{W}$. Средняя осцилляция функции f по отрезку I в норме пространства $\mathbb{W}$ — это число

$$\Omega_{\mathbb{W}}(f, I) = \inf_{c} \frac{\||f - c|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}, \tag{13}$$

где нижняя грань берется по всем постоянным с. В частном случае $\mathbb{W} = L^r$, $r \in [1, \infty)$, средняя осцилляция принимает, возможно, более знакомый читателю вид

$$\Omega_r(f,I)=\inf_c\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I|f-c|^r\right)^{1/r}. \tag{14}$$

Симметричные пространства функций обсуждаются в разделе 1.1. Средние осцилляции по норме произвольного симметричного пространства рассматриваются только в главе 1, в то время как в главе 3 используются упрощенные версии — $\Omega_r(f,I)$.

«Среднюю» гладкость функции в точке x можно описывать условием

$$\Omega_{\mathbb{W}}(f,I)\le\omega(|I|), \tag{15}$$

которое должно быть выполнено для всякого отрезка I, содержащего точку x. Для 2π-периодических функций f можно ограничится лишь теми промежутками I, для которых $|I|\le 4\pi$, ввиду периодичности. Пока мы полагаем, что ω — некоторая неотрицательная непрерывная неубывающая функция, равная 0 только в 0. Выделим для ссылок то же соотношение (15), но уже с функцией $\Omega_r(f,I)$:

$$\Omega_r(f,I)\le\omega(|I|). \tag{16}$$

Обсудим степень применимости такого условия. Для этого рассмотрим степенные мажоранты $\omega(t)=Ct^\alpha$, $\alpha>0$. Условие (15) будет содержательным образом описывать гладкость функции f только для $\alpha\le1$, так как при $\alpha>1$ оно вполне осмысленно в отдельных точках, но если оно окажется выполнено с одной и той же постоянной C во всех точках некоторого промежутка, то, немедленно, функция f, будет постоянной на этом промежутке. Чтобы придать смысл условию (15) при $\alpha>1$, обычно поступают так: вместо постоянных c в формуле (14) берут полином степени $[\alpha]$ и, соответственно, нижнюю грань по всем таким полиномам. Формально, при целых α существует два неэквивалентных подхода: приближать многочленами степени α, либо $\alpha-1$. Подробности по вышесказанному можно найти в монографиях [18] и [19].

Обсудим другой подход к измерению средней гладкости функции в точке.

Определение. Определим n-ю разность $\Delta^n f(x,t)$ функции f в точке x по формулам:

$$\begin{gathered}\Delta^1 f(x,t) = f(x+t) - f(x),\\ \Delta^{n+1} f(x,t) = \Delta^n f(x+t,t) - \Delta^n f(x,t), \quad n \geq 1.\end{gathered} \tag{17}$$

По аналогии с (16), среднюю гладкость функции f в точке x можно описывать условием

$$\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |\Delta^n f(x,t)|\; dt\right)^{1/r} \leq \omega(h), \tag{18}$$

где функция ω — такая же, как и в (16), а параметр r фиксирован (снова h не слишком большое для 2π-периодических функций) Точно так же, как и для условий в терминах средних осцилляций, необходимо контролировать значение параметра n для конкретных мажорант ω. При совсем малых n может наступить вырождение. С другой стороны, если при конкретном значении n условие (18) осмысленным образом отражает гладкость функции f в точке x, то обычно увеличение n не приводит к каким-либо новым классам функций, а полезно лишь с технической точки зрения. Вернемся к степенной шкале $\omega(t) = Ct^\alpha$. Хорошо известно, что естественными значениями параметра n в (18) являются: $n = 1$ при $0 < \alpha \leq 1$ и $n = 2$ при $1 \leq \alpha \leq 2$. Особо отметим, что для $\alpha = 1$ подходят оба значения n, и соответствующие определения неэквивалентны. Все результаты диссертации касаются лишь гладкости не больше двух, поэтому мы ограничимся лишь первыми и вторыми разностями.

Следует отметить, что условие (18) с $n = 1$ влечет (16). Действительно, возьмем в качестве постоянной приближения $c = f(x)$ и пусть центр промежутка I совпадает с x. Имеем

$$\Omega_r(f,I) \leq \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |f - f(x)|^r\right)^{1/r} = \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_{-|I|/2}^{|I|/2} |f(x+t) - f(x)|^r\; dt\right)^{1/r} \leq$$

$$\leq \omega(|I|/2) \leq \omega(|I|).$$

«Гладкости до единицы» мы будем анализировать с помощью оценок средних осцилляций (15) в главах 1 и 3, а «гладкости между 1 и 2» — с помощью оценок усредненных вторых разностей (18) в главе 2. Методика восстановления равномерных результатов из поточечных будет обсуждаться дальше в п. 0.5.

0.2. Какого типа условия на гладкость модуля внешней функции будут рассматриваться?

Обсудим теперь типы условий, которые мы накладываем на модуль внешней функции φ, с целью установить оценки типа (15) и (18) для самой внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$.

При описании условий на гладкость модуля внешней функции мы будем придерживаться подхода Стечкина. Приведем, с небольшой поправкой, следующее определение, которое можно найти в [20, 201–202].

Определение. Назовем мажорантой типа k-го модуля непрерывности непрерывную неотрицательную неубывающую функцию ω на $[0, \infty)$, для которой $\omega(0) = 0$, а функция $t^{-k}\omega(t)$ является почти убывающей, т.е. для всяких значений $t_1 \leq t_2$ выполнено неравенство

$$\frac{\omega(t_2)}{t_2^k} \lesssim \frac{\omega(t_1)}{t_1^k}, \tag{19}$$

с некоторой универсальной постоянной.

Как было сказано выше, мы ограничимся лишь гладкостью не больше 2, поэтому нас интересуют только мажоранты типа 1-го и 2-го модуля непрерывности.

Для мажорант типа 1-го модуля непрерывности дополнительно рассмотрим условия регулярности, которые, в частности, присутствовали в работе [9].

Определение. Мажоранту типа 1-го модуля непрерывности ω назовем регулярной, если для всех δ выполнены неравенства

$$\int\limits_0^\delta \frac{\omega(u)}{u} du \lesssim \omega(\delta); \tag{20}$$

$$\delta \int\limits_\delta \frac{\omega(u)}{u^2} du \lesssim \omega(\delta). \tag{21}$$

Условимся называть регулярную мажоранту типа 1-го модуля непрерывности просто *1-мажорантой.*

Далее, нам понадобится разграничить случай гладкости меньше 1 и гладкости от 1 до 2. Поэтому введем следующее понятие.

Определение. Мажоранту типа 2-го модуля непрерывности ω назовем $[1,2]$-мажорантой, если функция $t^{-1}\omega(t)$ является почти возрастающей, т.е. для любых $t_1 \le t_2$ выполнено соотношение

$$\frac{\omega(t_1)}{t_1} \lesssim \frac{\omega(t_2)}{t_2}. \tag{22}$$

Легко заметить, что степенные мажоранты $\omega(t) \asymp t^\alpha$ являются: регулярными мажорантами типа 1-го модуля непрерывности при $0 < \alpha < 1$, и $[1,2]$-мажорантами для $1 \le \alpha \le 2$.

Рассмотрим функцию f, непрерывную в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$. Говоря о ее «обычной» гладкости порядка меньше 1 в точке x, мы будем считать, что выполнено неравенство

$$|f(y) - f(x)| \le \omega(|y-x|), \tag{23}$$

по всем y в случае прямой, и для таких y, что $|x-y| \le 4\pi$, в 2π-периодическом случае; а мажоранта ω — 1-мажоранта.

Условие на «обычную» гладкость порядка между 1 и 2 функции f в точке x зададим следующим образом: считаем что выполнено неравенство

$$|f(y) - f(x) - by| \le \omega(|y-x|), \tag{24}$$

по всем y в случае прямой, и для таких y, что $|x-y| \leq 4\pi$, в 2π-периодическом случае; с некоторой постоянной b и $[1,2]$-мажорантой ω.

0.3. Основные поточечные оценки для случая круга и гладкости не больше 2

Перейдем теперь к формулировке основных поточечных результатов для случая внешних функций в круге. Рассмотрим неотрицательную 2π-периодическую функцию $\varphi(x)$, непрерывную в некоторой точке x, для которой $\log\varphi \in L^1$.

Теорема 1. *Рассмотрим симметричное пространство $\mathbb{X}$ с фундаментальной функцией $\Phi_{\mathbb{X}}$. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (23) в точке x с 1-мажорантой ω, а также $\log\varphi \in \mathbb{X}$. Тогда для всякого $r > 1$ и промежутка $I \ni x$, $|I| \leq 4\pi$, выполнено (16) с мажорантой, пропорциональной $\omega + \omega \circ \psi$, если $\varphi(x) > 0$, и просто с мажорантой ω, если $\varphi(x) = 0$. Причем коэффициент пропорциональности в первой оценке зависит только от $\|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}$, ω и $\|\mathcal{H}\|_{L^r \to L^r}$, а функция ψ — обратная к функции $R_{\mathbb{X}}(u) = u\Phi_{\mathbb{X}}(u)$.*

Здесь приведено чуть «ослабленное» утверждение, чем то, что будет доказано в главе 1. Дело в том, что в представленной теореме можно заменить Ω_r на средние осцилляции по норме симметричного пространства без потери справедливости утверждения. Однако, если ограниченность оператора $\mathcal{H}$ в L^r — общеизвестный факт, то для ограниченности $\mathcal{H}$ в произвольном симметричном пространстве необходимо выполнение специального предположения — условия Бойда. А мы не хотели бы сейчас его описывать, но мы сделаем это в разделе 1.1.2.

На самом деле, как будет подробно описано в главе 1, если $\varphi(x) > 0$, то найдется такая пороговая постоянная A, которая зависит от значения $\varphi(x)$, что на промежутках I, для которых $|I| \gtrsim A$, «гладкость не падает» вовсе, то есть выполнено (16) с мажорантой, пропорциональной ω, но уже не с универсальным коэффициентом пропорциональности, как для случая $\varphi(x) = 0$, а обусловленным теми же параметрами, что и коэффициент из первой оценки теоремы 1. Более того, данная постоянная A будет стремиться к нулю, когда $\varphi(x) \to 0$. Кроме того, на совсем «маленьких промежутках» $|I| \le B(\varphi(x))$ можно добиться оценки типа

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le C(\varphi(x))\omega(|I|).$$

Однако порог $B(\varphi(x))$ будет стремиться к нулю, когда $\varphi(x) \to 0$, а постоянная $C(\varphi(x))$ будет неограниченно расти. Также напомним, что в главе 1 нами будет изучено поведение показателя ψ для различных симметричных пространств, построен пример, доказывающий неулучшаемость оценки теоремы 1 для случая $\log \varphi \in \mathbb{X}$, а также мы дадим описание всех пространств с заданной фундаментальной функцией, т.е. всех достаточных условий для падения гладкости $\mathcal{O}_\varphi$ в сравнении с гладкостью φ с заданной пропорцией ψ.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (24) в точке x с $[1, 2]$-мажорантой ω, а также $\log \varphi \in L^p$ Тогда для всякого $r > 1$ справедливы утверждения:*

(1) *если $\varphi(x) = 0$, то функция $\mathcal{O}_\varphi$ удовлетворяет (18) с мажорантой, пропорциональной ω;*

(2) *если $\varphi(x) > 0$, то функция $\mathcal{O}_\varphi$ удовлетворяет (18) с мажорантой, пропорциональной $\omega(\cdot) + \omega((\cdot)^\beta)$;*

причем коэффициент пропорциональности во второй оценке зависят только от $\|\log \varphi\|_{L^p}$, ω и $\|\mathcal{H}\|_{L^r \to L^r}$, в то время как в первой он равен единице, а показатель β равен $p/(p+1)$.

Обратим внимание на то, что гладкости в теоремах 1 и 2 разных типов, т.е. неинтегральные условия на φ влекут интегральные для $\mathcal{O}_\varphi$. Однако, в этом нет ничего страшного, более того, наличие равномерно выполненных условий (23) или (24) по всем точкам некоторого промежутка позволит получить условия на гладкость функции $\mathcal{O}_\varphi$ в «чистом виде». Этого можно добиться с помощью процедуры, описываемой в заключительной части введения 0.5. Отсюда имеем следующие следствия.

Следствие 1. *Рассмотрим некоторое симметричное пространство $\mathbb{X}$. Пусть функция φ удовлетворяет условию (23) равномерно во всех точках с одной и той же 1-мажорантой ω (т.е. фактически принадлежит Lip_ω), а также $\log\varphi \in \mathbb{X}$. Тогда функцию $\mathcal{O}_\varphi$ можно исправить на множестве меры ноль таким образом, что имеет место оценка*

$$|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(y)| \lesssim \omega(\psi(|x-y|))$$

по всем x, y, скажем, $|x-y| \le 2\pi$, где ψ — обратная к функции $R_{\mathbb{X}}(u) = u\Phi_{\mathbb{X}}(u)$. Причем, постоянная в оценке выше зависит только от $\|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}$ и ω.

Следствие 2. *Пусть функция φ удовлетворяет условию (23) равномерно во всех точках с одной и той же $[1,2]$-мажорантой ω, а также $\log\varphi \in L^p$. Пусть $\beta = p/(p+1)$. Тогда функцию $\mathcal{O}_\varphi$ можно исправить на множестве меры ноль так, что будут верны следующие утверждения.*

(1) *Если функция $\omega((\cdot)^\beta)$ будет также $[1,2]$-мажорантой, то имеет место оценка*

$$|\Delta^2 g(x,t)| \lesssim \omega(|t|^\beta)$$

по всем x и $|t| \le \pi/2$.

(2) *В противном случае, имеем оценку следствия 1:*

$$|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(y)| \lesssim \omega((|x-y|)^\beta).$$

Опять же, постоянные из неравенств выше зависят только от $\|\log\varphi\|_{L^p}$ и ω.

Следует отметить, что, ввиду определения $[1,2]$-мажоранты, функция $\omega((\cdot)^\beta)$ останется мажорантой типа 2-го модуля непрерывности, но для нее может как быть выполнено условие (22), так и нет. В связи с этим, дихотомия следствия 2 является вполне осмысленной.

0.4. Основные поточечные оценки для случая верхней полуплоскости и гладкости не больше 1

Как уже отмечалось выше, прямой перенос результатов для круга посредством конформного отображения ничего содержательного не дает в случае верхней полуплоскости. Более того, теория в этом случае будет обладать рядом специфических особенностей, таких как, например, обусловленность оценок положением точки, в которой гладкость измеряется. Итак, рассмотрим некоторую неотрицательную функцию φ, для которой $\log\varphi \in L^1(dt/(1+t^2))$.

Теорема 3. *Пусть φ удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условию (23) с 1-мажорантой ω и пусть еще $r > 1$. Тогда для любого промежутка $I \ni x$ выполнено следующее: если $\varphi(x) = 0$, то*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le \omega(|I|),$$

иначе существуют постоянные A^1 и A^2, зависящие от значения $\varphi(x)$ и мажоранты ω, с перечисленными ниже свойствами.

(1) *Если $|I| \ge A^1$, то*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|).$$

(2) *Если $A^2 \le |I| \le A^1$, то*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim (\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|})).$$

(3) *Если $|I| \le A^2$, то*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim M_x(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|})).$$

Причем, постоянные в оценках выше зависят только от ω и $\|\log\varphi\|_{L^1(dP)}$, а $M_x = \max\{1, x^2\}$.

Специфика данного результата заключается в том, что, во-первых, это не «падение гладкости вдвое» даже в интегральном смысле, так как на малых длинах промежутков I в полученной оценке доминирует слагаемое $\omega(\sqrt{|I|})$, а на больших, наоборот — $\omega(|I|)$; а во-вторых, в полученную оценку «вкралось» выражение M_x, которое становится неограниченным при $x \to \infty$. Последнее делает невозможным получение «прямых» равномерных следствий. Несмотря на это, нам удалось получить некоторые результаты (следствия ниже) и в этой «классической форме».

Следствие 3. *Предположим, что условие (23) выполнено для всех точек x некоторого промежутка $J \subset \mathbb{R}$ с 1-мажорантой ω. Тогда для $\mathcal{O}_\varphi$ верна оценка*

$$|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(y)| \lesssim \omega(|x-y|) + \omega(\sqrt{|x-y|})$$

по всем $x, y \in J$, с постоянной, зависящей от J, от ω и от $\|\log\varphi\|_{L^1(dP)}$.

Следствие 4. *Предположим, что $\varphi \in Lip_\omega(\mathbb{R})$, где ω — некоторая 1-мажоранта. Тогда для всякой точки x, для которой $\varphi(x) > 0$, найдется такой промежуток J_x, что $\mathcal{O}_\varphi \in Lip_{\omega(\cdot)+\omega(\sqrt{\cdot})}(J_x)$, причем с универсальной $Lip_{\omega(\cdot)+\omega(\sqrt{\cdot})}$–постоянной, обусловленной параметрами, аналогичными следствию 3 (кроме параметра $|J_x|$, от которого не зависит).*

Автором построены примеры, показывающие, что подобная зависимость от точки x оценок действительно является типичной (подобно стандартному примеру, показывающему неулучшаемость падения гладкости вдвое), но на защиту они не будут вынесены. Подробные анализ описанной специфики результатов в верхней полуплоскости будет проведен в главе 3.

На этом введение мы считаем законченным. В разделе ниже мы докажем, что объявленные выше поточечные теоремы приводят, если выполнены равномерно по всем точкам условия (23) или (24), к оценкам на «настоящую» гладкость внешней функции, которые обсуждались в начале введения. В главе 1 мы приведем доказательство теоремы 1 и обсудим связанные с показателем ψ вопросы, а также приведем необходимые результаты теории симметричных пространств. В главе 2 мы докажем теорему 2, а также представим вторую использованную технику — построение оценок средних разностей (в главах 1 и 3 мы строим оценки средних осцилляций). В главе 3 будет рассмотрен случай верхней полуплоскости и доказаны соответствующие результаты, объявленные выше. Работы автора по теме диссертации: [1–4]. Результаты главы 1 были опубликованы в [1] и [3], главы 2 — в [1] и [2], а главы 3 — в [4].

0.5. Восстановление равномерной гладкости из поточечных оценок средних осцилляций и средних разностей

Данный раздел можно считать «главой под номером 1/2». Здесь мы покажем как из теорем 1–3 получить следствия 1–4 и, тем самым, свяжем результаты глав 1, 2 и 3 и равномерные утверждения, которые мы обсуждали в начале введения. Нам кажется целесообразным обсудить этот вопрос сейчас, чтобы в дальнейшем к нему не возвращаться.

В целом, достаточно хорошо известно, что если интегральные условия вроде (15) и (18) выполнены равномерно во всех точках x некоторого промежутка, то соответствующая функция будет гладкой в классическом смысле этого слова на данном промежутке и какого-то принципиально нового открытия тут сделано не будет. Приступим к точному обоснованию данного тезиса.

Оценки средних осцилляций. Пусть ω_0 — неотрицательная возрастающая функция на $[0,\infty)$, равная нулю только в нуле.

Утверждение 1. *Пусть функция g — измеримая функция, а Q — отрезок (в 2π-периодическом случае считаем $|Q| \le 2\pi$) Предположим, что*

$$\Omega_r(g, I) \le \omega_0(|I|)$$

для всех промежутков I, содержащих какую-нибудь точку Q (опять, в 2π-периодическом случае не слишком больших, т.е. $|I| \le 4\pi$) Тогда, если ω_0 удовлетворяет условию регулярности (20), то функцию g можно исправить на множестве меры ноль до непрерывной (во всех точках Q), причем будет выполнено неравенство

$$|g(x_1) - g(x_2)| \lesssim \omega_0(|x_1 - x_2|)$$

при всех x_1 и x_2 из Q.

Это утверждение было доказано в [21] как обобщение результатов статей [22] и [23] для случая $\omega_0(t) = Ct^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, используя технику, разработанную в [24] для описания пространства функций ограниченной средней осцилляции BMO.

Следует подчеркнуть, что применять данное утверждение мы будем к комплекснозначной внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$, в то время как в самом утверждении функция g подразумевается вещественнозначной. Тем не менее, это обстоятельство достаточно легко преодолеть. Действительно, рассмотрим функции $g_1 = \operatorname{Re} g$ и $g_2 = \operatorname{Im} g$. Всякий раз когда выполнено $\Omega_r(g, I) \le \omega_0(|I|)$, верно и $\Omega_r(g_i, I) \le \omega_0(|I|)$, $i = 1, 2$. Поэтому мы можем применить отдельно утверждение 1 к g_1 и g_2 и восстановить искомую оценку для g, ввиду очевидного неравенства

$$|g(x_1) - g(x_2)| \le |g_1(x_1) - g_1(x_2)| + |g_2(x_1) - g_2(x_2)|.$$

Оценки усредненных разностей. Мы ограничимся лишь 2π-периодическим случаем. Теперь предположим, что для функции g оказалось выполненным условие

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\Delta^2 g(x,t)|^r \, dt\right)^{1/r} \le \omega_0(h), \quad 0 \le h \le 4\pi, \tag{25}$$

для всех точек x с одной и той же мажорантой типа 2-го модуля непрерывности ω_0. Следует отдельно пояснить, что мажоранта ω_0 может как быть

$[1,2]$-мажорантой, что будет соответствовать «чистой гладкости между 1 и 2», так и не быть таковой, например, она может оказаться 1-мажорантой (определение мажоранты типа 2-го модуля непрерывности этого не запрещает). К примеру, если для функции φ выполнено равномерно условие (24) с $\omega(t) = Ct^\alpha$, $1 \le \alpha \le 2$, и $\log \varphi \in L^p$, то мы ожидаем выполнения (25) с $\omega_0 \asymp t^\beta$, где $\beta = \frac{p\alpha}{p+1}$. Последний показатель вполне может оказаться меньше 1, что соответствует гладкости порядка меньше 1. В связи с этим, нам необходимо рассмотреть два соответствующих случая.

Итак, пусть ω_0 — 1-мажоранта. Приведем следующий результат, построенный по мотивам классической леммы Зигмунда [25, т. 1, гл. 2, теорема 3.4] и неравенства Маршо (см. [26]), отмеченный в [1].

Утверждение 2. *Пусть g — 2π-периодическая измеримая функция, причем $|g| \le L$ всюду. Фиксируем точку x и обозначим*

$$\Delta(h) = \left(\frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} |\Delta^2 g(x,t)|^r \, dt \right)^{1/r},$$

$$\varkappa(h) = \left(\frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} |\Delta^1 g(x,t)|^r \, dt \right)^{1/r},$$

тогда

$$\varkappa(\xi) \le \frac{L}{2^{k-1}} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\Delta(2^s \xi)}{2^s}, \quad 0 \le \xi \le \frac{\pi}{2},$$

где k — наибольшее натуральное число такое, что $2^k \xi \le \pi$.

Доказательство. Заметим, что

$$g(x+2t) - 2g(x+t) - g(x) = [g(x+2t) - g(x)] - 2[g(x+t) - g(x)],$$

откуда получаем

$$\Delta(h) = \left(\frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} |g(x+2t) - 2g(x+t) - g(x)|^r \, dt \right)^{1/r} \ge$$

$$\geq \left| \left(\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |g(x+2t) - g(x)|^r \, dt \right)^{1/r} - 2\left(\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |g(x+t) - g(x)|^r \, dt \right)^{1/r} \right|.$$

Если взять за новую переменную $2t$ в первом члене под знаком модуля в правом выражении, то можно это неравенство переписать следующим образом (с учетом введенных ранее обозначений):

$$|\varkappa(2h) - 2\varkappa(h)| \leq \Delta(h).$$

Отсюда для всех $j = 1, \ldots, k$, имеем

$$\left| 2^{j-1}\varkappa\left(\frac{h}{2^{j-1}}\right) - 2^j\varkappa\left(\frac{h}{2^j}\right) \right| \leq 2^{j-1}\Delta\left(\frac{h}{2^j}\right).$$

Поэтому имеем

$$\left| \varkappa(h) - 2^k\varkappa\left(\frac{h}{2^k}\right) \right| \leq \sum_{j=1}^{k} \left| 2^{j-1}\varkappa\left(\frac{h}{2^{j-1}}\right) - 2^j\varkappa\left(\frac{h}{2^j}\right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1}\Delta\left(\frac{h}{2^j}\right).$$

Далее, рассмотрим $0 \leq \xi \leq \pi/2$. Пусть k — наименьшее натуральное число, для которого $2^k\xi \leq \pi$. Подставим в полученную формулу $h = 2^k\xi$ и, поделив ее на 2^k, придем к искомой оценке

$$\varkappa(\xi) \leq \frac{\varkappa(2^k\xi)}{2^k} + 2^{-k}\sum_{j=1}^{k} 2^{j-1}\Delta(2^{k-j}\xi) \leq \frac{L}{2^{k-1}} + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} \frac{\Delta(2^s\xi)}{2^s}.$$

$\square$

Ввиду того, что ω_0 — 1-мажоранта, утверждение 2 нам дает $\varkappa(\xi) \lesssim \omega_0(h)$ в любой точке x. Напомним, что усредненные первые разности доминируют над средними осцилляциями. Таким образом, мы находимся в рамках утверждения 1, а значит можем доопределить g до непрерывной так, чтобы выполнялось

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|),$$

по всем x_1 и x_2 таким, что $|x_1 - x_2| \le 2\pi$. Остается только вопрос о применимости утверждения 2 к внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$. Ее равномерная ограниченность будет получена по ходу доказательства в главе 2. Ее комплекснозначность также не превращается в существенное препятствие. Действительно, достаточно провести те же рассуждения, что и для утверждения 1.

Далее, предположим, что ω_0 — $[1,2]$-мажоранта. Оказывается, что условие (25), выполненное равномерно по всем x, гарантирует наличие для функции g хороших локальных приближений полиномами, откуда непосредственно можно вывести гладкость функции g в стандартном смысле этого слова. Следующее утверждение было доказано в [1] для степенных мажорант ω_0 и обобщено автором на случай произвольных $[1,2]$-мажорант в [2].

Утверждение 3. *Пусть g такая же, как и раньше. Дополнительно предположим, что $g \in C^2$. Тогда для каждого отрезка $|I|$, $|I| < 2\pi$, найдется такой линейный полином ρ_I, что*

$$\sup_{x\in I} |g(x) - \rho_I(x)| \lesssim \omega(|I|).$$

Доказательство. Из условия (25) с объявленными выше параметрами немедленно следует

$$\frac{1}{h} \int\limits_{h/2\le|t|\le h} |\Delta^2 g(x,t)|\, dt \lesssim \omega(h), \quad 0 < h \le 4\pi.$$

Кроме того, верно

$$\Delta^2 g(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^t g''(x+\sigma+\tau)\, d\sigma\, d\tau. \tag{26}$$

Из формулы для второй разности получим

$$g(x) = \Delta^2 g(x, \sigma+\tau) + (2g(x+\sigma+\tau) - g(x+2\sigma+2\tau)).$$

Проинтегрируем данное равенство по σ и τ от 0 до t и поделим на t^2:

$$g(x) = \psi(x,t) + \frac{1}{t^2} \int\limits_0^t \int\limits_0^t \Delta^2 g(x, \sigma+\tau)\, d\sigma\, d\tau, \tag{27}$$

где

$$\psi(x,t)=\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^t[2g(x+\sigma+\tau)-g(x+2\sigma+2\tau)]\,d\sigma\,d\tau.$$

Далее, усредним (27) по t:

$$g(x)=\varphi_h(x)+\frac{1}{h}\int\limits_{h/2\le|t|\le h}\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^t\Delta^2g(x,\sigma+\tau)\,d\sigma\,d\tau\,dt,$$

где

$$\varphi_h(x)=\frac{1}{h}\int\limits_{h/2\le|t|\le h}\psi(x,t)\,dt.$$

Оценим второе слагаемое справа. Оно разбивается на два интеграла, по положительным и отрицательным t, которые оцениваются аналогично. Поэтому приведем только одну оценку, например интеграла $I_1(x)$ по $h/2\le t\le h$. Имеем

$$|I_1(x)|\lesssim\frac{1}{h^3}\int\limits_{h/2\le|t|\le h}\left(\int_0^h\int_0^h|\Delta^2g(x,\sigma+\tau)|\,d\sigma\,d\tau\right)dt\lesssim$$

$$\lesssim\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h|\Delta^2g(x,\sigma+\tau)|\,d\sigma\,d\tau=\int_0^h\int_\tau^{\tau+h}|\Delta^2g(x,u)|\,du\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\int_0^h\int_0^u|\Delta^2g(x,u)|\,d\sigma\,du+\int_h^{2h}\int_{u-h}^h|\Delta^2g(x,u)|\,d\sigma\,du\right]\lesssim\omega(h).$$

Последнюю оценку обеспечивает (25). Таким образом,

$$|g(x)-\varphi_h(x)|\lesssim\omega(h).\tag{28}$$

Оценим теперь вторую производную по x функции $\varphi_h(x)$. Прежде всего,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^t(2g''(x+\sigma+\tau)-g''(x+2\sigma+2\tau))\,d\sigma\,d\tau=$$

$$=\frac{2}{t^2}\Delta^2g(x,t)-\frac{4}{t^2}\Delta^2g(x,2t)$$

в силу (26). Поэтому

$$|\varphi_h''(x)| \le \frac{1}{h} \int\limits_{h/2\le|t|\le h} \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\right| \, dt \lesssim$$

$$\lesssim \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{h} \int\limits_{h/2\le|t|\le h} |\Delta^2 g(x,t)| \, dt + \frac{1}{h} \int\limits_{h/2\le|t|\le h} |\Delta^2 g(x,2t)| \, dt\right) \lesssim \frac{\omega(h)}{h^2}.$$

Последнюю оценку опять обеспечивает (25).

Рассмотрим отрезок I, его центр x_0, и пусть $h = |I|/2$. Для точки $x \in I$ имеем

$$\varphi_h(x) = \varphi_h(x_0) + \frac{1}{2}\varphi_h'(x)(x-x_0) + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \varphi_h''(u)(x-u) \, du.$$

Возьмем

$$\rho_I(x) = \varphi_h(x_0) + \frac{1}{2}\varphi_h'(x)(x-x_0).$$

Тогда

$$|\varphi_h(x) - \rho_I(x)| \lesssim \frac{\omega(h)}{h^2}(x-x_0)^2 \lesssim \omega(h).$$

□

Теперь, если $g \in C^2$, то, как нетрудно заметить, утверждение 3 обеспечивает оценку

$$|\Delta^2 g(x,t)| \lesssim \omega_0(|t|), \tag{29}$$

по всем x и $|t| \le \pi/2$. А это и есть желаемое условие на обыкновенную гладкость g.

В общем случае применим стандартные рассуждения (например, см. [7, ch. 2]). Рассмотрим ядра Фейера

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1-\cos(nx)}{1-\cos(x)}\right)$$

и свертки функции g с ними

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)K_n(x-t) \, dt.$$

Получившаяся последовательность g_n бесконечно дифференцируемых функций будет сходиться к g почти всюду. Ввиду простых свойств свертки, последовательность g_n будет удовлетворять (25) равномерно по n. Отсюда к ним применимо утверждение 3 и, по нашим рассуждениям выше, имеем $|\Delta^2 g_n(x,t)| \lesssim \omega_0(|t|)$. Осталось только взять предел в этом неравенстве при $n \to \infty$ и получить, что функция g совпадает почти всюду с функцией, удовлетворяющей (29). Аналогично рассуждению после утверждения 1, не составляет труда доказать, что данное утверждение будет применимо и для внешних функций. Действительно, если функция g удовлетворяет (25), то этому же условию будут удовлетворять $\operatorname{Re} g$ и $\operatorname{Im} g$, так как $|\Delta^2 \operatorname{Re} g(t,x)| \le |\Delta^2 g(t,x)|$ и $|\Delta^2 \operatorname{Im} g(t,x)| \le |\Delta^2 g(t,x)|$. Если $\rho_I^1(x) = a_0^1 + a_1^1 x$ — многочлен из утверждения 1 для $\operatorname{Re} g$, а $\rho_I^2(x) = a_0^2 + a_1^2 x$ — для $\operatorname{Im} g$, до достаточно положить $\rho_I(x) = (a_0^1 + i a_0^2) + (a_0^1 + i a_0^2)x$ и утверждение 1 будет верным для g, ввиду очевидного неравенства

$$|g(x) - \rho_I(x)| \le |\operatorname{Re} g(x) - \rho_I^1(x)| + |\operatorname{Im} g(x) - \rho_I^2(x)|.$$

Глава 1

Случай внешней функции в круге и гладкости не больше 1

1.1. Симметричные пространства функций

Напомним, что достаточные условия на падение гладкости внешней функции в сравнении с гладкостью ее модуля в фиксированной пропорции мы описываем, используя понятие симметричного пространства. Поэтому нам необходимо дать точное определение данного типа функциональных пространств, а также обсудить ряд их свойств, которые нам понадобятся в дальнейшем. Приводимая ниже теория симметричных (англ. rearrantgement invariant) пространств в полном объеме изложена в [27–29]. Мы здесь приводим лишь необходимые конструкции и результаты, которые относятся к пространствам функций на окружности. В основном, мы будем следовать изложению, представленному в монографии [27]. Как упоминалось ранее, мы отождествляем функции на окружности с их 2π-периодичными версиями на прямой, а саму окружность и меру Лебега на ней, естественным образом, с промежутком $[-\pi, \pi]$.

Обозначим через $S(\mathbb{T})$ совокупность всех измеримых почти всюду конечных вещественнозначных функций на $[-\pi, \pi]$.

Определение. Для неотрицательной функции $f \in S(\mathbb{T})$ определим ее функцию распределения n_f по формуле

$$n_f(\lambda) = |\{t \in [-\pi, \pi] \ : \ f(t) > \lambda\}| \tag{1.1}$$

Эта функция не возрастает, непрерывна справа и принимает значения в $[0, 2\pi]$.

Определение. Для функции $f \in S(\mathbb{T})$ определим ее невозрастающую перестановку f^* по формуле

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 \ : \ n_f(\lambda) \le t\}, \quad 0 < t \le 2\pi, \tag{1.2}$$

а также обозначим через f^{**} функцию, определяемую формулой

$$f^*(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(s)ds. \tag{1.3}$$

Определение. Две неотрицательные функции f и g из $S(\mathbb{T})$ условимся называть равноизмеримыми, если их функции распределения совпадают.

Отметим, что любая неотрицательная функция $f \in S(\mathbb{T})$ равноизмерима своей невозрастающей перестановке f^*. Для произвольной функции $f \in S(\mathbb{T})$ определим ее невозрастающую перестановку f^* как $|f|^*$.

Определение. Банахово пространство $\mathbb{X} \subset S(\mathbb{T})$ измеримых функций называется симметричным, если для любых функций $f, g \in S(\mathbb{T})$ выполнены следующие два свойства:

(S1) Если $|f| \le |g|$ п.в. и $g \in \mathbb{X}$, то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} \le \|g\|_{\mathbb{X}}$;

(S2) Если $f \in \mathbb{X}$, а $|f|$ и $|g|$ равноизмеримы, то $g \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} = \|g\|_{\mathbb{X}}$.

Согласно свойству (S2), норма всех характеристических функций χ_E измеримых множеств $E \subset [-\pi, \pi]$ фиксированной меры $|E| = t$ равна одному и тому же значению. Это позволяет корректно определить следующий важный параметр.

Определение. Функция $\Phi_{\mathbb{X}}(t)$, заданная по формуле

$$\Phi_{\mathbb{X}}(t) = \|\chi_{(-t/2,t/2)}\|_{\mathbb{X}}, \quad t \in (0, 2\pi), \tag{1.4}$$

называется фундаментальной функцией симметричного пространства $\mathbb{X}$.

Заметим, что фундаментальная функция $\Phi_{\mathbb{X}}(\cdot)$ обладает всеми свойствами мажоранты типа 1-го модуля непрерывности (см. [27, теорема 2.4.7, стр.137]) Следует отметить, что такого типа функции также называют *квазивогнутыми.* Более того, только они и могут являться фундаментальными функциями (все та же теорема 2.4.7)

Приведем одно важное свойство квазивогнутых функций. Согласно [27, теорема 2.1.1], всякая квазивогнутая функция Φ эквивалентна некоторой вогнутой функции $\widetilde{\Phi}$, которая называется *наименьшей вогнутой мажорантой* функции Φ, точнее выполнено соотношение

$$\frac{1}{2}\widetilde{\Phi} \leq \Phi \leq \widetilde{\Phi}.$$

Более того, при необходимости мы можем считать фундаментальную функцию пространства вогнутой. Это утверждение может быть подкреплено следующей теоремой (см. [27, теорема 2.5.8])

Теорема (о перенормировке симметричного пространства)**.** *На любом симметричном пространстве можно ввести эквивалентную норму так, что оно останется симметричным, и его фундаментальная функция будет вогнутой.*

Определение. Симметричному пространству $\mathbb{X}$ сопоставим ассоциированное пространство (двойственное по Кёте) $\mathbb{X}'$, состоящее из всех измеримых функций g, для которых

$$\|g\|_{\mathbb{X}'} := \sup_{f\in\mathbb{X},\quad \|f\|_{\mathbb{X}}\leq 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |fg| < \infty \tag{1.5}$$

Ассоциированное пространство $\mathbb{X}'$ тоже будет симметричным (см. [27, стр. 140–141]). Кроме того, пара пространств $(\mathbb{X},\, \mathbb{X}')$ обладает следующими свойствами:

$$f \in \mathbb{X}, g \in \mathbb{X}' \Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} |fg| \leq \|f\|_{\mathbb{X}}\|g\|_{\mathbb{X}'} \tag{1.6}$$

$$\Phi_{\mathbb{X}}(t)\Phi_{\mathbb{X}'}(t) = t \quad \text{при всех } t \in [0, 2\pi] \tag{1.7}$$

Разумеется, свойство (1.6) — просто следствие определения ассоциированной нормы. Доказательство соотношения (1.7) можно найти в [27], стр. 144.

Отметим, что для произвольного симметричного пространства $\mathbb{X}$ имеют место вложения (см. [27, теорема 2.4.1, стр. 124])

$$L^\infty \hookrightarrow \mathbb{X} \hookrightarrow L^1.$$

Границы в этих вложениях соответствуют известным нам границам «падения гладкости». Так, априорное условие $\log\varphi \in L^1$ обеспечивает для внешней функции падение гладкости вдвое, в то время как при $\log\varphi \in L^\infty$ падение гладкости, как известно, не наблюдается вовсе.

В связи с упомянутым выше, рассмотрим простейший пример симметричных пространств —пространства Лебега L^p. Для них: фундаментальная функция вычисляется по формуле $\Phi_{L^p}(t) = t^{1/p}$; ассоциированное пространство $(L^p)'$ совпадает с L^q, где $1/p + 1/q = 1$; соотношение (1.6) превращается в неравенство Гёльдера; а уравнение (1.7) в соотношение $1/p + 1/q = 1$ между параметром p и его сопряженным q. Как упоминалось во введении, для условия $\log\varphi \in L^p$ следует ожидать падение гладкости функции $\mathcal{O}_\varphi$ в «$(p+1)/p$–раз» по сравнению с гладкостью φ. Это в точности соответствует обратной функции к $R(t) = t\Phi_{L^p}(t) = t^{(p+1)/p}$. Мы обсудим схожие количественные соотношения для других известных примеров симметричных пространств в 1.2.4.

В целом, симметричные пространства можно рассматривать как естественное обобщение пространств L^p и выбор их в качестве пространственной шкалы вполне оправдан. На самом деле, когда мы говорим, что $\log\varphi$ принадлежит некоторому симметричному пространству $\mathbb{X}$, мы тем самым имеем некоторую мажоранту типа 1-го модуля непрерывности $\psi_{\mathbb{X}}(|E|)$, которой подчинены значения $\int_E |\log\varphi|$.

1.1.1. Представление Люксембурга

Для технических нужд, нам понадобится описать конструкцию, которая позволяет осуществить переход от симметричных пространств функций на $[-\pi, \pi]$ к симметричным пространствам на $(0, \infty)$. В первую очередь отметим, что наше определение симметричного пространства можно применить и для функций на $(0, \infty)$, достаточно просто заменить носитель $[-\pi, \pi]$ на $(0, \infty)$. Тем самым, само понятие симметричного пространства функций на $(0, \infty)$ мы полагаем осмысленным.

Обозначим через $S(0, \infty)$ совокупность всех измеримых почти всюду конечных функций f на $(0, \infty)$. Приведем результат (например, см. [28, theorem 2.4.10, стр.62]), позволяющий осуществить желаемый переход.

Теорема (Представление Люксембурга)**.** *Пусть* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ *— симметричное пространство функций на* $[-\pi, \pi]$*. Тогда существует (не обязательно единственная) норма* $\|\cdot\|_{\overline{\mathbb{X}}}$*, относительно которой пространство*

$$\overline{\mathbb{X}} = \{f \in S(0, \infty) \ : \ \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{X}}} < \infty\}$$

будет симметричным, причем для всякой функции $f \in \mathbb{X}$ *будет выполнено*

$$\|f\|_{\mathbb{X}} = \|f^*\|_{\overline{\mathbb{X}}}. \tag{1.8}$$

Более того, каждой ассоциированной паре $(\mathbb{X}, \mathbb{X}')$ *при таком представлении будет соответствовать ассоциированная пара* $(\overline{\mathbb{X}}, (\overline{\mathbb{X}})')$*.*

1.1.2. Условия ограниченности оператора гармонического сопряжения в симметричном пространстве

Рассмотрим некоторое симметричное пространство $\mathbb{X}$. Зададимся вопросом: когда оператор $\mathcal{H}$, с помощью которого определяются граничные значения внешней функции, будет ограничен из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{X}$?

В первую очередь следует отметить, что мы имеем дело с оператором гармонического сопряжения, а не с преобразованием Гильберта, поэтому, формально говоря, известный результат [30] мы применить не можем. Однако, можно адаптировать общую конструкцию для подобного типа операторов (например, см. [31]) под наши нужды. В частности, это было проделано в [28], что мы и представим ниже.

Согласно представлению Люксембурга, описанному в п. 1.1.1, мы можем осуществить переход от симметричного пространства $\mathbb{X}$ функций на $[-\pi, \pi]$ к пространству $\overline{\mathbb{X}}$ на $(0, \infty)$. На самом деле, после такого перехода носители функций из $\overline{\mathbb{X}}$ будут лежать в промежутке $[0, 2\pi]$. Последнее означает, что мы можем перейти к пространству функций на $[0, 1]$. Так и поступим, сохранив при этом обозначения. Далее, приведем следующую стандартную конструкцию (см. [28, стр. 148–150] и адаптацию под наш случай там же на стр. 165–166)

Для $t > 0$ рассмотрим *оператор растяжения* D_t действующий на функцию $f \in \overline{\mathbb{X}}$ по формуле

$$(D_t f)(s) = \begin{cases} f(st), & 0 \le s \le \min(1, 1/t); \\ 0, & \min(1, 1/t) \le s \le 1. \end{cases}$$

Известно (комбинация [28, proposition 3.5.11] и поправок [28, стр. 165–166]) что оператор $D_t : \overline{\mathbb{X}} \to \overline{\mathbb{X}}$ ограничен для любого $t > 0$.

Определение. Обозначим через

$$\overline{\alpha}_{\mathbb{X}} := \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|D_{1/t}\|_{\overline{\mathbb{X}}\to\overline{\mathbb{X}}}}{\log t}, \quad \underline{\alpha}_{\mathbb{X}} := \lim_{t\to 0} \frac{\log \|D_{1/t}\|_{\overline{\mathbb{X}}\to\overline{\mathbb{X}}}}{\log t} \tag{1.9}$$

верхний и нижний *индексы Бойда* соответственно.

Согласно [28, proposition 3.5.13] (по модулю поправок [28, стр. 165–166]) данные значения определены корректно и удовлетворяют неравенству

$$0 \le \underline{\alpha}_{\mathbb{X}} \le \overline{\alpha}_{\mathbb{X}} \le 1,$$

а также индексы Бойда для ассоциированного пространства $\mathbb{X}'$ можно вычислить по формулам

$$\underline{\alpha}_{\mathbb{X}'} = 1 - \overline{\alpha}_{\mathbb{X}}, \quad \overline{\alpha}_{\mathbb{X}'} = 1 - \underline{\alpha}_{\mathbb{X}}. \tag{1.10}$$

Определение. Будем говорить, что симметричное пространство $\mathbb{X}$ удовлетворяет условию Бойда, если

$$\underline{\alpha}_{\mathbb{X}} > 0, \quad \overline{\alpha}_{\mathbb{X}} < 1. \tag{B}$$

Заметим, что если $\mathbb{X}$ удовлетворяет (B), то, ввиду формул (1.10), этому же условию будет удовлетворять и $\mathbb{X}'$. Следующая теорема возникает как комбинация [28, theorem 3.6.8] и [28, theorem 3.5.16]

Теорема (Д. Бойда)**.** *Оператор $\mathcal{H} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ограничен тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}$ удовлетворяет условию Бойда* (B)*.*

1.1.3. Средние осцилляции по норме симметричного пространства

В данной части мы еще раз поясним, в каком виде мы измеряем гладкость функции $\mathcal{O}_\varphi$ в точке. А также то, каким образом из полученных оценок восстанавливать равномерные условия на гладкость не выше 1. Рассмотрим измеримую на окружности функцию f и некоторое симметричное пространство $\mathbb{W}$. Для постоянной c и дуги окружности $I \subset \mathbb{T}$ положим

$$\Omega_{\mathbb{W}}(f, I, c) := \frac{\| |f - c| \chi_I \|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}. \tag{1.11}$$

Как и во введении, под средней осцилляцией функции f по дуге I относительно нормы симметричного пространства $\mathbb{W}$ мы подразумеваем число

$$\Omega_{\mathbb{W}}(f, I) := \inf_c \Omega_{\mathbb{W}}(f, I, c). \tag{1.12}$$

Свойства (1.6) и (1.7) симметричного пространства $\mathbb{W}$ позволяют получить следующие соотношения:

$$\Omega_{L^1}(f, I, c) = \frac{\| |f - c| \chi_I \|_{L^1}}{|I|} \le \frac{\| |f - c| \chi_I \|_{\mathbb{W}} \|\chi_I\|_{\mathbb{W}'}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}} \|\chi_I\|_{\mathbb{W}'}} = \Omega_{\mathbb{W}}(f, I, c); \tag{1.13}$$

$$\Omega_{L^1}(f,I) \le \Omega_{\mathbb{W}}(f,I) \le \Omega_{L^\infty}(f,I). \tag{1.14}$$

1.2. Падение гладкости внешней функции в сравнении с гладкостью ее модуля при условии $\log\varphi \in \mathbb{X}$

1.2.1. Локальная гладкость внешней функции в терминах оценок средних осцилляций

Рассмотрим некоторое симметричное пространство $\mathbb{X}$ с вогнутой фундаментальной функцией $\Phi_{\mathbb{X}}$. Пусть φ — измеримая неотрицательная 2π-периодическая функция, которая удовлетворяет условию $\log\varphi \in \mathbb{X}$, а также непрерывна в некоторой точке x, в которой φ удовлетворяет условию

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \le \omega(|x-s|), \quad |y-x| \le 4\pi, \tag{1.15}$$

где ω — мажоранта типа 1-го модуля непрерывности (см. (19)) удовлетворяющая условиям регулярности (20) и (21). Пусть $\mathcal{O}_\varphi = \varphi\exp(i\mathcal{H}(\log\varphi))$ —внешняя функция, построенная по φ. Приведем полную формулировку теоремы 1 из введения, в которой учтены все важные особенности, связанные с описанным поведением оценок средних осцилляций внешней функции в зависимости от длины промежутка, по которому эта осцилляция считается.

Теорема 1.1. *Для любого симметричного пространства $\mathbb{W}$, удовлетворяющего условию Бойда (B), найдется пороговая постоянная A, зависящая только от ω и $\varphi(x)$, и при этом равная 0 для $\varphi(x) = 0$, такая, что для каждого промежутка $I \ni x$, $|I| \le 4\pi$, справедливы утверждения.*

1. *Если $|I| > A$, то $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|)$.*

2. *Если $|I| \le A$, то $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|) + \omega(\psi_{\mathbb{X}}(|I|))$*

Причем постоянные в оценках зависят только от $\|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}$, ω и $\|\mathcal{H}\|_{\mathbb{W}\to\mathbb{W}}$, а функция $\psi_{\mathbb{X}}$ — обратная к функции $R_{\mathbb{X}}(u) = u^2/\Phi_{\mathbb{X}'}(u) = u\Phi_{\mathbb{X}}(u)$.

Заметим, что благодаря оценке (1.14) мы можем применить утверждение 1 из 0.5, и, тем самым, получить равномерное следствие 1 из введения.

1.2.2. Пространства с заданным показателем падения гладкости

Предположим, что мы находимся в обозначениях теоремы 1.1. Обсудим поведение параметров $R_{\mathbb{X}}$ и $\psi_{\mathbb{X}}$. Отметим, что при малых v выполнены неравенства

$$c_1 v^2 \le R_{\mathbb{W}} \le c_2 v, \quad c_3 v \le \psi_{\mathbb{W}} \le c_4 \sqrt{v}.$$

Границы в этих неравенствах соответствуют известным нам случаям: случай $\log\varphi \in L^1$, в котором падение гладкости максимально, и случай $\log\varphi \in L^\infty$, в котором оно не наблюдается вовсе. Это хорошо коррелирует с вложением

$$L^\infty \hookrightarrow \mathbb{X} \hookrightarrow L^1.$$

Для удобства введем следующий параметр.

Определение. Обозначим через

$$\mathcal{I}_{\mathbb{W}}(v) = 1 + \frac{\log \Phi_{\mathbb{W}}(v)}{\log v}, \quad v < 1 \tag{1.16}$$

показатель падения гладкости в задаче.

Например, для пространств L^p он равен $1 + 1/p$.

Приступим к описанию пространства с заданным показателем гладкости. Итак, параметры падения гладкости зависят *только* от фундаментальной функции. Хорошо известно описание *всех* симметричных пространств с заданной фундаментальной функцией. А именно, пусть пространство $\mathbb{X}$ обладает вогнутой фундаментальной функцией $\Phi_{\mathbb{X}}$. Определим пространства Лоренца $\Lambda(\mathbb{X})$ и Марцинкевича $M(\mathbb{X})$ при помощи следующих функциональных норм:

$$\|f\|_{M(\mathbb{X})} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\Phi_{\mathbb{X}}(t)\}, \quad \|f\|_{\Lambda(\mathbb{X})} = \int\limits_0^\infty f^*(s)\,d\Phi_{\mathbb{X}}(s).$$

Оба этих пространства имеют фундаментальную функцию, равную $\Phi_{\mathbb{X}}$. Кроме того, имеют место вложения (см. [27, раздел 4 параграфа 5 главы 2])

$$\Lambda(\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathbb{X} \hookrightarrow M(\mathbb{X}).$$

Тем самым, пространства Лоренца $\Lambda(\mathbb{X})$ и $M(\mathbb{X})$ —*наименьшее* и *наибольшее* соответственно симметричные пространства с фундаментальной функцией $\Phi_{\mathbb{X}}$.

1.2.3. Точность полученного показателя падения гладкости

Мажоранта в полученных оценках средних осцилляций (а как следствие, и модуля непрерывности, если перейти к глобальному случаю) внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ хуже, чем у исходной функции φ. Пример В. П. Хавина (см. [9]) показывает, что в случае $\log\varphi \in L^1$ результат неулучшаем. Оказывается, что тот же пример демонстрирует точность результата и в нашем случае.

Рассмотрим некоторое симметричное пространство $\mathbb{X}$ и соответствующую функцию падения гладкости $R_{\mathbb{X}}$. Сейчас мы построим пример функции $\varphi \in Lip_\omega$ с логарифмом из $\mathbb{X}$ и соответствующую ей внешнюю функцию $\mathcal{O}_\varphi$, для которой

$$\omega_{\mathcal{O}_\varphi}(\delta) \geq C\omega(R_{\mathbb{X}}^{-1}(\delta)).$$

Некоторые технические детали мы опустим, но их можно восстановить из статьи [9]. Введем некоторые несущественные ограничения. Будем считать, что фундаментальная функция $\Phi_{\mathbb{X}}$ вогнута. Это оправдано теоремой о перенормировке симметричного пространства из 1.1. Кроме того, вместо пространства $\mathbb{X}$ будем рассматривать пространство $M(\mathbb{X})$ (так как оно наибольшее с данной фундаментальной функцией, а только она и играет роль в задаче).

Функцию φ будем искать в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} \omega(|x|), & -\frac{\pi}{4} < x \leq 0 \\ \exp(-\nu(x)), & 0 < x < -\frac{\pi}{4} \end{cases},$$

где ν — некоторая (пока неизвестная) неотрицательная убывающая дифференцируемая функция. Отметим, что значения функции ν на остальной части отрезка $[-\pi, \pi]$ нам не сильно важны. Из дальнейших рассуждений будет легко усмотреть, что $\varphi \in Lip_\omega$. С условием $\log\varphi \in M(\mathbb{X})$ ситуация более сложная. Будем подбирать параметры конструкции так, чтобы и левая и правая части (относительно точки 0) функции $\log\varphi$ принадлежали пространству $M(\mathbb{X})$.

1) Условие $\nu \in M(\mathbb{X})$ означает, что $\sup_u \nu^{**}(u)\Phi_{\mathbb{X}}(u) < \infty$. Отметим, что $\nu^* = \nu$ и перепишем это условие в виде

$$\sup_u \frac{\Phi_{\mathbb{X}}(u)}{u}\Big(\int_0^u \nu(v)dv\Big) < \infty. \tag{1.17}$$

2) Второе условие $\log\omega \in M(\mathbb{X})$ внесет некоторое ограничения на пространство $\mathbb{X}$. Отметим, что оно следует из условия $(\chi_{(0,1)}\log x) \in \mathbb{X}$. Поскольку $(\log x)^{**} = 1 + \log(1/x)$, это условие принимает вид

$$\sup_u \Phi_{\mathbb{X}}(u)\Big(1 + \log\frac{1}{u}\Big) < \infty. \tag{1.18}$$

Воспользовавшись рассуждениями из [9], произвольной точке x сопоставим точку x' так, чтобы $\mathcal{H}\log\varphi(x) = \pi + \mathcal{H}\log\varphi(x')$ и

$$x - x' \le Cx^2\Big(\int_0^x \nu(s)ds\Big)^{-1}.$$

Для этого потребуется, согласно [9], ужесточить требования на ν, а именно

$$\nu(x) > x^{-1/2}, \nu'(x) = o(x^{-2}), x \to 0+\,.$$

Теперь комбинируем эту оценку с условием (1.17). Но прежде отбросим случай L^1, который нам не интересен (в нем уже все построено). Т.е. $M(\mathbb{X}) \neq L^1$, что на языке фундаментальных функции (например, см. [28]) означает

$$\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\Phi_{\mathbb{X}}(t)} = 0.$$

Легко понять, что тогда найдется функция ν, удовлетворяющая *всем* ограничениям, такая, что

$$\frac{u}{\Phi_{\mathbb{X}}(u)} = o\Big(\int\limits_0^u \nu(v)dv\Big), \quad u \to 0+.$$

Значит

$$x - x' \le Cx^2 \frac{\Phi_{\mathbb{X}}(x)}{x} = CR_{\mathbb{X}}(x).$$

Отсюда

$$\frac{|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(x')|}{\omega(R_{\mathbb{X}}(|x - x'|))} \ge \frac{\omega(x)}{\omega(Cx)} \ge \frac{1}{C},$$

для достаточно малых $x > 0$. Таким образом, пример построен.

На самом деле (см. [9]) построенная функция допускает более точную оценку снизу, а именно

$$\omega_{\mathcal{O}_\varphi}(\delta) \ge C\Big(\omega(R_{\mathbb{X}}^{-1}(\delta)) + \int\limits_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}du + \delta\int\limits_\delta \frac{\omega(u)}{u^2}du\Big).$$

1.2.4. Примеры симметричных пространств и соответствующих им показателей падения гладкости

В 1.2.2 мы обсудили все симметричные пространства, для которых падение гладкости фиксировано, а также обосновали в 1.2.3 точность падения гладкости в каждом отдельном случае. Здесь, мы обсудим классические примеры симметричных пространств, отличных от широкого класса пространств Лоренца и Марцинкевича. Приводимые ниже примеры являются общеизвестными. Подробности про них можно найти в монографиях [27–29]. Для этих примеров мы вычислим показатель падения гладкости, объявленный в (1.16).

Пространства Лоренца $L^{p,q}$.

Определение. Пусть заданы параметры $0 < p, q \le \infty$. *Пространство Лоренца* $L^{p,q}$ состоит из всех измеримых функций f, для которых конечны

$$\|f\|_{p,q} = \Big(\int\limits_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\Big)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty; \quad \|f\|_{p,\infty} = \sup_{0<t<\infty} (t^{1/p} f^*(t)).$$

При $1 \le q \le p < \infty$ или $p = q = \infty$ пространство $L^{p,q}$ будет симметричным. Заметим, что $L^{p,p} = L^p$ и $L^{p,q} \hookrightarrow L^{p,r}$, $q \le r$. Кроме того, пространства Лоренца $\Lambda(L^p)$ и Марцинкевича $M(L^p)$, представленные в 1.2.2 совпадают с $L^{p,1}$ и $L^{p,\infty}$ соответственно. Стало быть, показатель падения гладкости для этих пространств — такой же, как у L^p. Последнее позволяет нам «разбавить» в нашей задаче шкалу пространств L^p, т.е.

$$L^\infty \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \underbrace{L^{p,1} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow L^{p,q} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow L^{p,\infty}}_{\mathcal{I}=1+1/p} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow L^1$$

Пространства Зигмунда $L\log L$ и $L_{\exp}$. Перенормируем меру на $[-\pi, \pi]$ так, чтобы его мера стала 1. Тогда мы можем определить пространства Зигмунда.

Определение. *Пространства Зигмунда* $L\log L$ и $L_{\exp}$ состоят из измеримых функций f, для которых конечна соответствующая норма

$$\|f\|_{L\log L} = \int_0^1 f^*(t)\log\left(\frac{1}{t}\right)dt; \quad \|f\|_{L_{\exp}} = \sup_{0<t<1} \frac{f^{**}(t)}{1+\log\frac{1}{t}}.$$

В такой нормировке имеют место вложения

$$L^\infty \hookrightarrow L_{\exp} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L\log L \hookrightarrow L^1.$$

Пространство $L\log L$ является Λ–пространством Лоренца с вогнутой фундаментальной функцией $\Phi_{L\log L}(u) = u(1+\log(1/u))$, а пространство $L_{\exp}$ является M–пространством Марцинкевича с квазивогнутой фундаментальной функцией $\Phi_{L_{\exp}}(u) = (1+\log(1/u))^{-1}$. Поэтому мы можем вычислить для этих пространств показатели падения гладкости,

$$\mathcal{I}_{L\log L}(u) = 2 - \frac{\log\left(1+\log\frac{1}{u}\right)}{\log u}, \quad \mathcal{I}_{L_{\exp}}(u) = 1 + \frac{\log\left(1+\log\frac{1}{u}\right)}{\log u}, \quad u < 1.$$

Заметим, что

$$\lim_{u\to 0-} \mathcal{I}_{L\log L}(u) = 2, \quad \lim_{u\to 1+} \mathcal{I}_{L\log L}(u) = 1,$$

$$\lim_{u\to 0-} \mathcal{I}_{L_{\exp}}(u) = 1, \quad \lim_{u\to 1+} \mathcal{I}_{L_{\exp}}(u) = 2.$$

1.3. Доказательство основных результатов главы 1

Приступим к доказательству теоремы 1.1. Нам понадобится провести ряд предварительных построений и сформулировать некоторые промежуточные утверждения. Все это приводится ниже. Непосредственное построение оценок начинается в 1.3.2.

1.3.1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим симметричное пространство $\mathbb{X}$ с вогнутой фундаментальной функцией Φ_X. Обозначим через φ неотрицательную 2π-периодическую функцию, удовлетворяющую условию

$$\log \varphi \in \mathbb{X}. \tag{1.19}$$

Рассмотрим соответствующую φ внешнюю функцию $\mathcal{O}_\varphi = \varphi \exp(i\mathcal{H} \log \varphi)$. Напомним, что

$$\mathcal{H}(\log \varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} p.v. \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-t}{2}\right) \log \varphi(t) dt. \tag{1.20}$$

Без ограничения общности мы будем считать, что точка x из теоремы 1.1, в которой мы измеряем гладкость, есть 0. Формально, функция φ задана с точностью до значений на множестве меры 0, но будем предполагать, что в 0 у нее вполне определенное значение $\varphi(0)$ и выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq \omega(|t|), \tag{1.21}$$

где ω — регулярная мажоранта ((20) и (21)) а типа 1-го модуля непрерывности (см. (19)).

Обозначим через $\widetilde{\omega}$ функцию, почти обратную к ω, заданную формулой $\widetilde{\omega}(s) = \inf\{t \colon \omega(t) = s\}$. Она задана на образе ω, возрастает и имеет предел 0 в нуле. Легко заметить, что

$$\omega(\widetilde{\omega}(s)) = s, \quad \widetilde{\omega}(\omega(t)) \leq t, \quad \widetilde{\omega}((1+\varepsilon)\omega(t)) \geq t. \tag{1.22}$$

Введем в рассмотрение следующее значение, которое будет играть роль порогового постоянной из теоремы 1.1,

$$A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(0)), \tag{1.23}$$

с достаточно малыми постоянными. Будем предполагать, что заведомо $\omega(A) \leq \varphi(0)/4$; а всякий раз, когда мы будем писать выражение типа $x \lesssim A$, мы гарантированно будем иметь хотя бы $8x \leq A$.

Лемма 1.1. *Пусть $\varphi(0) > 0$. Если $|t| \leq A$, то $\varphi(t) \geq \varphi(0)/2$.*

Доказательство. Пусть $|t| \leq A$. Ввиду (1.21), имеем

$$\varphi(t) \geq \varphi(0)\left(1 - \frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{\varphi(0)}\right) \geq \varphi(0)\left(1 - \frac{\omega(A)}{\varphi(0)}\right) \geq \frac{\varphi(0)}{2}.$$

$\square$

Отсюда вытекает ограниченность значения $\varphi(0)$ и самой функции φ, которые мы оформим в виде следующего утверждения.

Лемма 1.2. *Функция φ и значение $\varphi(0)$ равномерно ограниченны постоянной D, зависящей только от $\int_{-\pi}^{\pi} |\log \varphi|$ и ω.*

Доказательство. Сначала покажем, что значение $\varphi(0)$ ограниченно желаемой константой. Действительно, в противном случае по лемме 1.1 функция φ будет сколь угодно большой на отрезке фиксированной длины. А это противоречит условию

$$\|\log \varphi\|_{L^1} \lesssim \|\log \varphi\|_{\mathbb{X}} < \infty.$$

Отсюда и (1.21) немедленно следует ограниченность самой функции φ. $\square$

Лемма 1.2 позволяет нам провести перенормировку, разделив неравенство (1.21) на постоянную D из леммы 1.2 и, тем самым, добиться выполнения неравенства $\varphi(0) \leq 1$. Это окажется очень полезным и позволить сократить вычисления.

Следующие утверждение также будет играть немалую роль в последующих вычислениях.

Лемма 1.3. *Пусть $\varphi(0) > 0$. Если $|t| \le A$, то*

$$|\log\varphi(t) - \log\varphi(0)| \lesssim \frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{\varphi(0)} \lesssim \frac{\omega(|t|)}{\varphi(0)},$$

с универсальной постоянной.

Доказательство. Пусть $|t| \le A$. Тогда по лемме 1.1 $\varphi(t) \ge \varphi(0)/2$. Применим неравенство Лагранжа к функции log и получим искомую оценку. □

Приведем последнее из вспомогательных утверждений, связанное с ядром оператора гармонического сопряжения. Доказательство мы опустим по причине его тривиальности.

Лемма 1.4. *Пусть дан промежуток $I \subset [-\pi, \pi]$ и пусть $t \in I$, а $s \notin 2I$. Тогда*

$$\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{t-s}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{-s}{2}\right)\right| \lesssim \frac{|t|}{s^2},$$

где постоянная не зависит от I.

1.3.2. Оценки средних осцилляций

Приступим к построению оценок теоремы 1.1. Фиксируем промежуток $I \ni 0$, содержащийся в отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Необходимо оценить значение

$$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) = \inf_c \Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c) = \inf_c \frac{\||\mathcal{O}_\varphi - c|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}.$$

Лемма 1.5. *Справедливы следующие оценки:*

(1) $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \le \omega(|I|) + 2\varphi(0)$;

(2) *если $\varphi(0) > 0$ и $|I| \lesssim A$, то*

$$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c_I) \lesssim \omega(|I|) + \frac{\varphi(0)|I|}{A\Phi_{\mathbb{X}}(A)}$$

Постоянная во второй оценке зависит только от $\|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}$, ω и $\|\mathcal{H}\|_{\mathbb{W}\to\mathbb{W}}$.

Доказательство. Для удобства обозначим через

$$u(s) = \log \varphi(s) - \log \varphi(0).$$

Заметим, что $\mathcal{H}(\log \varphi) = \mathcal{H}(u)$, так как оператор $\mathcal{H}$ обращается в ноль на постоянных функциях. Рассмотрим подробнее усредняемую функцию. Возьмем постоянную $c = \varphi(0)e^{ic_1}$, тогда имеем

$$|\mathcal{O}_\varphi - \varphi(0)e^{ic_1}| = |\varphi \exp(i\mathcal{H}(\log \varphi)) - \varphi(0)e^{ic_1}| = |\varphi \exp(i\mathcal{H}u) - \varphi(0)e^{ic_1}| \leq$$

$$\leq |\varphi \exp(i\mathcal{H}u) - \varphi(0) \exp(i\mathcal{H}u)| + |\varphi(0) \exp(i\mathcal{H}u) - \varphi(0)e^{ic_1}| =$$

$$= |\varphi - \varphi(0)| + \varphi(0)| \exp(i\mathcal{H}u) - c_1|.$$

Заметим, что среднее функции $|\varphi - \varphi(0)|$ по промежутку I по норме пространства $\mathbb{W}$ мажорируется числом $\omega(|I|)$, по причине оценки (1.21). Для оценки второго слагаемого подберем правильную постоянную c_1. Возьмем

$$c_1 = \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus 2I} K(s,0)u(s)ds,$$

где $K(s,t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2}$ — ядро оператора гармонического сопряжения. Рассмотрим функции

$$v_1(t) = | \exp(i\mathcal{H}(u\chi_{2I})(t)) - 1|, \quad v_2(t) = | \exp(i(\mathcal{H}(u\chi_{\mathbb{T}\setminus 2I})(t) - c_1)) - 1|.$$

В таких обозначениях мы можем написать

$$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \leq \omega(|I|) + \varphi(0)\frac{\|v_1\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}} + \varphi(0)\frac{\|v_2\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}. \tag{1.24}$$

Пункт 1 леммы 1.5 мы можем получить уже сейчас, так как $|v_1|, |v_2| \leq 2$. Поэтому можем полагать $\varphi(0) > 0$ и $|I| \lesssim A$. Для построения второй оценки рассмотрим каждое слагаемое из (1.24) в отдельности.

Оценка среднего функции v_1. Заметим, что

$$|v_1(x)| \leq C|\mathcal{H}(u\chi_{2I})|.$$

Согласно нашему выбору постоянной A, $2|I| \le A$, а поэтому, ввиду леммы 1.3 мы можем утверждать

$$u\chi_{2I} \in L^\infty, \quad \|u\chi_{2I}\|_{L^\infty} \lesssim \frac{\omega(2|I|)}{\varphi(0)}.$$

В частности, последнее позволяет утверждать, что $u\chi_{2I} \in \mathbb{W}$, что делает дальнейшие рассуждения корректными.

Итак, пространство $\mathbb{W}$ удовлетворяет условию (B), а значит оператор $\mathcal{H} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ ограничен. Отсюда получаем

$$\varphi(0)\frac{\|v_1\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}} \lesssim \varphi(0)\frac{\|u\chi_{2I}\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}} \lesssim \omega(2|I|)\frac{\|\chi_{2I}\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}} \lesssim \omega(2|I|), \tag{1.25}$$

здесь мы опять применили лемму 1.3.

Оценка среднего функции v_2. Фиксируем точку $t \in I$. Применим стандартные рассуждения, связанные с сингулярным интегральным оператором $\mathcal{H}$. А именно, пусть L — наибольшее натуральное число, для которого $2^L I \subset [-\pi, \pi]$. Разобьем множество $\mathbb{T} \setminus 2I$ на множества вида $2^{j+1}I \setminus 2^j I$, $j = 1 \dots L-1$, и остаток $\mathcal{R} = [-\pi, \pi] \setminus 2^L I$. Воспользовавшись леммой 1.4 для оценки приближения ядра $\mathcal{H}$, имеем

$$|v_2(t)| \lesssim \sum_{j=1}^{L-1} \int\limits_{2^{j+1}I\setminus 2^j I} \frac{|t|}{s^2}|u(s)|ds + \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{|t|}{s^2}|u(s)|ds \lesssim \sum_{j=1}^{L} \int\limits_{2^{j+1}I\setminus 2^j I} \frac{|t|}{s^2}|u(s)|ds.$$

Для последней оценки мы просто увеличили множество интегрирования, что корректно по причине периодичности функции φ.

Заметим, что лемма 1.3 предоставляет нам хорошие оценки функции $u(s)$ до тех пор, пока промежутки не достигают порога A. В связи с этим, разобьем множество индексов, по которому ведется суммирование, на две части: $j = 1 \dots K$, где $K \asymp \log_2(A/|I|)$ — наибольший номер, для которого $2^{K+1}I \le A$, и остаток — $j = K+1 \dots L$.

Так, первая часть суммы, согласно лемме 1.3, допускает оценку

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|I|}{(2^j|I|)^2} \int\limits_{2^{j+1}I} |u(s)|ds \lesssim \frac{|I|}{\varphi(0)} \sum_{j=1}^{K} \frac{\omega(2^j|I|)}{2^j|I|}.$$

Для оценки второй части суммы, разобьем каждый из промежутков на два множества: «хорошее» $G := \{ \; s \mid \varphi(s) \geq \varphi(0) \; \}$ и «плохое» $G := \{ \; s \mid \varphi(s) < \varphi(0) \; \}$. На множествах $2^{j+1}I \cap G$ по-прежнему верна оценка из леммы 1.3 (достаточно аналогично доказательству леммы 1.3 применить формулу Лагранжа для функции log) Последнее просто добавит слагаемых в написанную выше оценку первой части суммы (суммирование распространится до L вместо K).

Возьмем точку $s \in B$. Поскольку $\varphi(0) \leq 1$, верны неравенства

$$0 \leq \log \frac{1}{\varphi(0)} \leq \log \frac{1}{\varphi(s)}.$$

Откуда

$$|u(s)| = |\log \varphi(s) - \log \varphi(0)| = \log \frac{1}{\varphi(s)} - \log \frac{1}{\varphi(0)} \leq \log \frac{1}{\varphi(s)} = |\log \varphi(s)|.$$

Последнее позволяет, используя (1.6) и (1.7), написать

$$\frac{1}{2^{j+1}|I|} \int\limits_{2^{j+1}I \cap B} |u| \leq \frac{1}{2^{j+1}|I|} \int\limits_{2^{j+1}I} |\log \varphi| \leq \| \log \varphi \|_{\mathbb{X}} \frac{\|\chi_{2^{j+1}I}\|_{\mathbb{X}'}}{2^{j+1}|I|} = \frac{\| \log \varphi \|_{\mathbb{X}}}{\|\chi_{2^{j+1}I}\|_{\mathbb{X}}}.$$

Согласно нашему выбору разбиения, верно неравенство $2^j|I| \gtrsim A$. Отсюда получаем оценку

$$|v_2(t)| \lesssim \frac{|I|}{\varphi(0)} \sum_{j=1}^{L} \frac{\omega(2^j|I|)}{2^j|I|} + \frac{|I|}{A\Phi_{\mathbb{X}}(A)} \sum_{j=K+1}^{L} \frac{1}{2^{j-K}} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{|I|}{\varphi(0)} \sum_{j=1}^{L} \frac{\omega(2^j|I|)}{2^j|I|} + \frac{|I|}{A\Phi_{\mathbb{X}}(A)}.$$

Первая сумма справа мажорируется должным образом в силу условия регулярности (21). Действительно, имеем

$$|I| \int\limits_{2^j|I|}^{2^{j+1}|I|} \frac{\omega(u)}{u^2} du \geq |I| \omega(2^j|I|) \frac{1}{u} \Big|_{2^{j+1}|I|}^{2^j|I|} \asymp |I| \frac{\omega(2^j|I|)}{2^j|I|};$$

$$|I| \sum_{j=1}^{L} \frac{\omega(2^j|I|)}{2^j|I|} \lesssim |I| \int\limits_{|I|} \frac{\omega(u)}{u^2} du \lesssim \omega(|I|).$$

Таким образом, окончательная оценка среднего функции v_2 примет вид

$$\varphi(0)\frac{\|v_2\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}} \lesssim \omega(|I|) + \frac{\varphi(0)|I|}{A\Phi_{\mathbb{X}}(A)}.$$

Собрав все оценки воедино, получаем окончательную оценку

$$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c_I) \lesssim \omega(|I|) + \frac{\varphi(0)|I|}{A\Phi_{\mathbb{X}}(A)},$$

которая завершает доказательство пункта 2 леммы 1.5.

□

Завершение доказательства теоремы 1.1. В первую очередь отметим, что если $\varphi(0) = 0$, то пункт 1 леммы 1.5 дает нам желаемую оценку $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c_I) \le \omega(|I|)$ вне зависимости от длины промежутка.

С другой стороны, если $|I| \gtrsim A$, то тот же пункт 1 нам дает

$$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I, c_I) \le \omega(|I|) + 2\varphi(0) \lesssim \omega(|I|) + \omega(A) \lesssim \omega(|I|),$$

ввиду $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(0))$ и (1.22). Поэтому остается рассмотреть лишь случай $\varphi(0) > 0$ и $|I| \lesssim A$.

Выделим слагаемое $\boxed{\varphi(0)}$ из оценки пункта 1 леммы 1.5 и $\boxed{\varphi(0)|I|/A\Phi_{\mathbb{X}}(A)}$ из пункта 2 леммы 1.5. Введем промежуточную функцию ψ, которая будет играть роль кандидата на показатель падения гладкости. Для промежутка I имеются только слеующие ве возможности.

1. Если $\psi(|I|) \gtrsim A$, то из пункта 1 леммы 1.5 получаем

   $$\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|) + \omega(\psi(|I|)),$$

   опять же по причине $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(0))$ и (1.22).

2. Если $\psi(|I|) \lesssim A$, то в этом случае ключевую роль сыграет второе выделенное слагаемое. Действительно, используя $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(0))$, напишем

   $$\varphi(0)|I|/A\Phi_{\mathbb{X}}(A) \asymp |I|\frac{\omega(A)}{A}\frac{1}{\Phi_{\mathbb{X}}(A)}.$$

Функция $t^{-1}\omega(t)$ удовлетворяет условию (19), а $\Phi_{\mathbb{X}}(t)$ возрастает. Поэтому мы можем оценить выражение выше значением

$$\frac{|I|}{\psi(|I|)\Phi_{\mathbb{X}}(\psi(|I|))}\omega_{\mathbb{X}}(\psi(|I|)).$$

Рассмотрим функцию $R(v) := v\Phi_{\mathbb{X}}(v)$. Легко заметить, что она обратима. Тогда, если взять $\psi = R^{-1}$, то можно завершить начатую оценку, следующим значением $\omega(\psi(|I|))$.

Таким образом, доказательство теоремы 1.1 завершено.

1.4. Пример распространения результатов на случай произвольной аналитической функции

Как и обещалось во введении, мы приведем пример техники, которая позволяет перейти от результатов для внешних функций к утверждениям для общего случая аналитических. Общий принцип тут таков: присоединение сингулярной функции и произведения Бляшке, в некотором смысле, даст такой же результат, что и лемма 1.5. Приводимые ниже рассуждения были впервые представлены в совместной статье [1]. Рассмотрим теперь произвольную функцию $F = \mathcal{O}_\varphi BS$. В общем случае тесной связи между $\mathcal{O}_\varphi$, B и S, ожидать не приходится, поэтому мы искусственно наложим ряд требований, чтобы «симулировать» случай, когда F является непрерывной вплоть до границы. Ниже мы ограничимся случаем $p = 1$ и осцилляциями Ω_r, и проверим выполняется ли в такой постановке аналог леммы 1.5.

Присоединение сингулярной функции. Пусть S — сингулярная внутренняя функция, которая соответствует конечной сингулярной положительной мере μ. Как обсуждалось в начале введения, почти всюду на границе круга $S = \exp(-i\mathcal{H}\mu)$. Напомним, что для непрерывной вплоть до границы аналитической функции F множество $\{t \in \mathbb{T} : |F(t)| = 0\}$ должно содержаться в носителе μ. В связи с этим, в случае, когда $\varphi(0) > 0$, потребуем, чтобы

$\mu\{t : |t| \leq A\} = 0$. Согласно лемме 1.1, на этом множестве функция φ будет строго положительна, так что это условие выполнялось бы наверняка, если бы F была непрерывна вплоть до границы.

В лемме 1.5 нам удалось двумя способами оценить величину

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{O}_\varphi - a|^r\right)^{1/r},$$

где $a = \varphi(0)\exp(ic)$, а c — некоторая вещественная постоянная. Посмотрим, что можно сделать для $\mathcal{O}_\varphi S$. Пусть b — другая вещественная постоянная. Имеем

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{O}_\varphi S - ae^{ib}|^r\right)^{1/r} \leq \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{O}_\varphi - a|^r\right)^{1/r} + \varphi(0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |S - e^{ib}|^r\right)^{1/r},$$

поскольку $|a| = \varphi(0)$ и $|S| = 1$ почти всюду. Отсюда получаем аналог неравенства (a) из леммы 1.5:

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi S, I) \leq \omega(|I|) + 4\varphi(0).$$

Далее, возьмем

$$b = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|s|\geq A} \operatorname{ctg}\left(-\frac{s}{2}\right)\, d\mu(s).$$

Пусть $\varphi(0) > 0$ и рассмотрим промежутки I из пункта (b) леммы 1.5, т.е. $|I| \lesssim A$. Имеем

$$\varphi(0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |S - e^{ib}|^r\right)^{1/r} \leq$$

$$\leq \varphi(0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|s|\geq A} \operatorname{ctg}\left(-\frac{t-s}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{s}{2}\right)\, d\mu(s)\right|^r dt\right)^{1/r} \lesssim$$

$$\lesssim \varphi(0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \left|\int\limits_{|s|\geq A} \frac{|t|}{s^2}\, d\mu(s)\right|^r dt\right)^{1/r} \lesssim \frac{\varphi(0)|I|\|\mu\|}{A^2}.$$

Итак, для функции $\mathcal{O}_\varphi S$ справедлив аналог леммы 1.5 с теми же оценками.

Присоединение произведения Бляшке. Пусть теперь $\mathcal{O}_\varphi$ и S такие же, как и раньше, а B — произведение Бляшке:

$$B(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_s|} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z},$$

где z_k — точки внутри круга, для которых выполнено условие Бляшке:

$$\beta = \sum_k (1 - |z_k|) < \infty.$$

Нам понадобится аналог условия (6), запрещающего последовательности z_k накапливаться к окружности касательным образом. Потребуем следующее: если $\varphi(0) > 0$, то существует такая постоянная ρ, что все нули $z_k = r_k e^{it_k}$ лежат вне «ячейки»

$$\{re^{it} : |t| \lesssim A,\ 1 - r \lesssim \rho A\}.$$

Если это выполнено, то для промежутка I, который содержит 0 и $|I| \lesssim A$, будет выполнено неравенство

$$|z_k - e^{is}| \gtrsim A$$

для всякого $s \in I$ и k. Тогда для $s \in I$ имеем

$$\left| \frac{d}{ds} B(e^{is}) \right| \le m + \sum_k \frac{|1 - z_k|^2}{|z_k - e^{is}|^2} \lesssim m + \frac{\beta}{A^2}.$$

Отсюда опять же получаем аналог леммы 1.5 уже для $\mathcal{O}_\varphi S B$ (в оценке (b) будет слагаемое порядка $|I|$ и, ставшее уже стандартным, $|I|\varphi(0)A^{-2}$).

Если же теперь мы усилим требование, скажем $\log \varphi \in L^p$, то в такой постановке мы падения гладкости в «$(p+1)/p$-раз» для F не получим. Действительно, если внешняя функция даст оценку из леммы 1.5 нужного порядка, то описанные выше оценки для сингулярной части и произведения Бляшке не изменятся (на них, формально, не влияет условие $\log \varphi \in L^p$). Последнее означает, что мы получим мажоранту $\omega(\sqrt{\cdot}) + \omega((\cdot)^{p/(p+1)})$, которая на малых промежутках доминируется $\omega(\sqrt{\cdot})$, вместо желаемой $\omega((\cdot)^{p/(p+1)})$. И обратно, если мы усилим требования на меру μ и нули B, но оставим стандартное $\log\varphi \in L^1$, то, аналогично, оценка для внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ «помешает» нам добиться улучшения результата. Ничего не остается кроме как контролировать все три параметра функции F. И удобно это делать именно в том порядке, который мы представили. Случай внешних функций достаточно хорошо изучен, поэтому под условия на $\log\varphi$ достаточно только «подогнать» условия на остальные параметры, чтобы получить полноценную достаточную теорему для общего случая. Например, все для того же условия $\log\varphi \in L^p$, как видно из оценок выше, достаточно будет дополнительно потребовать, чтобы

$$\int\limits_{|s|\geq A} \frac{d\mu(s)}{s^2} \leq \frac{C(\mu)}{A^{1+1/p}}; \quad |z_k - e^{is}|^2 \gtrsim A^{1+1/p}.$$

Что достаточно легко выразить в виде требований на μ и ячейки для нулей B. Заметим, что в статье [9] тоже предлагалось вводить дополнительный контроль на поведение μ на малых промежутках (дополнительно к запрету нулям B накапливаться к окружности касательным образом).

Глава 2

Случай внешней функции в круге и гладкости между 1 и 2

В первую очередь напомним, что мы в этой главе мы будем рассматривать условия, в которых фигурируют [1,2]-мажоранты ω, т.е. такие непрерывные неотрицательные неубывающие функции на $[0,\infty)$, для которых $\omega(0) = 0$, и выполнены неравенства

$$\frac{\omega(t_1)}{t_1^2} \gtrsim \frac{\omega(t_2)}{t_2^2}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\omega(t_1)}{t_1} \lesssim \frac{\omega(t_2)}{t_2}, \tag{2.2}$$

для всех $t_1 \leq t_2$.

Итак, рассмотрим неотрицательную 2π-периодическую функцию φ, для которой $\log\varphi \in L^1$. Также предположим, что φ непрерывна в некоторой точке x, в которой имеет место оценка

$$|\varphi(y) - \varphi(x) - by| \lesssim \omega(|y-x|) \tag{2.3}$$

по всем точкам y, для которых $|x-y| \leq 4\pi$, где b — некоторая постоянная, а ω — $[1,2]$-мажоранта. Рассмотрим внешнюю функцию $\mathcal{O}_\varphi$, построенную по φ. В данной главе, при наличии дополнительного условия типа $\log\varphi \in L^p$ мы рассчитываем получить для $\mathcal{O}_\varphi$ оценку

$$\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |\Delta^2\mathcal{O}_\varphi(x,t)|^r dt\right)^{1/r} \lesssim \omega_0(h), \tag{2.4}$$

для всех $h \leq 4\pi$, $r > 1$, где мажоранта ω_0 выражается через ω по формуле $\omega_0(t) = \omega(t^\beta)$, а $\beta = p/(p+1)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\log\varphi \in L^p$. *Если функция* φ *удовлетворяет в точке* x *условию* (2.3) *с* $[1,2]$*-мажорантой* ω, *то тогда верны следующие два утверждения.*

(1) *Если* $\varphi(0) = 0$, *то функция* $\mathcal{O}_\varphi$ *удовлетворяет условию* (2.4) *с мажорантой, пропорциональной* ω, *причем коэффициент пропорциональности здесь зависит от* ω *(от постоянных из условий* (2.1) *и* (2.2)*) и от* $\|\log\varphi\|_{L^p}$.

(2) *Если* $\varphi(0) > 0$, *то функция* $\mathcal{O}_\varphi$ *удовлетворяет условию* (2.4) *с мажорантой, пропорциональной* $\omega(\cdot) + \omega((\cdot)^\beta)$, *где* $\beta = p/(p+1)$, *при этом коэффициент пропорциональности здесь зависит от* ω *(от постоянных из условий* (2.1) *и* (2.2)*) и от* $\|\log\varphi\|_{L^p}$.

Напомним, что согласно теории, представленной в п. 0.5, если условие (2.3) будет выполнено равномерно по всем точкам, то тогда имеются две возможности.

(1) Если мажоранта $\omega((\cdot)^\beta)$ окажется $[1,2]$-мажорантой, то тогда, согласно утверждению 3, мы можем изменить функцию $\mathcal{O}_\varphi$ на множестве меры ноль таким образом, что будет выполнено

$$|\Delta^2\mathcal{O}_\varphi(x,t)| \lesssim \omega(|t|^\beta)$$

при всех x и, скажем, $|t| \le \pi/2$.

(2) Если же $\omega((\cdot)^\beta)$ не будет удовлетворять условию (2.2) (т.е. фактически окажется мажорантой 1ого порядка), то в этом случае работает последовательная комбинация утверждений 2 и 1. Последнее гарантирует нам возможность исправить $\mathcal{O}_\varphi$ на множестве меры ноль до функции, удовлетворяющей

$$|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(y)| \le \omega(|x-y|^\beta).$$

2.1. Доказательство основных результатов главы 2

2.1.1. Вспомогательные результаты

Пусть функция φ такая же, как и в формулировке теоремы. Рассмотрим внешнюю функцию $\mathcal{O}_\varphi$, построенную по φ. Без ограничения общности, будем считать, что точка, в которой мы измеряем гладкость, есть точка $x = 0$. Т.е. считаем, что задана [1,2]-мажоранта ω такая, что выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(0) - bt| \leq \omega(|t|). \tag{2.5}$$

Также будет полезно выделить следующую оценку, которая, разумеется, является очевидным следствием условия (2.5):

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq |b||t| + \omega(|t|). \tag{2.6}$$

Как и в главе 1, рассмотрим почти обратную к функции ω функцию $\widetilde{\omega}$, заданную по формуле $\widetilde{\omega}(s) = \inf\{t\colon \omega(t) = s\}$. Часть вспомогательных утверждений, приводимых ниже, будут похожи на те, что присутствовали в главе 1. Тем не менее, на их вид в этой главе будет существенно влиять параметр b из оценки (2.5).

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi(0) > 0$, тогда $|b| \leq C_1$, где*

$$C_1 = C_1(\varphi(0), \omega) = \max\left(\frac{2\varphi(0)}{\widetilde{\omega}(\varphi(0))}, \frac{\varphi(0)}{\pi}\right).$$

Доказательство. Если $b = 0$, то доказывать нечего. Иначе, подставим в (2.5) значение $t_0 = -2\varphi(0)/b$. Это можно сделать, если $2\varphi(0)/|b| \leq 2\pi$. Но в противном случае, имеем $|b| \leq \varphi(0)/\pi \leq C_1$, что и требуется доказать.

Итак, получаем $\varphi(t_0) + \varphi(0) \leq \omega(|t_0|)$, а значит и $\varphi(0) \leq \omega(|t_0|)$. Отсюда $\widetilde{\omega}(\varphi(0)) \leq |t_0| = 2\varphi(0)/|b|$, поэтому $|b| \leq 2\varphi(0)/\widetilde{\omega}(\varphi(0))$. □

Лемма 2.2. *Пусть $\varphi(0) > 0$. Если $|t| \leq C_2$, то $\varphi(t) \geq \varphi(0)/2$, где*

$$C_2 = C_2(\varphi(0), \omega) = \frac{1}{4}\min\left(\widetilde{\omega}\left(\frac{\varphi(0)}{4}\right), \pi\right)$$

Доказательство. Пусть максимум в формуле для C_1 из леммы 2.1 достигается на первом члене. Тогда

$$\varphi(t) \geq \varphi(0) - |b||t| - \omega(|t|) \geq \varphi(0) - |t|\frac{2\varphi(0)}{\widetilde{\omega}(\varphi(0))} - \omega(|t|) \geq$$

$$\geq \varphi(0) - \frac{1}{4}\widetilde{\omega}\left(\frac{\varphi(0)}{4}\right)\frac{2\varphi(0)}{\widetilde{\omega}(\varphi(0))} - \omega\left(\frac{1}{4}\widetilde{\omega}\left(\frac{\varphi(0)}{4}\right)\right) \geq$$

$$\geq \varphi(0) - \frac{\varphi(0)}{4} - \omega\left(\widetilde{\omega}\left(\frac{\varphi(0)}{4}\right)\right) \geq \varphi(0) - \frac{\varphi(0)}{2} = \frac{\varphi(0)}{2}.$$

Если же упомянутый максимум достигается на втором члене, то

$$\varphi(t) \geq \left(\varphi(0) - |t|\frac{\varphi(0)}{\pi}\right) - \omega(|t|).$$

Заметим, что $\varphi(0) - |t|\varphi(0)/\pi \geq 3/4\varphi(0)$, поскольку $|t| \leq \pi/4$ по условию. С другой стороны, верно $|t| \leq 4^{-1}\widetilde{\omega}(\varphi(0)/4) \leq \widetilde{\omega}(\varphi(0)/4)$, а значит $\omega(|t|) \leq \varphi(0)/4$. Таким образом, неравенство $\varphi(t) \geq \varphi(0)/2$ опять будет выполнено. $\square$

Заметим, что данная лемма позволяет нам вновь использовать теорему Лагранжа и получить оценку

$$|\log\varphi(t) - \log\varphi(0)| \leq \frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{\varphi(0)} \leq \frac{|b||t| + \omega(|t|)}{\varphi(0)} \tag{2.7}$$

для малых значений t, $|t| \leq C_2$. Представленные леммы, подобно случаю главы 1, позволяют сделать вывод об ограниченности параметров $\varphi(0)$ и b, а также самой функции φ. Запишем это в виде следующей леммы.

Лемма 2.3. *При сделанных ранее предположениях о функции φ имеют место следующие утверждения.*

(1) *Значение $\varphi(0)$ ограниченно сверху некоторой постоянной D_1, которая зависит только от $\|\log\varphi\|_{L^1}$ и ω.*

(2) *Значение $|b|$ ограниченно сверху универсальной постоянной $\omega(4\pi)/4\pi$.*

(3) *Функция φ также ограниченна постоянной D_2, зависящей только от $\|\log\varphi\|_{L^1}$ и ω.*

Доказательство. Первый пункт леммы уже, в некотором смысле был доказан в главе 1. Просто напомним, что если предположить, что число $\varphi(0)$ очень велико, то, в силу леммы 2.2, норма функции $\log\varphi$ в пространстве L^1 тоже окажется очень большой.

Чтобы доказать второе утверждение, проинтегрируем неравенство (2.5) по отрезкам $[-2\pi, 0]$ и $[0, 2\pi]$. Тогда имеем

$$|I - 2\pi\varphi(0) + 2\pi^2 b| \le 2\pi\omega(2\pi), \quad |I - 2\pi\varphi(0) - 2\pi^2 b| \le 2\pi\omega(2\pi),$$

где через I мы обозначили интеграл от φ по любому отрезку длины 2π (все эти интегралы одинаковы, ввиду периодичности φ). Отсюда $4\pi^2|b| \le 4\pi\omega(2\pi)$.

Последнее утверждение данной леммы можно получить совместив только что доказанные пункты 1 и 2 и неравенство (2.6). □

Теперь мы обоснованно можем нормировать ключевые параметры. Итак, мы предполагаем, что $\varphi(0) \le 1$, а также $\omega(2\pi) > \varphi(0)$. Последнее гарантирует, что максимум в формуле для C_1 из леммы 2.1 и минимум из формулы для C_2 в лемме 2.2 будут достигаться на первых значениях. Аналогично технике главы 1, введем в рассмотрение постоянную $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(0))$ (опять же с постоянной сильно меньше 1, чтобы удовлетворить всем техническим нуждам). Учитывая все вышесказанное, мы можем утверждать, что леммы 2.1 и 2.2 будут выполнены с постоянными

$$C_1 = \frac{\varphi(0)}{A} \lesssim \frac{\omega(A)}{A}, \quad C_2 = A. \tag{2.8}$$

Более того, путем дополнительной нормировки, мы можем добиться того, что $A < 1$ (например, разделив на $\widetilde{\omega}(2\pi)$). Так и будем считать.

Дополнительно, нам понадобится следующее простое утверждение о вторых разностях.

Лемма 2.4. *Пусть функция G принадлежит классу C^2 на $\mathbb{R}$ и пусть даны точки $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Обозначим $\delta_1 = x_1 - x_0$, $\delta_2 = (x_2 - x_1) - (x_1 - x_0)$.*

Допустим, что $|G'| \le \nu$, $|G''| \le \mu$ *на минимальном отрезке, содержащем точки* x_0, x_1, x_2*. Тогда имеет место оценка*

$$|G(x_2) - 2G(x_1) + G(x_0)| \le \nu(|\delta_1|^2 + |\delta_2|)^2 + \mu|\delta_2|.$$

Доказательство. Легко заметить, что

$$G(x_1) - G(x_0) = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(x_0 + t(x_1 - x_0))\, dt.$$

Повторив это соображение, получим

$$(G(x_2) - G(x_1)) - (G(x_1) - G(x_0)) =$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} G(x_0 + t(x_1 - x_0) + s(x_1 - x_0 + t((x_2 - x_1) - (x_1 - x_0))))\, dt\, ds =$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} G(\delta_0 + t\delta_1 + s\delta_1 + ts\delta_2)\, dt\, ds.$$

Все значения аргумента у функции G в интеграле выше лежат на минимальном отрезке, содержащем точки x_0, x_1, x_2. По условию на нем $|G'| \le \nu$ и $|G''| \le \mu$. Вычислив теперь производную под знаком интеграла и применив эти оценки, мы получим искомое неравенство. $\square$

Также нам вновь понадобится простая оценка на первое приближения ядра оператора $\mathcal{H}$

Лемма 2.5. *Пусть дан промежуток* $I \subset [-\pi, \pi]$*. И пусть* $t \in I$*, а* $s \notin 2I$*. Тогда*

$$\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{t-s}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{-s}{2}\right)\right| \lesssim \frac{|t|}{s^2}.$$

2.1.2. Оценки средних разностей

Сохраним обозначения и конструкцию, описанные ранее. Дополнительно, обозначим через $\psi = \mathcal{H} \log\varphi$, $u(\cdot) = \log\varphi(\cdot) - \log\varphi(0)$. Кроме того, отметим, что неравенство (2.6) позволяет нам рассматривать $\psi(0)$, так как из данного соотношения следует, что значение $\psi(0)$ вполне определено, т.е. соответствующий интеграл в смысле главного значения существует (для $\varphi(0) > 0$) Если же $\varphi(0) = 0$, то просто припишем какое-нибудь значение $\psi(0)$, которое не будет влиять на вычисления никоим образом, как будет видно ниже.

Итак, нам необходимо оценить следующее значение

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) := \left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |\Delta^2(\varphi e^{i\psi})(0,t)|^r dt\right)^{1/r}.$$

Рассмотрим подробнее подынтегральную функцию. Заметим, что

$$\Delta^2(\varphi e^{i\psi})(0,t) = \Delta^2\varphi(0,t)e^{i\psi(2t)} + 2\Delta^1\varphi(0,t)\Delta^1(e^{i\psi})(0,t) + \varphi(0)\Delta^2(e^{i\psi})(0,t)$$

$$=: S_1(t) + S_2(t) + S_3(t).$$

Отсюда, получаем

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) \le \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |S_j(t)|^r dt\right)^{1/r} =: d_1 + d_2 + d_3.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности.

Лемма 2.6. $|S_1(t)| \lesssim \omega(|t|)$.

Доказательство. Рассмотрим $v = \varphi(0) + bt$. Заметим, что $\Delta^2 v = 0$ и $v(0) = \varphi(0)$. Отсюда получаем

$$|S_1(t)| = |\Delta^2\varphi(0,t)| = |\Delta^2(\varphi - v)(0,t)| = |(\varphi - v)(2t) - 2(\varphi - v)(t) - (\varphi - v)(0)| =$$

$$= |(\varphi - v)(2t) - 2(\varphi - v)(t)| \le$$

$$\le |\varphi(2t) - b2t - \varphi(0)| + 2|\varphi(t) - bt - \varphi(0)| \le \omega(2|t|) + 2\omega(|t|).$$

Отметим, что условие (2.1) дает $\omega(2|t|) \lesssim \omega(|t|)$. Последнее вместе с полученной выше оценкой завершает доказательство. □

Заметим, что из леммы 2.6 следует, что $d_1 \lesssim \omega(h)$. Перейдем к оставшимся слагаемым.

Лемма 2.7. (*a*) $|S_2(t)| \le 4(|b||t| + \omega(|t|))$

(*b*) *Если* $\varphi(0) > 0$ *и* $h \lesssim A$, *то*

$$d_2 \lesssim \omega(h) + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^{\frac{p+1}{p}}A},$$

причем постоянная в оценке зависит только от ω *и* $\|\log\varphi\|_{L_p}$.

Доказательство. В первую очередь отметим, что $|\Delta^1(e^{i\psi})(0,t)| \le 2$. С другой стороны, оценка (2.6) дает

$$|\Delta^1\varphi(0,t)| \le |b||t| + \omega(|t|). \tag{2.9}$$

Обе эти оценки вместе доказывают пункт (*a*).

Перейдем теперь к доказательству пункта (*b*). Итак, считаем, что $\varphi(0) > 0$ и $h \lesssim A$. Воспользовавшись все той же оценкой (2.9), получаем

$$d_2 = \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |S_2(t)|^r dt\right)^{1/r} \le 2\omega(h) + 2|b|h\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \left|e^{i\psi(2t)} - e^{i\psi(t)}\right|^r dt\right)^{1/r}.$$

Теперь необходимо оценить значение соответствующего среднего в формуле выше должным образом. Рассмотрим стандартную константу приближения

$$c := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-4h,4h]} \operatorname{ctg}(-s/2)u(s)ds.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \left|e^{i\psi(2t)} - e^{i\psi(t)}\right|^r dt\right)^{1/r} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \left|e^{i\psi(2t)} - e^{ic}\right|^r dt\right)^{1/r} + \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \left|e^{i\psi(t)} - e^{ic}\right|^r dt\right)^{1/r}.$$

Оба слагаемых оцениваются одним и тем же способом, поэтому мы остановимся лишь на оценке последнего. Для краткости обозначим его через d_4. Для оценки d_4, применим стандартное разбиение. Имеем,

$$d_4 \le \left(\frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} |\mathcal{H}(\chi_{[-4h,4h]} u)(s)|^r ds \right)^{1/r} +$$

$$+\left(\frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \Big(\sum_{j=2}^{l} \int\limits_{2^j h \le |s| \le 2^{j+1} h} \left| \mathrm{ctg}\Big(\frac{t-s}{2}\Big) - \mathrm{ctg}\Big(\frac{-s}{2}\Big) \right| |u(s)| ds \Big)^r dt \right)^{1/r},$$

где, стандартно, $l \asymp \log_2(1/h)$.

Для оценки первого слагаемого, воспользуемся ограниченностью $\mathcal{H}$; для второго — используем лемму 2.5. Итак, можем продолжить оценку следующим образом

$$... \lesssim \left(\frac{1}{2h} \int\limits_{-4h}^{4h} |u(s)|^r ds \right)^{1/r} + h \sum_{j=2}^{l} (2^j h)^{-2} \int\limits_{2^j h \le |s| \le 2^{j+1} h} |u(s)| ds.$$

Первое слагаемое мы можем оценить $\lesssim (\varphi(0))^{-1}(|b|h + \omega(h))$, т.к. на промежутке $[-4h, 4h]$ работает оценка (2.7), а для мажоранты ω выполнено (2.1) (фактически это условие обеспечивает стандартное условие удвоения). С оставшейся суммой поступим стандартным образом. А именно, разобьем ее на две части: те слагаемые, в которых промежутки не достигли порога A, и оставшиеся. Для оценки первой части используем (2.7); чтобы оценить вторую, используем $|u(s)| \le |\log \varphi(s)| + |\log \varphi(0)|$ и неравенство Гёльдера. Таким образом, имеем

$$d_4 \lesssim \frac{|b|h + \omega(h)}{\varphi(0)} + \frac{h}{\varphi(0)} \sum_{j=2}^{k} \frac{|b| 2^j h + \omega(2^j h)}{2^j h} +$$

$$+h \sum_{j=k+1}^{l} (2^j h)^{-\frac{p+1}{p}} \|\log \varphi\|_{L^1} + \sum_{j=k+1}^{l} \frac{|\log \varphi(0)|}{2^j} := T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

где пороговый индекс k задан соотношением $2^k h \asymp A$.

Чтобы завершить доказательство, построим правильные оценки для $|b|hT_j$, $j=1,..,4$. Начнем с T_1. Согласно лемме 2.1, $|b|/\varphi(0)\lesssim 1/A$. Отсюда получаем $T_1\lesssim h/A+\omega(h)/\varphi(0)$, а значит

$$|b|hT_1\lesssim \frac{\varphi(0)h^2}{A^2}+\frac{h}{A}\omega(h).$$

В последней оценке мы можем грубо оценить второе слагаемое через $\omega(h)$, т.к. $h\lesssim A$.

Перейдем к оценке T_2. Имеем

$$T_2\le \frac{h}{\varphi(0)}\Big(\sum_{j\le k}|b|+\sum_{j\le k}\frac{\omega(2^jh)}{2^jh}\Big)\le h\frac{|b|}{\varphi(0)}\Big|\log\frac{A}{h}\Big|+\frac{h}{\varphi(0)}\sum_{j\le k}2^jh\frac{\omega(2^jh)}{(2^jh)^2}\lesssim$$

$$\lesssim \frac{h\log(1/h)}{A}+\frac{h}{\varphi(0)}\sum_{j\le k}2^jh\frac{\omega(h)}{h^2}=\frac{h\log(1/h)}{A}+\frac{\omega(h)}{\varphi(0)}\sum_{j\le k}2^j$$

$$\lesssim \frac{h\log(1/h)}{A}+\frac{\omega(h)}{\varphi(0)}2^k\asymp \frac{h\log(1/h)}{A}+\frac{\omega(h)A}{\varphi(0)h}.$$

Отсюда для $|b|hT_2$ получаем оценку

$$|b|hT_2\lesssim \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2}+\omega(h).$$

Рассмотрим T_3. Согласно построению, $A\lesssim 2^kh$. Поэтому имеем

$$|b|hT_3\lesssim \frac{|b|h^2}{A^{\frac{p+1}{p}}}\sum_{j=k+1}^{l}(2^{j-k})^{-\frac{p+1}{p}}\|\log\varphi\|_{L^p}\lesssim \frac{\varphi(0)h^2}{A^{\frac{p+1}{p}}A}.$$

Приступим к оценке последнего слагаемого T_4. Проведем те же рассуждения, что и для T_3. Имеем $T_4\lesssim h|\log\varphi(0)|/A$. Откуда $|b|hT_4\lesssim h^2\varphi(0)|\log\varphi(0)|/A^2$. Напомним, что $\varphi(0)\asymp\omega(A)$. Ввиду условия (2.1), мы можем утверждать, что $\log(1/\varphi(0))\lesssim\log(1/A)$. Поэтому мы можем оценить $|\log\varphi(0)|$ через $\log(1/h)$. Отсюда, окончательно, имеем

$$|b|hT_4\lesssim \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2}.$$

Собрав все результаты воедино, получаем требуемую оценку. $\square$

Лемма 2.8. *(a)* $|S_3(t)| \le 4\varphi(0)$*;*

(b) Если $\varphi(0) > 0$ *и* $h \lesssim A$*, то*

$$d_3 \lesssim h^2 + \omega(h) + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2} + \frac{\omega^2(h)}{\varphi(0)} + \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} +$$

$$+ \frac{\varphi(0)h^2\log^2(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{AA^{\frac{p+1}{p}}} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^{2\frac{p+1}{p}}},$$

причем постоянная в оценке зависит только от ω *и* $\|\log\varphi\|_{L_p}$*.*

Доказательство. Пункт (a) данной леммы тривиален, поэтому переходим сразу к пункту (b). Итак, считаем, что $\varphi(0) > 0$ и $h \lesssim A$. Необходимо оценить следующее значение

$$d_3 = \varphi(0)\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |\Delta^2(e^{i\psi})(0,t)|^r dt\right)^{1/r}.$$

Воспользуемся леммой 2.4 для $G(x) = e^{ix}$. Имеем

$$|\Delta^2(e^{i\psi})(0,t)| \le (|\Delta^1\psi(0,t)| + |\Delta^2\psi(0,t)|)^2 + |\Delta^2\psi(0,t)|.$$

Вторую разность в скобках можно оценить через первую, применив тривиальное тождество $\psi(2t) - 2\psi(t) + \psi(0) = (\psi(2t) - \psi(0)) - 2(\psi(t)\psi(0))$. Поэтому имеем

$$|\Delta^2(e^{i\psi})(0,t)| \lesssim |\Delta^1\psi(0,t)|^2 + |\Delta^1\psi(0,2t)|^2 + |\Delta^2\psi(0,t)|.$$

Как и в предыдущей лемме, первое и второе слагаемое оцениваются одинаковым образом, поэтому будем проводить вычисления только для первого и третьего слагаемого в соотношении выше. Обозначим их средние по промежутку $[-h,h]$ через d_5 и d_6 соответственно.

Приступим к оценке d_5. Напомним, что мы обозначили $u = \log\varphi - \log\varphi(0)$. Разобьем u на две части $u = u\chi_{[-2h,2h]} + v$, где $v = u - u\chi_{[-2h,2h]}$. Тогда имеем

$$d_5 = \left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |(\mathcal{H}\log\varphi)(t) - (\mathcal{H}\log\varphi)(0)|^{2r} dt\right)^{1/r} \lesssim$$

$$\lesssim \left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}|(\mathcal{H}(u\chi_{[-2h,2h]}))(t)|^{2r}dt\right)^{1/r} + |(\mathcal{H}(u\chi_{[-2h,2h]}))(0)|^2+$$

$$+\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\left(\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-2h,2h]}\left|\operatorname{ctg}\Big(\frac{t-s}{2}\Big)-\operatorname{ctg}\Big(\frac{-s}{2}\Big)\right||u(s)|ds\right)^{2r}dt\right)^{1/r}.$$

Заметим, что оценки первого и третьего слагаемого мы уже приводили в доказательстве леммы 2.7 (с точностью до возведения в квадрат), поэтому приведем оценку второго слагаемого, а затем добавим уже вычисленный ранее результат для оставшихся двух. Воспользовавшись (2.7), имеем

$$|(\mathcal{H}(u\chi_{[-2h,2h]}))(0)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left|\int\limits_{-2h}^{2h}\operatorname{ctg}\Big(\frac{-s}{2}\Big)u(s)ds\right|^2 \lesssim \left(\int\limits_{-2h}^{2h}\frac{|b||s|+\omega(|s|)}{|s|}ds\right)^2 \lesssim$$

$$\lesssim \left(\frac{|b|h+\omega(h)}{\varphi(0)}\right)^2 \lesssim \frac{h^2}{A^2}+\frac{\omega^2(h)}{\varphi^2(0)}.$$

Теперь осталось только скомбинировать это соотношение с квадратами оценок, полученных для значений T_1, T_2, T_3, T_4 из доказательства леммы 2.7. Однако, прежде чем продолжить, нам придется уточнить оценку для T_2. К сожалению, если ее оставить в прежнем виде,то ее нам не хватит. Итак, в обозначениях соответствующей части доказательства леммы 2.7, напишем еще раз выражение, для которого необходимо уточнить оценку:

$$D = \frac{h}{\varphi(0)}\sum_{j=2}^{k}\frac{\omega(2^j h)}{2^j},$$

где $2^k h \asymp A$. Вместо того, чтобы, как прежде, применить формулу (2.1), используем ограничение (2.2), отделяющее условия на гладкость меньше 1 от условий на гладкость от 1 до 2. Имеем

$$\frac{\omega(2^j h)}{2^j h} \lesssim \frac{\omega(2^k h)}{2^k h} \asymp \frac{\omega(A)}{A} \asymp \frac{\varphi(0)}{A}, \quad j = 2\dots k-1.$$

Отсюда получаем $D \lesssim A^{-1}h\log(1/h)$, т.е. обе компоненты T_2 оцениваются одним и тем же выражением.

Как и обещалось, комбинируем квадраты соответствующих оценок и получаем

$$\varphi(0)d_5 \lesssim \frac{\varphi(0)h^2}{A^2} + \frac{\omega^2(h)}{\varphi(0)} + \frac{\varphi(0)h^2\log^2(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^{2\frac{p+1}{p}}}. \tag{2.10}$$

Осталось оценить значение $\varphi(0)d_6$. Для этого приблизим функцию $\log\varphi$ подходящим многочленом степени 1.

Проведем подготовительные построения. Рассмотрим $\eta(s) = \varphi(0) + bs$. Возьмем многочлен $\tau(s) = \log\varphi(0) + bs/\varphi(0)$, который является многочленом Тейлора первого порядка для функции $\log\eta(s)$. Представим без доказательства следующее простое утверждение, которое доказывается аналогично лемме 2.3: для $|s| \lesssim A$ выполнено $\eta(s) \geq \varphi(0)/2$. Заметим, что вторая производная $\eta(s)$ совпадает с $-b^2/\eta^2(s)$. Поэтому, используя вышеупомянутую оценку и лемму 2.1, имеем

$$|\log\eta(s) - \tau(s)| \leq 4\frac{b^2}{\varphi(0)^2} \lesssim \frac{s^2}{A^2}. \tag{2.11}$$

Далее, возьмем $p(s) = \xi(s)\tau(s)$, где ξ — срезка класса C^∞, которая равна 1 на $[-\pi/4, \pi/4]$ и 0 на $[-\pi, \pi] \setminus [-\pi/4, \pi/4]$ и, продолжим функцию p до периодической.

Теперь для d_6 напишем

$$d_6 \leq \left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |\Delta^2[\mathcal{H}(\log\varphi - p)](0,t)|^r dt\right)^{1/r} + \left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |\Delta^2\mathcal{H}(p)(0,t)|^r dt\right)^{1/r}$$

$$:= d_7 + d_8.$$

Для начала, оценим d_8. Заметим, что оператор $\mathcal{H}$ коммутирует с оператором Δ^2, поэтому имеем

$$\Delta^2\mathcal{H}(p)(0,t) \asymp \int\limits_{-h}^{h} \operatorname{ctg}\Big(-\frac{s}{2}\Big)\Delta^2 u(s,t)ds.$$

Легко заметить, что $\Delta^2 p(s,t) = 0$ на промежутке $\{|s| \leq \pi/8\}$. На дополнении данного промежутка функция $\operatorname{ctg}(-s/2)$ ограниченна некоторой универсальной постоянной. Поэтому имеем

$$|\Delta^2\mathcal{H}(p)(0,t)| \lesssim \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta^2 p(s,t)|ds.$$

Далее, отметим, что $p''(s) = \xi''(s)\tau(s)+2\xi'(s)\tau'(s)$, откуда $|u''(s)| \lesssim \log(1/\varphi(0))+ 1/\varphi(0)$. Применив лемму 2.4 к функции $G = p$ с равноотстоящими узлами (т.е. $\delta_2 = 0$) и $\nu \asymp \log(1/\varphi(0)) + 1/\varphi(0)$, получаем

$$|\Delta^2(s,t)| \lesssim \frac{1+\log(1/\varphi(0))}{\varphi(0)}h^2 \quad \text{при} \quad |t| \le h.$$

Откуда, окончательно, имеем $\underline{\varphi(0)d_8 \lesssim h^2}$.

Далее, приступим к оценке $\varphi(0)d_7$. Напомним, что d_7 есть усредненная вторая разность $\Delta^2\mathcal{H}(\log\varphi - p)(0,t)$. Разобьем функцию $\log\varphi - p$ на две части: на $w_0 := (\log\varphi - p)\chi_{[-4h,4h]}$, и остаток $w = (\log\varphi - p) - w_0$. Имеем

$$\varphi(0)d_7 \le \varphi(0)\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\Delta^2\mathcal{H}(w_0)(0,t)|^r dt\right)^{1/r} + \varphi(0)\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\Delta^2\mathcal{H}(w)(0,t)|^r dt\right)^{1/r}. \tag{2.12}$$

Теперь оценим усредненные вторые разности от w_0 и w в отдельности. Начнем с w_0. Имеем

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\Delta^2\mathcal{H}(w_0)(0,t)|^r dt\right)^{1/r} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2h}\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}(w_0)(2t) - 2\mathcal{H}(w_0)(t) + \mathcal{H}(w_0)(0)|^r dt\right)^{1/r} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2h}\int_{-\pi}^{\pi} (|\mathcal{H}(w_0)(2t)| + 2|\mathcal{H}(w_0)(t)|)^r dt\right)^{1/r} + |\mathcal{H}(w_0)(0)| \le$$

$$\lesssim \left(\frac{1}{2h}\int_{-4h}^{4h} |w_0(s)|^r ds\right)^{1/r} + |\mathcal{H}(w_0)(0)|.$$

Чтобы получить последнее неравенство, мы воспользовались ограниченностью оператора $\mathcal{H}$ в L^r. Теперь рассмотрим и оценим каждое из полученных значений. Для подынтегральной функции в первом напишем

$$|w_0(s)| = |\log\varphi(s) - \tau(s)| \le |\log\varphi(s) - \log\eta(s)| + |\log\eta(s) - \tau(s)|$$

Если $|s| \le 4h \le A$, то верны соотношения $\eta(s) \ge \varphi(0)/2$ и $\varphi(s) \ge \varphi(0)/2$, а также оценка (2.11). Применим их, соответственно, к первому и второму слагаемому в полученной выше оценке. Получим

$$|w_0(s)| \lesssim \frac{|\varphi(s) - \eta(s)|}{\varphi(0)} + \frac{s^2}{A^2} \lesssim \frac{\omega(|s|)}{\varphi(0)} + \frac{s^2}{A^2}.$$

Отсюда получаем оценку

$$\varphi(0)\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-4h}^{4h} |w_0(s)|^r ds\right)^{1/r} \lesssim \omega(h) + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2}. \tag{2.13}$$

С другой стороны, если использовать ту же оценку, что мы получили для $|w_0(s)|$, но уже в $|\mathcal{H}(w_0)(0)|$, то получим

$$|\mathcal{H}(w_0)(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\Big(-\frac{s}{2}\Big) w_0(s)ds\right| \lesssim \int\limits_{-4h}^{4h} \frac{1}{|s|}\Big(\frac{\omega(|s|)}{\varphi(0)} + \frac{s^2}{A^2}\Big)ds \lesssim \frac{\omega(h)}{\varphi(0)} + \frac{h^2}{A^2}.$$

Значит $\varphi(0)|\mathcal{H}(w_0)(0)|$ оценивается тем же значением, что и в (2.13). Таким образом, вклад первого слагаемого в (2.12) можно оценить через $\underline{\omega(h) + A^{-2}\varphi(0)h^2}$.

Теперь рассмотрим второе слагаемое в (2.12). Оно оценивается (без множителя $\varphi(0)$) сверху ($\lesssim$) следующим значением:

$$\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Big|\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-4h,4h]} \Delta^2 \operatorname{ctg}(s,t)(\log\varphi(s) - p(s))ds\Big|^r dt\right)^{1/r}.$$

Применим к котангенсу лемму 2.4. Тогда на области интегрирования $|\Delta^2 \operatorname{ctg}(s,t)| \lesssim |s|^{-3}t^2$. Поэтому последнее выражение не превосходит

$$\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Big(\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-4h,4h]} \frac{t^2}{|s|^3}|\log\varphi(s) - p(s)|ds\Big)^r dt\right)^{1/r}.$$

Введем, как и при доказательстве леммы 2.7, разбиение $[-\pi,\pi]\setminus[-4h,4h]$ на промежутки вида $\{2^j h \le |s| \le 2^{j+1}h\}$, $j = 2\dots l$, где $l \asymp \log(1/h)$. Тогда можем продолжить оценку следующим выражением

$$h^2\sum_{j=2}^{l}(2^j h)^{-3}\int\limits_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds.$$

Точно так же, как и прежде, рассмотрим пороговый номер k, заданный соотношением $2^k h \asymp A$ и разобьем сумму на две: по индексам $\{j \le k\}$ и $\{j > k\}$. В слагаемых первой суммы функция $p(s)$ совпадает с $\tau(s)$, верны соотношения $\eta(s) \ge \varphi(0)/2$ и $\varphi(s) \ge \varphi(0)/2$, а также оценка (2.11). Поэтому для слагаемых суммы по индексам $\{j \le k\}$ имеем

$$\int\limits_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds \le \int\limits_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-\log\eta(s)|ds+$$

$$\int\limits_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\eta(s)-\tau(s)|ds \lesssim \int\limits_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}\frac{|\varphi(s)-\eta(s)|}{\varphi(0)}ds + \int\limits_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}\frac{s^2}{A^2}ds \lesssim$$

$$\lesssim 2^j h\Big(\frac{\omega(2^j h)}{\varphi(0)}+\frac{(2^j h)^2}{A^2}\Big).$$

Отсюда

$$h^2\sum_{j=2}^{k}(2^j h)^{-3}\int\limits_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds \lesssim \left(\frac{h^2}{\varphi(0)}\sum_{j=2}^{k}\frac{\omega(2^j h)}{(2^j h)^2}\right)+k\frac{h^2}{A^2}.$$

Разберемся с каждым слагаемым отдельно. Рассмотрим первое. Используя условие (2.1), получаем

$$h^2\sum_{j=2}^{k}\frac{\omega(2^j h)}{(2^j h)^2} \lesssim h^2\sum_{j=2}^{k}\int\limits_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}\frac{\omega(s)}{s^2}ds \lesssim h^2\int\limits_h^{2\pi}\frac{\omega(s)}{s^2}ds.$$

Последний интеграл можно оценить, опять же, используя свойство (2.1). А именно,

$$h^2\int\limits_h^{2\pi}\frac{\omega(s)}{s^2}ds \lesssim h^2\frac{\omega(h)}{h^2}\int\limits_h^{2\pi}ds \le 2\pi\omega(h).$$

Теперь рассмотрим значение $kA^{-2}h^2$. Согласно построению, число k пропорционально $\log(A/h)$. Поэтому

$$k\frac{h^2}{A^2} \lesssim \frac{h^2\log(1/h)}{A^2} + \frac{h^2\log(1/A)}{A^2} \lesssim \frac{h^2\log(1/h)}{A^2},$$

последнее верно, так как $h \lesssim A < 1$. А значит

$$\varphi(0)h^2\sum_{j=2}^{k}(2^jh)^{-3}\int\limits_{2^jh\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds \lesssim \lesssim \omega(h) + \frac{h^2\log(1/h)\varphi(0)}{A^2}. \tag{2.14}$$

Для подынтегральной функции в слагаемых оставшейся суммы по индексам $\{j > k\}$ используем «грубую» оценку $|\log\varphi(s) - p(s)| \le |\log\varphi(s)| + |\tau(s)|$. Отсюда, используя неравенство Гёльдера, для каждого слагаемого этой суммы получим оценку

$$\int\limits_{2^jh\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds \le \int\limits_{2^jh\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)|ds + \int\limits_{2^jh\le|s|\le 2^{j+1}h}|\tau(s)|ds \le$$

$$\le (2^jh)^{1-1/p}\|\log\varphi\|_{L^p} + 2^jh|\log\varphi(0)| + \frac{|b|(2^jh)^2}{\varphi(0)}.$$

Используя те же соображения, что и при оценке выражения T_4 в доказательстве леммы 2.7, мы можем заменить $|\log\varphi(0)|$ на $\log(1/h)$. Как и раньше, используем то, что $A \lesssim 2^jh$ для индексов $\{j > k\}$ и $|b|/\varphi(0) \lesssim 1/A$. Таким образом, имеем

$$\varphi(0)h^2\sum_{j=k+1}^{l}(2^jh)^{-3}\int\limits_{2^jh\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds \lesssim \lesssim \frac{\varphi(0)h^2}{AA^{\frac{p+1}{p}}} + \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2}. \tag{2.15}$$

Собрав вместе оценки (2.10), (2.13), (2.14), (2.15), а также две подчеркнутые, получаем искомую оценку для d_3. □

Завершение доказательства теоремы 2.1. Теперь когда мы оценили d_1, d_2 и d_3, вернемся к $\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h)$. Соберем вместе, с одной стороны, оценки леммы

2.6 и пунктов (a) лемм 2.7 и 2.8; а с другой — оценки пунктов (b) лемм 2.7 и 2.8, и лемму 2.6. Получается два неравенства:

(I) $\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) \lesssim \omega(h) + \frac{\varphi(0)h}{A} + \varphi(0)$;

(II) Если $|h| \lesssim A$, то

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) \lesssim h^2 + \omega(h) + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2} + \frac{\omega^2(h)}{\varphi(0)} + \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} +$$
$$+ \frac{\varphi(0)h^2\log^2(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{AA^{\frac{p+1}{p}}} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^{2\frac{p+1}{p}}}.$$

Заметим, что если $\varphi(0) = 0$, то неравенство (I), дает оценку $\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) \lesssim \omega(h)$, что можно трактовать как отсутствие падения гладкости.

Теперь пусть $\varphi(0) > 0$. Напомним, что, согласно построению, $\varphi(0) < 1$, $A < 1$. Обозначим через $\beta := p/(p+1)$. Отметим, что $\beta < 1$, а значит $x^\beta \geq x$ для $x \leq 1$. В неравенствах ниже (типа $\cdot \gtrsim A$ и $\cdot \lesssim A$) выберем достаточно малую постоянную и рассмотрим следующие две имеющиеся противоположные возможности:

1°. $h^\beta \gtrsim A$. Отметим, что $\varphi(0) \asymp \omega(A) \lesssim \omega(h^\beta)$. Кроме того, воспользуемся ограничением (2.2) и получим $\varphi(0)/A \asymp \omega(A)/A \lesssim h^{-\beta}\omega(h^\beta)$. Отсюда имеем оценку

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) \lesssim \omega(h) + \omega(h^\beta) + h^{1-\beta}\omega(h^\beta) \lesssim \omega(h) + \omega(h^\beta),$$

которая и является искомой.

2°. $h \leq h^\beta \lesssim A$. В этом случае применимо неравенство (II). Обсудим, как оценится каждое из его слагаемых. В первую очередь отметим, что $h < 1$, поэтому в паре h^2 — $\omega(h)$ доминирует второе, а значит h^2 можно отбросить. Заметим, что $\varphi(0) \asymp \omega(A)$, по этой причине и тому, что $x^{-2}\omega(x)$ почти убывает, можем написать

$$\frac{\varphi(0)}{A^2} \lesssim \frac{\omega(A)}{A^2} \lesssim \frac{\omega(h^\beta)}{h^{2\beta}}.$$

Далее, оценка выше приведет к следующему набору соотношений:

$$\frac{\varphi(0)h^2}{A^2} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2(1-\beta)} \lesssim \omega(h^\beta);$$

$$\frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2(1-\beta)}\log(1/h) \lesssim \omega(h^\beta);$$
$$\frac{\varphi(0)h^2\log^2(1/h)}{A^2} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2(1-\beta)}\log^2(1/h) \lesssim \omega(h^\beta);$$

Последние неравенства в этой серии оценок верны, потому что функции $h^{2(1-\beta)}$, $h^{2(1-\beta)}\log(1/h)$, $h^{2(1-\beta)}\log^2(1/h)$ равномерно ограничены при $h \le 1$, причем постоянные зависят только от β.

Теперь рассмотрим последние два (по порядку вхождения) слагаемых неравенства (II). Учтем введенное обозначение $\beta = p/(p+1)$, тогда знаменатели этих слагаемых примут вид: $A^{1+1/\beta}$ и $A^{2/\beta}$ соответственно. Еще раз напомним, что $\beta < 1$, поэтому почти убывание функции $t^{-2}\omega(t)$ влечет почти убывание функций $t^{-(1+1/\beta)}\omega(t)$ и $t^{-2/\beta}\omega(t)$ (соответствующие показатели у степени больше 2). Применим это обстоятельство к рассматриваемым слагаемым неравенства (II) и получим

$$\frac{\varphi(0)h^2}{A^{1+1/\beta}} \asymp \frac{\omega(A)h^2}{A^{1+1/\beta}} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2-\beta(1+1/\beta)} = \omega(h^\beta)h^{1-\beta} \lesssim \omega(h^\beta);$$
$$\frac{\varphi(0)h^2}{A^{2/\beta}} \asymp \frac{\omega(A)h^2}{A^{2/\beta}} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2-\beta\cdot 2/\beta} = \omega(h^\beta).$$

Осталось оценить последнее значение $\omega^2(h)/\varphi(0)$. Заметим, что ограничение (2.2) нам дает $h^{-1}\omega(h) \le A^{-1}\omega(A)$. Отсюда, окончательно, имеем

$$\frac{\omega^2(h)}{\varphi(0)} \asymp \frac{\omega(h)}{\omega(A)}\omega(h) \lesssim \frac{h}{A}\omega(h) \le \omega(h).$$

Собирая все полученные соотношения, имеем искомую оценку

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) \lesssim \omega(h) + \omega(h^\beta).$$

Глава 3

Случай внешней функции в верхней полуплоскости и гладкости меньше 1

Напомним, что мере Лебега на окружности соответствует мера Пуассона $dP(t) = \frac{dt}{1+t^2}$ на прямой. Рассмотрим некоторую неотрицательную функцию φ, для которой $\log \varphi \in L^1(dP)$. Граничные значения внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ задаются соотношением

$$\mathcal{O}_\varphi(x) = \varphi(x) \exp((\mathcal{H} \log \varphi)(x)),\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{H}$ — преобразование Гильберта, действующее на функцию f по формуле

$$\mathcal{H} f(x) = \frac{1}{\pi} \int \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2} \right) f(t) dt,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Значения $\mathcal{H} f(x)$ определены почти во всех точках x, если $f \in L^1(dP)$. Отметим, что, говоря о преобразовании Гильберта на прямой, часто подразумевают оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{H}_0 f(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int \frac{f(t)}{x-t} dt,\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Однако выражение в (3.3) определено лишь при $f \in L^1((1+|t|)^{-1}dt)$, в то время как мы имеем дело с $L^1(dP)$. Заметим впрочем, что если $f \in L^1((1+|t|)^{-1}dt)$, то $\mathcal{H} f = \mathcal{H}_0 f + c$ (это будет использовано в дальнейшем).

Приступим теперь к формулировке и обсуждению основных результатов данной главы. *Для удобства, будем молчаливо предполагать, что $\varphi(t) \leq 1$ для всех t.* Поскольку мы думаем об ограниченных аналитических функциях в полуплоскости, это нормировочное условие не умаляет общности. Однако оно несколько сокращает как вычисления, так и формулировки. Фиксируем точку

x и считаем, что выполнено условие

$$|\varphi(y)-\varphi(x)| \leq \omega(|x-y|),\ y \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

с некоторой 1-мажорантой ω. Напомним, что понятие 1-мажоранты подразумевает, что ω обладает следующим набором свойств: $\omega(0)=0$, $\omega(t)$ положительна и возрастает при $t>0$; $\omega(t)/t$ почти убывает при $t>0$, т.е. выполнено неравенство

$$\frac{\Phi(u)}{u} \lesssim \frac{\Phi(v)}{v},\ v \leq u.; \tag{3.5}$$

а также ω регулярна, т.е. имеют место оценки

$$\int\limits_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}dt \lesssim \omega(\delta);\quad \delta\int\limits_\delta^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \lesssim \omega(\delta),\quad \delta>0. \tag{3.6}$$

В данной главе мы ограничимся лишь стандартной ситуацией, когда $\log\varphi \in L^1(dP)$. Аналогично случаю главы 1, при наличии (3.4) в точке x, для функции $\mathcal{O}_\varphi$ мы рассчитываем получить правильную оценку

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega_0(|I|), \tag{3.7}$$

по всем промежуткам I, которые содержат x. Чисто формально, хотелось бы получить результат, аналогичный ситуации для случая круга, т. е. $\omega_0(\cdot) \asymp \omega(\sqrt{\cdot})$. Однако, как уже указывалось в введении, этого ожидать, наоборот, не следует. Итак, обозначим $M_x = \max\{1, x^2\}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Предположим, что мы находимся в рамках постановки выше и пусть еще $r>1$. Тогда для любого промежутка $I \ni x$ выполнено следующее. Если $\varphi(x)=0$, то $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leq \omega(|I|)$, иначе существуют постоянные A^1 и A^2, зависящие от значения $\varphi(x)$ и мажоранты ω, с перечисленными ниже свойствами.*

(1) *Если $|I| \geq A^1$, то*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|).$$

(2) *Если* $A^2 \le |I| \le A^1$, *то*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim (\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|})).$$

(3) *Если* $|I| \le A^2$, *то*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim M_x(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|})).$$

Причем, постоянные в оценках выше, как это уже стало стандартным, зависят только от ω *и* $\|\log \varphi\|_{L^1(dP)}$.

Как и ожидалось, теорема 3.1 не дает нам падения гладкости в «чистом» виде, т. е. из нее не следует условие $\sup_{I \ni x} \Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I)/\omega(\sqrt{|I|}) < \infty$. Для длинных отрезков I последнее неравенство и вообще вряд ли возможно по естественным причинам: оно становится *сильнее* такого же условия без квадратного корня. При маленьких I, разумеется, в п. 2 и 3 главный член — тот, в котором участвует квадратный корень, то есть мы наблюдаем падение гладкости вдвое. Новым по сравнению с окружностью является зависимость константы в оценке от положения точки x (см. п. 3) для «очень коротких» отрезков I. Автор не занимался построением примеров, однако скорее всего эта зависимость — не дефект метода, а отражает реальность.

Для наглядности полезно несколько загрубить результат теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *В условиях теоремы* 3.1, *пусть* $\varphi(x) > 0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim M_x(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|})),$$

с постоянной обусловленной тем же, чем и постоянные из теоремы 3.1.

Множитель M_x растет как x^2 при $x \to \infty$. Поэтому для функции $\varphi \in Lip_\omega(\mathbb{R})$ мы не можем утверждать, что $\mathcal{O}_\varphi \in Lip_{\omega(\cdot)+\omega(\sqrt{\cdot})}(\mathbb{R})$, даже несмотря на то, что постоянные в оценке теоремы 3.2 можно в этом случае взять одинаковыми для всех точек x. По-другому дела обстоят, если интересоваться лишь конечными промежутками. Если $\varphi \in Lip_\omega(J)$ для некоторого промежутка J, то постоянную M_x на J можно ограничить некоторой абсолютной константой M_J, а значит неравенство из теоремы 3.2 будет выполнено равномерно по всем точкам $x \in J$. Последнее позволяет применить стандартную технику, представленную в п. 0.5, а именно утверждение 1, и, тем самым, восстановить оценку на «обычную» гладкость $\mathcal{O}_\varphi$. Таким образом, в этом случае имеем следующее следствие.

Следствие 3.1. *Пусть функция φ такая же, как и прежде. Предположим, что условие (3.4) выполнено для всех точек x некоторого промежутка $J \subset \mathbb{R}$ с 1-мажорантой ω. Тогда для $\mathcal{O}_\varphi$ верна оценка*

$$|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(y)| \lesssim \omega(|x-y|) + \omega(\sqrt{|x-y|})$$

по всем $x, y \in J$, с постоянной, зависящей от J, от ω и от $\|\log \varphi\|_{L^1(dP)}$.

Пристальный взгляд на вычисления, ведущие к теореме 3.1, показывает, что, тем не менее, оценочная постоянная в п. 3 перестает зависеть от x, если еще сильнее ограничить длину интервала I сверху. Справедливо следующее утверждение, в котором от положения точки x вместо постоянной в оценке зависит длина интервала, на котором эта оценка выполнена.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены предположения теоремы 3.1, а $\varphi(x) > 0$. Тогда найдется такое число B (оно зависит от x и величины $\varphi(x)$), что для всякого промежутка $I \ni x$, $|I| \le B$, выполнено неравенство*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}),$$

с постоянной, обусловленной теми же параметрами, что и постоянная из теоремы 3.1, в частности, не зависящая от положения точки x.

Для величины B будет дана вполне явная формула, из которой, в частности, видно, что при больших x эта величина убывает как x^{-2}. Несмотря на то, что равномерную гёльдеровость на всей прямой для внешней функции мы не получили в «чистом» виде, имеется следующий «локальный» результат.

Следствие 3.2. *Предположим, что $\varphi \in Lip_{\omega}(\mathbb{R})$, где ω — некоторая 1-мажоранта. Тогда для всякой точки x, для которой $\varphi(x) > 0$, найдется такой промежуток J_x, что $\mathcal{O}_{\varphi} \in Lip_{\omega(\cdot)+\omega(\sqrt{\cdot})}(J_x)$, причем с универсальной $Lip_{\omega(\cdot)+\omega(\sqrt{\cdot})}$–постоянной, обусловленной параметрами, аналогичными следствию 3.1 (кроме параметра $|J_x|$, от которого не зависит).*

Следует отметить, что длина промежутков J_x в этом следствии стремится к 0 при $x \to \infty$. Напоследок, не вдаваясь в детали, отметим, что для неограниченных функций φ верен аналог теоремы 3.1 и последующих результатов, но с более сложной зависимостью постоянных A_1 и A_2 от значения $\varphi(x)$. Результаты для этого случая приведены не будут и на защиту не выносятся.

3.1. Доказательство основных результатов главы 3

Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим неотрицательную измеримую функцию φ, всюду строго меньшую единицы, удовлетворяющую условию $\log \varphi \in L^1(dP)$ и непрерывную в точке x_0, для которой выполнена оценка

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \omega(|x - x_0|)$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, с некоторой 1-мажорантой ω. Следует отметить, что если необходимо построить искомые оценки только в точке x_0, то и требовать ограниченность сверху единицей достаточно только для $\varphi(x_0)$.

3.1.1. Вспомогательные результаты и подготовительная конструкция

Ряд утверждений, приводимых ниже, уже были доказаны для главы 1. Их мы приведем без доказательства. Дополнительно мы введем в рассмотрение новую конструкцию, разработанную нами специально для случая прямой.

Лемма 3.1. *Для всякого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ и набора точек $x, y \in I, t \notin 2I$ верно неравенство $|x - t| \geq |y - t|/2$.*

Аналогично главам 1 и 2, мы рассматриваем почти обратную функцию $\widetilde{\omega}$ к ω и пороговою постоянную $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(0))$ (опять же достаточно малую, для всех технических нужд)

Лемма 3.2. *Предположим, что $\varphi(x_0) > 0$. Тогда найдется такое пороговое значение $A = A(\omega, \varphi(x_0)) \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(x_0))$, что выполнено неравенство $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)/2$ всякий раз, когда $|x - x_0| \leq A$.*

Пусть $\varphi(x_0) > 0$. Нам понадобится немного уточнить выбор порогового значения из леммы 3.2. Нам подойдет любое значение, меньшее, чем $\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2)$, однако удобно будет считать, что оно меньше 1. Если $\widetilde{\omega}(1) \leq 1$, то, очевидно, ничего уменьшать не надо и мы можем взять $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2) < 1$. Пусть теперь $\widetilde{\omega}(1) > 1$. Заметим, что $\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2) \leq \widetilde{\omega}(\varphi(x_0)) < \widetilde{\omega}(1)$. Положим $A \asymp (\widetilde{\omega}(1))^{-1}\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2)$. Понятно, что такое A меньше 1 и для него утверждение 3 по-прежнему верно (в частности, $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(x_0))$).

Рассмотрим теперь множество $L_{x_0} := \{x : |x - x_0| \leq A\}$.

Лемма 3.3. *Пусть $\varphi(x_0) > 0$. Тогда для всякой точки $x \in L_{x_0}$ выполнено неравенство*

$$|\log \varphi(x) - \log \varphi(x_0)| \leq \frac{C}{\varphi(x_0)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)|$$

с абсолютной постоянной C.

Перейдем теперь к новой технике, которая окажется полезной для учета зависимости оценочных постоянных от положения точки на прямой. Не вдаваясь в детали, поясним, что ее мы получили путем аккуратного анализа тех выражений, в которые превращаются при конформном переносе гёльдеровы условия на окружности. Прежде всего, для всякой точки $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$|x - x_0| \leq 2\sqrt{1 + x_0^2}\sqrt{1 + x^2}. \tag{3.8}$$

В связи с этим, введем множества

$$\Gamma_{x_0,\lambda} := \{x : |x - x_0| \le \lambda\sqrt{1+x^2}\},\ 0 < \lambda \le \sqrt{1+x_0^2}. \tag{3.9}$$

Следующее очевидное утверждение удобно сформулировать для ссылок.

Лемма 3.4. *Для всякой точки $x \notin \Gamma_{x_0,\lambda}$ имеют место неравенства*

$$\frac{1}{|x-x_0|} \le \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}; \quad \frac{1}{(x-x_0)^2} \le \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{1+x_0^2}.$$

Ясно, что множество $\Gamma_{x_0,\lambda}$ — либо луч, либо объединение двух лучей, либо промежуток. Легко сосчитать, что последний тип (промежуток) соответствует случаю $\lambda < 1$. При таком выборе параметра λ множество $\Gamma_{x_0,\lambda}$ имеет вид

$$\Gamma_{x_0,\lambda} = \left[\frac{x_0}{1-\lambda^2} - \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{1+x_0^2-\lambda^2}, \frac{x_0}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{1+x_0^2-\lambda^2}\right]. \tag{3.10}$$

Нам нужна некоторая информация о взаимоотношении множеств L_{x_0} и $\Gamma_{x_0,\lambda}$. Напомним, что мы, среди прочего, наложили условия $0 < \varphi(x_0) < 1$ и $A < 1$, где A — постоянная из леммы 3.2.

Лемма 3.5. *Имеет место включение $\Gamma_{x_0,\lambda} \subset L_{x_0}$ для всех λ, удовлетворяющих условию*

$$\lambda \le \frac{A}{1+|x_0|+A} < 1.$$

Доказательство. Отметим, что при $A < 1$ неравенство $A/(1+|x_0|+A) < 1$ выполнено. Фиксируем $\lambda < 1$, тогда множество $\Gamma_{x_0,\lambda}$ имеет вид (3.10). Для удобства запишем это множество следующим образом:

$$\Gamma_{x_0,\lambda} = [B_\lambda x_0 - B_\lambda D_{\lambda,x_0}, B_\lambda x_0 + B_\lambda D_{\lambda,x_0}],$$

где $B_\lambda := (1-\lambda^2)^{-1}$, $D_{\lambda,x_0} = \lambda\sqrt{1+x_0^2-\lambda^2}$. Возьмем точку $x \in \Gamma_{x_0,\lambda}$. Заметим, что $|x - B_\lambda x_0| \le B_\lambda D_{\lambda,x_0}$. Отсюда получаем, что

$$|x-x_0| \le |x - B_\lambda x_0| + |1-B_\lambda||x_0| \le B_\lambda D_{\lambda,x_0} + |1-B_\lambda||x_0|.$$

Теперь найдем, при каких λ последнее выражение оценивается сверху через A, т. е. решим относительно λ неравенство

$$\frac{\lambda}{1-\lambda^2}(\sqrt{1+x_0^2-\lambda^2}+\lambda|x_0|) \leq A.$$

Легко заметить, что

$$\sqrt{1+x_0^2-\lambda^2} \leq \sqrt{1-\lambda^2}+|x_0|.$$

Более того, имеет место неравенство

$$\sqrt{1-\lambda^2} > 1-\lambda^2 = (1-\lambda)(1+\lambda) > 1-\lambda.$$

Значит, мы можем свести задачу к решению неравенства

$$\frac{\lambda(1+|x_0|)}{1-\lambda} \leq A,$$

которое, очевидно, и ведет к искомому условию на λ. □

Таким образом, при правильном выборе параметра λ, на множестве L_{x_0} выполнена оценка из леммы 3.3, в то время как на его дополнении справедлива оценка из леммы 3.4. Первое позволит нам удачно оценить приближение функции $\log\varphi$, а второе — приближение ядра преобразования Гильберта.

3.1.2. Оценки средних осцилляций

Фиксируем промежуток $I \ni x_0$, введем функцию $u(x) = \log\varphi(x) - \log\varphi(x_0)$ и положим $u_1 := u\chi_{2I}$, $u_2 := u - u_1$. Нам понадобятся две постоянных

$$c_1 := \frac{1}{\pi}\int\limits_{2I}\frac{x_0}{1+t^2}u(t)dt; \quad c_2 := \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 2I}\Big(\frac{1}{x_0-t}+\frac{t}{1+t^2}\Big)u(t)dt.$$

Рассмотрим еще два множества: $G := \{x : \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$, $B := \{x : \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$. Фиксируем параметр $r > 1$. Нам необходимо оценить среднюю осцилляцию

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) = \inf_c\bigg(\frac{1}{|I|}\int\limits_I|\mathcal{O}_\varphi - c|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}$$

функции $\mathcal{O}_\varphi = \varphi\exp(i\mathcal{H}\log\varphi)$ на промежутке I.

Лемма 3.6. *Справедливы следующие оценки:*

(1) $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le \omega(|I|) + 2\varphi(0)$;

(2) *если* $\varphi(0) > 0$ *и* $|I| \lesssim A$, *то*

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|) + |I|\varphi(x_0)\frac{(1+|x_0|+A)^2}{A^2}.$$

Причем, постоянная во второй оценке зависит только от $\|\log\varphi\|_{L^1(dP)}$ *и* ω.

Доказательство. В первую очередь отметим, что $\mathcal{H}\log\varphi = \mathcal{H}u$, так как оператор $\mathcal{H}$ переводит постоянные в ноль. Возьмем в качестве постоянной приближения $c = \varphi(x_0)\exp(i(c_1+c_2))$. Имеем

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\varphi e^{i\mathcal{H}u} - \varphi(x_0)e^{i(c_1+c_2)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\varphi e^{i\mathcal{H}u} \pm \varphi(x_0)e^{i\mathcal{H}u} - \varphi(x_0)e^{i(c_1+c_2)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\varphi - \varphi(x_0)|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \varphi(x_0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |e^{i\mathcal{H}u} - e^{i(c_1+c_2)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le \omega(|I|) + \varphi(x_0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |e^{i(\mathcal{H}u-c_1-c_2)} - 1|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Множитель при $\varphi(x_0)$ во втором слагаем не превосходит 2, что дает нам простую оценку

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le \omega(|I|) + 2\varphi(x_0) \tag{3.11}$$

и доказывает пункт (a). Приступим к доказательству пункта (b). Итак, теперь $\varphi(x_0) \in (0,1)$ и $|I| \lesssim A$. Ввиду нашего выбора констант c_1 и c_2, выполнено

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le \omega(|I|) + \varphi(x_0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{H}u_1 - c_1|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \varphi(x_0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{H}u_2 - c_2|^r\right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\leq \omega(|I|) + \varphi(x_0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{H}_0 u_1|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \varphi(x_0)\int\limits_{2I} \frac{|t-x_0|}{1+t^2}|u(t)|dt +$$

$$+\varphi(x_0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I\left(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 2I} \frac{|x-x_0|}{|x-t||x_0-t|}|u(t)|dt\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности (кроме, очевидно, $\omega(|I|)$). Начнем с первого. Согласно нашему ограничению на длину промежутка I, выполнено включение $2I \subset L_{x_0}$. Поэтому на $2I$ применимо лемма 3.3, а значит $u_1 \in L^r(\mathbb{R})$ и верны неравенства

$$\varphi(x_0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{H}_0 u_1|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C(\mathcal{H})\varphi(x_0)\left(\frac{1}{|2I|}\int\limits_{2I} |u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \lesssim \omega(2|I|).$$

Перейдем к оценке второго слагаемого. Мы по-прежнему находимся в рамках леммы 3.3, поэтому

$$\varphi(x_0)\int\limits_{2I} \frac{|t-x_0|}{1+t^2}|u(t)|dt \lesssim |I|\omega(2|I|).$$

Последнее можно оценить сверху через $\omega(2|I|)$, ввиду ограничения на длину промежутка I. Обратимся к последнему слагаемому. Если $x, x_0 \in I$, а $t \notin 2I$, то применима лемма 3.1, а значит

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 2I} \frac{|x-x_0|}{|x-t||x_0-t|}|u(t)|dt \leq |I| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus 2I} \frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt.$$

Далее введем разбиение

$$\mathbb{R}\setminus 2I = (G\setminus 2I) \cup ((B\setminus 2I)\cap L_{x_0}) \cup ((B\setminus 2I)\cap L_{x_0}^c) := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

и оценим последний интеграл по каждой из частей в отдельности.

На множестве γ_1 выполнено заключение леммы 3.3, поэтому верно неравенство

$$|\log\varphi(x) - \log\varphi(x_0)| \leq \frac{C}{\varphi(x_0)}|\varphi(x) - \varphi(x_0)|.$$

Следовательно, имеем оценки

$$|I|\int\limits_{\gamma_1}\frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt \le C\frac{|I|}{\varphi(x_0)}\int\limits_{|x_0-t|>2|I|}\frac{\omega(|x_0-t|)}{(x_0-t)^2}dt \lesssim \frac{\omega(2|I|)}{\varphi(x_0)}.$$

Последнее неравенство выполнено благодаря второму из условий регулярности (3.6).

На множестве γ_2 ситуация аналогичная, поэтому

$$|I|\int\limits_{\gamma_2}\frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt \lesssim \frac{|I|}{\varphi(x_0)}\int\limits_{A\ge|x_0-t|>2|I|}\frac{\omega(|x_0-t|)}{(x_0-t)^2}dt \lesssim$$

$$\lesssim \frac{|I|}{\varphi(x_0)}\int\limits_{|x_0-t|>2|I|}\frac{\omega(|x_0-t|)}{(x_0-t)^2}dt \lesssim \frac{\omega(2|I|)}{\varphi(x_0)}.$$

Наконец, рассмотрим множество γ_3. Заметим, что для $t\in\gamma_3$ имеет место неравенство $|u(t)|\le|\log\varphi(t)|$ (см. доказательство леммы 1.5). Отсюда

$$|I|\int\limits_{\gamma_3}\frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt \le |I|\int\limits_{L^c_{x_0}}\frac{|\log\varphi(t)|}{(x_0-t)^2}dt.$$

По лемме 3.5 выполнено включение $\Gamma_{x_0,\lambda}\subset L_{x_0}$ для $\lambda = A/(1+|x_0|+A)$, а значит на $L^c_{x_0}$ верна оценка из леммы 3.4. Поэтому

$$|I|\int\limits_{\gamma_3}\frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt \le |I|\frac{(1+|x_0|+A)^2}{A^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{|\log\varphi(t)|}{1+t^2}dt =$$

$$= |I|\|\log\varphi\|_{L^1(dP)}\frac{(1+|x_0|+A)^2}{A^2}.$$

Собрав вместе все оценки, получаем искомую

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le C(\omega,\|\log\varphi\|_{L^1(dP)})\left(\omega(|I|)+|I|\varphi(x_0)\frac{(1+|x_0|+A)^2}{A^2}\right).$$

$\square$

Завершение доказательства теоремы 3.1. В первую очередь отметим, что если $\varphi(0)=0$, то пункт 1 леммы 3.6 дает нам желаемую оценку $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I)\le\omega(|I|)$ вне зависимости от длины промежутка I.

С другой стороны, если $|I| \gtrsim A$, то тот же пункт 1 нам дает

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le \omega(|I|) + 2\varphi(0) \lesssim \omega(|I|) + \omega(A) \lesssim \omega(|I|),$$

ввиду $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(0))$ и стандартных свойств $\widetilde{\omega}$. Поэтому остается рассмотреть лишь случай $\varphi(0) > 0$ и $|I| \lesssim A$. В первую очередь отметим, что из пункта 2 3.6 следует неравенство

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|) + |I|\varphi(x_0)\frac{M_{x_0}}{A^2}, \tag{3.12}$$

где $M_{x_0} = \max\{1, x_0^2\}$. Далее, возможны несколько случаев.

(1) Если $A^2 \lesssim |I| \lesssim A$, то $\varphi(x_0) \asymp \omega(A) \le \omega(\sqrt{|I|})$, ввиду возрастания функции ω. Отсюда пункт 1 леммы 3.6 дает искомое для теоремы 3.1 неравенство $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le C(\omega)(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$.

(2) Выделим случай $|I| \lesssim A^2 M_{x_0}^{-2}$ (его анализ приведет, в частности, к доказательству теоремы 3.3). Заметим, что $A^2 M_{x_0}^{-2} \le A^2$, поэтому

$$\frac{\varphi(x_0)}{A} \asymp \frac{\omega(A)}{A} \le C(\omega)\frac{\omega(\sqrt{|I|})}{\sqrt{|I|}}.$$

С другой стороны, выполнено неравенство

$$\frac{M_{x_0}}{A} \lesssim \frac{1}{\sqrt{|I|}}.$$

Отсюда $|I|\varphi(x_0)M_{x_0}A^{-2} \le C(\omega)\omega(\sqrt{|I|})$. Последнее, вместе с неравенством (3.12), дает искомую оценку $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|})$.

(3) Рассмотрим последний возможный случай $A^2 M_{x_0}^{-2} \lesssim |I| \lesssim A^2$. Здесь обе оценки (3.11) и (3.12) дадут нам один и то же результат. Действительно, если воспользоваться условием $A^2 M_{x_0}^{-2} \lesssim |I|$, и повторить рассуждения случая (1); или же использовать условие $|I| \lesssim A^2$ и рассуждения для случая (2), получаем одну и ту же мажоранту $\omega(|I|) + M_{x_0}(\omega\sqrt{|I|})$.

Теоремы 3.2 и 3.3 немедленно получаются из только что доказанной теоремы 3.1.

Доказательство следствия 3.2 По условию $\varphi \in Lip_\omega(\mathbb{R})$, а значит оценка из теоремы 3.3 выполнена для всех точек x_0 с универсальной постоянной C_u. Мы будем действовать в рамках конструкции, изложенной выше, и использовать промежуточные оценки. Фиксируем точку x_0. Без ограничения общности будем считать, что $x_0 > 0$. Пороговое значение из теоремы 3.3 для x_0, как легко заметить, имеет вид $B_{x_0} \asymp (A_{x_0}/M_{x_0})^2 \asymp (\widetilde{\omega}(\varphi(x_0))/M_{x_0})^2$. Возьмем значение чуть поменьше $B'_{x_0} \asymp (\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2)/M_{x_0})^2$. Обозначим $J_1 = \langle x_0 - B'_{x_0}/2, x_0 + B'_{x_0}/2\rangle$. Заметим, что по лемме 3.2 для всякого $x \in J_1$ выполнено неравенство $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)/2 > 0$. Возьмем некоторую точку $y \in J_1$. Этой точке соответствует ее пороговое значение $B_y \asymp (A_y/M_y)^2 \asymp (\widetilde{\omega}(\varphi(y))/M_y)^2$.

Заметим, что если $|y| \leq x_0$, то $M_y^{-2} \geq M_{x_0}^{-2}$. С другой стороны, функция $\widetilde{\omega}$ возрастает, поэтому $\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2) \leq \widetilde{\omega}(\varphi(y))$. Отсюда, согласно нашему выбору величины B'_{x_0}, выполнено неравенство $B'_{x_0} \leq B_y$. Последнее означает, что для всякого промежутка $y \in I \subset J_1$ выполнено $|I| \leq B'_{x_0} \leq B_y$. Значит, из теоремы 3.3 получаем $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leq C_u(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$.

Возьмем $J_{x_0} = \{y : |y| \leq x_0\} \cap J_1$. Тогда

$$\sup_{I \subset J_{x_0}} \frac{\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I)}{\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|})} \leq K_{\varphi,\omega} C_u,$$

где $K_{\varphi,\omega}$ обозначает Lip_ω–постоянную функции φ. Последнее, согласно утверждению 1 из п. 0.5, означает принадлежность функции $\mathcal{O}_\varphi$ классу $Lip_{\omega(\cdot)+\omega(\sqrt{\cdot})}(J_{x_0})$.

Заключение

В диссертации рассмотрен вопрос о сравнении гладкости аналитической в круге или верхней полуплоскости функции и гладкости ее модуля в одной и той же точке границы. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Показано, что наличие гёльдеровой оценки на модуль внешней функции в круге в одной точке с мажорантой, соответствующей гладкости порядка не больше двух, гарантирует для самой функции правильные оценки на гладкость интегрального типа, но порядка в два раза меньше.

2. Для случая условий на гладкость модуля внешней функции порядка меньше 1 найдены достаточные условия на описанное выше поточечное падение гладкости в фиксированном соотношении, лучшем чем полученное двукратное. Также приведен пример, доказывающий неулучшаемость данной оценки при фиксированном достаточном условии.

3. Установлено, что аналогичные результаты для случая гладкости порядка меньше 1 имеют место и для внешних функций в верхней полуплоскости. С той лишь оговоркой, что, ввиду специфики данного случая, падение гладкости наблюдается лишь на близких расстояниях от точки, в которой измеряется гладкость, а также сам порог, начиная с которого наступает упомянутое падение гладкости, напрямую зависит от положения точки на границе.

На данный момент остается открытым вопрос о построении локальной теории для случая гладкости порядка больше двух. Мы не исключаем того, что в этом случае сама задача должна ставиться в несколько иной форме. Мы предполагаем, что необходимо усилить контроль параметров исходных условий на гладкость модуля внешней функции в точке, например, ввести дополнительные ограничения на коэффициенты многочленов приближения. Однако, до сих пор не понятно в какой форме это нужно сделать. Также интересен случай функций нескольких переменных. Особенно, ввиду недавней работы [17], где был получен многомерный результат равномерного типа.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Васин А. В., Кисляков С. В., Медведев А. Н.* Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля // *Алгебра и анализ.* — 2013. — Т. 25, № 3. — С. 52–85.
2. *Медведев А. Н.* О гёльдеровом условии в граничной точке для аналитической функции: общие модули гладкости порядка не выше 2. — 2017. — Препринт ПОМИ номер 4.
3. *Медведев А. Н.* Падение гладкости внешней функции в сравнении с гладкостью ее модуля при дополнительных ограничениях на величину граничной функции // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2015. — Т. 434. — С. 101–115.
4. *Медведев А. Н.* Сравнение граничной гладкости аналитической функции и ее модуля для верхней полуплоскости // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2016. — Т. 447. — С. 75–89.

Список литературы

5. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. ii // *Mathematische Zeitschrift*. — 1932. — Vol. 34, no. 1. — P. 403–439.
6. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // *УМН*. — 1973. — Т. 28, № 1(169). — С. 131–161.
7. *Hoffman K.* Banach Spaces of Analytic Functions. Dover Books on Mathematics. — Dover Publications, 2007. — ISBN: 9780486458748.
8. *Гарнетт Д.* Ограниченные аналитические функции. — Москва : Мир, 1984.
9. *Хавин В. П.* Обобщение теоремы Привалова-Зигмунда о модуле непрерывности сопряженной функции // *Изв. АН АрмССР. Сер.мат.* — 1971. — Т. 6. — С. 252–258; 265–287.
10. *Привалов Н. Н.* Интерполяция линейных операторов. — М: Наука, 1950.
11. *Хавин В. П., Шамоян Ф. А.* Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. — 1970. — Т. 19. — С. 237–239.
12. *Brennan J.* Approximation in the mean by polynomials on non Caratheodory domains // *Ark. Mat.* — 1977. — Vol. 15, no. 1. — P. 117–168.
13. *Shirokov N. A.* Analytic Functions Smooth up to the Boundary. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988. — Vol. 1312 of *Lecture Notes in Math.*
14. *Широков Н. А.* Достаточные условия для гёльдеровской гладкости функции // *Алгебра и анализ*. — 2013. — Т. 25, № 3. — С. 200–206.
15. *Бомаш Г. Я.* Множества пика для аналитических классов Гёльдера // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. — 1987. — Т. 157. — С. 129–136.
16. *Dyakonov K. M.* The moduli of holomorphic functions in Lipschitz spaces // *Michigan Math. J.* — 1997. — Vol. 44. — P. 139–147.
17. *Широков Н. А.* Гладкость голоморфной в шаре функции и ее модуля на сфере // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2016. — Т. 447. — С. 123–128.

18. *DeVore R. A., Sharpley R. C.* Maximal Functions Measuring Smoothness. — 1984. — Vol. 47 of *Memoirs of the American Math. Soc.* — no. 293.

19. *Kislyakov S., Kruglyak N.* Extremal Problems in Interpolation Theory, Whitney-Besicovitch Coverings, and Singular Integrals. — Birkhäuser, Basel, 2013. — Vol. 74 of *Monografie Matematyczne.*

20. *Dzyadyk V. K., Shevchuk I. A.* Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials. — Walter de Gruyter, 2008. — P. 480.

21. *Spanne S.* Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* — 1965. — Vol. 19, no. 4. — P. 593–608.

22. *Campanato S.* Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sèrie 3.* — 1963. — Vol. 17, no. 1. — P. 175–188.

23. *Meyers N. G.* Mean oscillation over cubes and Hölder continuity // *Proc. of the Amer. Math. Soc.* — 1964. — Vol. 15, no. 5. — P. 717–721.

24. *Jhon F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // *Commun. Pure Appl. Math.* — 1961. — Vol. 14, no. 3. — P. 415–426.

25. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — Москва : Мир, 1965. — Т. 1–2.

26. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. — Москва : Физматгиз, 1960.

27. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — Москва : Наука, 1978.

28. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. — London : Academic Press, 1998. — P. 469.

29. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces 2, Function spaces. — Berlin : Springer-Verlag, 1979.

30. *Boyd D. W.* The Hilbert transformation on rearrangement invariant banach spaces // *Canadian J. Math.* — 1967. — Vol. 19. — P. 599–616.

31. *Boyd D. W.* Indices of function spaces and their relationship to interpolation // *Canadian J. Math.* — 1969. — Vol. 21. — P. 1245–1254.