Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Нешитов Александр Юрьевич

КЛАССИФИЦИРУЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП И ИХ ИНВАРИАНТЫ

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф.

Панин Иван Александрович

Санкт-Петербург – 2015

Содержание

Введение.

Для топологической группы G хорошо известно понятие главного G-расслоения: $p\colon E \to B$ является главным G-расслоением, если G действует свободно действует на E, p осуществляет изоморфизм $E/G \cong B$, и существует открытое покрытие U, слой над которым изоморфен тривиальному G-расслоению:

$$\begin{tikzcd} G \times U \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ U \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Будем обозначать через $Fib_G(X)$ множество классов изоморфности главных G-расслоений над X. В данном контексте универсальным G-расслоением называется главное G-расслоение $E \to B$, где E-стягиваемое пространство. Тогда любое непрерывное отображение $f\colon X \to B$ определяет главное G-расслоение f^*E над X, что задает отображение $\phi\colon Hom_{Top}(X, B) \to Fib_G(X)$.

Теорема классификации утверждает, что для любого CW-комплекса X отображение ϕ индуцирует изоморфизм между гомотопическими классами отображений и классами изоморфности главных G-расслоений над X([1, Гл.23, §8]).

$$[X, B] \cong Fib_G(X)$$

Гомотопический класс базы универсального G-расслоения определен однозначно. Существует каноническая симплициальная конструкция построения универсального G-расслоения в следующем виде. Пусть EG_* – симплициальное топологическое пространство, с множеством n-симплексов $EG_n = G^{n+1}$, в котором грани заданы как $d_i(g_1, \ldots, g_{n+1}) = (g_1, \ldots g_i \cdot g_{i+1}, \ldots, g_{n+1})$ при $i > 0$ и $d_0(g_1, \ldots, g_{n+1}) = (g_2, \ldots, g_{n+1})$, а вырождения заданы по формуле $s_i(g_1, \ldots, g_{n+1}) = (g_1, \ldots, g_{i-1}, 1, g_i, \ldots, g_{n+1})$. Фактор под действием группы

G существует в категории симплициальных топологических пространств – это симплициальное пространство BG_*, где $BG_n = G^n \cong EG_n/G$, а операции граней и вырождений индуцированы с граней и вырождений EG_*. Тогда топологическая реализация $EG = |EG_*| \to |BG_*| = BG$ дает пример универсального G-расслоения [1, Гл. 16, §5].

Таким образом, гомотопический класс BG является важным инвариантом топологической группы G, поэтому представляет интерес вычисление различных теорий когомологий от BG. Важным результатом является классическая теорема пополнения Атьи-Сегала([2]), утверждающая, в частности, существование изоморфизма для компактной группы Ли G:

$$R(G)^\wedge \cong K_0(BG)$$

где $R(G)$ – кольцо представлений группы G, $R(G)^\wedge$ – его пополнение в идеале аугментации, а $K_0(BG)$ – топологическая K-теория классифицирующего пространства группы G.

Вызывает интерес рассмотрение аналогичных вопросов в контексте алгебраической геометрии. Будем рассматривать конструкцию алгебраического аналога классифицирующего пространства для линейной алгебраической группы G, описанную Б. Тотаро в [3]. В конструкции [3] в качестве стягиваемого пространства со свободным действием группы G рассматривается его приближение последовательностью некоторых открытых подсхем U_i в представлениях группы G. В данном контексте $K_0(BG)$ определяется как предел $K_0(U_i/G)$. Одним из результатов работы [3] является построение изоморфизма между таким образом определенного $K_0(BG)$ и пополнения кольца представлений $R(G)^\wedge$.

Построение В. Воеводским и Ф. Морелем в работах [4], [5], [6] $\mathbb{A}^1$-теории гомотопии над базовым полем k позволило систематически переводить многие топологические конструкции в контекст алгебраической геометрии.

В качестве аналога топологической группы G имеет смысл рассмотреть аффинную алгебраическую группу G, а в качестве аналога главных G-расслоений естественно рассматривать G-торсоры в этальной топологии, а именно G-эквивариантные морфизмы $p\colon Y \to B$, где действие G на B тривиально, и существует этальное накрытие $U \to B$, такое что $Y \times_B U \cong G \times U$ как многообразия с G-действием. Будем обозначать через $H^1_{et}(B, G)$ множество этальных торсоров с базой B.

Для действия алгебраической группы G на многообразии X будем обозначать через X/G пучок в этальной топологии, ассоциированный с предпучком $W \mapsto X(W)/G(W)$ для $W \in \mathbf{Sm}_k$. Будем говорить, что фактор X/G представим гладким многообразием Y, если пучок X/G изоморфен пучку $Hom_{\mathbf{Sm}_k}(-, Y)$.

Аналогом классифицирующего пространства в этом случае является этальное классифицирующее пространство $B_{et}G$, построенное в работе [4]. В симплициальной гомотопической категории $\mathcal{H}_s(k)$ оно классифицирует G-торсоры в этальной топологии, а именно существует естественный изоморфизм ([4, §4.1, Предложение 1.16])

$$Hom_{\mathcal{H}_s(k)}(U, B_{et}G) \cong H^1_{et}(U, G)$$

Алгебраическая K-теория представима в пунктированной $\mathbb{A}^1$-гомотопической категории, следовательно, ее можно распространить с гладких многообразий на все мотивные пространства по формуле

$$K_i(\mathcal{X}) = Hom_{\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)_\bullet}(S^i_s \wedge \mathcal{X}, BGL \times \mathbb{Z})$$

для произвольного пунктированного мотивного пространства $\mathcal{X}$.

Таким образом, определена K-теория пунктированного мотивного пространства $B_{et}G_+ = B_{et}G \sqcup \operatorname{Spec} k$ и естественно задаться вопросом, выполнен ли мотивный аналог классической теоремы Атьи-Сегала для этального классифицирующего пространства $B_{et}G$. Исследованию данного вопроса посвящена глава 1, основным результатом которой является теорема 1:

Теорема. *1 Пусть k–поле, G– связная расщепимая редуктивная группа над k. Тогда существует изоморфизм*

$$K_n(G;k)^{\wedge}_{I_G} \cong K_n(B_{et}G)$$

где $B_{et}G$ – этальное классифицирующее пространство Воеводского-Мореля (см. 1.1), $K_n(B_{et}G)$ – K-теория пунктированного мотивного пространства $B_{et}G_+$, определенная в 1.3.

Здесь $K_n(G;k)$ – эквивариантная K-теория Томасона([7])(см. раздел 1.2) базового поля, определяемая как K-теория категории G-представлений над k. Группа $K_n(G;k)$ является модулем над кольцом $K_0(G;k) = R(G)$. В кольце $R(G)$ рассмотрим идеал аугментации I_G, равный ядру отображения степени $\deg\colon R(G) \to \mathbb{Z}$. Под $K_n(G;k)^{\wedge}_{I_G}$ понимается пополнение модуля $K_n(G;k)$ в идеале аугментации I_G.

Для доказательства теоремы использован следующий метод: Согласно [4, §4.2], в гомотопической категории $\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)$ существует представление этального классифицирующего пространства $B_{et}G$ в виде направленного копредела гладких схем: $B_{et}G = \mathrm{colim} BG_i$, где $BG_i \in \mathbf{Sm}_k$. При этом существует система гладких многообразий (см. раздел 1.1) $EG_i, i \geqslant 0$ со свободным G-действием, связанные системой G-эквивариантных вложений $EG_i \to EG_{i+1}$. При этом гладкое многообразие BG_i представляет фактор EG_i/G.

Таким образом для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что естественное отображение $K_n(B_{et}G) \to \varprojlim K_n(BG_i)$ является изоморфизмом, а также построить изоморфизм $K_n(G;k)^{\wedge}_{I_G} \to \varprojlim K_n(BG_i)$.

Для доказательства первого утверждения используется точная последовательность Милнора:

$$0 \to \varprojlim{}^1 K_{n+1}(BG_i) \to K_n(B_{et}G) \to \varprojlim K_n(BG_i) \to 0.$$

Таким образом, достаточно доказать, что $\varprojlim{}^1 K_{n+1}(BG_i) = 0$. Это сделано в предложении 1 раздела 1.5 с помощью редукции к Борелевской подгруппе B следующим образом: отождествляя $K_n(BG_i)$ с эквивариантной K-теорией $K_n(G; EG_i)$, получим, согласно лемме 2 и 8, что последовательность $K_n(BG_i)$ является прямым слагаемым в последовательности $K_n(EG_i/B)$. Далее, рассмотрим максимальный расщепимый тор T в B, пусть r обозначает ранг T. Заметим, что $K_n(EG_i/B) = K_n(EG_i/T)$ в силу гомотопической инвариантности K-теории. Для максимального тора лемма 10 позволяет отождествить $\varprojlim{}^1 K_{n+1}(EG_i/T)$ с $\varprojlim{}^1 K_{n+1}((\mathbb{P}^i)^r)$, так как $(\mathbb{P}^i)^r$ – система гладких многообразий, аппроксимирующая этальное классифицирующее пространство расщепимого тора T. Для системы $(\mathbb{P}^i)^r$ явные вычисления показывают, что $\varprojlim{}^1 K_{n+1}((\mathbb{P}^i)^r) = 0$. Тогда $\varprojlim{}^1 K_{n+1}(EG_i/B) = 0$, следовательно $\varprojlim{}^1 K_{n+1}(BG_i) = 0$.

Для доказательства второго утверждения используем эквивариантную K-теорию Томасона. Построим отображение $K_n(G; k) \to K_n(BG_i)$ с помощью гомоморфизма обратного образа в эквивариантной K-теории: $\phi_{n,i}\colon K_n(G; k) \to K_n(G; EG_i) \cong K_n(BG_i)$. Система $\phi_{n,i}$ даст отображение $\phi_n\colon K_n(G; k) \to \varprojlim K_n(BG_i)$. Согласно лемме 13, модуль $\varprojlim K_n(BG_i)$ полон в I_G-адической топологии. Идея доказательства также заключается в редукции к Борелевской подгруппе: отображение пополнения $\varprojlim K_n(BG_i) \to \varprojlim K_n(BG_i)^{\wedge}_{I_G}$ является ретракцией отображения пополнения $\varprojlim K_n(EG_i/B) \to \varprojlim K_n(EG_i/B)^{\wedge}_{I_G}$, которое является изоморфизмом благодаря явному вычислению для случая тора T (лемма 11), а также тому факту, что I_T-адическая топология совпадает с $I_G \cdot R(T)$-адической топологией на

$R(T)$ (лемма 12), где рассматривается естественное вложение $R(G) \subseteq R(T)$.

Таким образом, отображение $\phi_n\colon K_n(G;k) \to \varprojlim K_n(BG_i)$ индуцирует гомоморфизм $\widehat{\phi_n}\colon K_n(G;k)^\wedge_{I_G} \to \varprojlim K_n(BG_i)$, являющийся ретракцией изоморфизма $K_n(T;k)^\wedge_{I_T} \to \varprojlim K_n(EG_i/T)$ согласно лемме 14. Тогда $\widehat{\phi_n}$ также является изоморфизмом.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию другого важного объекта, связанного с классифицирующим пространством – версального торсора. Будем рассматривать произвольное базовое поле F и расщепимую полупростую алгебраическую группу G над F. В данном контексте удобно рассмотреть приближение U/G классифицирующего пространства, где U–открытая подсхема в некотором представлении V группы G, причем коразмерность дополнения $V \setminus U$ больше двух, действие группы G на U свободно, и фактор-пучок U/G представим многообразием в $\mathbf{Sm}_k$.

Будем называть торсор $U \to U/G$ классифицирующим торсором. Для любого этального G-торсора $Y \to \operatorname{Spec} L$ пространство $(Y \times U)/G$ представимо и является открытой подсхемой в многообразии $(Y \times V)/G$. При этом $(Y \times V)/G \to Y/G = \operatorname{Spec} L$ является векторным расслоением над $\operatorname{Spec} L$. Тогда в случае бесконечного L найдется L-точка $\operatorname{Spec} L \to (Y \times U)/G$ и композиция $x\colon \operatorname{Spec} L \to (Y \times U)/G \to U/G$ даст декартову диаграмму

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} L \arrow[r, "x"] & U/G \end{tikzcd}$$

Таким образом, любой торсор над $\operatorname{Spec} L$ может быть получен специализацией торсора $U \to U/G$. Определим версальный торсор U^{gen} как слой торсора $U \to U/G$ над общей точкой: $U^{gen} = \operatorname{Spec} K \times_{U/G} U$, где $K = F(U/G)$ – поле частных многообразия U/G. Таким образом, версальный торсор можно рассматривать как наиболее общий торсор над полем. Представляет интерес рассмотрение соответствующего многообразия флагов $X^{gen} = U^{gen}/B$, которое является примером скрученной формы расщепимого многообразия флагов G/B. В силу свойства версальности многообразие X^{gen} может быть рассмотрено как скрученное многообразие флагов наиболее общего типа. Важным инструментом для изучения геометрии X^{gen} является кольцо Чжоу $\mathrm{CH}(X^{gen})$. Кольцо $\mathrm{CH}(X)$ для скрученного многообразия флагов X изучалось многими авторами, в частности в работах Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда [8], Демазюра [9], в которых рассматривалась свободная от кручения часть $\mathrm{CH}(X)$. Кручение в группах Чжоу скрученного многообразия флагов привлекало внимание многих авторов. В частности, в работе Карпенко [10] рассматривалось кручение в группах Чжоу коразмерности два от многообразий Севери-Брауэра. В работах Э. Пера [11] и А.С. Меркурьева [12] рассматривалась связь между кручением в группе Чжоу коразмерности два для скрученного многообразия флагов и когомологиями Галуа поля функций данного многообразия.

Основная цель второй главы – установление связи между группами Чжоу версального многообразия флагов расщепимой полупростой группы G и когомологическими инвариантами данной группы. Понятие когомологических инвариантов может рассматриваться как аналог характеристических классов в топологии. Исторически первым примером когомологического инварианта может считаться инвариант Хассе-Витта квадратичных форм. Дальнейшее развитие теория когомологических инвариантов получила в работах Серра ([13], [14]) и Роста ([15], [16]). Для алгебраической группы G когомологический инвариант степени i со значениями в Галуа-модуле M – это отображение, сопоставляющее каждому торсору группы G над некоторым полем L/F элемент в когомологиях Галуа $H^i(L, M)$. Данные отображения согласованы с расширениями полей, т.е. имеется естественное преобразование функторов $H^1(-, G) \to H^i(-, M)$ на категории расширений полей над F. Инвариант a называется нормализованным, если для любого расширения полей L/F выполнено $a(e) = 0$, где e – тривиальный торсор над L. Легко видеть, что множество $\operatorname{Inv}^i(G,M)$ инвариантов степени i со значениями в Галуа-модуле M является группой, и есть разложение в прямую сумму

$$\operatorname{Inv}^i(G,M) = \operatorname{Inv}^i(G,M)_{norm} \oplus H^i(F,M),$$

где $\operatorname{Inv}^i(G,M)_{norm}$ обозначает подгруппу нормализованных инвариантов.

Особый интерес представляет модуль Галуа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)$, который определяется как прямая сумма $\oplus\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(d)$ по всем простым p, где для p, отличного от характеристики поля F Галуа-модуль $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(d)$ определен как прямой предел $\varinjlim_n \mu_{p^n}^{\otimes d}$, а в случае когда p совпадает с характеристикой поля F, модуль $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(d)$ определен с помощью логарифмических дифференциалов де Рама-Витта([17, I.5.7]).

Для полупростой расщепимой группы G группа нормализованных инвариантов $\operatorname{Inv}^2(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))_{norm}$ совпадает с группой характеров группы C, где C-ядро односвязного накрытия $\widetilde{G} \to G$. Для каждого элемента $a \in F^\times$ и инварианта $b \in \operatorname{Inv}^2(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))_{norm}$ $\cup$-произведение в когомологиях дает инвариант

$$(a) \cup b \in \operatorname{Inv}^3(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{norm}.$$

Будем называть подгруппу, порожденную инвариантами такого вида, группой разложимых инвариантов. Фактор-группу $\operatorname{Inv}^3(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{norm}/\operatorname{Inv}^3(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{dec}$ будем обозначать через $\operatorname{Inv}^3(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{ind}$ и называть группой неразложимых инвариантов.

Другим важным объектом является группа полуразложимых инвариантов $\operatorname{Inv}^3(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{sdec}$, состоящая из инвариантов a, для которых существует набор инвариантов $b_i \in \operatorname{Inv}^2(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$, таких что для любого расширения полей L/F и любого торсора $Y \in H^1(L,G)$ найдутся константы $a_i \in \mathbb{L}^\times$, такие что

$$a(Y) = \sum_i (a_i) \cup b_i(Y).$$

Основным результатом главы 2 является теорема 2, которая дает следующую короткую точную последовательность, связывающую когомологические инварианты и кручение в группах Чжоу коразмерности 2 версального флага:

Теорема. *Пусть G–полупростая расщепимая группа над полем F. Тогда существует короткая точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec} \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{ind} \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \to 0.$$

При этом существует следующее комбинаторное описание левого члена данной последовательности в терминах решетки характеров максимального расщепимого тора T группы G. Пусть T^*-решетка характеров тора T и $T^* \subseteq \Lambda$ соответствующее включение в решетку весов. Рассмотрим включение соответствующих групповых колец $\mathbb{Z}[T^*] \subseteq \mathbb{Z}[\Lambda]$. Рассмотрим отображение, соответствующее эквивариантному классу Черна между эквивариантной K-теорией и эквивариантными группами Чжоу: $c_i \colon K_0(T; \operatorname{Spec} F) \to \mathrm{CH}^i_T(\operatorname{Spec} F)$. Отождествив $K_0(T; \operatorname{Spec} F)$ с $\mathbb{Z}[T^*]$ и $\mathrm{CH}^i_T(\operatorname{Spec} F) = \operatorname{Sym}^i(T^*)$, заметим, что класс Черна

$$c_i \colon \mathbb{Z}[T^*] \to \operatorname{Sym}^i(T^*)$$

может быть задан комбинаторно по формуле

$$c_\bullet(x) = \sum_{i \geqslant 0} c_i(x) t^i,$$

где $c_\bullet \colon \mathbb{Z}[T^*] \to \operatorname{Sym}^\bullet(T^*)[[t]]^\times$ – гомоморфизм групп, заданный формулой

$$c_\bullet(e^\lambda) = 1 + \lambda t.$$

В кольце $\mathbb{Z}[\Lambda]$ рассмотрим идеал аугментации $\widetilde{I}$, и обозначим через $\widetilde{I}_W$ идеал, порожденный W-инвариантными элементами $\widetilde{I}$. Обозначим через

$\mathbb{Z}[T^*]^W$ подкольцо W-инвариантных элементов в $\mathbb{Z}[T^*]$. Тогда фактор-группа $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ может быть описана в терминах абстрактного класса Черна:

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec} \cong c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])/c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)$$

Вычисления в разделе 2.5 используют полученное комбинаторное описание для доказательства совпадения групп разложимых и полуразложимых инвариантов для всех типов простых расщепимых групп. Наибольшую сложность при этом представляют группы $C_{4m}, m \geqslant 1$ и $D_{4m}, m \geqslant 2$, для которых проведены единообразные доказательства, а также случай PGO_8, для которого проведено явное вычисление.

Также стоит отметить, что в общем случае группы полуразложимых и разложимых инвариантов могут не совпадать. В разделе 2.6 приведен пример для группы $G = \mathbf{SO}_4$. В этом случае рассматривается инварианта b_1, заданный по формуле

$$b_1(\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\rangle) = (\alpha_1)\cup(\alpha_2)\cup(\alpha_3),$$

где $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\rangle$ – квадратичная форма с тривиальным дискриминантом. Инвариант b_1 является нетривиальным и полуразложимым, при этом в случае алгебраически замкнутого базового поля F все разложимые инварианты тривиальны, следовательно, b_1 дает пример полуразложимого инварианта, не являющегося разложимым.

Результат главы 2 позволил получить следующие приложения, обсуждаемые в разделе 2.7. Первым приложением является вычисление кручения в группе Чжоу коразмерности 2 версальных флагов для всех типов простых расщепимых групп.

Следующее приложение рассмотрено в разделе 2.7.2: Рассмотрим инвариант Δ_{2n} группы $\mathbf{PGSp}_{2n}$ со значениями в $H^3(-,/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, сконструированный в работе [18]. Торсоры для $\mathbf{PGSp}_{2n}$ соответствуют центральным простым алгебрам A с симплектической инволюцией σ. При этом класс инварианта $\Delta_{2n}(A,\sigma)$ по модулю образа $(L^\times \cup [A])$ не зависит от инволюции σ и дает элемент

$$\Delta_{2n}(A) \in \frac{H^3(-,/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}{(L^\times \cup [A])}.$$

Согласно [18] инвариант Δ_{2n} не является разложимым, следовательно, не является полуразложимым согласно основной теореме главы 2, следовательно, класс $\Delta_{2n}(A)$ является нетривиальным для общей центральной простой алгебры A, что отвечает на вопрос, поставленный в работе [18]. Ранее такой же ответ был дан для случая $n = 4$ в работе [19].

В разделе 2.7.3 рассматривается случай $G = SL_n/\mu_m$. Торсоры для группы G соответствуют центральным простым алгебрам степени n экспоненты делящей m. Для такой алгебры A построен инвариант

$$\Delta_{n,m}(A) \in \frac{H^3(L, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}(2))}{L^\times \cup m/k[A]}$$

нетривиальность которого как и в предыдущем случае следует из главного результата главы 2. Инвариант $\Delta_{n,m}$ для $n = 2n, m = n$ совпадает с ранее рассмотренным инвариантом Δ_{2n}. При этом данный инвариант тривиален на разложимых алгебрах.

Для доказательства результата главы 2 использована следующая стратегия:

Рассмотрим отображение эвалюоации:

$$\Theta\colon \operatorname{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)), \Theta(a) = a(U^{gen})$$

вычисляющее значение инварианта a на версальном торсоре. Это отображение является вложением, согласно [20, Теорема A]

Согласно лемме 20 для любого нормализованного a образ $\Theta(a)$ лежит в ядре отображения $H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(K(X^{gen}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Для любого связного гладкого многообразия X есть короткая точная последовательность, возникающая благодаря спектральной последовательности Лере [21, Теорема 1.1]:

$$0 \to \mathrm{CH}^2(X) \to H^4_{et}(X, \mathbb{Z}(2)) \to H^0_{Zar}(X, \mathcal{H}^3(2)) \to 0, \qquad (*)$$

где $\mathcal{H}^3(2)$ – пучок в топологии Зарисского, ассоциированный с предпучком $W \mapsto H^3_{et}(W, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Последовательность $(*)$ функториальна по X. Рассматривая случаи $X = \operatorname{Spec} K$ и $X = X^{gen}$, диаграммный поиск даст отображение $\delta\colon \ker(H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(K(X^{gen}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})$.

Отображение δ вкладывается в точную последовательность согласно [12]:

$$A^1((X^{gen})^{sep}, K_2)^\Gamma \xrightarrow{\rho} \ker[H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(K(X^{gen})] \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})$$

где $(X^{gen})^{sep}$ обозначает расширение скаляров $X^{gen} \times_K \operatorname{Spec} K^{sep}$, а Γ – группа Галуа сепарабельного замыкания K^{sep}/K. Лемма 21 показывает, что левый член последовательности совпадает с $K^\times \otimes \Lambda$, при этом $\rho(a \otimes \lambda) = (a) \cup \beta_\lambda(U^{gen})$, где $\beta_\lambda \in \mathrm{Inv}^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ – инвариант степени 2, отвечающий образу λ в $C^* = \Lambda/T^*$. Это позволяет заключить с помощью леммы 22, что инвариант является полуразложимым, тогда и только тогда, когда $\delta(\Theta(a)) = 0$ в $\mathrm{CH}^2(X^{gen})$. При этом для любого нормализованного инварианта a образ $\delta(\Theta(a))$ лежит в ядре отображения расширения скаляров $\mathrm{CH}^2(X^{gen}) \to \mathrm{CH}^2(X^{gen} \times_K L)$, где L– некоторое поле расщепления торсора $U^{gen} \to \operatorname{Spec} K$, следовательно $\delta(\Theta(a))$ лежит в подгруппе кручения $\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$ Таким образом, точна последовательность

$$0 \to \mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{sdec} \to \mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{norm} \xrightarrow{\delta\circ\Theta} \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}.$$

Чтобы установить сюръективность отображения $\delta \circ \Theta$ и получить комбинаторное описание для фактора $\mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{sdec}/\,\mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{dec}$, используется следующий метод. Рассмотрим отображение обратного образа

$\imath^{\mathrm{CH}}\colon \mathrm{CH}^2(U/B) \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})$. Это отображение сюръективно, так как естественное отображение $\imath\colon X^{gen} \to U/B$ является пределом открытых вложений. Заметим, что $\mathrm{CH}^2(U/B) = Sym^2(T^*)$. Для описания ядра $\imath^{\mathrm{CH}}$ рассмотрим композицию

$$K_0(T; \operatorname{Spec} F) \to K_0(U/B) \to K_0(X^{gen}) \to K_0(X^{gen} \times_K L) = K_0(G/B),$$

где L – поле расщепления торсора $U^{gen} \to \operatorname{Spec} K$. Согласно [22], отображение расширения скаляров $K_0(X^{gen}) \to K_0(X^{gen} \times_K L)$ инъективно. Заметим, что данная композиция совпадает с характеристическим отображением $c\colon \mathbb{Z}[T^*] \to K_0(G/B)$, ядро которого, по теореме Стейнберга, совпадает с $\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*]$. Рассмотрев топологическую фильтрацию $\tau^i(U/B)$ на $K_0(U/B)$ и отождествив, согласно теореме Римана-Роха $\tau^2(U/B)/\tau^3(U/B)$ с $\mathrm{CH}^2(U/B)$, лемма 18 дает изоморфизм $\mathrm{CH}^2(X^{gen}) \cong Sym^2(T^*)/\operatorname{SDec}(G)$, где $\operatorname{SDec}(G) = c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])$, а лемма 19 устанавливает изоморфизм $\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \cong Sym^2(T^*)^W/\operatorname{SDec}(G)$.

Далее, используем результат работы [23], в которой построен изоморфизм $\operatorname{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{ind} \cong Sym^2(T^*)^W/\operatorname{Dec}(G)$, где $Dec(G) = c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)$. При этом отображение $\delta \circ \Theta$ включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \\
\operatorname{Sym}^2(T^*)^W/\operatorname{Dec}(G) \arrow[r] & \operatorname{Sym}^2(T^*)^W/\operatorname{SDec}(G) \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Тогда отображение

$$\operatorname{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{norm} \overset{\delta\circ\Theta}{\to} \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$$

сюръективно, а фактор $\operatorname{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{dec} \cong \operatorname{SDec}(G)/\operatorname{Dec}(G) = c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])/c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)$, что составляет первую часть утверждения теоремы 2.

Для доказательства того факта, что полуразложимые и разложимые инварианты совпадают в случае простых групп, в разделе 2.5 проведен разбор всех типов простых расщепимых групп.

В силу того, что для любой односвязной группы $\widetilde{G}$ все нормализованные инварианты степени 2 тривиальны, следовательно тривиальны все полуразложимые инварианты степени 3. Тогда $\mathrm{SDec}(\widetilde{G}) = \mathrm{Dec}(\widetilde{G})$ и для произвольной группы G имеем цепочку неравенств 2.3

$$\mathrm{Dec}(G) \subseteq \mathrm{SDec}(G) \subseteq \mathrm{SDec}(\widetilde{G}) = \mathrm{Dec}(\widetilde{G})$$

где $\widetilde{G}$ – односвязная накрывающая группы G. Это соображение позволяет получить утверждение для случая присоединенных группы типа $A_n (n \geqslant 1)$, $B_n (n \geqslant 2)$, $C_n (n \geqslant 3, 4 \nmid n)$, $D_n (n \geqslant 5, 4 \nmid n)$, E_6, E_7 и специальных ортогональных групп типа $D_n (n \geqslant 4)$., так как согласно вычислениям [23] и [24] в каждом из этих случаев $\mathrm{Dec}(G) = \mathrm{Dec}(\widetilde{G})$.

Для случая групп $G = \mathbf{SL_{p^s}}/\mu_{\mathbf{p^r}}$ для некоторых $s \geqslant r > 0$ ранее известные вычисления $\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$ в [10] дают равенство $\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} = \mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{ind}$, откуда согласно главной теореме имеем $\mathrm{SDec}(G) = \mathrm{Dec}(G)$. Для общего случая группы $G = \mathbf{SL_n}/\mu^{\mathbf{m}}$ использована редукция к случаю $G = \mathbf{SL_{p^s}}/\mu_{\mathbf{p^r}}$.

Для случая присоединенных групп типа $C_{4m} (m \geqslant 1)$ использована проекция $f\colon \mathbb{Z}[\Lambda] \to \mathbb{Z}[\Lambda/T^*]$. Для произвольного $x \in \widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*]$ имеем $f(x) = 0$, что дает достаточные условия на коэффициенты разложения x по образующим идеала $\widetilde{I}_W$, чтобы проверить, что $c_2(x) \in \mathrm{Dec}(G)$. Аналогичный метод используется для полуспинорных групп типа $D_{4m}, m \geqslant 1$, что влечет случай групп $\mathbf{PGO}_{8m}, m > 1$, так как в этом случае $\mathrm{Dec}(\mathbf{PGO}_{8m}) = \mathrm{Dec}(HSpin_{8m}) = \mathrm{SDec}(HSpin_{8m}) \subseteq \mathrm{SDec}(PGO_{8m})$.

Для случая $G = \mathbf{PGO}_8$ проделано компьютерное вычисление базиса пересечения $\widetilde{I}_W + \widetilde{I}^4 \cap \mathbb{Z}[T^*]$. Далее, явная проверка показывает, что для каждого элемента базиса x имеем $c_2(x) \in \mathrm{Dec}(G)$.

Актуальность и степень разработанности темы

Классифицирующие пространства являются важным инструментом в исследовании топологических групп. Алгебраическая версия классифицирующего пространства для аффинных алгебраических групп рассматривалась такими авторами как Ф. Богомолов и Б. Тотаро. В работе Б. Тотаро [3] в качестве аналога K_0-теории классифицирующего пространства рассматривался предел K_0-групп гладких многообразий, играющих роль приближения к классифицирующему пространству, которое не существует в категории гладких многообразий. Построение В. Воеводским и Ф. Морелем мотивной гомотопической категории сделало возможным систематический перевод понятий и методов из алгебраической топологии в контекст алгебраической геометрии. Теорема Атьи-Сегала о пополнении является важным результатом в теории групп Ли, поэтому важным становится вопрос о выполнимости аналога данной теоремы для алгебраических групп. Теория когомологических инвариантов является мощным аппаратом исследования торсоров алгебраических групп. Определенная в работах Ж.-П. Серра и М. Роста, теория привлекала внимание таких авторов, как А. Меркурьев, С. Гарибальди и др. Важным шагом в развитии теории когомологических инвариантов было описание М. Ростом когомологических инвариантов степени 3 для односвязных полупростых групп. Недавно А. Меркурьевым [23] было получено обобщение этого результата для всех полупростых групп. Связь когомологических инвариантов и групп Чжоу версальных флаговых многообразий позволяет лучше исследовать геометрию скрученных многообразий флагов. Таким образом, тематика работы является актуальной.

Цель диссертационной работы. Целью первой главы диссертационной работы является доказательство алгебраического аналога теоремы Атьи-Сегала для расщепимой связной редуктивной алгебраической группы G. Целью второй главы диссертационной работы является построение для полупростой расщепимой группы G над полем изоморфизма между подгруппой кручения группы Чжоу циклов коразмерности 2 версального флагового многообразия и фактор-группой нормализованных когомологических инвариантов степени 3 по модулю подгруппы полуразложимых инвариантов, а также доказательство факта, что группа полуразложимых инвариантов совпадает с ранее хорошо изученной группой разложимых инвариантов в случае простой расщепимой алгебраической группы G.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть применены для решения различных вопросов, связанных с теорией представлений, когомологическими инвариантами полупростых расщепимых групп а также вычислении кручения в группах Чжоу версальных многообразий флагов.

Методы исследований. Для исследования K-теории этального классифицирующего пространства $B_{et}G$ связной расщепимой редуктивной группы G используется метод приближения гладкими многообразиями и мотивная точная последовательность Милнора, а также метод редукции к Борелевской подгруппе группы G.

Для исследования группы когомологических инвариантов полупростой расщепимой группы G используется техника мотивных когомологий, характеры Черна и комбинаторика решеток корней и весов полупростой расщепимой группы G.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту:

- Доказано существование естественного изоморфизма

$$K_n^G(\operatorname{Spec} k)^{\wedge}_{I_G} \to K_n(B_{et}G)$$

между пополнением в идеале аугментации I_G кольца представлений $Rep_k(G)$ эквивариантной K-теории Томасона поля k и K-теорией этального классифицирующего пространства Воеводского-Мореля для связной расщепимой редуктивной группы G над k.

- Для полупростой расщепимой группы G над базовым полем k доказано существование изоморфизма

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec} \cong \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$$

Между фактор-группой группы нормализованных инвариантов 3 степени $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm}$ по модулю полгруппы полуразложимых инвариантов $Inv^3(G,2)_{sdec}$ и подгруппой кручения группы Чжоу циклов коразмерности 2 на версальном многообразии флагов X^{gen}.

- Получено комбинаторное описание фактор-группы $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ группы полуразложимых инвариантов степени 3 по модулю хорошо изученной подгруппы разложимых инвариантов степени 3, $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ в терминах формального класса Черна и решеток весов Λ и характеров расщепимого тора T^* и группы Вейля W полупростой расщепимой группы G:

$$\frac{\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}}{\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}} \cong \frac{c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])}{c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)}$$

- Доказано совпадение групп полуразложимых и разложимых инвариантов для всех простых расщепимых групп G.

Степень достоверности результатов

Все результаты диссертации получили строгое доказательство и были опубликованы в рецензируемых журналах. **Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная конференция "Structures of algebraic groups"(Лион, 2014)
- Семинар по $\mathbb{A}^1$-топологии и K-теории, Лаборатория им. П.Л. Чебышева СПбГУ (Санкт-Петербург, 2014)
- Алгебраический семинар университета Оттавы (Оттава, 2012)

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в двух печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах[25, 26], входящих в список ВАК. Работы [25, 26] написаны в соавторстве. В работе [25] диссертанту принадлежат результаты параграфа 2 и 3: доказательства теорем 3.1 3.2 и 3.3. В работе [26] диссертанту принадлежат результаты параграфа 2: доказательство теоремы 2.10 а также результаты пунктов 3.2, 3.3, 3.4 и 3.5 в параграфе 3.

Глава 1

K-теория классифицирующих пространств расщепимых редуктивных групп

Данная глава посвящена описанию K-теории мотивного классифицирующего пространства $B_{et}G$ для связной расщепимой редуктивной группы G. Изложение организовано следующим образом: В первом параграфе дано определение этального классифицирующего пространства в мотивной категории Воеводского-Мореля, во втором параграфе рассматриваются основные определения и свойства эквивариантной K-теории Томасона. Изложение при этом следует статье [27]. В третьем параграфе обсуждается контекст, в котором понимается алгебраическая K-теория мотивных пространств. В четвертом параграфе дана формулировка основного результата. В пятом параграфе приведено доказательство основного результата. При этом основным приемом является редукция к Борелевской подгруппе.

1.1. Этальное классифицирующее пространство

Зафиксируем базовое поле k. Рассмотрим расщепимую редуктивную группу G. Рассмотрим симплициальную схему EG, где $EG_n = G^{n+1}$, а граничные и кограничные отображения задаются частичными проекциями и диагоналями (см. [4, с.128]) G диагонально действует на EG и симплициальный фактор-пучок представим симплициальной схемой BG, где $BG_n = G^n$, и отображение $EG_n \to BG_n$ задается $(g_0, \ldots, g_n) \mapsto (g_0g_1^{-1}, g_1g_2^{-1}, \ldots, g_{n-1}g_n^{-1}, g_n)$.

Тогда этальное классифицирующее пространство $B_{et}G$ определяется как $R\pi_*\pi^*$, где $\pi\colon (\mathbf{Sm}_k)_{et} \to (\mathbf{Sm}_k)_{Nis}$ – морфизм сайтов, а $R\pi_*\pi^*$ – производный функтор на симплициальной гомотопической категории $\mathcal{H}_s((\mathbf{Sm}_k)_{Nis})$, индуцированный $\pi_* \pi^* \colon \Delta^{op} Shv(Nis) \to \Delta^{op} Shv(Nis)$.

Согласно параграфу [4, 4.2] существует следующая геометрическая конструкция этального классифицирующего пространства $B_{et}G$ может быть построено следующим образом:

Определение 1. [4, Определение 2.1] Пусть $X \in \mathbf{Sm}_k$. Назовем допустимой системой набор $(E_i, U_i, f_i)_{i>0}$ где E_i – векторные расслоения над X, U_i – открытые подсхемы в E_i, $f_i \colon U_i \to U_{i+1}$, такие что

- Для любой точки $\operatorname{Spec} L \to X$ найдется i, такое что $U_i \times_X \operatorname{Spec} L$ содержит L-рациональную точку
- Для любого i найдется j, такой что вложение $U_i \to U_j$ пропускается через отображение $U_i \to E_i^2 \setminus (E_i \setminus U_i)^2$ вида $v \mapsto (0, v)$.

Определение 2. [4, Определение 2.4] Пусть (E_i, U_i, f_i) – допустимая система над $\operatorname{Spec} k$. Назовем хорошим G-действием набор линейных действий G на E_i, такой что

- Подсхемы U_i являются G-инвариантными, морфизмы f_i – G-эквивариантны и разложение из 1(2) можно выбрать в классе G-эквивариантных морфизмов.
- Действие G на U_i свободно
- Для любой схемы $X \in \mathbf{Sm}_k$ и G-торсора $V \to X$ в этальной топологии найдется i, такой что $((U_i \times_k V)/G)_{et} \to X$ является эпиморфизмом в топологии Нисневича.

Обозначим $U_\infty = \operatorname{colim}_{f_i} U_i$. Согласно [4, Предложение 1.15] торсор $U_i \to U_i/G$ индуцирует отображение $U_i/G \to BG$ в $\mathcal{H}_s((\mathbf{Sm}_k)_{Nis})$. Данные отображения согласованы с f_i, следовательно индуцируют отображение

$U_\infty/G \to BG$. Взяв ассоциированные этальные пучки и композицию с отображением $(BG)_{et} \to B_{et}G$ получим каноническое отображение $(U_\infty/G)_{et} \to BG_{et} \to B_{et}G$ в $\mathcal{H}_s(k)$.

Тогда согласно [4, Предложение 2.6] каноническое отображение индуцирует изоморфизм $(U_\infty/G)_{et} \to B_{et}G$ в $\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)$.

В дальнейшем мы зафиксируем следующую допустимую систему (E_i, EG_i, f_i) над $\operatorname{Spec} k$ с хорошим G-действием, построение которой было предложено Б. Тотаро в [3]: Зафиксируем вложение $G \to GL(W)$ для некоторого векторного пространства W. Положим $E_i = Hom(W \oplus k^i \to W)$ Рассмотрим действие G на E_i с помощью действия G на правой копии W. Возьмем в качестве EG_i открытую подсхему сюръективных отображений $W \oplus k^i \to W$. Очевидно, что EG_i инвариантны под действием G и это действие свободно. В качестве f_i возьмем вложение, индуцированное вложением $E_i \to E_{i+1}$.

Замечание 1. Заметим, что $EG_i = GL_{\dim W+i}/H$ где H – стабилизатор подпространства k^i в $W \oplus k^i$. Тогда фактор-пространство представимо в виде фактора группы по замкнутой подгруппе $EG_i/G = GL_{\dim W+i}/H \times G$, следовательно представляется схемой $BG_i \in \mathbf{Sm}_k$. Также заметим, что $\operatorname{codim}(E_i \setminus EG_i) > \operatorname{codim}(E_{i-1} \setminus EG_{i-1})$, для $i > 0$, следовательно, $\operatorname{codim}(E_i \setminus EG_i) > i$.

Лемма 1. *Набор (E_i, EG_i, f_i) является допустимой системой с хорошим G-действием.*

Доказательство. Так как EG_i – открытое подмножество аффинного пространства, оно содержит k-рациональную точку, тогда условие 1 определения 1 выполнено. Зафиксируем изоморфизм $W \cong k^{\dim W}$ и рассмотрим вложение $E_i^2 \to E_{\dim W+2i}$, где паре $(f, g) \in E_i^2$ сопоставляется отображение $W \oplus k^{dimW+2i} \cong (W \oplus k^i) \oplus (W \oplus k^i) \overset{f \oplus g}{\to} W$. При этом отображении $E_i^2 \setminus (E_i \setminus EG_i)^2$ вкладывается в $EG_{\dim W+2i}$, и таким образом условие 2 определения 1 выполнено.

Для определения 2 остается проверить условие 3. Достаточно провести проверку для случая, когда X – спектр локального гензелева кольца. Пусть $V \to X$ – торсор в этальной топологии. Тогда $((E_i \times V)/G)_{et} \to X$ является векторным расслоением над X, так как X– локально, $((E_i \times V)/G)_{et}$ – тривиальное расслоение, а $((EG_i \times V)/G)_{et}$ – открытая подсхема в тривиальном векторном расслоении, следовательно, отбражение $((EG_i \times V)/G)_{et} \to X$ является эпиморфизмом. □

1.2. Эквивариантная K-теория

Пусть X - многообразие с действием группы G. Эквивариантная K-теория была разработана Р.В. Томасоном в [7]. В дальнейшем мы будем ссылаться на статью [27] и дадим следующее определение:

Определение 3. G-модуль на X - это пучок $\mathcal{O}_X$-модулей M вместе с изоморфизмом $\mathcal{O}_{G\times X}$-модулей $\alpha\colon \mu_X^*(M) \to p_X^*(M)$, где $\mu_X\colon G \times X \to X$ - это морфизм G-действия, а $p_X\colon G \times X \to X$ - проекция. При этом α удовлетворяет уравнению коцикла

$$p_{23}^*(\alpha)\colon (\mathrm{id}_G \times \mu_X)^*(\alpha) = (m \times \mathrm{id}_X)^*(\alpha)$$

где $p_{23}\colon G \times G \times X \to G \times X$ - проекция на два последних сомножителя, а $m\colon G \times G \to G$ - умножение в группе G.

Обозначим через $\mathcal{M}(G;X)$ абелеву категорию G-модулей на X, а через $\mathcal{P}(G;X)$ полную подкатегорию, состоящую из локально свободных G-модулей на X. Следуя [27, 2.2] возьмем алгебраическую K-теорию от этих двух категорий и получим эквивариантную K-теорию многообразия X:

$$K_n'(G;X) = K_n(\mathcal{M}(G;X)), K_n(G;X) = K_n(\mathcal{P}(G;X))$$

Функтор $K_n(G;-)$ контравариантен относительно произвольных G-морфизмов

Для каждого плоского G-морфизма $f\colon X \to Y$ возникает гомоморфизм обратного образа

$$f^*\colon K'_n(G;Y) \to K'_n(G;X)$$

Определение 4. Назовем морфизм $f\colon X \to Y$ G-проективным, если f представляется в виде композиции замкнутого вложения и проекции $f\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}(E) \to Y$, где E - некоторое G-эквивариантное векторное расслоение на Y.

Каждый G-проективный морфизм $f\colon X \to Y$ определяет гомоморфизм прямого образа

$$f_*\colon K'_n(G;X) \to K'_n(G;Y).$$

Вложение категорий $\mathcal{P}(G;X) \to \mathcal{M}(G;X)$ индуцирует гомоморфизм $K_n(G;X) \to K'_n(G;X)$. Для регулярного X этот гомоморфизм является изоморфизмом [7, 5.7].

Пусть G, H – алгебраические группы, и пусть $f\colon X \to Y$ – $G \times H$-морфизм, который является G-торсором. Тогда f индуцирует точные функторы

$$f^0\colon \mathcal{M}(H;Y) \to \mathcal{M}(G \times H;X) \text{ и } f^0\colon \mathcal{P}(H;Y) \to \mathcal{P}(G \times H;X)$$

Согласно [27, Предложение 3] эти функторы являются эквивалентностями категорий, следовательно порождают изоморфизмы

$$f^0\colon K'_n(H;Y) \to K'_n(G \times H;X) \text{ и } f^0\colon K_n(H;Y) \to K_n(G \times H;X)$$

1.3. K-теория мотивных пространств

Согласно [5, Теорема 6.5] алгебраическая K-теория представима в гомотопической категории $\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)$:

$$K_i(X) \cong Hom_{\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)_\bullet}(S_s^i \wedge X_+, BGL \times \mathbb{Z}) \qquad (*)$$

для $X \in \mathbf{Sm}_k$, где мотивное пространство BGL определено как копредел $BGL = \mathrm{colim}_d BGL(d)$ грассманианов d-мерных плоскостей: $BGL(d) = \mathrm{colim}_n Gr(d,n)$, где $Gr(d,n)$ - грассманиан d-мерных подпространств в n-мерном пространстве. Таким образом, можно определить K-теорию мотивных пространств, используя правую часть равенства $(*)$. Для произвольного пунктированного мотивного пространства $\mathcal{X}$ положим

$$K_i(\mathcal{X}) = Hom_{\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)_\bullet}(S_s^i \wedge \mathcal{X}, BGL \times \mathbb{Z}).$$

Тогда $K_i(\mathcal{X}) = BGL^{-i,0}(\mathcal{X})$, где $BGL^{*,*}$ – теория когомологий, ассоциированная со спектром $\mathbf{BGL}$ [5, §6]. В дальнейшем мы будем обозначать через $K_i(B_{et}G)$ K-теорию пунктированного мотивного пространства $B_{et}G_+ = B_{et}G \sqcup \mathrm{Spec}\, k$ с добавленной отмеченной точкой.

1.4. Формулировка основного результата

Пусть k–поле, G– алгебраическая группа над k. Тогда $K_0(G;k)$ естественным образом отождествляется с кольцом представлений $R(G)$. Рассмотрим гомоморфизм $deg\colon R(G) \to \mathbb{Z}$, сопоставляющий каждому представлению его размерность. Обозначим через I_G ядро deg. Группа $K_n(G;k)$ обладает структурой $K_0(G;k)$-модуля. Обозначим через $K_n(G;k)^\wedge_{I_G}$ I_G-адическое пополнение $K_n(G;k)$. Основным результатом настоящей главы является доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть k–поле, G– связная расщепимая редуктивная группа над k. Тогда существует изоморфизм*

$$K_n(G;k)^{\wedge}_{I_G} \cong K_n(B_{et}G)$$

где $B_{et}G$ – этальное классифицирующее пространство Воеводского-Мореля (см. 1.1), $K_n(B_{et}G)$ – K-теория мотивного пространства $B_{et}G$, определенная в 1.3.

1.5. Доказательство основного результата

1.5.1. Конструкция Бореля

Для каждого $j > 0$ рассмотрим G-торсор $EG_j \to BG_j$. Определим отображение $\phi_{n,j}\colon K_n(G;k) \to K_n(BG_j)$ как композицию эквивариантного отображения обратного образа и изоморфизма p_j^0, данного [27, Предложение 3]

$$\phi_{n,j}\colon K_n(G;k) \to K_n(G;EG_j) \xrightarrow{p_j^0} K_n(1;BG_j) = K_n(BG_j)$$

Для замкнутого вложения $f_j\colon EG_j \to EG_{j+1}$ имеем f_j^* коммутирует с эквивариантным гомоморфизмом обратного образа, тогда последовательность $\phi_{n,j}$ определяет гомоморфизм

$$\phi_n\colon K_n(G;k) \to \varprojlim_j K_n(G;EG_j) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_j K_n(BG_j).$$

1.5.2. Редукция к Борелевской подгруппе

Лемма 2. *Пусть $X, Y \in \mathbf{Sm}_k$ – гладкие многообразия с G-действием, при этом Y проективно и $h^0(Y, \mathcal{O}(Y)) = 1$ и $h^i(Y, \mathcal{O}(Y)) = 0$ при $i > 0$. Тогда композиция $K_n(G;X) \xrightarrow{p^*} K_n(G;X \times Y) \xrightarrow{p_*} K_n(G;X)$ равна тождественному отображению в $K_n(G;X)$, где $p\colon X \times Y \to X$ – проекция.*

Доказательство. Согласно формуле проекции, $p_*p^*(x) = xp_*(1)$. При этом $p_*(1) = \sum_i (-1)^i [R^i p_*(\mathcal{O}(X \times Y))]$ в $K_0(G;X)$. По условию на Y имеем, что $p_*(\mathcal{O}(X \times Y)) = \mathcal{O}(X)$ и $R^i p_*(\mathcal{O}(X \times Y)) = 0$ для $i > 0$. Отсюда $p_*(1) = 1$. $\square$

Лемма 3. *Рассмотрим следующую диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
Y_3 \arrow[r, "Q"] & Y_2 \arrow[r, "q"] & Y_1 \\
X_3 \arrow[u, "f_3"] \arrow[r, "T"] & X_2 \arrow[u, "f_2"] \arrow[r, "t"] & X_1 \arrow[u, "f_1"]
\end{tikzcd}$$

где q и Q– плоские морфизмы, $X_2 = X_1 \times_{Y_1} Y_2$, $X_3 = X_2 \times_{Y_2} Y_3$. Пусть M – $\mathcal{O}_{X_1}$-модуль. Определим гомоморфизмы $hh_1 : q^* R^i f_{1*} \to R^i f_{2*} t^*$, $hh_{12} : Q^* q^* R^i f_{1*} \to R^i f_{3*} T^* t^*$, $hh_2 : Q^* R^i f_{2*} \to R^i f_{3*} T^*$ как естественные изоморфизмы, данные в [28, Предложение 9.3]. Тогда следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
Q^* q^* R^i f_{1*} M \arrow[rr, "Q^* hh_1(M)"] \arrow[dr, "hh_{12}(M)"'] & & Q^* R^i f_{2*} t^* M \arrow[dl, "hh_2(t^* M)"] \\
& R^i f_{3*} T^* t^* M &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Так как утверждение локально по Y_i, рассмотрим случай, когда все Y_i аффинны, $Y_i = SpecA_i$. Если F – R-модуль, обозначим через $\widetilde{F}$ соответствующий пучок на $\operatorname{Spec} R$. Напомним конструкцию hh_1. Пусть M – $\mathcal{O}_{X_1}$-модуль. Тогда

$R^i f_*(M) = \widetilde{H^i(X_1, M)}$; $q^* R^i f_{1*} M = A_2 \otimes_{A_1} \widetilde{H^i(X_1, M)}$; $R^i f_{2*} t^* M = \widetilde{H^i(X_2, t^* M)}$.

Пусть U_i – аффинное покрытие X_1. Обозначим через $K = \check{C}(X_1, M)$ соответствующий комплекс Чеха. Так как Y_1 и Y_2 – аффинны, $t^{-1}(U_i)$ является аффинным накрытием X_2. Для данного накрытия имеем, что $A_2 \otimes_{A_1} K$ является комплексом Чеха X_2-модуля $t^* M$. Тогда hh_1 – это очевидный морфизм

$$A_2 \otimes_{A_1} H^i(K) \to H^i(A_2 \otimes_{A_1} K)$$

который является изоморфизмом, так как A_2 плоско над A_1. Аналогичным образом строятся морфизмы hh_{12} и hh_2. Тогда диаграмму из условия леммы можно переписать в виде коммутирующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A_3 \otimes_{A_2} A_2 \otimes_{A_1} H^i(K) \arrow[rr, "id\otimes hh_1"] \arrow[dr, "hh_{12}(M)"'] & & A_3 \otimes_{A_2} H^i(A_2 \otimes_{A_1} K) \arrow[dl, "hh_2(t^*M)"] \\
& H^i(A_3 \otimes_{A_1} K) &
\end{tikzcd}$$

□

В дальнейшем будет необходима эквивариантная версия Предложения 9.3 [28].

Лемма 4. *Рассмотрим диаграмму замены базы*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & B \arrow[d, "q"'] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

где X, Y, A, B *–* G*-многообразия;* f, F, Q, q *–* G*-эквивариантные морфизмы и* f *плоский.*

Пусть M *–* G*-модуль на* B*. Тогда естественный изоморфизм*

$$f^* R^i q_* M \to R^i Q_* F^* M.$$

является изоморфизмом G*-модулей.*

Доказательство. Согласно [28, Предложение 9.3] имеется естественный изоморфизм $\mathcal{O}_X$-модулей

$hh_{X,Y,A,B} : f^* R^i q_* M \to R^i Q_* F^* M$. Необходимо проверить, что $hh_{X,Y,A,B}$ является изоморфизмом G-модулей, т.е. коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mu_X^* f^* R^i q_* M \arrow[r, "G-structure"'] \arrow[d, "\mu_X^* hh_{X,Y,A,B}"] & p_X^* f^* R^i q_* M \arrow[d, "p_X^* hh_{X,Y,A,B}"] \\
\mu_X^* R^i Q_* F^* M \arrow[r, "G-structure"'] & p_X^* R^i Q_* F^* M
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
G \times A \arrow[rr, "id\times F"] \arrow[dr, shift left, "p_A"] \arrow[dr, shift right, "\mu_A"'] \arrow[dd, "id\times Q"'] & & G \times B \arrow[dr, shift left, "p_B"] \arrow[dr, shift right, "\mu_B"'] \arrow[dd, "id\times q"' near start] & \\
& A \arrow[rr, "F"' near start] \arrow[dd, "Q"' near start] & & B \arrow[dd, "q"'] \\
G \times X \arrow[rr, "id\times f"' near end] \arrow[dr, shift left, "p_X"] \arrow[dr, shift right, "\mu_X"'] & & G \times Y \arrow[dr, shift left, "p_Y"] \arrow[dr, shift right, "\mu_Y"'] & \\
& X \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}$$

Для каждого квадрата в данном кубе обозначим через hh (с соответствующим индексом) изоморфизм из [28, Предложение 9.3], для данного квадрата. Перепишем диаграмму G-структуры следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
\mu_X^* f^* R^i q_* M \arrow[r, "1"'] \arrow[d, equal] & p_X^* f^* R^i q_* M \arrow[d, equal] \\
(id \times f)^* \mu_Y^* R^i q_* M \arrow[r, "2"'] \arrow[d, "(id\times f)^* hh^{\mu}_{G\times Y, Y, G\times B, B}(M)"'] & (id \times f)^* p_Y^* R^i q_* M \arrow[d, "(id\times f)^* hh^{p}_{G\times Y, Y, G\times B, B}(M)"'] \\
(id \times f)^* R^i (id \times q)_* \mu_B^* M \arrow[r, "3"'] \arrow[d, "hh_{G\times X, G\times Y, G\times A, G\times B}(\mu_B^* M)"'] & (id \times f)^* R^i (id \times q)_* p_B^* M \arrow[d, "hh_{G\times X, G\times Y, G\times A, G\times B}(p_B^* M)"'] \\
R^i (id \times Q)_* (id \times F)^* \mu_B^* M \arrow[r, "4"'] \arrow[d, equal] & R^i (id \times Q)_* (id \times F)^* p_B^* M \arrow[d, equal] \\
R^i (id \times Q)_* \mu_A^* F^* M \arrow[r, "5"'] \arrow[d, "hh^{\mu}_{G\times X, X, G\times A, A}"'] & R^i (id \times Q)_* p_A^* F^* M \arrow[d, "hh^{p}_{G\times X, X, G\times A, A}"'] \\
\mu_X^* R^i Q_* F^* M \arrow[r] & p_X^* R^i Q_* F^* M
\end{tikzcd}$$

Квадрат 1 коммутативен согласно определению G-структуры на обратном образе G-модуля.

Квадрат 2 является $(id \times f)^*$-образом коммутативной диаграммы G-структуры для $R^i q_* M$.

Квадрат 3 возникает из изоморфизма функторов $(id \times f)^* R^i (id \times q)_* \to R^i (id \times Q)_* (id \times F)^*$, примененного к изоморфизму G-структуры

$\mu_B^* M \to p_B^* M$, следовательно коммутирует.

Квадрат 4 коммутативен согласно определению G-структуры на обратном образе G-модуля.

Квадрат 5 коммутативен согласно определению G-структуры на $R^i Q_* F^* M$.

По лемме 3 композиция вертикальных стрелок равна $\mu_X^* hh_{X,Y,A,B}$ и $p_X^* hh_{X,Y,A,B}$ соответственно, что завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 5. *Пусть* $U, X \in \mathbf{Sm}_k$ *и* $f\colon U \to X$ *– плоский морфизм. Рассмотрим проекции* $p_X\colon X \times G/B \to X$ *и* $p_U\colon U \times G/B \to U$. *Обозначим через* $\mathcal{P}_p(G; X \times G/B)$ *(соотв.* $\mathcal{P}_p(G; U \times G/B)$*) полную подкатегорию в* $\mathcal{P}(G; X \times G/B)$, *(соотв.* $\mathcal{P}(G; U \times G/B)$*), состоящую из локально свободных* G*-модулей* P, *таких что* $R^k p_{X*} P = 0$ *(соотв.* $R^k p_{U*} P = 0$*) при* $k > 0$. *Тогда следующая диаграмма коммутирует с точностью до изоморфизма функторов*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_p(G; U \times G/B) \arrow[d, "p_{U*}"] & \mathcal{P}_p(G; X \times G/B) \arrow[l, "(f \times \mathrm{id}_{G/B})^*"'] \arrow[d, "p_{X*}"] \\
\mathcal{M}(G; U) & \mathcal{M}(G; X) \arrow[l, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Согласно [28, Предложение 9.3] для каждого пучка M на $X \times G/B$ имеем $R^k p_{U*}(f \times \mathrm{id}_{G/B})^*(M) \cong f^* R^k p_{X*}(M)$. Тогда для любого M в $\mathcal{P}_p(G; X \times G/B)$ имеем $(f \times \mathrm{id}_{G/B})^*(M) \in \mathcal{P}_p(G; U \times G/B)$. По лемме 4 есть естественный изоморфизм G-модулей $p_{U*}(f \times \mathrm{id}_{G/B})^*(M) \cong f^* p_{X*}(M)$. $\square$

Лемма 6. *Пусть* X, Y *– гладкие* G*-многообразия,* $\pi : X \times Y \to Y$ *– проекция. Предположим, что* X *проективно и* Y *связно*

Обозначим через $\mathcal{P}_\pi(G; X \times Y)$ *полную подкатегорию в* $\mathcal{P}(G; X \times Y)$ *состоящую из локально свободных* G*-модулей* P, *таких что* $R^k \pi_* P = 0$ *при* $k > 0$.

Тогда любой G*-модуль* M *обладает конечной резольвентой вида*

$M \to P^0 \to P^1 \to \ldots \to P^N \to 0$, *где* $P^i \in OB(\mathcal{P}_\pi(G; X \times Y))$

Доказательство. Сначала докажем, что для любого M найдется вложение $M \hookrightarrow P^0$. Построим P^0 в виде скрутки $M(n)$ для достаточно большого n.

Для этого построим очень обильный G-эквивариантный пучок $\mathcal{O}_X(1)$ вместе с G-экивариантное вложение $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, таким что $\mathcal{O}_X(1) = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. Пусть L– очень обильное линейное расслоение. Согласно [29, следствие 1.6] расслоение $L^{\otimes k}$ является G-эквивариантным для некоторого k. Тогда определено действие G на $V = \Gamma(X, L^{\otimes k})$ и эквивариантный морфизм $i : X \to \mathbb{P}(V)$, который является вложением, так как $L^{\otimes k}$ очень обильно. Тогда положим $\mathcal{O}_X(1) = L^{\otimes k}$.
Стандартное вложение тавтологического расслоения $\tau_{\mathbb{P}(V)} \hookrightarrow V \times \mathbb{P}(V)$ дает G-эквивариантное вложение локально свободных пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$. Применяя тензорное умножение на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$, получим $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$. По индукции имеем G-эквивариантное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(n) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(n)$. Применяя i^*, получим

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X(n) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X(n).$$

Определим $\mathcal{O}_{X\times Y}(1) = \pi^*\mathcal{O}_X(1)$. Применяя гомоморфизм обратного образа π^*, получим эквивариантное вложение

$$M \hookrightarrow M(n) \oplus \ldots \oplus M(n).$$

для произвольного локально свободного G-модуля M. Коядро этого вложения также является локально свободным G-модулем. Таким образом, для каждого локально-свободного G-модуля найдется резольвента, состоящая из модулей вида $M(n)$.

Согласно [28, Теорема 8.8], для каждого локально-свободного модуля G-модуля M модуль $M(n)$ лежит в $\mathcal{P}_\pi(G; X \times Y)$ при достаточно больших n.

Проверим, что полученная резольвента конечна. Пусть $N = \dim X + \dim Y$. Обозначим через C^0 коядро первого шага резольвенты:

$$0 \to M \to P^0 \to C^0 \to 0.$$

Тогда имеем точную последовательность

$$0 = R^N\pi_*P^0 \to R^N\pi_*C^0 \to R^{N+1}\pi_*M.$$

Пучок $R^{N+1}\pi_*M$ ассоциирован с предпучком $V \mapsto H^{N+1}(V \times X, M) = 0$ согласно [28, Теорема 2.7]. Тогда $R^N\pi_*C^0 = 0$. Для следующего коядра C^1 имеем точную последовательность

$$0 \to C^0 \to P^1 \to C^1 \to 0.$$

Тогда

$$0 = R^{N-1}\pi_*P^1 \to R^{N-1}\pi_*C^1 \to R^N\pi_*C^0 = 0.$$

Таким образом, $R^{N-1}\pi_*C^{N-1} = 0$. Продолжая по индукции, получим, что $R^k\pi_*C^N = 0$ при всех $k > 0$. Тогда $C^N \in Ob(\mathcal{P}_\pi(G; X \times Y))$. □

Лемма 7. *Пусть $U, X \in \mathbf{Sm}_k$ и $f\colon U \to X$ – плоский морфизм. Рассмотрим проекции $p_X\colon X \times G/B \to X$ и $p_U\colon U \times G/B \to U$. Тогда $p_{U*} \circ (f \times id_{G/B})^* = f^* \circ p_{X*}\colon K'_n(G; X \times G/B) \to K'_n(G; U)$*

Доказательство. Пользуясь обозначениями леммы 5 рассмотрим диаграмму категорий

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(G; U \times G/B) & \mathcal{P}(G; X \times G/B) \arrow[l, "(f\times\mathrm{id}_{G/B})^*"'] \\
\mathcal{P}_p(G; U \times G/B) \arrow[u] \arrow[d, "p_{U*}"'] & \mathcal{P}_p(G; X \times G/B) \arrow[l, "(f\times\mathrm{id}_{G/B})^*"'] \arrow[u] \arrow[d, "p_{X*}"'] \\
\mathcal{M}(G; U) & \mathcal{M}(G; X) \arrow[l, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

Нижний квадрат коммутирует согласно лемме 5, верхний квадрат коммутативен, так как состоит из естественных вложений категорий. Применяя

K-функтор, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K_n(G;U\times G/B) & & K_n(G;X\times G/B) \arrow[ll] \\
K_n(\mathcal{P}_p(G;U\times G/B)) \arrow[u, "\alpha_U"] \arrow[d] & & K_n(\mathcal{P}_p(G;X\times G/B)) \arrow[ll] \arrow[u, "\alpha_X"'] \arrow[d] \\
K'_n(G;U) & & K'_n(G;X) \arrow[ll]
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Согласно теореме Квиллена о резольвенте [30, §4] отображения α_U, α_X являются изоморфизмами. По определению, эквивариантные гомоморфизмы прямого образа $K'_n(G;X\times G/B)\to K'_n(G;X)$ и $K'_n(G;U\times G/B)\to K'_n(G;U)$ равны композиции

$$K'_n(G,X\times G/B)\cong K_n(G;X\times G/B)\overset{\alpha_X^{-1}}{\to} K_n(\mathcal{P}_p(G;X\times G/B))\to K'_n(G;X) \text{ и}$$

$$K'_n(G,U\times G/B)\cong K_n(G;U\times G/B)\overset{\alpha_U^{-1}}{\to} K_n(\mathcal{P}_p(G;U\times G/B))\to K'_n(G;U).$$

Таким образом, утверждение леммы следует из коммутативности 1.1. □

Лемма 8. *Обозначим через* $p_i\colon EG_i\times G/B\to EG_i$ *проекцию и через* $f_i\colon EG_i\to EG_{i+1}$ *вложение. Тогда* $f_i^*\circ p_{i+1*}=p_{i*}\circ(f_i\times id_{G/B})^*\colon K_n(G;EG_{i+1}\times G/B)\to K_n(G;EG_i)$

Доказательство. Заметим, что вложение $f_i\colon EG_i\to EG_{i+1}$ раскладывается в виде $EG_i\overset{e_i}{\to} EG_i\times W\overset{g_i}{\to} EG_{i+1}$, где W-аффинное пространство с G-действием, первое отображение – вложение нулевым слоем, а второе отображение – открытое вложение. Тогда $f_i^*=e_i^*\circ g_i^*$. В силу гомотопической инвариантности имеем $e_i^*=(\pi_i^*)^{-1}$, где $\pi_i\colon EG_i\times W\to EG_i$ – проекция. Тогда f_i^* и $(f_i\times id_{G/B})^*$ представляется в виде композиции обратных образов вдоль плоских морфизмов, и тогда утверждение следует из леммы 7. □

Напомним, что согласно 1.1 этальное классифицирующее пространство $B_{et}G$ изоморфно копределу гладких многообразий BG_i, $i>0$

Доказательство следующей леммы использует аргументацию, сходную с [31, Предложение 15].

Лемма 9. *Пусть* $X \in \mathbf{Sm}_k$, $\tilde{X} \to X$ *– гладкое отображение, локально тривиальное в топологии Зарисского, слои которого изоморфны аффинным пространствам, и* $\tilde{X}$ *–аффинно. Пусть* $p\colon L \to X$ *– векторное расслоение,* $Z \subseteq L$ *замкнуто,* $\mathrm{codim}_L Z = d > \dim \tilde{X}$*. Тогда существует морфизм* $f\colon X \to L \setminus Z$ *в гомотопической категории* $\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)$*, такой что композиция* $X \to L \setminus Z \xrightarrow{p} X$ *является тождественным отображением.*

Доказательство. Пусть $\tilde{L} = L \times_X \tilde{X}$– обратный образ L вдоль p. Тогда $\tilde{Z} = Z \times_X \tilde{X}$ имеет коразмерность d. Так как $\tilde{X}$–аффинно, существует накрытие $q\colon \tilde{X} \times \mathbb{A}^N \to \tilde{L}$ тривиальным раслоением. Тогда $q^{-1}(\tilde{Z})$ имеет коразмерность $d > \dim \tilde{X}$ в $\tilde{X} \times \mathbb{A}^N$, следовательно $\dim q^{-1}(\tilde{Z}) < N$, тогда при проекции на $\mathbb{A}^N$ существует рациональная точка вне образа $q^{-1}(\tilde{Z})$. Это даст сечение $\tilde{X} \to \tilde{X} \times \mathbb{A}^N \setminus q^{-1}(\tilde{Z}) \to \tilde{L} \setminus \tilde{Z} \to L \setminus Z$. Так как отображение $\tilde{X} \to X$ является изоморфизмом в $\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)$, получим сечение $X \to L \setminus Z$ в гомотопической категории. □

Пусть r обозначает ранг тора T. Можем считать, что в представлении W, использованном для построения набора EG_i в 1.1 для каждого сомножителя $\mathbb{G}_m$ в T, имеем разложение $W = W_1 \oplus W_0$, где W_1 – одномерное подпространство в W, на котором $\mathbb{G}_m$ действует с весом 1, а остальные сомножители действуют тривиально.

Зафиксируем некоторый сомножитель $\mathbb{G}_m$ в T. По построению, $EG_{2i} = Sur(W \oplus k^{2i}, W)$ – пространство сюръективных отображений из $W \oplus k^{2i}$ в W. Тогда композиция с проекцией на W_1 дает отображение $EG_{2i} = Sur(W \oplus k^{2i}, W) \to Sur(W \oplus k^{2i}, W_1) = \mathbb{A}^{d_W+2i} \setminus 0$, где $d_W = \dim W$. Взяв фактор по действию $\mathbb{G}_m$ получим отображение $EG_{2i}/Gm \to \mathbb{P}^{d_W+2i-1}$. Далее, заметим, что EG_{2i} является открытым подмножеством в тривиальном расслоении $Sur(W \oplus k^{2i}, W_1) \times Hom(W \oplus k^{2i}, W_0)$, причем коразмерность дополнения в каждом слое больше $2i$. Пусть E – ограничение этого расслоения на $Sur(W \oplus k^{i-d_W}, W_1)$. Тогда $(EG_{2i} \cap E)/\mathbb{G}_m$ – открытое подмножество в расслоении $E/\mathbb{G}_m \to Sur(W \oplus k^{i-d_W}, W_1)/\mathbb{G}_m = \mathbb{P}^{i-1}$, причем дополнение имеет коразмерность больше чем $2i$. Согласно конструкции Жуаналу ([32, Лемма 1.5]), можем выбрать аффинное многообразие $\widetilde{\mathbb{P}^{i-1}}$, размерности $2i-2$, удовлетворяющее условию леммы 9. Тогда найдется отображение в гомотопической категории $\mathbb{P}^{i-1} \to EG_{2i}/\mathbb{G}_m$, такое что композиция $\mathbb{P}^{i-1} \to EG_{2i}/\mathbb{G}_m \to \mathbb{P}^{d_W+2i-1}$ – вложение, индуцированное отображением $Sur(W \oplus k^{i-d_w}, W_1) \to Sur(W \oplus k^{2i}, W_1)$.

Таким образом, для каждой копии $\mathbb{G}_m$ построена система отображений $EG_i/\mathbb{G}_m \to \mathbb{P}^{i+d_W-1}$, согласованная с вложениями, и сечения в $\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)$ $\mathbb{P}^{i-1} \to EG_{2i}/\mathbb{G}_m$. В силу того, что T действует на W_1 посредством одной копии $\mathbb{G}_m$, проекция $EG_i/\mathbb{G}_m \to \mathbb{P}^{i+d_W-1}$ пропускается через $EG_i/T \to \mathbb{P}^{i+d_W-1}$. Рассмотрев проекцию для каждой копии $\mathbb{G}_m$ в T, получим отображения $EG_i/T \to (\mathbb{P}^{i+d_W-1})^r$. Заметим, что они согласованы с вложениями f_i и вложениями $(\mathbb{P}^i)^r \to (\mathbb{P}^j)^r$. Сечения в гомотопической категории дают $(\mathbb{P}^{i-1})^r \to (EG_{2i}/\mathbb{G}_m)^r \to EG_{2ir+d_w(r-1)/\mathbb{G}_m}$, где вторая стрелка индуцирована отображением $Sur(W \oplus k^i, W) \times Sur(W \oplus k^j, W) \to Sur(W \oplus k^{i+j+d_W}, W)$.

Таким образом, для каждого i имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} EG_{i-d_W}/T \arrow[r] \arrow[d] & EG_{2ir+d_W(r-1)}/T \arrow[d] \\ (\mathbb{P}^{i-1})^r \arrow[r] \arrow[ur] & (\mathbb{P}^{2ir+d_W r-1})^r \end{tikzcd} \qquad (*)$$

где диагональное сечение существует в $\mathcal{H}_{\mathbb{A}^1}(k)$.

Лемма 10. *Для любого $n > 0$ $\varprojlim^1 K_n(EG_i/T) = 0$ и последовательность отображений $EG_i/T \to \mathbb{P}^{i+d_W-1}$ индуцирует изоморфизм $\varprojlim K_n((\mathbb{P}^i)^r) \to$*

$\varprojlim K_n(EG_i/T)$.

Доказательство. Заметим, что набор $(\mathbb{A}^i \setminus 0)^r$ задает допустимую систему с хорошим T-действием, аппроксимирующую пространство $B_{et}T$. В силу того, что $EG_i = EG_i/T \times_{(\mathbb{P}^{i+d_W-1})^r} (\mathbb{A}^{i+d_W})^r$, каноническое отображение $EG_i/T \to B_{et}T$ представляется как $EG_i/T \to (\mathbb{P}^{i+d_W-1})^r \to B_{et}T$. Согласно вычислению $K_n((\mathbb{P}^i)^r) = K_n(k)[x_1, \dots x_r]/(x_1^{i+1}, \dots x_r^{i+1})$ получим что $K_n((\mathbb{P}^i)^r) \to K_n((\mathbb{P}^{i-1})^r)$ сюръективно, следовательно $\varprojlim^1 K_n((\mathbb{P}^i)^r) = 0$. Алгебраическая K-теория представима в стабильной гомотопической категории спектром **BGL** [5, Теорема 6.9]. Тогда согласно короткой точной последовательности Милнора [33, Предложение 2.2.11(c)] имеем, что каноническое отображение индуцирует изоморфизм $K_n(B_{et}T) \to \varprojlim K_n((\mathbb{P}^i)^r))$. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim^1 K_{n+1}(EG_i/T) \arrow[r] & K_n(B_{et}T) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varprojlim K_n(EG_i/T) \arrow[r] & 0 \\
& & K_n(B_{et}T) \arrow[r, "\cong"] & \varprojlim K_n(\mathbb{P}^{i+d_W-1}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, правая стрелка сюръективна. Применив функтор K_n к диаграмме $(*)$, получим сечение, откуда отображение $\varprojlim K_n(\mathbb{P}^{i+d_W-1}) \to \varprojlim K_n(EG_i/T)$ является изоморфизмом, следовательно $\varprojlim^1 K_{n+1}(EG_i/T) = 0$. □

Предложение 1. *Естественные отображения $K_n(B_{et}G) \to K_n(BG_i)$ индуцируют изоморфизм*

$$K_n(B_{et}G) \xrightarrow{\cong} \varprojlim K_n(BG_i)$$

Доказательство. Алгебраическая K-теория представима в стабильной гомотопической категории спектром **BGL** [5, Теорема 6.9]. Тогда согласно [33, Предложение 2.2.11(c)] имеет место короткая точная последовательность

Милнора:

$$0 \to \varprojlim{}^1 K_{n+1}(BG_i) \to K_n(B_{et}G) \to \varprojlim K_n(BG_i) \to 0.$$

Проверим, что $\varprojlim{}^1 K_{n+1}(BG_i) = 0$. По лемме 2 имеем, что композиция

$$K_{n+1}(G; EG_i) \to K_{n+1}(G; EG_i \times G/B) \to K_{n+1}(G; EG_i)$$

тождественна. При этом есть естественные изоморфизмы ([27, Предложение 3]) $K_{n+1}(G; EG_i \times G/B) \cong K_{n+1}(G \times B; EG_i \times G) \cong K_{n+1}(B; EG_i)$. В силу того, что B/T является аффинным пространством, из гомотопической инвариантности следует $K_{n+1}(B; EG_i) \cong K_{n+1}(B; EG_i \times B/T) \cong K_{n+1}(B \times T; EG_i \times B) \cong K_{n+1}(T; EG_i) \cong K_{n+1}(EG_i/T)$. Таким образом, $\varprojlim{}^1 K_{n+1}(BG_i)$ является прямым слагаемым в $\varprojlim{}^1 K_{n+1}(EG_i/T) = 0$ по лемме 10. $\square$

Следствие 1. *Конструкция Бореля индуцирует гомоморфизм* $\phi_n \colon K_n(G; k) \to \varprojlim K_n(BG_i) \cong K_n(B_{et}G)$

Лемма 11. *$K_0(T; k)$-модуль $\varprojlim K_n(T; EG_i)$ полон в I_T-адической топологии.*

Доказательство. Согласно лемме 10 $\varprojlim K_n(T; EG_i) \cong \varprojlim K_n((\mathbb{P}^i)^r)$, при этом по построению этот изоморфизм является изоморфизмом $K_0(T; k)$-модулей. Согласно вычислению, $\varprojlim K_n((\mathbb{P}^i)^r) = K_n(k)[[x_1, \dots x_r]]$ – полный модуль над кольцом $K_0(T; k) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r, (1-x_1)^{-1}, \dots, (1-x_r)^{-1}]$ относительно топологии, задаваемой идеалом $I_T = (x_1, \dots x_r)$. $\square$

Известно([34, Теорема 4]), что естественное отображение $R(G) \to R(T)$ отождествляет кольцо представлений $R(G)$ группы G с подкольцом $R(T)^W$ инвариантов относительно действия группы Вейля W.

Лемма 12. *I_T-адическая топология на кольце $R(T) = K_0(T; k)$ совпадает с $I_G \cdot R(T)$-адической топологией.*

Доказательство. Рассмотрим простой идеал q, содержащий I_G. Докажем, что q содержит I_T. Пусть $W = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$. Рассмотрим $x \in I_T$. Тогда для любого симметрического многочлена $f \in R(T)[y_1, \dots, y_m]$ получим, что элемент $f(\sigma_1 \cdot x, \dots, \sigma_m \cdot x)$ инвариантен относительно W, следовательно лежит в $I_T \cap R(G) = I_G$. Пусть $f_1, \dots, f_m$ – элементарные симметрические многочлены. Тогда x является корнем многочлена $\prod_{i=1}^m (t - \sigma_i \cdot x) = t^m - \sum_{i=1}^m (-1)^i f_i(\sigma_1 \cdot x, \dots \sigma_m \cdot x) t^{m-i}$. Тогда $x^m = \sum_{i=1}^m (-1)^i f_i(\sigma_1 \cdot x, \dots \sigma_m \cdot x) x^{m-i} \in I_G \cdot R(T)$, следовательно $x^m \in q$. Тогда $x \in q$.

Таким образом, радикалы I_T и $I_G \cdot R(T)$ совпадают, следовательно $I_T^n \subseteq I_G \cdot R(T)$ для некоторого n в силу нетеровости $R(T)$. Тогда I_T-адическая и $I_G \cdot R(T)$-адическая топологии на $R(T)$ совпадают. □

Лемма 13. *$K_0(G;k)$-модуль $\varprojlim K_n(BG_i)$ полон в I_G-адической топологии.*

Доказательство. Рассмотрим отображение пополнения $\varprojlim K_n(BG_i) \to \varprojlim K_n(BG_i)^\wedge_{I_G}$. Рассмотрим ретракцию $K_n(G; EG_i) \to K_n(G; EG_i \times G/B) \to K_n(G; EG_i)$. Тогда согласно лемме 8 $\varprojlim K_n(BG_i) \to \varprojlim K_n(BG_i)^\wedge_{I_G}$ является ретракцией отображения

$$\varprojlim K_n(G; EG_i \times G/B) \to \varprojlim K_n(G; EG_i \times G/B)^\wedge_{I_G} \qquad (**)$$

. В силу естественного изоморфизма $K_n(G; EG_i \times G/B) \cong K_n(T; EG_i)$ и леммы 12 и 11 получим, что отображение $(**)$ является изоморфизмом, откуда $\varprojlim K_n(BG_i) \to \varprojlim K_n(BG_i)^\wedge_{I_G}$ также является изоморфизмом. □

Следствие 2. *Отображение $\phi_n \colon K_n(G;k) \to \varprojlim K_n(BG_i)$ индуцирует отображение $\phi_n \colon K_n(G;k)^\wedge_{I_G} \to \varprojlim K_n(BG_i)$.*

Лемма 14. *Отображение $\phi_n \colon K_n(G;k)^\wedge_{I_G} \to \varprojlim K_n(BG_i)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Отождествляя в силу [27, Предложение 3] $K_n(T;k) \cong K_n(T \times B, B) \cong K_n(B; B/T) \cong K_n(B;k) \cong K_n(G \times B, G) \cong K_n(G; G/B)$, получим, что отображение ϕ_n является ретракцией отображения $\phi_n^T \colon K_n(T;k)^{\wedge}_{I_G} \to \varprojlim K_n(EG_i/T)$. Согласно лемме 12 имеем $K_n(T;k)^{\wedge}_{I_G} = K_n(T;k)^{\wedge}_{I_T}$. Лемма 10 $\varprojlim K_n(EG_i/T) = \varprojlim K_n((\mathbb{P}^i)^r) = K_n(k)[[y_1, \dots, y_r]]$. При этом $K_n(T;k) = K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} R(T) = K_n(k)[x_1, \dots, x_r, (1-x_1)^{-1}, \dots (1-x_r)^{-1}]$ По построению, отображение

$$\phi_n^T : K_n(k)[x_1, \dots, x_r, (1-x_1)^{-1}, \dots (1-x_r)^{-1}]^{\wedge}_{(x_1, \dots x_r)} \to K_n(k)[[y_1, \dots, y_r]]$$

отображает $x_i \mapsto y_i$, и, следовательно, является изоморфизмом. Тогда ϕ_n также является изоморфизмом. $\square$

Как следствие, получим доказательство теоремы 1:

Доказательство. Согласно лемме 14, конструкция Бореля индуцирует изоморфизм $\phi_n \colon K_n(G;k)^{\wedge}_{I_G} \to \varprojlim K_n(BG_i)$. Согласно предложению 1, естественное отображение $K_n(B_{et}G) \to \varprojlim K_n(BG_i)$ является изоморфизмом. Взяв композицию обратного отображения и ϕ_n, получим изоморфизм

$$K_n(G;k)^{\wedge}_{I_G} \to K_n(B_{et}G).$$

$\square$

Глава 2

Когомологические инварианты и кручение в группе Чжоу версального многообразия флагов

В данной главе рассматривается произвольное базовое поле F и полупростая расщепимая алгебраическая группа G над F. Основным результатом главы является теорема 2, связывающая когомологические инварианты степени 3 группы G и кручение в группе Чжоу коразмерности 2 версального многообразия флагов группы G.

Изложение организовано следующим образом.

Зафиксируем максимальный расщепимый тор T в G и содержащую его борелевскую подгруппу B. Обозначим через T^* группу характеров тора T и через $W = N_G(T)/T$ соответствующую группу Вейля. Будем обозначать через $\Lambda \supseteq T^*$ соответствующую решетку весов. Зафиксируем односвязную накрывающую группу $\widetilde{G} \to G$. Выберем в $\widetilde{G}$ максимальный расщепимый тор $\widetilde{T}$, накрывающий T и отождествим характеры $\widetilde{T}$ с Λ.

Все торсоры рассматриваются в этальной топологии.

2.1. Когомологические инварианты

Пусть G–алгебраическая группа, определенная над полем F. Для расширения полей E/F обозначим через $H^1(E,G)$ множество G-торсоров над $\operatorname{Spec} E$ в этальной топологии. Пусть E^{sep} обозначает сепарабельное замыкание E. Известно, что $H^1(E,G)$ совпадает с когомологиями группы Галуа со значениями в $G(E^{sep}) : H^1(E,G) = H^1(Gal(E), G(E^{sep}))$.

2.1.1. Определение когомологических инвариантов

Мы будем следовать изложению в Главе 2 [24]. Рассмотрим категорию $\mathbf{Fields}_F$ всех расширений полей F. Рассмотрим функтор

$$H^1(-,G)\colon \mathbf{Fields}_F \to \mathbf{Sets}, \mathbf{E} \mapsto \mathbf{H^1(E,G)}$$

Пусть $H\colon \mathbf{Fields}_F \to \mathbf{Ab}$ – некоторый функтор в категорию абелевых групп.

Определение 5. Инвариантом G со значениями в H называется естественное преобразование функторов $a\colon H^1(-,G) \to H$.

Таким образом, инвариант a задается набором отображений $a_E\colon H^1(E,G) \to H(E)$, согласованных с расширениями полей. Обозначим через $\mathrm{Inv}(G,H)$ множество H-инвариантов группы G. Тогда $\mathrm{Inv}(G,H)$ является абелевой группой. Будем называть инвариант a нормализованным, если $a_F(e) = 0$, где $e \in H^1(F,G)$–тривиальный торсор. Нормализованные инварианты образуют подгруппу $\mathrm{Inv}(G,H)_{norm}$ в $\mathrm{Inv}(G,H)$.

2.1.2. Когомологические инварианты степени d.

Пусть $E \in \mathbf{Frields}_F$. Обозначим через μ_n модуль Галуа корней n-степени из единицы в $E^{sep\times}$.

Для простого числа p, не равного характеристике поля F, определим модули Галуа $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(d) = (\mu_{p^m})^{\otimes d}$ и $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(d) = \varinjlim_m \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(d)$.

Для $p = char(F)$ определим

$$H^d(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(d-1)) = H^2(E, K_{d-1}(E^{sep}))\{p\},$$

где $K_d(L)$ обозначает K-теорию Милнора: фактор группу $(L^\times)^{\otimes d}$ по подгруппе, порожденной тензорами $x_1 \otimes \ldots \otimes x_d$, где $x_i + x_j = 1$ для некоторых i, j.

Определим $H^d(E, d-1) = \oplus_p H^d(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(d-1))$, где сумма берется по всем простым числам p. Тогда сопоставление $E \mapsto H^d(E, d-1)$ задает функтор на $\mathbf{Fields_F}$. Инварианты со значениями в этом функторе будем называть инвариантами степени d и обозначать соответствующую группу через $\mathrm{Inv}^d(G, d-1)$.

2.1.3. Инварианты степени 1,2

Согласно [35, Предложение 31.15] для связной группы G имеем $\mathrm{Inv}^1(G, 0)_{norm} = 0$. Инварианты степени 2 допускают следующее описание: Пусть $\widetilde{G} \to G$ – односвязная накрывающая группы G, и C – ядро данного накрытия. Для каждого характера $\chi \colon C \to \mathbb{G}_m$ определим G_1 как копредел $G_1 = G_m \times^C \widetilde{G}$. Тогда получим морфизм коротких точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & \widetilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Тогда связывающий гомоморфизм в когомологиях нижней последовательности $H^1(L, G) \to H^2(L, \mathbb{G}_m)$ задает когомологический инвариант β_χ со значениями в $H^2(-, \mathbb{G}_m) = Br(-) = H^2(-, 1)$, так как группа Брауэра состоит из элементов кручения. Согласно [20, Теорема 2.4], сопоставление $\chi \mapsto \beta_\chi$ задает изоморфизм $C^* \to \mathrm{Inv}^2(G, 1)_{norm}$.

2.1.4. Разложимые и полуразложимые инварианты

Определение 6. Назовем нормализованный инвариант степени 3 a разложимым, если существует набор $b_i \in \mathrm{Inv}^2(G, 1)_{norm}$ и $a_i \in F^\times$, такой что для любого расширения полей L и $Y \in H^1(L, G)$

$$a_L(Y) = \sum_i (a_i) \cup b_i(Y)$$

где (a_i) обозначает соответствующий класс в $H^1(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$. Группу, образованную всеми разложимыми инвариантами будем обозначать через $\mathrm{Inv}^3(G, 2)_{dec}$

Другим важным понятием является понятие полуразложимого инварианта:

Определение 7. Назовем нормализованный инвариант степени 3 a полуразложимым, если существует набор $b_i \in \mathrm{Inv}^2(G, 1)_{norm}$, и для каждого расширения L и торсора $Y \in H^1(L, G)$ найдутся элементы $\phi_i(Y) \in L^\times$, такие что

$$a_L(Y) = \sum_i (\phi_i(Y)) \cup b_i(Y),$$

где $(\phi_i(Y))$ обозначает соответствующий класс в $H^1(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$. Группу, образованную всеми полуразложимыми инвариантами будем обозначать через $\mathrm{Inv}^3(G, 2)_{sdec}$

Заметим, что есть цепочка включений

$$\mathrm{Inv}^3(G, 2)_{dec} \subseteq \mathrm{Inv}^3(G, 2)_{sdec} \subseteq \mathrm{Inv}^3(G, 2)_{norm}.$$

Определим группу неразложимых инвариантов как фактор-группу

$$\mathrm{Inv}^3(G, 2)_{ind} = \mathrm{Inv}^3(G, 2)_{norm} / \mathrm{Inv}^3(G, 2)_{dec}.$$

2.2. Классифицирующее многообразие и версальный торсор

Будем рассматривать представление V группы G вместе с открытой подсхемой $U \subseteq V$, такой что действие G на U свободно, $\mathrm{codim}(V \setminus U) > 2$, и фактор U/G представим элементом $\mathbf{Sm}_k$. Такой набор U, V существует согласно конструкции Тотаро (см. раздел 1.1). Многообразие U/G классифицирует G-торсоры в следующем смысле:

Лемма 15. *Для любого расширения полей L/F, где L–бесконечное поле и G-торсора $E \to \operatorname{Spec} L$ существует точка $x\colon \operatorname{Spec} L \to U/G$, такая что обратный образ торсора $U \to U/G$ изоморфен торсору E: $x^*U \cong E$.*

Доказательство. Фактор $(U \times E)/G$ является открытой подсхемой в $(V \times E)/G$, при этом $(V \times E)/G \to E/G = \operatorname{Spec} L$ является векторным расслоением. Тогда в $(U \times E)/G$ найдется L-точка. Тогда $x\colon \operatorname{Spec} L \to (U \times E)/G \xrightarrow{p} U/G$.. Тогда $p^*(U) = U \times E$, следовательно $x^*U = E$. $\square$

Обозначим через K поле рациональных функций $F(U/G)$ и через U^{gen} слой над общей точкой: $U^{gen} = U \times_{U/G} \operatorname{Spec} K$. Будем называть торсор $U^{gen} \to \operatorname{Spec} K$ версальным торсором, а многообразие $X^{gen} = U^{gen}/B$ версальным многообразием флагов.

2.3. Абстрактный класс Черна

Для описания когомологических инвариантов понадобятся явное описание классов Черна $c_i\colon K_0(T; \operatorname{Spec} F) \to \mathrm{CH}(U/T)$.

Пусть $\mathrm{Sym}^\bullet(T^*)$ обозначает симметрическую степень группы T^*. Рассмотрим гомоморфизм групп (см. [§3c][23]).

$$c_\bullet\colon \mathbb{Z}[T^*] \to \mathrm{Sym}^\bullet(T^*)[[t]]^\times,$$

заданную по правилу $c_\bullet(e^a) = 1 + at, a \in T^*$. Определим i-класс Черна с помощью формулы $c_\bullet(x) = \sum_i c_i(x)t^i$. В дальнейшем будем использовать второй класс Черна c_2. Исходя из определения, легко видеть, что $c_2(\sum_i e^{a^i}) = \sum_{i<j} a_i a_j$ и $c_2(x+y) = c_2(x) + c_1(x)c_1(y) + c_2(y)$. При этом все c_i естественным образом W-эквивариантны. Аналогичная конструкция задает класс абстрактный класс Черна $c_\bullet\colon \mathbb{Z}[\Lambda] \to \mathrm{Sym}^\bullet(\Lambda)[[t]]^\times$, естественным образом согласованный с вложениями $\mathbb{Z}[T^*] \subseteq \mathbb{Z}[\Lambda]$ и $\mathrm{Sym}(T^*) \subseteq \mathrm{Sym}(\Lambda)$.

Будем обозначать через $\widetilde{I}$ идеал аугментации в $\mathbb{Z}[\Lambda]$, а через $\widetilde{I}_W$ – идеал, порожденный W-инвариантными элементами $\widetilde{I}$.

2.4. Основной результат

Основным результатом главы является следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть G–полупростая расщепимая группа над полем F. Тогда существует короткая точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec} \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{ind} \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \to 0.$$

Фактор-группа $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$ может быть описана в терминах абстрактного класса Черна:

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec} \cong c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])/c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)$$

Если G–простая группа, то $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec} = \operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$.

При этом для группы $\mathbf{SO}_4$ имеем $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec} \neq \operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec}$.

2.4.1. Характеристические отображения и группы Чжоу

Рассмотрим характеристическое отображение, индуцированное отображением обратного образа в T-эквивариантной K-теории и в T-эквивариантных группах Чжоу([36]):

$$c_i^{\mathrm{CH}}\colon\ \operatorname{Sym}^i(T^*) = \mathrm{CH}^i_T(\operatorname{Spec} F) \to \mathrm{CH}_T(U) \cong \mathrm{CH}(U/T).$$

$$c^{K_0}\colon \mathbb{Z}[T^*] = K_0(T; \operatorname{Spec} F) \to K_0(T; U) \cong K_0(U/T) \cong K_0(U/B).$$

Тогда c_i^{CH} является изоморфизмом при $0 \leqslant i \leqslant 2$. Заметим, что c^{K_0} сюръективно, так как U–открытая подсхема в аффинном пространстве. Пусть $\tau^i(X)$

обозначает i-компоненту в топологической фильтрации на $K_0(X)$, а $\tau^{i/i+1}$ обозначает последовательный фактор. Пусть I обозначает идеал аугментации в $\mathbb{Z}[T^*]$.

Лемма 16. *Отображение c^{K_0} индуцирует изоморфизм*

$$I^i/I^{i+1} \xrightarrow{\cong} \tau^{i/i+1}(U/B) \text{ *для* } 0 \leqslant i \leqslant 2$$

При этом, его сужение $c^{K_0} \cong I^2 \to \tau^2(U/B)$ –сюрьективно.

Доказательство. Согласно [37, Ex. 15.3.6] класс Черна индуцирует изоморфизм $c_i \colon \tau^{i/i+1}(X) \cong \mathrm{CH}^i(X)$ при $0 \leqslant i \leqslant 2$. Так как класс Черна коммутирует с гомоморфизмами обратного образа и $Sym^i(T^*) \cong I^i/I^{i+1}$, утверждение следует из факта, что c_i^{CH} является изоморфизмом при $i \leqslant 2$. Для второго утверждения заметим, для любого $x \in I^2$ найдется $y \in I]$, при этом $y \in I^2$, так как $I/I^2 \cong \tau^{1/2}(U/B)$. □

Рассмотрим вложение $\imath \colon X^{gen} \to U/B$. В силу того, что $\imath$ является пределом открытых вложений, отображение обратного образа в CH сюръективно:

$$\imath^{\mathrm{CH}} \colon \mathrm{CH}(U/B) \to \mathrm{CH}(X^{gen}).$$

Аналогично, сюръективно отображение обратного образа в K-теории:

$$\imath^{K_0} \colon \tau^i(U/B) \to \tau^i(X^{gen}).$$

Пусть L–поле расщепления торсора U^{gen}. В соответствии с [38, Теорема 4.5] композиции

$$\mathrm{Sym}\, T^* \xrightarrow{c^{\mathrm{CH}}} \mathrm{CH}(U/B) \xrightarrow{\imath^{\mathrm{CH}}} \mathrm{CH}(X^{gen}) \to \mathrm{CH}(X^{gen}_L) = \mathrm{CH}(G/B_L)$$

$$\mathbb{Z}[T^*] \xrightarrow{c^{K_0}} K_0(U/B) \xrightarrow{\imath^{K_0}} K_0(X^{gen}) \to K_0(X^{gen}_L) = K_0(G/B_L)$$

дают классические характеристические отображения для групп Чжоу и K-теории.

Лемма 17. *Ядро композиции* $I^2 \xrightarrow{c^{K_0}} \tau^2(U/B) \xrightarrow{\imath^{K_0}} \tau^2(X^{gen})$ *совпадает с* $\widetilde{I}_W \cap I^2$.

Доказательство. Согласно результатам [22], естественное отображение $\tau^2(X^{gen}) \to \tau^2(X_L^{gen})$ инъективно, тогда ядро $\imath^{K_0} \circ c^{K_0}$ совпадает с ядром характеристического отображения $I^2 \to \tau^2(G/B_L) = \tau^2(G/B)$. Рассматривая вложение $\mathbb{Z}[T^*] \subseteq \mathbb{Z}[\Lambda]$, видим что ядро характеристического отображения $I^2 \to \tau^2(G/B_L) = \tau^2(G/B)$ совпадает с пересечением I^2 с ядром отображения $\widetilde{c}\colon \mathbb{Z}[\Lambda] \to K_0(\widetilde{G}/\widetilde{B}) = K_0(G/B)$, где $\widetilde{B}$–борелевская подгруппа в $\widetilde{G}$. По теореме Стейнберга [39], ядро отображения $\widetilde{c}$ совпадает с $\widetilde{I}_W$. $\square$

Рассмотрим второй класс Черна $c_2\colon \tau^2(U/B) \to \mathrm{CH}^2(U/B)$

Лемма 18. *Второй класс Черна отображает ядро* $\imath^{K_0}$ *на ядро* $\imath^{\mathrm{CH}}$: $c_2(\ker \imath^{K_0}) = \ker \imath^{\mathrm{CH}}$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\tau^3(U/B) \arrow[r] \arrow[d, "\imath^{K_0}"] & \tau^2(U/B) \arrow[r, "c_2"] \arrow[d, "\imath^{K_0}"] & \mathrm{CH}^2(U/B) \arrow[r] \arrow[d, "\imath^{\mathrm{CH}}"] & 0 \\
\tau^3(X^{gen}) \arrow[r] & \tau^2(X^{gen}) \arrow[r, "c_2"] & \mathrm{CH}^2(X^{gen}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Вертикальные отображения сюръективны, а горизонтальные строки диаграммы точны([37, Ex. 15.3.6]). Тогда утверждение леммы следует из диаграммного поиска. $\square$

Следствие 3. $\ker \imath^{\mathrm{CH}} = c_2(\widetilde{I}_W \cap I^2)$

Заметим, что композиция $c_2\colon I^2 \to \tau^2(U/B) \to \mathrm{CH}^2(U/B) = \mathrm{Sym}^2(T^*)$ совпадает с абстрактным вторым классом Черна, определенным в разделе 2.3.

Следуя [23], обозначим

$$\mathrm{Dec}(G) = c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W)$$

и положим

$$\mathrm{SDec}(G) \;=\; c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*]).$$

Так как $\Lambda^W = 0$, получим $\widetilde{I}_W \subseteq \widetilde{I}^2$. Тогда для любого $x \in \widetilde{I}_W$ найдется $x' \in \mathbb{Z}[\Lambda]^W$, такое что $x \equiv x' \mod \widetilde{I}^3$, откуда $c_2(x) = c_2(x')$. Таким образом, есть вложения

$$\mathrm{Dec}(G) \subseteq \mathrm{SDec}(G) \subseteq \mathrm{Sym}^2(T^*)^W. \tag{2.1}$$

Лемма 19. $\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \cong \mathrm{Sym}^2(T^*)^W / \mathrm{SDec}(G)$.

Доказательство. Согласно 3 достаточно доказать, что $(\mathrm{Sym}^2(T^*)/\mathrm{SDec}(G))_{tors} = \mathrm{Sym}^2(T^*)^W/\mathrm{SDec}(G)$. Пусть $x \in \mathrm{Sym}^2(T^*)$, такой что $nx \in \mathrm{SDec}(G)$, тогда согласно 2.1 $nx \in \mathrm{Sym}^2(T^*)^W$. Таким образом для любого $w \in W$ имеем $n(wx - x)$. Так как $\mathrm{Sym}^2(T^*)$ не имеет кручения, $x \in \mathrm{Sym}^2(T^*)^W$. В обратную сторону, пусть $x \in \mathrm{Sym}^2(T^*)^W$. Так как $c_2\colon I^2 \to \mathrm{Sym}^2(T^*)$ сюръективно согласно 16, у x есть прообраз $y \in I^2$. Рассмотрим $y' = \sum_{w\in W} w \cdot y \in \mathbb{Z}[T^*]^W$. Тогда $|W|x = c_2(y) \in \mathrm{SDec}(G)$. □

2.4.2. Когомологические инварианты в терминах классифицирующего многообразия

Для гладкой F-схемы X рассмотрим пучок $\mathcal{H}^3(2)$ в топологии Зарисского, ассоциированный с предпучком $W \mapsto H^3_{et}(W, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Теорема Блоха-Огуса-Габбера ([40], [41]) позволяет отождествить глобальные сечения $H^0_{Zar}(X, \mathcal{H}^3(2))$ с ядром отображения вычета

$$H^3(F(X), 2) \overset{\oplus\partial_x}{\to} \oplus_{x\in X^{(1)}} H^4_x(X, 2)$$

Рассмотрим отображение вычисления на версальном торсоре:

$$\Theta\colon Inv^3(G, 2) \to H^3(K, 2),\ \Theta\colon a \mapsto a_K(U^{gen}).$$

Согласно [20, Теорема A], отображение Θ индуцирует вложение $Inv^3(G, 2) \to H^0_{Zar}(U/G, \mathcal{H}^3(2))$

Лемма 20. *Для любого* $a \in \operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm}$ *имеем* $\Theta(a) \in \ker(H^3(K,2) \to H^3(K(X^{gen}),2))$.

Доказательство. Рассмотрим композиции $q\colon \operatorname{Spec} K(U^{gen}) \to U^{gen} \to U/G$. Заметим, что гомоморфизм обратного образа представляется в виде композиции

$$q^*\colon H^0_{Zar}(U/G, \mathcal{H}^3(2)) \to H^3(K(X^{gen}),2) \to H^3(K(U^{gen}),2).$$

Так как $U^{gen} \to X^{gen}$ – B-торсор, следовательно $K(U^{gen})$ – чисто трансцендентное расширение $K(X^{gen})$, таким образом последнее отображение в композиции инъективно. Так как торсор U^{gen} тривиализуется над $K(U^{gen})$, получим, что $q^*(a(U^{gen})) = a(U^{gen} \times_K K(U^{gen})) = 0$ для любого нормализованного инварианта a. Тогда $a(U^{gen}) \in \ker(H^3(K,2) \to H^3(K(X^{gen}),2))$. □

Лемма 21. *Пусть* $Y \to \operatorname{Spec} L$ – G*-торсор и* $X = Y/B$. *Пусть* L^{sep} *обозначает сепарабельное замыкание* L, Γ_L – *группу Галуа, и* $X^{sep} = X \times_L L^{sep}$. *Тогда действие* Γ_L *на* $\operatorname{Pic} X^{sep}$ *тривиально.*

Доказательство. Пусть $\chi\colon T \to \mathbb{G}_m$ – характер максимального расщепимого тора T. Характер χ задает действие T на $Y \times \mathbb{A}^1$, откуда получим расслоение $V(\chi) = Y \times \mathbb{A}^1/T \to Y/T$. Рассмотрим отображение $T^* \to \operatorname{Pic}(Y/T)$, сопоставляющее χ класс расслоения $V(\chi)$. Композиция с расширением скаляров $T^* \to \operatorname{Pic}(Y/T) \to \operatorname{Pic}(Y^{sep}/T) = \operatorname{Pic}(G/T)$ совпадает с сужением отображения $\Lambda \to \operatorname{Pic}(\widetilde{G}/\widetilde{T}) = \operatorname{Pic}(G/T)$, которое является изоморфизмом([42, Предложение 2.2]). Так как действие Γ на образе $\operatorname{Pic}(Y/T)$ тривиально, получим что действие Γ_L на Λ тривиально на T^*. Тогда для любого $\sigma \in \Gamma_L$ и $x \in \Lambda$ имеем $nx \in T^*$ для некоторого n, следовательно $0 = nx - \sigma \cdot nx = n(x - \sigma \cdot x)$, откуда $x = \sigma \cdot x$, так как в Λ нет кручения. Таким образом, действие Γ_L на $\Lambda = \operatorname{Pic}(Y^{sep}/T)$– тривиально. Так как каноническое отображение $\mathrm{Pic}(X^{sep}) \to \mathrm{Pic}(Y^{sep}/T)$ – изоморфизм, получим, что действие Γ_L на $\mathrm{Pic}(X^{sep})$ тривиально.

$\square$

Для G-торсора Y над L существует точная последовательность, изучавшаяся в [12], [11] и [24, II, Теорема 8.9]:

$$A^1(Y^{sep}/B, K_2)^{\Gamma} \xrightarrow{\rho} \ker(H^3(L,2) \to H^3(L(Y/B),2)) \xrightarrow{\delta_Y} \mathrm{CH}^2(Y/B).$$

Умножение в K_* индуцирует изоморфизм $L^{sep\times} \otimes \mathrm{CH}^1(Y^{sep}/B) \to A^1(Y^{sep}/B, K_2)$. Тогда по лемме 21 получим точную последовательность

$$L^{\times} \otimes \Lambda \xrightarrow{\rho_Y} \ker(H^3(L,2) \to H^3(L(Y/B),2)) \xrightarrow{\delta_Y} \mathrm{CH}^2(Y/B). \qquad (2.2)$$

Согласно [12] отображение ρ_Y действует следующим образом:

$$\rho_Y(\phi \otimes \lambda) = (\phi) \cup \beta_{\bar{\lambda}}(Y), \text{ где } \phi \in L^{\times}, \lambda \in \Lambda \text{ и}$$

$\bar{\lambda}$ обозначает образ λ в $\Lambda/T^* = C^*$.

Согласно определению, инвариант a полуразложим, тогда и только тогда, когда $a(Y) \in \mathrm{im}(\rho_Y) = \ker(\delta_Y)$ для каждого торсора Y.

Лемма 22. *Инвариант a полуразложим, тогда и только тогда, когда $a(U^{gen}) \in \ker(\delta_{U^{gen}})$.*

Доказательство. Если a полуразложим, $a(U^{gen}) \in \mathrm{im}(\rho_{U^{gen}}) = \ker(\delta_{U^{gen}})$. В обратную сторону, пусть a – инвариант степени 3, и $\delta_{U^{gen}}(a(U^{gen})) = 0$. Пусть $Y \to \mathrm{Spec}\, L$ – G-торсор. Покажем, что $\delta_Y(a(Y)) = 0$. Можем считать, что поле L бесконечно (заменяя на $L(t)$ в противном случае). По лемме 15 найдется L-точка $y \in U/G(L)$, такая что Y изоморфно слою $U \to U/G$ над y. Обозначим через R пополнение локального кольца $\mathcal{O}_{U/G,y}$, и пусть $\hat{K}$ обозначает поле частных R. По теореме Гротендика, торсор U_R над полным кольцом R

изоморфен обратному образу Y вдоль проекции $\operatorname{Spec} R \to y$. Тогда торсоры $Y_{\hat{K}}$ и $U^{gen}_{\hat{K}}$ над $\hat{K}$ изоморфны. Согласно построению морфизма δ в [12] имеем

$$\delta_Y(a(Y))_{\hat{K}} = \delta_{Y_{\hat{K}}}(a(Y_{\hat{K}})) = \delta_{U^{gen}_{\hat{K}}}(a(U^{gen}_{\hat{K}})) = \delta_{U^{gen}}(a(U^{gen}))_{\hat{K}} = 0.$$

Так как отображение $\mathrm{CH}^2(Y/B) \to \mathrm{CH}^2((Y/B)_{\hat{K}})$ инъективно, получим, что $\delta_Y(a(Y)) = 0$. Тогда a – полуразложимый инвариант. □

Теперь мы можем преступить к доказательству первой части теоремы 2

Теорема. *Гомоморфизм $\delta_{U^{gen}}$ индуцирует короткую точную последовательность*

$$0 \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec} \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{ind} \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \to 0,$$

а также существует изоморфизм

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec} \cong c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])/c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W).$$

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму. Строки – точные последовательности (см [21, Теорема 1.1]), а вертикальные отображения – гомоморфизмы обратного образа:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^2(U/G) \arrow[r] \arrow[d] & H^4_{et}(U/G,\mathbb{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_{Zar}(U/G,\mathcal{H}^3(2)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^2(U/B) \arrow[r] \arrow[d] & H^4_{et}(U/B,\mathbb{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_{Zar}(U/B,\mathcal{H}^3(2)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^2(X^{gen}) \arrow[r] & H^4_{et}(X^{gen},\mathbb{Z}(2)) \arrow[r] & H^0_{Zar}(X^{gen},\mathcal{H}^3(2)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Так как $F(U/B) = K(X^{gen})$, лемма 20 влечет, что композиция

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm} \to H^0_{Zar}(U/G,\mathcal{H}^3(2)) \to H^0_{Zar}(U/B,\mathcal{H}^3(2))$$

равна нулю. Тогда диаграммный поиск дает гомоморфизм

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm} \to \mathrm{CH}^2(U/B)/\mathrm{CH}^2(U/G).$$

Отображение $X^{gen} \to U/B \to U/G$ раскладывается в композицию $X^{gen} \to \operatorname{Spec} K \to U/G$, следовательно композиция гомоморфизмов обратного образа $\mathrm{CH}^2(U/G) \to \mathrm{CH}^2(U/B) \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})$ равна нулю. Это дает гомоморфизм $g\colon \operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm} \to \mathrm{CH}^2(U/B)/\,\mathrm{CH}^2(U/G) \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})$, который согласно теореме Б. Кана ([24, §8, с. 124-125]) пропускается через отображение $\delta_{U^{gen}}$. Согласно [23, 3.9] отображение g может быть включено в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \\
\operatorname{Sym}^2(T^*)^W/\operatorname{Dec}(G) \arrow[r] & \operatorname{Sym}^2(T^*)^W/\operatorname{SDec}(G) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

По лемме 19 есть короткая точная последовательность

$$0 \to \operatorname{SDec}(G)/\operatorname{Dec}(G) \to \operatorname{Sym}^2(T^*)^W/\operatorname{Dec}(G) \to \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \to 0.$$

Лемма 22 и последовательность 2.2 влекут точность последовательности

$$0 \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec} \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm} \xrightarrow{g} \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}.$$

В силу [23, Замечание 3.10] отображение $Inv^3(G,2)_{norm} \to \operatorname{Sym}^2(T^*)^W/\operatorname{Dec}(G)$ сюръективно. Таким образом получим короткую точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec} \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm} \xrightarrow{g} \mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} \to 0$$

и изоморфизм

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{sdec}/\operatorname{Inv}^3(G,2) \cong \operatorname{SDec}(G)/\operatorname{Dec}(G) = c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*])/c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W).$$

□

2.5. Полуразложимые инварианты простых групп

Данный раздел посвящен доказательству того, что полуразложимые и разложимые инварианты совпадают для всех простых расщепимых групп.

Согласно теореме 2 достаточно проверить, что

$$\mathrm{Dec}(G) = c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W) = c_2(\widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*]) = \mathrm{SDec}(G) \text{ в } Sym^2(T^*)^W.$$

Отметим, что $\mathrm{Sym}^2(\Lambda)^W = \mathbb{Z}q$, где q–некоторая квадратичная форма(§1B[43]) и

$$\mathrm{Dec}(G) \subseteq \mathrm{SDec}(G) \subseteq \mathrm{SDec}(\widetilde{G}) = \mathrm{Dec}(\widetilde{G}) \tag{2.3}$$

2.5.1. Присоединенные группы типа $A_n (n \geqslant 1)$, $B_n (n \geqslant 2)$, $C_n (n \geqslant 3, 4 \nmid n)$, $D_n (n \geqslant 5, 4 \nmid n)$, E_6, E_7 и специальные ортогональные группы типа $D_n (n \geqslant 4)$.

Для классических присоединенных все нормализованные инварианты степени 3 разложимы: $\mathrm{Inv}^3(G, 2)_{norm} = \mathrm{Inv}^3(G, 2)_{dec}$ согласно [23, §4b], таким образом $\mathrm{Inv}^3(G, 2)_{dec} = \mathrm{Inv}^3(G, 2)_{sdec}$. Для исключительных групп, согласно [24, с.135] и [23, §4b] имеем $\mathrm{Dec}(G) = \mathrm{Dec}(\widetilde{G}) = 6\mathbb{Z}q$ для E_6 и $\mathrm{Dec}(G) = \mathrm{Dec}(\widetilde{G}) = 12\mathbb{Z}q$ для E_7, откуда $\mathrm{Dec}(G) = \mathrm{SDec}(G)$ согласно включениям 2.3. Для специальной ортогональной группы $G = \mathbf{SO}_{2n}$ согласно [24, с.145§15] имеем $\mathrm{Dec}(\mathbf{SO}_{2n}) = \mathrm{Dec}(\mathbf{Spin}_{2n}) = 2\mathbb{Z}q$, откуда $\mathrm{Dec}(G) = \mathrm{SDec}(G)$.

2.5.2. Неприсоединенные группы типа $A_{n-1} (n \geqslant 4)$.

Пусть p–простое число и $G = \mathbf{SL}_{\mathbf{p^s}}/\mu_{\mathbf{p^r}}$ для некоторых $s \geqslant r > 0$. Если p нечетно, положим $k = \min(r, s - r)$. Если $p = 2$ предположим что $s \geqslant r + 1$ и положим $k = \min(r, s - r - 1)$. Согласно [44, §4] группа $\mathrm{Inv}^3(G, 2)_{ind}$ циклическая порядка p^k. Для многообразия Севери-Брауэра X общей центральной простой алгебры A^{gen}, согласно [10, Example 4.15] группа $\mathrm{CH}^2(X)_{tors}$ также является циклической порядка p^k. Естественное отображение $X^{gen} \to X$ получается как последовательность проективизированных расслоений, откуда $\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors} = \mathrm{CH}^2(X)_{tors}$ – циклическая группа порядка p^k. Тогда согласно 2 получим $\mathrm{Dec}(G) = \mathrm{SDec}(G)$.

В общем случае, пусть $G = \mathbf{SL_n}/\mu_\mathbf{m}$, где $m \mid n$. Пусть p^r и p^s – наибольшие степени простого p, делящие n и m соответственно. Рассмотрим гомоморфизм $H = \mathbf{SL_{p^s}}/\mu^{\mathbf{p^r}} \to \mathbf{G}$. Докажем, что этот изоморфизм индуцирует изоморфизм между p-примарными компонентами $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{ind}$ и $\operatorname{Inv}^3(H,2)_{ind}$. Пусть $H' = \mathbf{SL_n}/\mu_\mathbf{p^r}$. Согласно [44, Теорема 4.1], естественный гомоморфизм $\operatorname{Inv}^3(H',2)_{ind} \to \operatorname{Inv}^3(H,2)_{ind}$ является изоморфизмом. Таким образом, достаточно показать, что гомоморфизм обратного образа вдоль канонической сюръекции $H' \to G$ индуцирует изоморфизм между p-примарными компонентами $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{ind}$ и $\operatorname{Inv}^3(H',2)_{ind}$. Заметим, что ядро $H' \to G$ изоморфно μ_t, где $t = m/p^r$ взаимно просто с p. Пусть $\Lambda \subseteq \Lambda'$ – группы характеров максимальных торов G и H' соответственно. Фактор Λ'/Λ изоморфен $\mu_t^* = \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$.. Тогда ядро и коядро гомоморфизма

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{ind} = \operatorname{Sym}^2(\Lambda)^W/\operatorname{Dec}(\Lambda) \to \operatorname{Sym}^2(\Lambda')^W/\operatorname{Dec}(\Lambda') = \operatorname{Inv}^3(H',2)_{ind}$$

уничтожаются умножением на t^2. Так как t взаимно просто с p, гомоморфизм индуцирует изоморфизм между p-примарными частями.

Пусть X_H^{gen} обозначает версальное многообразие флагов для H. Так как согласно [10, Предложение 1.3] p-примарные компоненты $\operatorname{CH}(X^{gen})_{tors}$ и $\operatorname{CH}(X_H^{gen})_{tors}$ изоморфны, то исходя из точной последовательности теоремы 2 получим $\operatorname{Dec}(G) = \operatorname{SDec}(G)$.

2.5.3. Присоединенные группы типа $C_{4m} (m \geqslant 1)$

Согласно [23, §4b] имеем $\operatorname{Sym}^2(T^*)^W = \mathbb{Z}q$ и $\operatorname{Dec}(G) = c_2(\mathbb{Z}[T^*]^W) = 2\mathbb{Z}q$. Покажем, что для любого $x \in \widetilde{I}_W \cap \mathbb{Z}[T^*]$ выполнено $c_2(x) \in 2\mathbb{Z}q$.

Для веса $\chi \in \Lambda$ обозначим через $W(\chi)$ его W-орбиту и $\widehat{e^\chi} = \sum_{\lambda \in W(\chi)}(1 - e^{-\lambda})$. По определению, идеал $\widetilde{I}_W$ порожден элементами $\widehat{e^{\omega_i}}_{i=1\ldots 4m}$, где ω_i –

фундаментальные веса. Элемент x может быть записан в виде

$$x = \sum_{i=1}^{4m} n_i \widehat{e^{\omega_i}} + \delta_i \widehat{e^{\omega_i}}, \text{ где } n_i \in \mathbb{Z} \text{ и } \delta_i \in \widetilde{I}.$$

Аналогично [45, §3], рассмотрим гомоморфизм $f\colon \mathbb{Z}[\Lambda] \to \mathbb{Z}[\Lambda/T^*]$, индуцированный сюръекцией $\Lambda \to \Lambda/T^* = C^*$. Так как $C^* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то $\mathbb{Z}[\Lambda/T^*] = \mathbb{Z}[y]/(y^2 - 2y)$, где $y = f(e^{\omega_1} - 1)$. Заметим, что действие W на C^* тривиально. Так как $f(I) = 0$, то $f(x) = 0$. Так как $\omega_i \in T^*$ для четных i, $f(\widehat{e^{\omega_i}}) = y$ для нечетных i и $f(\delta_i) \in f(\widetilde{I}) = (y)$, получим

$$0 = f(x) = \sum_{i \text{ нечетно}} n_i d_i y + m_i d_i y^2 = \sum_{i \text{ нечетно}} (n_i + 2m_i) d_i y,$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$ и $d_i = \binom{4m}{i}$ – мощность орбиты $W(\omega_i)$. Тогда $\sum_{i \text{ нечетно}}(n_i + 2m_i)d_i = 0$. Разделив эту сумму на наибольший общий делитель d_i и взяв результат по модулю 2, получим, что коэффициент n_1 является четным.

Теперь вычислим $c_2(x)$. Рассмотрим решетку весов $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_{4m}$. Решетка корней задается как $T^* = \{\sum a_i e_i \mid \sum a_i \text{ четно}\}$ и

$$\omega_1 = e_1, \omega_2 = e_1 + e_2, \ldots \omega_{4m} = e_1 + \ldots + e_{4m}.$$

Согласно [43, §2] имеем $c_2(x) = \sum_{i=1}^{4m} n_i c_2(\widehat{e^{\omega_i}})$ и $c_2(\widehat{e^{\omega_i}}) = N(\widehat{e^{\omega_i}})q$, где

$$N(\sum a_j e^{\lambda_j}) = 1/2 \sum a_j \langle \lambda_j, \alpha^\vee \rangle^2 \text{ для фиксированного длинного корня } \alpha.$$

Возьмем $\alpha = 2e_{4m}$, тогда $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = (\lambda, e_{4m})$ и число

$$N(\widehat{e^{\omega_i}}) = 1/2 \sum_{\lambda \in W(\omega_i)} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle^2 = 1/2 \sum_{\lambda \in W(\omega_i)} (\lambda, e_{4m})^2 = 2^{i-1} \binom{4m-1}{i-1}$$

четно при $i > 1$. Так как n_1 четно, получим $c_2(x) \in 2\mathbb{Z}q$.

2.5.4. Полуспинорные группы типа $D_{4m} (m \geqslant 1)$ и присоединенные группы типа $D_{4m} (m > 1)$

Сначала разберем случай полуспинорной группы $G = \mathbf{HSpin}_{8m}$. Как и в случае типа C_n все четные фундаментальные веса лежат в T^* и все нечетные фундаментальные веса соответствуют образующей $\Lambda/T^* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Таким образом, отображение $f\colon \mathbb{Z}[\Lambda] \to \mathbb{Z}[\Lambda/T^*]$, примененнное к элементу $x = \sum_{i=1}^{4m} n_i\widehat{e^{\omega_i}} + \delta_i\widehat{e^{\omega_i}}$ дает то же условие $\sum_{i \text{ нечетно}}(n_i + 2m_i)d_i = 0$, где $m_i \in \mathbb{Z}, d_i = 2^i\binom{4m}{i}$ для $i \leqslant 4m-2$ и $d_{4m-1} = 2^{4m-1}$. Поделив на наибольший общий делитель d_i и взяв равенство по модулю 2, получим, что n_1 четно если $m > 1$ и $n_1 + n_3$ четно, если $m = 1$.

Вычислим $c_2(x)$. Возьмем длинный корень $\alpha = e_{4m-1} + e_{4m}$. Тогда $(\alpha,\alpha) = 2$ и $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle = (\lambda, e_{4m-1}) + (\lambda, e_{4m})$. Для $i \leqslant 4m-2$ имеем

$$N(\widehat{e^{\omega_i}}) = 1/2\sum_{\lambda\in W(\omega_i)}\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle^2 = \sum_{\lambda\in W(\omega_i)}((\lambda,e_{4m})^2 + (\lambda,e_{4m})(\lambda,e_{4m-1})).$$

Так как $\sum_{\lambda\in W(\omega_i)}(\lambda,e_{4m})(\lambda,e_{4m-1}) = 0$, получим

$$N(\widehat{e^{\omega_i}}) = \sum_{\lambda\in W(\omega_i)}(\lambda,e_{4m})^2 = 2^i\binom{4m-1}{i-1}$$

и $N(\widehat{e^{\omega_{4m-1}}}) = N(\widehat{e^{\omega_{4m}}}) = 2^{4m-3}$ (так как W действует перестановками и заменой знака).

В случае $m > 1$ получим $c_2(x) = \sum_i n_i N(\widehat{e^{\omega_i}})q \in 4\mathbb{Z}q$, где $4\mathbb{Z}q = \mathrm{Dec}(\mathbf{HSpin}_{8m})$ согласно [44, §5]. Если $m = 1$, то $N(\widehat{e^{\omega_8}}) = 2$, откуда $c_2(x) \in 2\mathbb{Z}q$, где $2\mathbb{Z}q = \mathrm{Dec}(\mathbf{HSpin}_8)$ согласно [44, §5].

Если $m > 1$, для присоединенной группы $G = \mathbf{PGO}_{8m}$ согласно [23, §4] и для случая полуспинорной группы получим

$$4\mathbb{Z}q = \mathrm{Dec}(\mathbf{PGO}_{8m}) \subseteq \mathrm{SDec}(\mathbf{PGO}_{8m}) \subseteq \mathrm{SDec}(\mathbf{HSpin}_{8m}) = 4\mathbb{Z}q.$$

2.5.5. Случай $G = \mathbf{PGO}_8$

В случае $G = \mathbf{PGO}_8$ необходимо проделать прямые вычисления

- $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \mathbb{Z}e_4 + \mathbb{Z}e$, где $e = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$,

- T^* состоит из линейных комбинаций $\sum a_i e_i$, таких что $\sum a_i$ четна.

- $S^2(\Lambda)^W = \mathbb{Z}q$, где $q = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)$ и

- Фундаментальные веса:

$$\omega_1 = e_1, \omega_2 = e_1 + e_2, \omega_3 = e - e_4, \omega_4 = e.$$

- Простые корни:

$$\lambda_1 = e_1 - e_2, \lambda_2 = e_2 - e_3, \lambda_3 = e_3 - e_4, \lambda_4 = e_3 + e_4.$$

- Группа Вейля $W = S_4 \leftthreetimes (C_2)^3$ состоит из перестановок e_i и замен знака в четном количестве переменных.

W-орбиты фундаментальных весов:

$W(\omega_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, -e_1, -e_2, -e_3, -e_4\}$

$W(\omega_2) = \{e_1 + e_2, \ldots, e_3 + e_4, -(e_1 + e_2), \ldots, -(e_3 + e_4), e_1 - e_2, \ldots e_3 - e_4, -e_1 + e_2, \ldots, -e_3 + e_4\}$

$W(\omega_3) = \{e - e_1, e - e_2, e - e_3, e - e_4\}$

$W(\omega_4) = \{e, -e, e - e_1 - e_2, e - e_1 - e_3, e - e_1 - e_4, e - e_2 - e_3, e - e_2 - e_4, e - e_3 - e_4\}$

С помощью вычисления базиса Гребнера получим базис пересечения $\widetilde{I}_W + \widetilde{I}^4 \cap \mathbb{Z}[T^*]$ где $r_i = e^{\lambda_i}$ и $s_i = e^{-\lambda_i}$

- $y = -34 - r_1 s_4 - 2r_2 s_4 + 6r_1 + 6s_1 + 10r_2 + 10s_2 + 4r_3 + 4s_3 + 4r_4 + 4s_4 - 2s_2 r_4 - s_1 r_4 - 2s_2 r_3 - s_1 r_3 + r_4 r_3 - 2s_3 r_2 - 2s_1 r_2 - s_3 r_1 - 2s_2 r_1 + s_3 s_4$;

- $38 + r_1 s_4 + 2r_2 s_4 + r_3 s_4 - 6r_1 - 6s_1 - 10r_2 - 10s_2 - 6r_3 - 6s_3 - 6r_4 - 6s_4 + s_3 r_4 + 2s_2 r_4 + s_1 r_4 + 2s_2 r_3 + s_1 r_3 + 2s_3 r_2 + 2s_1 r_2 + s_3 r_1 + 2s_2 r_1$;

- $-37 - r_1 s_4 - 2r_2 s_4 - 3r_3 s_4 + 6r_1 + 6s_1 + 10r_2 + 10s_2 + 7r_3 + 5s_3 + 4r_4 + 7s_4 - 2s_2 r_4 - s_1 r_4 - 2s_2 r_3 - r_3^2 - s_1 r_3 + r_4 r_3 - 2s_3 r_2 - 2s_1 r_2 - s_3 r_1 - 2s_2 r_1 + r_3^2 s_4$;

- $35 + r_1s_4 + 2r_2s_4 + r_3s_4 - 6r_1 - 6s_1 - 10r_2 - 10s_2 - 3r_3 - 5s_3 - 3r_4 - 6s_4 + 2s_2r_4 + s_1r_4 + 2s_2r_3 - r_3^2 + s_1r_3 - 3r_4r_3 + 2s_3r_2 + 2s_1r_2 + s_3r_1 + 2s_2r_1 + r_3^2r_4;$

- $-118 - 6r_2s_4 + 14r_1 + 9s_1 + 74r_2 + 46s_2 + 14r_3 + 9s_3 + 14r_4 + 9s_4 + r_4^2 - 10s_2r_4 - 10s_2r_3 + r_3^2 + r_4r_3 - 6s_3r_2 - 6s_1r_2 - 8r_4r_2 - 8r_3r_2 + r_1^2 - 8r_2^2 - 10s_2r_1 + r_4r_1 + r_3r_1 - 8r_2r_1 + 3r_1r_3r_4;$

- $-92 + 28r_1 + 18s_1 + 52r_2 + 26s_2 + 34r_3 + 12s_3 - 8r_4 + 2r_4^2 - 2s_2r_4 - 8s_2r_3 - r_3^2 - 9s_1r_3 + 2r_4r_3 - 6s_3r_2 - 12s_1r_2 + 2r_4r_2 - 16r_3r_2 - r_1^2 - 4r_2^2 - 3s_3r_1 - 8s_2r_1 + 2r_4r_1 - 4r_3r_1 - 10r_2r_1 + 6r_2r_3s_1;$

- $-92 + 34r_1 + 12s_1 + 46r_2 + 32s_2 + 34r_3 + 12s_3 - 8r_4 + 2r_4^2 - 2s_2r_4 - 14s_2r_3 - r_3^2 - 3s_1r_3 + 2r_4r_3 - 6s_3r_2 - 6s_1r_2 + 2r_4r_2 - 10r_3r_2 - r_1^2 - 4r_2^2 - 3s_3r_1 - 14s_2r_1 + 2r_4r_1 - 10r_3r_1 - 10r_2r_1 + 6r_1r_3s_2;$

- $-92 + 34r_1 + 12s_1 + 52r_2 + 26s_2 + 28r_3 + 18s_3 - 8r_4 + 2r_4^2 - 2s_2r_4 - 8s_2r_3 - r_3^2 - 3s_1r_3 + 2r_4r_3 - 12s_3r_2 - 6s_1r_2 + 2r_4r_2 - 10r_3r_2 - r_1^2 - 4r_2^2 - 9s_3r_1 - 8s_2r_1 + 2r_4r_1 - 4r_3r_1 - 16r_2r_1 + 6r_1r_2s_3;$

- $-92 - 9r_1s_4 - 12r_2s_4 + 34r_1 + 12s_1 + 52r_2 + 26s_2 - 8r_3 + 28r_4 + 18s_4 - r_4^2 - 8s_2r_4 - 3s_1r_4 - 2s_2r_3 + 2r_3^2 + 2r_4r_3 - 6s_1r_2 - 10r_4r_2 + 2r_3r_2 - r_1^2 - 4r_2^2 - 8s_2r_1 - 4r_4r_1 + 2r_3r_1 - 16r_2r_1 + 6r_1r_2s_4;$

- $-92 - 3r_1s_4 - 6r_2s_4 + 28r_1 + 18s_1 + 52r_2 + 26s_2 - 8r_3 + 34r_4 + 12s_4 - r_4^2 - 8s_2r_4 - 9s_1r_4 - 2s_2r_3 + 2r_3^2 + 2r_4r_3 - 12s_1r_2 - 16r_4r_2 + 2r_3r_2 - r_1^2 - 4r_2^2 - 8s_2r_1 - 4r_4r_1 + 2r_3r_1 - 10r_2r_1 + 6r_2r_4s_1;$

- $-92 - 3r_1s_4 - 6r_2s_4 + 34r_1 + 12s_1 + 46r_2 + 32s_2 - 8r_3 + 34r_4 + 12s_4 - r_4^2 - 14s_2r_4 - 3s_1r_4 - 2s_2r_3 + 2r_3^2 + 2r_4r_3 - 6s_1r_2 - 10r_4r_2 + 2r_3r_2 - r_1^2 - 4r_2^2 - 14s_2r_1 - 10r_4r_1 + 2r_3r_1 - 10r_2r_1 + 6r_1r_4s_2;$

- $80-22r_1-12s_1-40r_2-26s_2-22r_3-12s_3+8r_4-2r_4^2+2s_2r_4+8s_2r_3+r_3^2+3s_1r_3-2r_4r_3+6s_3r_2+6s_1r_2-2r_4r_2+4r_3r_2+r_1^2+4r_2^2+3s_3r_1+8s_2r_1-2r_4r_1-2r_3r_1+4r_2r_1+6r_1r_2r_3$;

- $80+3r_1s_4+6r_2s_4-22r_1-12s_1-40r_2-26s_2+8r_3-22r_4-12s_4+r_4^2+8s_2r_4+3s_1r_4+2s_2r_3-2r_3^2-2r_4r_3+6s_1r_2+4r_4r_2-2r_3r_2+r_1^2+4r_2^2+8s_2r_1-2r_4r_1-2r_3r_1+4r_2r_1+6r_1r_2r_4$;

- $-34-3r_1s_4+26r_1+18s_1-10r_2+4s_2-4r_3+6s_3-4r_4+6s_4+r_4^2+2s_2r_4-3s_1r_4+2s_2r_3+r_3^2-3s_1r_3-2r_4r_3-6s_1r_2+4r_4r_2+4r_3r_2-2r_1^2+4r_2^2-3s_3r_1-4s_2r_1-2r_4r_1-2r_3r_1-2r_2r_1+6r_2r_3r_4$;

- $22+3r_1s_4-26r_1-18s_1+16r_2+2s_2+16r_3-6s_3+16r_4-6s_4-r_4^2-8s_2r_4+3s_1r_4-8s_2r_3-r_3^2+3s_1r_3-10r_4r_3+6s_1r_2-10r_4r_2-10r_3r_2+2r_1^2-4r_2^2+3s_3r_1+4s_2r_1+2r_4r_1+2r_3r_1+2r_2r_1+6r_3r_4s_2$;

- $112-3r_1s_4+6r_2s_4-3r_3s_4-8r_1-9s_1-74r_2-46s_2-8r_3-9s_3-11r_4-6s_4-r_4^2+10s_2r_4+10s_2r_3-r_3^2-4r_4r_3+6s_3r_2+6s_1r_2+8r_4r_2+8r_3r_2-r_1^2+8r_2^2+10s_2r_1-4r_4r_1-7r_3r_1+8r_2r_1+3r_1r_3s_4$;

- $112+6r_2s_4-11r_1-6s_1-74r_2-46s_2-8r_3-9s_3-8r_4-9s_4-r_4^2+10s_2r_4-3s_1r_4+10s_2r_3-r_3^2-3s_1r_3-7r_4r_3+6s_3r_2+6s_1r_2+8r_4r_2+8r_3r_2-r_1^2+8r_2^2+10s_2r_1-4r_4r_1-4r_3r_1+8r_2r_1+3r_3r_4s_1$;

- $22+3r_1s_4-6r_2s_4-6r_3s_4-26r_1-18s_1+22r_2-4s_2+16r_3-6s_3+10r_4-r_4^2-2s_2r_4+3s_1r_4-2s_2r_3-r_3^2+3s_1r_3-4r_4r_3+6s_1r_2-10r_4r_2-16r_3r_2+2r_1^2-4r_2^2+3s_3r_1+4s_2r_1+2r_4r_1+2r_3r_1+2r_2r_1+6r_2r_3s_4$;

Прямые вычисления показывают, что $c_2(y)=-2(e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2)=-4q$. Также для каждого элемента x из списка имеем, что один из элементов $x-y, x+y, x-2y, x+2y$ лежит в $\widetilde{I}^3$. Таким образом, для каждого образующего x имеем $c_2(x)\in 4\mathbb{Z}q$.

2.6. Пример полуразложимого инварианта, не являющегося разложимым

В случае когда группа G не является простой, группы разложимых и полуразложимых инвариантов могут различаться. Следующий пример был предложен В. Черноусовым. Пусть $G = \mathbf{SO}_4$. Пусть q–квадратичная форма размерности 4 с дискриминантом 1. Рассмотрим инвариант b_1 (см. [24, I,§20]), определенный следующим образом. Для квадратичной формы $q = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle$ с дискриминантом 1 над полем L

$$b_1(q) = (\alpha_1) \ldots (\alpha_{n-1}) \in H^{n-1}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Согласно [24, I, Предложение 20.1], b_1 корректно определен. Для формы Пфистера $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ сопоставление

$$e_n \colon \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle \to (a_1) \ldots (a_n) \in H^n(-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

задает инвариант степени n.

Пусть q представляет элемент α. Тогда $q_2 = \alpha q$ является формой Пфистера. При этом форма q_2 не зависит от выбора α согласно лемме [24, 22.2]. Таким образом, сопоставление $q \mapsto q_2 \to e_2(q_2)$ задает инвариант степени 2.

Рассмотрим 3-форму Пфистера $q_3 = \langle\langle \alpha \rangle\rangle q_2$ Согласно [24, I, Пример 20.3] $b_1(q) = e_3(q_3) = (\alpha) e_2(q_2)$. Таким образом, инвариант b_1 является полуразложимым. (и нетривиальным, согласно [24, §20]).

При этом легко видеть, что он не является разложимым, например в случае, когда базовое поле F алгебраически замкнуто(в этом случае $H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, следовательно, $\mathrm{Inv}^3(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{dec} = 0$.)

2.7. Некоторые приложения

2.7.1. Кручение в группе Чжоу

Для простых групп G основной результат показывает, что кручение в группе Чжоу коразмерности 2 версального многообразия флагов совпадает с группой неразложимых инвариантов степени 3, вычисленных М. Ростом в случае односвязной группы G(см.[24]) и А. Меркурьевым в [23] в остальных случаях.

G :	$\mathrm{CH}^2(X^{gen})_{tors}$:
A_n, C_n simply-connected	0
$B_n, n \geqslant 3, D_n, n \geqslant 4$ simply-connected	$\mathbb{Z}/2$
E_6 simply-connected	$\mathbb{Z}/6$
E_7 simply-connected	$\mathbb{Z}/12$
E_8	$\mathbb{Z}/60$
F_4	$\mathbb{Z}/6$
G_2	$\mathbb{Z}/2$
A_n, B_n adjoint	0
C_n, D_n adjoint, $4 \nmid n$	0
C_{4n}, D_{4n} adjoint	$\mathbb{Z}/2$
E_6 adjoint	$\mathbb{Z}/2$
E_7 adjoint	$\mathbb{Z}/3$
$HSpin_{16n}$	$\mathbb{Z}/4$
$HSpin_{8+16n}, n > 0$	$\mathbb{Z}/2$
$HSpin_8$	0
$HSpin_{8n+4}, n > 0$	0

Основная теорема позволила получить следующие приложения. Отметим, что $H^3(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$ совпадает с n-кручением в группе $H^3(F, 2)$ и

$H^3(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)) = H^3(F, \mu_n^{\otimes 2})$ если характеристика F взаимно проста с n.

2.7.2. Тип C_n

Пусть $G = \mathbf{PGSp_{2n}}$– расщепимая проективная симлектическая группа. Для расширения полей L/F множество $H^1(L, G)$ изоморфно множеству классов изоморфизмов центральных простых L-алгебр степени $2n$ с симплектической инволюцией σ (см. [35, §29]) разложимый инвариант сопоставляет алгебре (A, σ) элемент $(\phi) \cup [A]$ для фиксированного $\phi \in F^\times$. В частности, значение разложимого инварианта не зависит от инволюции. В случае $4 \mid n$. Тогда согласно [23, Теорема 4.6] группа неразложимых инвариантов $\mathrm{Inv}^3(G, 2)_{ind}$ циклическая порядка 2. Если характеристика F не равна 2, в [18, Теорема A] был сконструирован инвариант Δ_{2n} степени 3 с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Было показано, что если $a \in A$ является σ-симметричным элементом $A^\times$ и $\sigma' = Int(a) \circ \sigma$, то

$$\Delta_{2n}(A, \sigma') = \Delta_{2n}(A, \sigma) + Nrp(a) \cup [A], \tag{2.4}$$

где Nrp– пфаффиан-норма. В частности, Δ_{2n} зависит от инволюции, следовательно не является разложимым. Тогда согласно теореме 2, этот инвариант не является полуразложимым. Тогда класс $\Delta_{2n}(A) \in H^3(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/L^\times \cup [A]$ элемента $\Delta_{2n}(A, \sigma)$, зависящий только от центральной простой алгебры A, нетривиален для какой-то алгебры A. Это дает ответ на вопрос, поставленный в [18].

2.7.3. Тип A_{n-1}

Пусть $G = \mathbf{SL_n}/\mu_\mathbf{m}$, где m и n имеют одинаковый набор простых делителей и $m \mid n$. Для расширения полей L/F естественная сюръекция $G \to \mathbf{PGL}_n$

дает отображение

$$\alpha\colon H^1(L,G) \to H^1(L,\mathbf{PGL}_n) \subseteq Br(L),$$

сопоставляющее каждому торсору Y класс некоторой центральной простой алгебры $A(Y)$ в группе Брауэра. По определению, разложимый инвариант имеет вид $Y \mapsto (\phi) \cup [A(Y)]$ для некоторого фиксированного $\phi \in F^\times$.

Отображение $\mathbf{SL_m} \to \mathbf{SL_n}$, сопоставляющее матрице M тензорное произведение с единичной матрицей $M \otimes I_{n/m}$ дает гомоморфизм $\mathbf{PGL}_m \to G$. Индуцированный гомоморфизм согласно [23, Теорема 4.4]

$$\phi\colon \operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm} \to \operatorname{Inv}^3(\mathbf{PGL}_m,2)_{norm} = F^\times/F^{\times m}$$

даст расщепление вложения $F^\times/F^{\times m} = \operatorname{Inv}^3(G,2)_{dec} \to \operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm}$ Рассмотрим группу неразложимых инвариантов G:

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{ind} \cong m/k\mathbb{Z}q/m\mathbb{Z}q, \tag{2.5}$$

где k равен наибольшему общему делителю чисел n/m и m в случае нечетного n/m и чисел $n/2m$ и m в случае четного n/m. Тогда существует единственный инвариант $\Delta_{n,m}$ в $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm}$, такой что его класс в $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{ind}$ совпадает с $m/kq+m\mathbb{Z}q$ и $\phi(\Delta_{n,m}) = 0$. Заметим, что $\Delta_{n,m}$ имеет порядок k в $\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm}$. Таким образом, $\Delta_{n,m}$ принимает значения в $H^3(-,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}(2))$. Рассмотрим G-торсор Y над F и скрученные формы ${}^YG$ и $SL_1(A(Y))$. Группа $F^\times$ действует транзитивно на слое отображения α над $A(Y)$. Для $\phi \in F^\times$ обозначим ${}^\phi Y$ соответствующий элемент в слое. Согласно 2.5 образ $\Delta_{n,m}$ при композиции

$$\operatorname{Inv}^3(G,2)_{norm} \cong \operatorname{Inv}^3({}^YG,2)_{norm} \to \operatorname{Inv}^3(\mathbf{SL_1(A(Y)),2)_{norm}}$$

равен m/k-кратному инварианту Роста. Напомним, что инвариант Роста отправляет класс $\phi \in F^\times/Nrd(A(Y)^\times) = H^1(F,\mathbf{SL_1(A(Y))})$ в $\phi \cup [A(Y)] \in$

$H^3(F,2)$. Тогда получим

$$\Delta_{n,m}({}^{\phi}Y) - \Delta_{n,m}(Y) \in F^{\times} \cup m/k[A(Y)]. \tag{2.6}$$

Для центральной простой L-алгебры A степени n и экспоненты делящей m определим элемент

$$\Delta_{n,m}(A) \in \frac{H^3(L, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}(2))}{L^{\times} \cup m/k[A]}$$

следующим образом: Выберем G-торсор Y над L, такой что $A(Y) \cong A$ и положим $\Delta_{n,m}(A)$ равным классу $\Delta_{n,m}(Y)$ в фактор-группе. Из равенства 2.6 следует, что $\Delta_{n,m}(A)$ не зависит от выбора Y.

Предложение 2. *Пусть A– центральная простая L-алгебра степени n и экспоненты, делящей m. Тогда порядок $\Delta_{n,m}(A)$ делит k. Если A– общая алгебра, то порядок $\Delta_{n,m}(A)$ равен k.*

Доказательство. Если k'-делитель k, то инвариант $k'\Delta_{n,m}$ не является разложимым. Следовательно, $k'\Delta_{n,m}$ не является полуразложимым, следовательно $k'\Delta_{n,m}(A) \neq 0$. □

Приведем следующий пример: пусть A–центральная простая алгебра степени $2n$, делящейся на 8 и экспоненты 2. Выберем симплектическую инволюцию σ на A. Группа $\mathbf{PGSp}_{2n}$ является подгруппой в $\mathbf{SL_{2n}}/\boldsymbol{\mu_2}$, откуда, если характеристика поля не равна 2, сужение инварианта $\Delta_{2n,2}$ на $\mathbf{PGSp}_{2n}$ совпадает с инвариантом $\Delta_{2n}(A,\sigma)$, рассмотренному в предыдущем разделе. Тогда $\Delta_{2n,2}(A) = \Delta_{2n}(A)$ в группе $H^3(F,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2))/(F^{\times} \cup [A])$. При этом класс $\Delta_{n,m}$ тривиален на разложимых алгебрах:

Предложение 3. *Пусть n_1, n_2, m–натуральные числа, такие что m делит n_1 и n_2. Пусть A_1 и A_2– центральные простые алгебры над F степени n_1 и n_2 соответственно, причем их экспонента делит m. Тогда $\Delta_{n_1 n_2, m}(A_1 \otimes A_2) = 0$*

Доказательство. Гомоморфизм тензорного произведения $\mathbf{SL_{n_1}} \times \mathbf{SL_{n_2}} \to \mathbf{SL_{n_1 n_2}}$ порождает гомоморфизм

$$\mathrm{Sym}^2(T^*_{n_1 n_2}) \to \mathrm{Sym}^2(T^*_{n_1}) \oplus \mathrm{Sym}^2(T^*_{n_2}),$$

где T_{n_1}, T_{n_2} и $T_{n_1 n_2}$ – максимальные торы соответствующих групп. Образ канонического Вейль-инвариантного образующего $q_{n_1 n_2}$ в $\mathrm{Sym}^2(T^*_{n_1 n_2})$ равен $n_2 q_{n_1} + n_1 q_{n_2}$. Так как n_1 и n_2 делятся на m, обратный образ инварианта $\Delta_{n_1 n_2, m}$ вдоль гомоморфизма $(\mathbf{SL_{n_1}}/\mu_\mathbf{m}) \times (\mathbf{SL_{n_2}}/\mu_\mathbf{m}) \to \mathbf{SL_{n_1 n_2}}/\mu_\mathbf{m}$ тривиален. $\square$

Заключение.

В диссертации была исследована K-теория этального классифицирующего пространства $B_{et}G$ в категории мотивных пространств Воеводсокого-Мореля для связной расщепимой редуктивной группы G. А именно, был доказан мотивный аналог классической топологической теоремы Атьи-Сегала о пополнении кольца представлений связной компактной группы Ли. Представляет интерес дальнейшая разработка данной темы и исследование аналогичного вопроса в случае нерасщепимой группы G. Решение данного вопроса позволило бы получить новые результаты в теории представлений нерасщепимых групп. Построение связи между когомологическими инвариантами степени 3 и кручением в группе Чжоу коразмерности 2 версального флага полупростой расщепимой группы G позволило вычислить некоторые ранее неизвестные кручения в группах Чжоу скрученных многообразий флагов. В дальнейшем представляет интерес рассмотрение случая G - группы не-внутреннего типа и выяснение вопроса, выполняется ли аналогичный результат в данном случае.

Литература

[1] May J. P. A Concise Course in Algebraic Topology. — Univ. of Chicago Press, 1999.

[2] Atiyah M. F., Segal G. B. Equivariant K-theory and completion // J. Differential Geometry. — 1969. — no. 3. — P. 1–18.

[3] Totaro B. The Chow ring of a classifying space // Algebraic K-theory. — 1999. — Vol. 67 of Proc. Sympos. Pure Math. — P. 249–281.

[4] Morel F., Voevodsky V. $\mathbb{A}^1$ -homotopy theory of schemes // Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. — 1999. — Vol. 90. — P. 45–143.

[5] Voevodsky V. $\mathbb{A}^1$ -homotopy theory // Doc. Math., Extra Volume ICM. — 1998. — P. 579–604.

[6] Morel F. $\mathbb{A}^1$-Algebraic Topology over a Field. — 2012. — Vol. 2052 of Lecture Notes in Mathematics.

[7] Thomason R.W. Algebraic K-theory of group scheme actions // Ann. of Math. Stud. — 1987. — Vol. 113. — P. 539–563.

[8] Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Гельфанд С.И. Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P // УМН. — 1973. — Vol. 28. — P. 3–26.

[9] Demazure M. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. — 1974. — Vol. 4(7). — P. 53–88.

[10] Karpenko N. Codimension 2 cycles on Severi-Brauer varieties // K-Theory J. — 1998. — no. 13(4). — P. 305–330.

[11] Peyre E. Galois cohomology in degree three and homogeneous varieties // K-Theory. — 1998. — Vol. 15(2). — P. 99–145.

[12] Меркурьев А.С. Группа $H^1(X, K_2)$ для проективных однородных многообразий // Алгебра и Анализ. — 1995. — Vol. 7(3). — P. 136–164.

[13] Serre J.P. Cohomologie galoiseienne: progrés et problémes, Astèrisque // Sém Bourbaki. — 1995. — Vol. 90, no. 227. — P. 229–257.

[14] Serre J.P. L'invariant de Witt de la forme $Tr(x^2)$ // Comment. Math. Helv. — 1984. — no. 59. — P. 651–676.

[15] Rost M. A (mod 3) invariant for exceptional Jordan algebras // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1991. — no. 313. — P. 823–827.

[16] Rost M. A Pfister form invariant for étale algebras // Preprint, The Ohio State University. — 2002.

[17] Illusie L. Complexes de de Rham-Witt et cohomologie cristalline // Ann. Sci. E.N.S. — 1979. — no. 12. — P. 501–661.

[18] Garibaldi S., Parimala R., Tignol J.-P. Discriminant of symplectic involutions // Pure Appl. Math. Q. — 2009. — Vol. (1). — P. 349–374.

[19] Barry D. Decomposable and indecomposable algebras of degree 8 and exponent 2 // to appear in Math. Z.

[20] Blinstein S., Merkurjev A. Cohomological invariants of algebraic tori // Algebra Number Theory. — 2013. — no. 7. — P. 1643–1684.

[21] Kahn B. Application of weight two motivic cohomology // Doc. Math. — 1996. — no. 1(17). — P. 395–416.

[22] Panin I. On the algebraic K-theory of twisted flag varieties // K-theory. — 1994. — no. 8(6). — P. 541–585.

[23] Merkurjev A. Degree three cohomological invariants of semisimple groups // to appear in J. Eur. Math. Soc.

[24] Garibaldi S., Merkurjev A., Serre J.-P. Cohomological invariants in Galois cohomology. — 2003. — Vol. 28 of University Lecture Series.

[25] Knizel A., Neshitov A. Algebraic analogue of the Atiyah completion theorem // Homology, Homotopy, Appl. — 2014. — Vol. 16, no. 2. — P. 289–306.

[26] Merkurjev A., Neshitov A., Zainoulline K. Invariants of degree 3 and torsion in the Chow group of a versal flag // Compositio Mathematica. — 2015. — Vol. 151, no. 8. — P. 1416–1432.

[27] Merkurjev A. S. Equivariant K-theory // Handbook of K-theory. — 2005. — Vol. 2. — P. 925–954.

[28] Hartshorne R. Algebraic Geometry. — 1977.

[29] Mumford D., Fogarty J., Kirwan F. Geometric invariant theory. — 1994.

[30] Quillen D. Higher Algebraic K-theory I: : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972),. — Springer, Berlin, 1973. — Vol. 341 of Lecture Notes in Math.

[31] Heller J., Malagon-Lopez J. Equivariant algebraic cobordism // J. Reine Angew. Math. — 2013. — Vol. 684. — P. 87–112.

[32] Jouanolou J. P. Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-theorie algebrique : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972),. — Springer, Berlin, 1973. — Vol. 341 of Lecture Notes in Math.

[33] Hovey M., Palmieri J., Strickland N. Axiomatic Stable Homotopy Theory. — Amer. Math. Soc., 1997. — Vol. 610 of Mem. of Amer. Math. Soc.

[34] Serre J.-P. Groupes de Grothendieck des schémas en groupes reductifs déployés // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. — 1968. — P. 37–52.

[35] The Book of Involutions / Knus M.-A., A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol. — 1998. — Vol. 44 of Colloquium publications of American Mathematical Society.

[36] Edidin D., Graham W. Equivariant intersection theory // Invent. Math. — 1998. — Vol. 131(3). — P. 595–634.

[37] Fulton W. Intersection theory, 2nd. ed. — 1998. — Vol. 2 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.

[38] Gille S., Zainoulline K. Equivariant pretheoried and invariants of torsors // Transf. Groups. — 2012. — no. 17(2). — P. 471–498.

[39] Steinberg R. On a Theorem of Pittie // Topology. — 1975. — no. 14. — P. 173–177.

[40] Colliot-Thélène J.-L., Hoobler R., Kahn B. The Bloch-Ogus-Gabber theorem // Algebraic K-theory, Fields Inst. Commun. — 1996. — no. 16. — P. 31–94.

[41] Gros M., Suwa N. La conjecture de Gersten pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmique. // Duke Math. J. — 1988. — Vol. 57(2). — P. 615–628.

[42] Merkurjev A., Tignol J.-P. The multipliers of similitudes and the Brauer group of homogeneous varieties // J. Reine Angew. Math. — 1995. — no. 461. — P. 13–47.

[43] Garibaldi S., Zainoulline K. The gamma-filtration and the Rost invariant // J. Reine Angew. Math. — 2014. — no. 696. — P. 225–244.

[44] Bermudez H., Ruozzi A. Degree 3 cohomological invariants of groups that are neither simply connected nor adjoint // J. Ramanujan Math. Soc. — 2014. — no. 29(4). — P. 465–481.

[45] Zainoulline K. Twisted gamma-filtration of a linear algebraic group // Compositio Math. — 2012. — no. 148(5). — P. 1645–1654.