На правах рукописи

Столяров Дмитрий Михайлович

Дифференциальные операторы и анализ Фурье: теоремы вложения с предельным показателем и их приложения

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н.

Кисляков Сергей Витальевич

Санкт-Петербург – 2014

Оглавление

Глава 1

Введение

Работа посвящена некоторым соболевским теоремам вложения и их приложениям к задачам функционального анализа и геометрической теории меры. Теоремы вложения данной работы отличаются от классических тем, что младшие производные функции или набора функций оцениваются в терминах линейных комбинации производных старших порядков. Эта особенность проявляется в основном только при предельных показателях суммируемости (некоторым случаям, когда наличие линейных комбинаций интересно для непредельных показателей, посвящен пункт 2.5.3). Применяемые в нашей работе методы наиболее приспособлены к случаю двух переменных (исключение составляют результаты параграфа 4.2, некоторые следы наличия произвольного числа переменных могут быть найдены в параграфах 2.1 и 2.2). Кроме того, в основном речь пойдет о вложении в гильбертово пространство (кроме пунктов 2.5.3 и 4.2.2). Однако наши теоремы вложения анизотропно однородны. Для систем дифференциальных уравнений наш результат, по-видимому, первый обладает этим свойством (в последнее десятилетие другими авторами активно исследовались изотропно однородные теоремы вложения для переопределнных систем). Кроме того, нами рассмотрен класс билинейных неравенств, тоже, по-видимому, новый. Основная часть результатов о теоремах вложения и неравенствах, связанных с ними, изложена в главе 2.

Основное приложение наших теорем вложения — решение некоторых вопросов о неизоморфности пространств гладких функций, порожденных дифференциальными операторами, пространству $C(K)$ (глава 3). Кроме того, мы даем приложение теорем вложения к задачам о сингулярности векторнозначных мер, подчиненных дифференциальным условиям (глава 4).

Более детальный план работы и описание результатов дано в параграфе 1.2. Нам требуется ввести обозначения, чему и посвящен параграф 1.1.

1.1. Обозначения

Множество натуральных чисел, лежащих в отрезке $[a, b]$, мы обозначаем символом $[a..b]$.

В основном мы будем работать с функциями на пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. В пункте 2.5.2 и главе 3 мы также будем работать с функциями на d-мерном торе $\mathbb{T}^d$, $\mathbb{T}$ есть окружность $\{e^{2\pi i\omega} \in \mathbb{C} \mid w \in [0, 2\pi)\}$. Если $x \in \mathbb{R}^d$ или $x \in \mathbb{T}^d$, а I есть подмножество множества $[1..d]$, то символом x_I мы обозначаем вектор в $\mathbb{R}^{d-|I|}$, полученный забыванием координат с номерами из множества I. Например, если $x = (x_1, x_2, x_3)$, то $x_{\{2\}} = (x_1, x_3)$. Символами $\mathbb{R}^d_+$ и $\mathbb{Z}^d_+$ обозначены множества векторов с неотрицательными координатами в пространствах $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Z}^d$ соответственно, кроме того, символ $\mathbb{Z}^d_0$ обозначает множество векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$ с целочисленными ненулевыми координатами, символ $\mathbb{R}^d_{++}$ — множество $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall j \in [1..d] \;\; |x_j| \geqslant 1\}$. Шар евклидова пространства радиуса r с центром в точке x мы обозначаем через $B_r(x)$. Если φ — функция на пространстве $\mathbb{R}^d$, то символом φ_λ обозначено ее растяжение в λ раз; значение этих слов будет меняться от параграфа к параграфу, однако каждый раз мы будем оговаривать, что именно имеется ввиду.

Символ $\Delta^s_i(h)$ обозначает оператор взятия конечной разности порядка s с шагом h по i-ой переменной. Символ ∂_j обозначает оператор дифференцирования по j-ой координате, символ ∂ есть оператор-вектор $(\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_d)$. В случае тора дифференцирование понимается в естественной параметризации окружности отрезком $[0, 2\pi)$. Тор и евклидово пространство размерности d суть локально компактные группы, символом $\hat{f}$ или $\mathcal{F}[f]$ мы обозачаем преобразование Фурье функции f на них. Двойственность между группой и ее сопряженной задана посредством форм

$$(x,\xi) \mapsto e^{2\pi i x\xi}, \quad x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}; \quad (x,n) \mapsto e^{ixn}, \quad x \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{Z}.$$

Обратное преобразование Фурье задано на двойственной группе $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ соответственно и обозначается через $\check{g}$ или $\mathcal{F}^{-1}[g]$ (здесь g — функция на двойственной группе). Мы нормируем преобразование Фурье и его обратное так, чтобы они были изометрическими операторами между пространствами квадратично-суммируемых функций на группе и ее сопряженной. Иногда, в целях повышения понятности формул, мы будем указывать, какие переменные переходят в какие при преобразовании Фурье, например, $\mathcal{F}_{x,y\to\xi,\eta}$.

Мы будем активно пользоваться теорией обобщенных функций. По-видимому, наши обобзначения будут наиболее приближены к принятым в учебнике [1]. Символом $\mathfrak{D}(\Omega)$ мы обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на области Ω, символом $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — класс Шварца. Символом $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ мы обозначаем пространство убывающих быстрее любого полинома функций на решетке. Символы дифференцирования, если не оговорено противное, обозначают дифференцирование в обобщенном смысле.

Пусть m — комплекснозначная обобщенная функция класса $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Через $\mathcal{M}_m$ мы обозначаем мультипликатор Фурье с символом m, то есть оператор $\mathcal{M}_m : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, действующий по правилу

$$\mathcal{M}_m[\varphi] = \mathcal{F}^{-1}\Big[m\,\mathcal{F}[\varphi]\Big], \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{1.1.1}$$

Для всякой функции $m : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$, растущей не быстрее некоторого полинома, можно определить мультипликатор $\mathcal{M}_m$ как оператор из пространства $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ в пространство $(C^\infty)'(\mathbb{T}^d)$, тоже согласно формуле (1.1.1).

Пространство всех борелевских комплекснозначных мер ограниченной вариации обозначим символом M (на евклидовом пространстве или торе). Понятие меры в нашей работе априори не предполагает положительности, если не оговорено противное. Более того, мы будем также рассматривать векторнозначные меры (то есть, счетно-аддитивные функции множеств со значениями в конечномерном векторном пространстве; выбрав в пространстве, где мера принимает значения, базис, мы можем отождествить векторнозначную меру с конечным набором вещественных мер) и тоже называть их мерами. Полную вариацию меры μ обозначим через $\operatorname{var}\mu$ или $\|\mu\|_{\mathrm{M}}$. Все меры нашей работы будут иметь ограниченную вариацию, поэтому обычно мы это условие не оговариваем. Символ $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$ обозначает пространство функций ограниченной вариации (тех функций, градиент которых есть векторная мера). Если $\theta : S^{d-1} \to \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ есть непрерывная функция, то символом $\mathcal{M}_\theta$ обозначено подпространство пространства $\mathrm{M}^d(\mathbb{R}^d)$, образованное векторнозначными мерами μ, подчиненными условию

$$\hat{\mu}(\xi) \parallel \theta\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big), \quad \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Если X и Y — два банаховых пространства, то пространство линейных непрерывный операторов из пространства X в пространство Y обозначается символом $\mathcal{L}(X,Y)$. Запись $X \cong Y$ означает, что пространства X и Y изоморфны как банаховы пространства, то есть, линейно гомеоморфны. Если Y есть подпространство пространства X, то аннулятор пространства Y в пространстве X^* обозначим через $\operatorname{Ann}_{X^*} Y$.

Символ K будет обозначать хаусдорфово компактное топологическое пространство, а $C(K)$ — пространство непрерывных функций на нем. Символом L_p мы обозначаем пространство Лебега функций, суммируемых с p-ой степенью ($p \in [1,\infty]$). Пространства Лоренца обозначаются через $L_{p,q}$. Символом $\mathcal{H}_1$ обозначается вещественный класс Харди функций на $\mathbb{R}^d$, некасательная максимальная функция гармонического продолжения в область $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ которых лежит в пространстве L_1, символами VMO и BMO — пространства функции исчезающей средней осцилляции и ограниченной средней осцилляции. Если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ — вектор с неотрицательными координатами, то через $\mathcal{P}_p^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$ обозначено замыкание множества $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ по норме $\|\psi\|_{\mathcal{P}_p^{\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \|\,\mathcal{M}_{|\xi^{\alpha}|}[\psi]\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ (однородное анизотропное потенциальное пространство Бесселя); возведение вектора в степень здесь и далее понимается покоординатно, символ $|\xi^{\alpha}|$ обозначает функцию $\xi \mapsto \prod_{j=1}^{d} |\xi_j|^{\alpha_j}$. Однородное анизотропное пространство Соболева W_p^{α} есть $\cap_{j=1}^{d} \mathcal{P}_p^{\alpha_j}$, где α_j есть вектор, все координаты которого, кроме j-ой, равны нулю, а j-я равна α_j. Наконец, символ $B_p^{\alpha,\theta}(\mathbb{R}^d)$ обозначает однородное пространство Бесова с параметром суммируемости p, гладкостью α и интерполяционным параметром θ, символом $B_{p,r}^{\alpha,\theta}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Бесова, построение которого основывается на пространстве Лоренца $L_{p,r}$ (см. определение 1.4.5).

Если P — полином d переменных, то символом $P(\partial)$ мы обозначаем соответствующий ему дифференциальный полином, $P(\partial) = \mathcal{M}_{P(2\pi i\xi)}$. Мы зачастую отождествляем многочлен P и дифференциальный оператор $P(\partial)$. Символом P^{Δ} будем обозначать характеристический многочлен дифференциального оператора $P(\partial)$, $P^{\Delta}(\xi) = P(2\pi i\xi)$. Пусть $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_\ell\}$ — набор полиномов, а X — какое-нибудь банахово пространство функций (обычно $C(\mathbb{T}^d)$ или $L_p(\mathbb{T}^d)$). Символом X^P мы обозначаем пространство обобщенных функций f, таких что для всякого $j \in [1..\ell]$ имеет место принадлежность $P_j(\partial)[f] \in X$, норма в пространстве X^P вводится естественным образом. Если γ — замкнутое бесконечно гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^d$, то символом $\mathcal{R}_\gamma$ мы обозначаем оператор, действующий из класса $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в класс $C^{\infty}(\gamma)$ по правилу

$$\mathcal{R}_\gamma[\varphi] = \mathcal{F}[\varphi]\Big|_{\gamma}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Символом $\mathcal{N}(P)$ мы обозначаем многогранник Ньютона полинома P, то есть выпуклую оболочку индексов всех его мономов. Если P — конечный набор полиномов, то символ $\mathcal{N}(P)$ означает многогранник Ньютона этого набора, то есть, выпуклую оболочку индексов всех мономов, входящих хоть в какой-нибудь многочлен из набора P.

Размерность Хаусдорфа обозначаем символом $\dim$, как для множества, так и для меры (других размерностей для множеств и мер мы не рассматриваем, кроме линейной, разумеется), см. определение 1.2.10.

Запись $a \lesssim b$ означает “существует константа $C > 0$, такая что $a \leqslant Cb$ равномерно” (о какой равномерности идет речь, ясно из контекста). Запись $a \asymp b$ означает, что $a \lesssim b$ и $b \lesssim a$.

Остальные обозначения носят локальный характер и будут введены в свое время.

1.2. Описание работы

1.2.1. Основные результаты

Здесь мы приведем те основные результаты, которые не требуют длительных определений. Эти результаты изложены в работах автора, ссылки на которые приведены после основной библиографии. За некоторыми из них скрываются более общие утверждения, о которых будет сказано в свое время. Начнем с теорем вложения.

Теорема 1.2.1. *Пусть k, l, N — натуральные числа, а меры $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N$ с компактными носителями в пространстве $\mathbb{R}^2$ таковы, что*

$$\sum_{j=0}^{N} \partial_1^{jk} \partial_2^{(N-j)l} \mu_j = 0. \tag{1.2.1}$$

Тогда существуют функции $f_1, f_2, \ldots, f_N$ из простран-

ства $W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l},l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}(\mathbb{R}^2)$, *такие что*

$$\begin{cases} \partial_1^k f_1 & = & \mu_0; \\ \partial_1^k f_2 - \partial_2^l f_1 & = & \mu_1; \\ \vdots & = & \vdots; \\ \partial_1^k f_j - \partial_2^l f_{j-1} & = & \mu_{j-1}; \\ \vdots & = & \vdots; \\ \partial_1^k f_N - \partial_2^l f_{N-1} & = & \mu_{N-1}; \\ -\partial_2^l f_N & = & \mu_N \end{cases} \tag{1.2.2}$$

и $\sum\limits_{j=1}^{N} \|f_j\|_{W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l},l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}} \lesssim \sum\limits_{j=0}^{N} \operatorname{var}\mu_j$.

Нетрудно видеть, что система (1.2.2) имеет единственное решение $\{f_j\}_j$ в классе обобщенных функций с компактным носителем. Содержательную часть утверждения составляет последнее неравенство. О связи теоремы вложения с классическими и известными результатами мы скажем в пункте 1.3.1. Аналогичная теорема вложения верна и на торе (условие компактности носителей мер надо заменить несколько другим условием), см. пункт 2.5.2. Теорема 1.2.1 будет доказана в параграфе 2.2. Доказательство основано на одной билинейной оценке. Мы также изучали и другие билинейные неравенства типа теорем вложения. Им будут посвящены параграфы 2.3 и 2.4. Введем удобную терминологию.

Определение 1.2.2. Пусть k и l — натуральные числа, α и β — вещественные неотрицательные числа, а σ и τ — комплексные ненулевые числа. Символом $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ мы будем обозначать утверждение о том, что неравенство

$$\left|\langle f,g\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)}\right| \lesssim \left\|(\partial_1^k - \tau\partial_2^l)f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \left\|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)g\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \tag{1.2.3}$$

выполнено для всех функций f и g из класса Шварца.

Скалярное произведение в пространстве $\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)$ вводится естественным способом:

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi,\eta)\overline{\hat{g}(\xi,\eta)}|\xi|^{2\alpha}|\eta|^{2\beta}\, d\xi d\eta. \tag{1.2.4}$$

Оказалось, что истинность утверждения BE довольно сильно зависит от свойств чисел k, l, σ и τ. Важно разделять эллиптический и неэллиптический случаи.

Определение 1.2.3. Четверка чисел (k,l,σ,τ) называется эллиптичной, если многочлены $\xi^k - \sigma_1\eta^l$ и $\xi^k - \tau_1\eta^l$, $\tau_1 = (2\pi i)^{l-k}\tau$, $\sigma_1 = (-1)^{l-k}(2\pi i)^{l-k}\overline{\sigma}$, не имеют вещественных корней, кроме точки $(0,0)$.

В дальнейшем τ_1 всегда обозначает $(2\pi i)^{l-k}\tau$, σ_1 всегда обозначает $(-1)^{l-k}(2\pi i)^{l-k}\overline{\sigma}$, если не оговорено противное.

Теорема 1.2.4. *Пусть k и l — натуральные числа, а четверка (k,l,σ,τ) эллиптична. Утверждение* $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ *верно тогда и только тогда, когда одно из чисел k и l нечетно, $\alpha = \frac{k-1}{2}$, $\beta = \frac{l-1}{2}$, а числа σ_1 и τ_1 имеют ненулевые мнимые части одного знака.*

Таким образом, в предположении эллиптичности мы точно знаем, когда билинейные неравенства выполняются, а когда — нет. В неэллиптическом случае картина не столь ясна. Частичному разъяснению причин сложности посвящены пункты 2.5.3 и 2.5.4.

Теорема 1.2.5. *Пусть числа k и l натуральны, одно из них нечетно, $k \neq l$. Предположим, что σ и τ — комплексные числа, такие что оба числа $\tau_1 = (2\pi i)^{l-k}\tau$ и $\sigma_1 = (-1)^{l-k}(2\pi i)^{l-k}\overline{\sigma}$ вещественны. Тогда утверждение* $\mathrm{BE}(k,l,\frac{k-1}{2},\frac{l-1}{2},\sigma,\tau)$ *верно.*

В параграфе 2.4 также приведены другие результаты об истинности и ложности утверждения BE в неэллиптическом случае.

Отметим важное отличие результатов типа теоремы 1.2.1 от теорем 1.2.4 и 1.2.5. В двух последних теоремах слева в основном неравенстве фигурирует потенциальное пространство $\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}$, неформально принадлежность функции f этому пространству означает, что $\partial_1^\alpha\partial_2^\beta f$ суть квадратично-суммируемая функция. То есть, теоремы 1.2.4 и 1.2.5 устанавливают принадлежность некоторой одной смешанной производной пространству L_2 (на самом деле, все еще немного сложнее, так как речь идет о скалярном произведении двух функций). В теореме 1.2.1 же доказано вложение в пространство Соболева $W_2^{(k-\frac12-\frac{k}{2l},l-\frac12-\frac{l}{2k})}$. Принадлежность функции f этому пространству неформально означает, что $\partial_1^{k-\frac12-\frac{k}{2l}}f$ и $\partial_2^{l-\frac12-\frac{l}{2k}}f$ есть квадратично-суммируемые функции. Нетрудно видеть, что отсюда следует, что при всяких α и β, таких что точка (α,β) — выпулкая комбинация точек $(k-\frac12-\frac{k}{2l},0)$ и $(0,l-\frac12-\frac{l}{2k})$ (или что то же самое, пара неотрицательных чисел (α,β) удовлетворяет уравнению (2.3.4)), функция f принадлжит пространству $\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}$. Заключение теоремы 1.2.1 сильнее, чем заключения теорем 1.2.4 и 1.2.5 в том смысле, что принадлежность пространству L_2 утверждается про целый "отрезок из производных", а не про одну производную (индекс которой, точка $(\frac{k-1}{2},\frac{l-1}{2})$, безусловно лежит на упомянутом отрезке). Все классические теоремы вложения (которые читатель может найти в книге [2] или работах [3, 4]) дают в результате вложение в пространство Соболева (или пространство Бесова), то есть, сразу "отрезок" (или "симплекс" в старших размерностях) производных. Билинейные оценки типа теорем 1.2.4 и 1.2.5 этим свойством принципиально не обладают, поэтому неясно, насколько их можно считать теоремами вложения. Ближе к теоремам вложения находятся квадратичные неравенства, рассмотренные в пункте 2.5.1. В нашей работе результаты типа теорем вложения получаются с помощью перехода к более общим мультипликаторам, чем полиномиальные (в некотором смысле, мы выходим за границы мира производных целого порядка не только на языке пространств, но и на языке операторов).

Теперь перейдем к результатам о пространствах гладких функций. Для того, чтобы их сформулировать, нам понадобится несколько определений.

Определение 1.2.6. Пусть Λ — аффинная гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что гиперплоскость Λ положительна, если она пересекает все положительные координатные полуоси. В случае, если она не пересекает отрицательных полуосей, будем говорить, что гиперплоскость Λ неотрицательна.

Напомним читателю, что многогранником Ньютона полинома $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d} a_k\xi^k$ называется выпуклая оболочка тех точек $k \in \mathbb{Z}_+^d$, для которых $a_k \neq 0$. Многогранником Ньютона набора полиномов назовем выпуклую оболочку их многогранников Ньютона.

Определение 1.2.7. Пусть P — конечный набор полиномов в $\mathbb{R}^d$. Опорная гиперплоскость к выпуклому многограннику $\mathcal{N}(P)$ называется допустимой, если она положительна и не отделяет многогранник $\mathcal{N}(P)$ от начала координат.

Следующее определение обобщает понятие старшей однородного части полинома на случай анизотропной однородности.

Определение 1.2.8. Пусть $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_\ell\}$ — конечный набор полиномов в пространстве $\mathbb{R}^d$, Λ — допустимая гиперплоскость для этого набора. Многочлены, которые получаются из многочленов набора P выкидыванием мономов, степени которых не принадлежат Λ, называются Λ-старшими частями многочленов P_j.

Символом $C^P(\mathbb{T}^d)$ мы обозначаем пополнение множества тригонометрических полиномов по норме

$$\|f\|_{C^P(\mathbb{T}^d)} = \max_j \|P_j(\partial)f\|_{C(\mathbb{T}^d)},$$

также мы факторизуем это полунормированное пространство по линейному множеству, где указанная полунорма обращается в нуль (таким образом, C^P есть банахово пространство).

Теорема 1.2.9. *Пусть $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_\ell\}$ — конечный набор полиномов в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что существует допустимая гиперплоскость Λ, такая что среди Λ-старших частей полиномов P_j, $j = 1, 2, \ldots, \ell$, есть две непропорциональных. Тогда пространство $C^P(\mathbb{T}^d)$ не вкладывается дополняемо в пространство $C(K)$.*

Напомним читателю, что подпространство Y банахова пространства X называется дополняемым, если существует ограниченный линейный проектор из пространства X на пространство Y. В частности, из теоремы 1.2.9 следует, что пространство C^P не изоморфно пространству $C(K)$.

Эвристически, теорема утверждает, что если среди полиномов P_j в каком-то смысле нет старшего, то соответствующее пространство гладких функций не изоморфно пространству $C(K)$. Результаты противоположного рода (если есть "старший полином", то пространство C^P изоморфно $C(K)$) проще по своей природе и изложены в параграфе 3.3. Тем не менее, наш анализ неполон: например, мы не можем ничего сказать о пространстве, порожденном двумя полиномами $P_1(\xi) = 1; P_2(\xi) = \xi_1 - \sqrt{2}\xi_2$ на торе $\mathbb{T}^2$. Различные примеры приведены в параграфе 3.2.

Наконец, отметим наши результаты о гладкостях векторных мер. Гладкость меры мы будем измерять при помощи нижней размерности Хаусдорфа (в дальнейшем обозначаемой просто символом dim).

Определение 1.2.10. Нижней размерностью Хаусдорфа меры μ на метрическом пространстве назовем инфимум чисел α, таких что существует борелевское множество F хаусдорфовой размерности не более α, удовлетворяющее условию $\mu(F) \neq 0$.

Теорема 1.2.11. *Пусть векторная мера* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d)$ *на пространстве* $\mathbb{R}^d$ *такова, что для некоторой обобщенной функции* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *и натуральных чисел* m_j *имеют место равенства* $\partial_j^{m_j} f = \mu_j$, $j = 1, 2, \ldots, d$. *В таком случае,* $\dim \mu \geqslant d - 1$.

Теорема доказана в пункте 4.1.2. Основной инструмент доказательства (кроме теорем вложения) — модификация леммы Фростмана, которая сформулирована и доказана в пункте 4.1.1. Не исключено, что это утверждение и неново (настолько естественным видится такое обобщение классической леммы Фростмана), однако автор не нашел его в литературе. Оно носит технический характер, тем не менее, очень полезно в задачах гармонического анализа (подтверждением тому служит пункт 2.5.4, в котором оно используется для доказательства совсем другой теоремы).

1.2.2. Структура работы

Работа состои из пяти глав, каждая из которых разбита на параграфы, а те, в свою очередь, могут делится на пункты.

Глава 1 носит вводный характер.

В параграфе 1.1, как уже видел читатель, собраны используемые в работе обозначения. Мы будем напоминать о них по мере появления, тем не менее, если какое-то обозначение неясно, читатель может обратиться к параграфу 1.1.

Параграф 1.2, как видит читатель сейчас, посвящен краткому описанию работы и состоит из двух пунктов. В пункте 1.2.1 изложены те основные результаты работы, которые не слишком абстрактны и поэтому могут быть сформулированы в общепринятых терминах. Мы оформили их в виде пяти теорем. За некоторыми из них стоят более общие утверждения, тем не менее, они менее наглядны и поэтому не попали в пункт 1.2.1. Настоящий пункт 1.2.2 дает описание работы по главам и частям.

Параграф 1.3 содержит исторический обзор предшествующих результатов и состоит из трех пунктов. Наши исторические обзоры очень избирательны и не могут претендовать на полноту. Тем не менее, мы стараемся, если это возможно, давать как можно больше ссылок на литературу, где такие обзоры наличиствуют. Мы также увязываем на связь наших результатов, изложенных в пункте 1.2.1, с классическими и современными результатами. Пункт 1.3.1 посвящен аспектам теории вложений пространств Соболева с предельным показателем $p = 1$[1], а также связанных с ними неравенств для систем дифференциальных уравнений. Пункт 1.3.2 освещает разработку задач о неизоморфности пространств гладких функций, в особенности в их связи с соболевскими теоремами вложения. Последний пункт 1.3.3 дает обзор результатов о гладкости наборов мер, подчиненных дифференциальным условиям.

В параграфе 1.4 собраны используемые в работе известные утверждения, которые могут быть незнакомы читателю. По возможности, мы стараемся давать ссылки на учебную литературу, в том числе и как дополнительные. Некоторые из используемых нами утверждений принадлежат фольклору. Если автор не смог найти подходящей ссылки, мы доказываем утверждение. Никакие результаты параграфа 1.4 ни в коем случае не должны быть припи-

[1] Отметим, что в литературе зачастую слова “предельные показатель” обозначают несколько другое, чем в нашем тексте. Например, во вложении $W_1^1(\mathbb{R}^2) \mapsto L_2(\mathbb{R}^2)$ мы понимаем под предельным показателем единицу (предельность пространства, которое вкладывается), в то время как предельность относится и к показателю 2 пространства L_2 (этот показатель тоже предельный в том смысле, что он неулучшаем).

сываемы автору: доказательства приводятся для полноты изложения. Параграф разбит на три части по темам утверждений, разбиение довольно условно (например, тема о пространствах Бесова появляется и в пункте 1.4.1, и в пункте 1.4.3). В пункте 1.4.1 собраны утверждения, которые связаны с вещественным анализом и геометрической теорией меры на евклидовом пространстве. Пункт 1.4.2 содержит сведения по функциональному анализу. Последний и самый большой из трех пунктов 1.4.3 посвящен гармоническому анализу (в основном, “гармоническому анализу на евклидовых пространствах”).

Глава 2 посвящена соболевским теоремам вложения.

В параграфе 2.1 сформулировано некоторое (довольно абстрактное) билинейное неравенство, которое лежит в основе доказательства как теоремы 1.2.1, так и теоремы 1.2.9. Мы доказываем неравенство, а также приводим интересные следствия из него (помимо упомянутых теорем).

Параграф 2.2 содержит доказательство теоремы 1.2.1. Сначала мы формулируем более общую теорему 2.2.1 (которая будет использована при доказательстве теоремы 1.2.9) и выводим ее из абстрактного билинейного неравенства, доказанного в параграфе 2.1. После чего, получаем теорему 1.2.1 из абстрактной теоремы 2.2.1 и даем другие интересные следствия.

Параграф 2.3 посвящен доказательству теоремы 1.2.4 и состоит из двух пунктов. Это разделение обусловлено тем, что результаты об истинности и ложности неравенства в теореме 1.2.4 следуют из похожих, но разных по форме принципов. Положительные результаты собраны в пункте 2.3.1, отрицательные — в пункте 2.3.2.

Параграф 2.4 посвящен утверждениям BE в неэллиптическом случае (см. определения 1.2.2 и 1.2.3). В этом случае не все задачи решены (например, неясно, что будет, если один полином эллиптичен, а другой нет). Пункт 2.4.1 содержит доказательство теоремы 1.2.5, а также простые следствия из нее. В параграфе 2.4.2 мы доказываем некоторые отрицательные результаты относительно утверждения BE.

Параграф 2.5 посвящен вопросам, смежным с теоремами 1.2.1, 1.2.4 и 1.2.5. Там изложены результаты, требующие дальнейшего развития. Кроме того, они не требуются для доказательства теорем, приведенных в пункте 1.2.1. Поэтому изложение в параграфе 2.5 несколько более сжато. Кроме того, мы выносим стандартные доказательства, а также доказательства технических утверждений в приложение. Пункт 2.5.1 посвящен квадратичным неравенствам. Оказывается, что квадратичные неравенства более билинейных напоминают классические теоремы вложения. Пункт 2.5.2 содержит результаты типа transference principle для теорем вложения типа теоремы 1.2.1, то есть, перенесение теоремы вложения на тор. Пункты 2.5.3 и 2.5.4 поясняют, почему наши результаты относительно утверждения BE в неэллиптическом случае неполны. Пункт 2.5.3 посвящен изучению линейных неравенств типа теорем вложения на пространстве $\mathbb{R}^2$ с неэллиптическим оператором. Такие теоремы вложения связаны с ограниченностью и асимптотическими свойствами определенных осцилляторных интегральных операторов. Однако, специфика теорем вложения состоит в том, что непрерывность этих операторов надо исследовать не на пространствах Лебега, а на некоторых их недополняемых подпространствах, которые изучаются в пункте 2.5.4.

В главе 3 собраны результаты относительно неизоморфности пространств гладких функций.

В параграфе 3.1 изложено доказательство теоремы 1.2.9. Доказательство технически довольно трудно, поэтому разделено на пять пунктов. В пункте 3.1.1 мы приводим два вспомогательных утверждения, которые будут использованы впоследствии. Пункт 3.1.2 посвящен преобразованиям набора операторов, эти преобразования меняют пространство функции на некоторое его дополняемое подпространство. В следующем пункте 3.1.3 мы конструируем двойную последовательность элементов аннулятора пространства гладких функций. Она будет 2-слабо суммируемой. Пункт 3.1.4 посвящен построению оператора из аннулятора пространство C^P в гильбертово пространство. Основой его "ингредиент" — оператор вложения, задаваемый теоремой параграфа 2.2. Наконец, в пункте 3.1.5 мы получим противоречие с дополняемостью пространства C^P в пространстве типа $C(K)$, собрав воедино утверждения, полученные в предыдущих пунктах.

Параграф 3.2 содержит примеры пространств гладких функций, заданных различными наборами дифференциальных полиномов, к которым иногда удается применить теорему 1.2.9 опосредованно. Мы также приводим определения, которые понадобятся для формулировки результатов следующего параграфа.

Параграф 3.3 посвящен результатам, противоположным теореме 1.2.9. А именно, мы показываем, что если набор операторов содержит один старший полином, и он в некотором смысле эллиптичен, то соответствующее набору пространство изоморфно пространству $C(K)$. Пункт 3.3.1 посвящен утверждению об асимптотике невырожденных многочленов на бесконечности, которое является "аналитическим ядром" доказываемой теоремы. Пункт 3.3.2 содержит доказательство теоремы о пространтствах функций.

Глава 4 содержит результаты о гладкостях мер, подчиненных дифференциальным условиям, а также теоремы вложения, которые связаны с этими результатами.

Параграф 4.1 содержит доказательство теоремы 1.2.11 и состоит из двух пунктов. Пункт 4.1.1 посвящен доказательству обобщения леммы Фростмана, которое используется в доказательстве теоремы 1.2.11. В пункте 4.1.2 мы выводим теорему 1.2.11 из обобщенной леммы Фростмана, а также приводим примеры.

Параграф 4.2 посвящен некоторой "гипотезе вложения", которая связана с вопросом о гладкостях мер. В пункте 4.2.1 мы формулируем гипотезу, выводим некоторый ее двумерный частный случай из теоремы 1.2.1, а также доказываем ее эквивалентность некоторой двойственной гипотезе. В пункте 4.2.2 мы доказываем частный случай двойственной гипотезы, который соответствует неравенству Гальярдо–Ниренберга–Соболева. Важна здесь не сама справедливость гипотезы, сколько то, что решение уравнения можно сконструировать явно (из неравенства Гальярдо–Ниренберга–Соболева следует лишь существование решения, удовлетворяющего оценке).

В заключительной **главе 5** содержится обсуждение гипотез (параграф 5.1) и благодарности (параграф 5.2).

Завершается работа списком литературы и приложением. В списке литературы работы идут в порядке появления ссылок на них в тексте работы. Работы автора по теме диссертации приводятся в конце отдельным списком.

Приложение содержит доказательства некоторых технических лемм, которые мы опускаем в основном тексте. Все эти леммы нужны для доказательства дополнительных результатов, для доказательства основных результатов, перечисленных в пункте 1.2.1, они не требуются.

1.3. История вопросов

1.3.1. Теоремы вложения типа Соболева

С различными аспектами теории пространств Соболева, включая теоремы вложения, читатель может познакомиться по книгам [2, 5, 6]. Также в этих книгах можно найти и более подробное историческое освещение развития теории и приложений.

Пространства Соболева были введены С. Л. Соболевым в 1936 году в работе [7], уже вскоре, в работе [8], появились и *теоремы вложения* для этих новых пространств[2]. Пусть X и Y — банаховы пространства функций

[2] Теоремам вложения Соболева предшествовало множество одномерных неравенств, которые мож-

на некотором множестве, такие что множество $X \cap Y$ плотно в пространстве X. Теоремами вложения называются утверждения типа "тождественное отображение $id : f \mapsto f$, заданное на множестве $X \cap Y$, продолжается до непрерывного отображения из пространства X в пространство Y" или проще $X \hookrightarrow Y$. Примером простейшей теоремы вложения может служить тот факт, что пространство $C^1([0,1])$ вкладывается в пространство $C([0,1])$. Теорема вложения может быть переформулирована на языке неравенств:

$$\|f\|_Y \lesssim \|f\|_X, \quad f \in Z, \quad Z \text{ плотно в } X.$$

Напомним читателю, что значок "$\lesssim$" обозначает выполнение неравенства с некоторой равномерной константой. Пусть Ω — ограниченная подобласть пространства $\mathbb{R}^d$. Классическое пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$ определяется нормой

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \sum_{|k| \leqslant l} \|\partial^k f\|_{L_p(\Omega)}, \quad l \geqslant 0,\ p \in [1, \infty].$$

Суммирование ведется по всем мультииндексам, сумма компонент которых не превосходит l. Классическая теорема вложения Соболева утверждает, что если область имеет достаточно регулярную границу, то $W_p^l(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, если $p \in (1, \frac{d}{l})$ и $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{l}{d}$. Если $p > \frac{d}{l}$, то имеет место вложение в класс непрерывных функций и даже класс Гёльдера. Метод доказательства Соболева основывался на представлении функции в виде суммы интегральных выражений от старших производных (*интегральном представлении*) и применении неравенства об интегральных операторах со слабой особенностью, которое теперь именуется неравенством Харди–Литтлвуда–Соболева. К сожалению, метод Соболева не охватывал интересный случай *предельного показателя суммируемости* $p = 1$. Прежде чем перейти к нему, переформулируем теорему вложения в однородной форме. Для этого введем в рассмотрение однородные пространства Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^d)$ (наши обозначения будут отличаться от

но трактовать как теоремы вложения пространств функций, некоторые из них собраны в работе [9].

принятых в литературе, обычно однородное пространство обозначают символом L_p^l, однако мы так делать не будем, потому что все рассматриваемые в дальнейшем пространства Соболева будут однородными), определяемые как замыкание класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ по полунорме

$$\|f\|_{W_p^l(\mathbb{R}^d)} = \sum_{|k|=l} \|\partial^k f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.3.1}$$

В однородной форме вложение Соболева формулируется так: $W_p^l(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^d)$, если $p \in (1, \frac{d}{l})$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{l}{d}$. Необходимость второго условия для вложения можно легко получить, если заметить, что неравенство

$$\|f\|_{L_q} \lesssim \|f\|_{W_p^l}$$

должно сохраняться при растяжениях $x \to \lambda x$. В конце 50-х годов независимо Гальярдо [10] и Ниренберг [11] распространили результаты Соболева на случай предельного показателя $p = 1$. Доказательства основывались на изящном мультилинейном неравенстве (которое теперь называется неравенством Гальярдо–Ниренберга), в простейшем случае $d = 2$ оно выглядит так:

$$\left|\langle f, g\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)}\right| \lesssim \|\partial_1 f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \|\partial_2 g\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.3.2}$$

Здесь функции f и g имеют компактный носитель.

Джон в работе [12] ввел пространство BMO функций ограниченной средней осцилляции (определение см. в пункте 1.4.3), что позволило установить вложение при предельном показателе суммируемости $p = \frac{d}{l}$, в этом случае $W_p^l \hookrightarrow \mathrm{BMO}$.

Примерно в то же время С. М. Никольский, В. П. Ильин, О. В. Бесов и их коллеги разработали обобщение теории соболевских пространств — теорию пространств Никольского H^m, пространств Бесова, а также других видов пространств, по разному измеряющих гладкость функций. В частности, стали рассматриваться пространства Соболева нецелой гладкости (когда “берется нецелое количество производных”), а также *анизотропные* аналоги пространств Соболева. Понятие “нецелое число производных” можно формализовать разными способами, в виде пространств Никольского, Бесова, Слободецкого и т.д.. Развитие и основные результаты этой теории изложены в книге [2], в том числе, и результаты о теоремах вложения. Мы не будем останавливаться на всех аспектах этой теории, нас интересуют лишь вложения с предельным показателем $p = 1$ для функций *во всем пространстве.*

Теория анизотропных теорем вложения распространялась на случай предельного показателя $p = 1$ суммируемости постепенно. Первые результаты были получены в работе [13] методом интегральных представлений, после чего В. А. Солонников в работе [3] совместил метод интегральных представлений (так называемое интегральное представление В. П. Ильина) с конструкцией Гальярдо–Ниренберга для получения вложения пространства Соболева в пространства Бесова, а также ряда тесно связанных с этим вопросом *мультипликативных неравенств.* Точка в этом вопросе была поставлена В. И. Колядой в работе [4], который доказал наиболее точные по интерполяционным параметрам теоремы вложения (в частности, из его результатов следует, что пространство $W_1^1(\mathbb{R}^d)$ вкладывается в пространство Лоренца $L_{\frac{d}{d-1},1}(\mathbb{R}^d)$, что, впрочем, было известно и немного ранее, см., например, работу [14]). Метод В. И. Коляды состоит в оценках монотонных перестановок функций.

Чтобы сформулировать результаты Солонникова и Коляды, нам понадобятся пространства Бесова (см. определение 1.4.5). Теорема Коляды утверждает, что $W_1^\alpha \hookrightarrow B_{q,1}^{\beta,1}$, где параметры q и β связаны соотношением однородности $\beta_j = \alpha_j(1 - \frac{q-1}{q}(\sum_i \alpha_i^{-1}))$, $j = 1, 2 \ldots, d$, в то время как теорема Солонникова утверждает вложение $W_1^\alpha \hookrightarrow B_{q,q}^{\beta,q}$ (в работе В. А. Солонникова приведено усиление, которое дает вложение в пространство W_q^β, если β — целое, см. теорему 3 в работе [3]). Более подробно о теореме Коляды будет сказано в пункте 1.4.1.

Казалось бы, в изучении теорем вложения с предельным показателем $p = 1$ поставлена точка. Однако, это оказалось совсем не так. Дело в том, что в случае предельного показателя $p = 1$ возможны неожиданные результаты, если функцию заменить на *векторное поле*, а частные производные — на некоторые дифференциальные операторы, которые это поле "перемешивают" (например, классические операторы дивергенции и ротора). В случае непредельного показателя это не может дать новых результатов. Впервые эффект был обнаружен Бургейном и Брезисом, см. работу [15]. Они показали, что уравнение $\operatorname{div} u = f$, $f \in L_d(\mathbb{R}^d)$, можно решить не только в классе L_∞ (что является двойственным утверждением к вложению $W_1^1 \hookrightarrow L_d$; в параграфе 4.2.2 мы покажем как можно *просто* решить это уравнение в указанных классах, не пользуясь двойственностью), но и в классе $W_d^1 \cap L_\infty$. Хотя факт кажется "элементарным", доказательство было трудным. Опять же, переходя по двойственности, теорему Бургейна и Брезиса можно переформулировать так: если векторное поле f в L_1 удовлетворяет условию $\operatorname{div} f = 0$, то для всякой функции $g \in W_d^1$ имеет место неравенство $|\int fg| \lesssim \|g\|_{W_d^1}\|f\|_{L_1}$ (без условия соленоидальности теорема становится неверной). Сразу же последовало множество работ, обобщающих эффект Бургейна–Брезиса на различные другие операторы (см. обзорную работу [16]). Наиболее приближена к нашим исследованиям недавняя работа [17] ван Шафтингена, который почти одновременно предложил более простой метод доказательства теоремы Бургейна–Брезиса, см. заметку [18]. Основываясь на своем методе (который сродни классическому методу Гальярдо–Ниренберга), ван Шафтинген установил, для каких однородных дифференциальных операторов A степени n имеет место неравенство

$$\|\partial^{n-1} f\|_{L_{\frac{d}{d-1}}} \lesssim \|Af\|_{L_1}. \tag{1.3.3}$$

Здесь f — векторное поле произвольной размерности на $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что оператор A *сокращающий*, если пересечение по всем $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ образов линейных операторов $A(\xi)$ (как часто делают, мы отождествили дифференциальный оператор и его символ) есть нуль (примером такого оператора может служить оператор $A(\xi) : \mathbb{R} \ni x \mapsto x\xi \in \mathbb{R}^d$, который соответствует классическому вложению Гальярдо–Ниренберга). Теорема ван Шафтингена утверждает, что неравенство (1.3.3) выполнено тогда и только тогда, когда оператор A эллиптичный и сокращающий.

В случае $k = l$ наша теорема 1.2.1 является частным случаем теоремы ван Шафтингена, однако в случае $k \neq l$ ситуация осложняется. В случае $N = 2$ теорема 1.2.1 превращается в частный случай теоремы Солонникова $W_1^{(k,l)}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W_2^{(k-\frac12-\frac{k}{2l},l-\frac12-\frac{l}{2k})}$. Однако общий случай $N > 2$ и $k \neq l$, по-видимому, не может быть сведен к двум указанным теоремам.

Нашей далеко идущей (но пока не достигнутой) целью является совмещение результатов В. И. Коляды и ван Шафтингена для характеризации тех анизотропно однородных дифференциальных операторов, для которых вложения с предельным показателем $p = 1$ возможны, а также доказательство наиболее точных теоремы вложения для таких операторов (точных в смысле интерполяционных параметров Бесова и Лоренца). Для изучения таких теорем кажется разумным установить наиболее точные аналоги неравенства Гальярдо–Ниренберга (1.3.2) в анизотропном случае. Поэтому изучение билинейных неравенств типа теоремы 1.2.4 и 1.2.5 и кажется автору важным.

Теорема 1.2.4 имеет предшественника. В работе [19] было доказано билинейное неравенство

$$\Big|\langle f, g\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\frac{k-1}{2},\frac{l-1}{2})}(\mathbb{R}^2)}\Big| \lesssim \big\|\partial_1^k f\big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \big\|\partial_2^l g\big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)},$$

которое можно считать предельным случаем утверждения $\mathrm{BE}(k,l,\frac{k-1}{2},\frac{l-1}{2},\sigma,\tau)$ при $\tau = 0$ и $\sigma \to \infty$. Доказательство было довольно трудным, более того, в работе [19] не делалось особого различия между билинейными и квадратичными неравенствами. Мы покажем, что это весьма различные по своей природе неравенства, см. пункт 2.5.1.

Теорма 1.2.5 существенно сложнее теоремы 1.2.4, хотя идеи доказательства сходны. Причина трудностей лежит в том, что в неэллиптическом случае мы работаем с *оценками Стрихартца*. Оценки Стрихартца (введены в [20]) — это оценки L_q-нормы решения однородного уравнения Шредингера в полупространстве в терминах граничных данных и правой части уравнения. Они основаны на оценках оператора ограничения преобразования Фурье на поверхность (см. пункт 1.4.3). Связь теоремы 1.2.5 с оценками Стрихартца не совсем прямая — основную ее трудность все же составляет наличие предельного показателя суммируемости $p = 1$; осцилляторные интегральные операторы, связанные с оценками Стрихартца, просто усложняют доказательство. В пункте 2.5.3 описана связь оценок Стрихартца с соболевскими теоремами вложения.

1.3.2. Задачи о неизоморфности

Более подробный исторический обзор и более детальное описание результатов можно найти в книгах [21–23]

Задачи об изоморфной классификации банаховых пространств восходят к польской школе Банаха 30-х годов. Мы не имеем возможности хоть сколько-нибудь полно осветить проблему, поэтому остановимся на вопросе об изоморфизмах банаховых пространствах гладких функций. В начале 50-х годов А. А. Милютин показал, что для всяких двух метрических несчетных компактов K_1 и K_2 пространства $C(K_1)$ и $C(K_2)$ непрерывных функций на них изоморфны. Примерно в то же время Гротендик в работе [24] анонсировал, что при $d \geqslant 2$ пространства $C^1(\mathbb{T}^d)$ и $C(\mathbb{T}^d) = C(K)$ не изоморфны[3]. Пер-

[3] Имеет место исторический курьез: сначала Гротендик утверждал, что эти два пространства изоморфны.

вое опубликованное доказательство появилось намного позже и принадлежит Г. М. Хенкину, см. работу [25]. Он доказал, что указанные пространства не могут быть даже равномерно гомеоморфны (как топологические пространства). Доказательство Хенкина основывалось на методе усреднения (и в частности, сильно использовало симметричность задачи).

В 1975 году С. В. Кисляков в работе [26] показал, что пространство $C^l(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 2$, не изоморфно никакому фактор-пространству пространства $C(K)$. Его метод связывал задачи об изоморфизме такого типа с соболевскими теоремами вложения с предельным показателем $p = 1$ (также в его работе было показано, что оператор вложения Соболева с предельным показателем не является r-абсолтно суммирующим ни при каком r, см. определение 1.4.21, откуда следовало, в частности, что пространства Соболева W_1^ℓ на области размерности не ниже 2 не изоморфны пространствам типа L_1). В работах [19, 27, 28] исследовались обобщения этого метода на случай анизотропных пространств Соболева. Также было установлено, что пространства гладких функций не имеют *локальной безусловной структуры* (см. книгу [22]). В работах [29, 30] исследовались обобщения на случай пространств, задаваемых дифференциальными операторами (пространств $C^P(\mathbb{T}^d)$). А именно, в работе [29] был доказан частный случай нашей теоремы 1.2.9, когда допустимая гиперплоскость ортогональна вектору $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$ (то есть в случае, когда среди полиномов P_j есть два, старшие части которых относительно стандартной однородности непропорциональны). Такая теорема — недостаточно общая в том смысле, что она неприменима к случаю смешанной однородности. Доказательство в работе [29] проходит по классической схеме: с пространством связывается некоторый оператор типа вложения Соболева при предельном показателе (здесь это вариант теоремы 1.2.1, важно, что оператор действует в гильбертово пространство, его предельность в таком смысле также важна) и из его свойства не быть 2-суммирующим делается вывод об изоморфном типе пространства C^P. Таким образом, недостающим звеном являлалсь теорема 1.2.1 (кроме того, более общий случай требует намного более изощренного сведения к теореме вложения).

Отметим, что с точки зрения теории банаховых пространств вопрос, на который отвечает теорема 1.2.9 — далеко не самый важный из открытых. Намного более интересным представляется вопрос о том, изоморфны ли пространства $C^1(\mathbb{T}^2)$ и $C^1(\mathbb{T}^3)$. Как и относительно многих других вопросов теории банаховых пространств, нет совершенно никаких продвижений или предположений, как его можно было бы разрешить. Даже такие "побочные" вопросы теории банаховых пространств, как теорема 1.2.9, часто бывают связаны с тонкими задачами анализа, такими как теорема 1.2.1.

1.3.3. Размерность векторных мер, подчиненных дифференциальным условиям

В этом разделе мы изложим историю нашего второго приложения теорем вложения, круга вопрсов, связанных с теоремой 1.2.11. Эту теорему можно рассматривать как проявление принципа неопределнности (см., например, книгу [31]). Классическая теорема братьев Рисс утверждает, что аналитическая мера ограниченной вариации на окружности (т.е. мера, у который коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю) абсолютно непрерывна по мере Лебега. Обобщить это утверждение на случай произвольной размерности позволяет знаменитая теорема Укиямы из работы [32]. Пусть $\theta : S^{d-1} \to \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ — бесконечно гладкое отображение. Предположим, что выполнено условие Укиямы: для всякого вектора $\xi \in S^{d-1}$ векторы $\theta(\xi)$ и $\theta(-\xi)$ не пропорциональны над $\mathbb{C}$. В таком случае, любая мера из класса $\mathcal{M}_\theta$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^d$. Класс $\mathcal{M}_\theta$ состоит из векторных мер μ, таких что для всякого ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$

выполнено соотношение $\hat{\mu}(\xi) \parallel \theta(\frac{\xi}{|\xi|})$. Это утверждение по сути принадлежит Укияме (хотя он его не формулировал), мы выведем его из теоремы Укиямы в пункте 1.4.3.

С другой стороны, из фольклора известно, что если $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$, то $\dim \nabla f \geqslant d-1$, например, см. лемму 3.76 в книге [33]. Переводя на наш язык, если $\mu \in \mathcal{M}_{i\,\mathrm{Id}}$, здесь Id — тождественное отображение на сфере S^{d-1}, то $\dim \mu \geqslant d-1$. М. Войчеховский и М. М. Рогинская в работе [34] предложили следующую гипотезу.

Гипотеза 1.3.1. *Пусть $\theta : S^{d-1} \to \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ есть отображение класса C^∞. Если образ отображения θ содержит d линейно независимых векторов, то для всякой меры $\mu \in \mathcal{M}_\theta$ верно неравенство $\dim \mu \geqslant d-1$.*

В той же работе они показали, что если образ отображения θ содержит хотя бы два непропорциональных вектора, то $\dim \mu \geqslant 1$ для всех $\mu \in \mathcal{M}_\theta$. Их подход опирался на теорему братьев Рисс и некоторую оценку в пространстве L_2

Теорма 1.2.11 получена развитием метода М. Войчеховского и М. М. Рогинской. Теорема братьев Рисс заменена усиленной леммой Фростмана, леммой 4.1.1, оценка же в L_2 — теоремой вложения. Отметим, что все утверждения о размерности, которые мы приводили в этом разделе — изотропно однородны, в то время как теорема 1.2.11 допускает анизотропную однородность. Остается открытым вопрос о необходимости однородности вообще в задачах такого типа.

1.4. Вспомогательные сведения

1.4.1. Вещественный анализ и геометрическая теория меры

Размерность. Мы будем пользоваться размерностью Хаусдорфа. За базовыми свойствами этого понятия читатель может обратиться, например, к книгам [35, 36]. Одним из простых критериев для определения размерности является лемма Фростмана.

Лемма 1.4.1 (Лемма Фростмана). *Пусть B — борелевское*[4] *множество в $\mathbb{R}^d$. Его размерность Хаусдорфа есть супремум чисел α, таких что существует ненулевая неотрицательная мера μ_α с носителем в множестве B, удовлетворяющая условию*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\, r < 1 \quad \mu_\alpha(B_r(x)) \leqslant r^\alpha. \tag{1.4.1}$$

Нижняя размерность Хаусдорфа (см. определение 1.2.10) меры μ есть наибольшее число α, такое что мера μ “не видит” множеств размерности не более α. Поэтому нижнюю размерность Хаусдорфа разумно считать степенью сингулярности меры. Отметим, что если мера μ вещественнозначная и неотрицательная, то из выполнения условия (1.4.1) для всех значений параметров x и r следует, что размерность меры μ не меньше, чем α. Оказывается, что аналогичный вывод можно сделать и для векторных мер (для которых никаких условий положительности не предполагается), см. пункт 4.1.1.

Теорема Витали. Приведем классическую теорему Витали (доказательство можно найти, например, в книге [36], теорема 2.8). Мы сформулируем ее в чуть упрощенной форме.

Теорема 1.4.2 (Теорема Витали о покрытии). *Пусть μ — борелевская неотрицательная мера в пространстве $\mathbb{R}^d$, A — борелевское множество,*

[4] Лемма Фростмана верна и без этого условия, однако доказательство становится намного сложнее.

а $\mathfrak{B}$ — набор замкнутых шаров. Пусть множество A и набор $\mathfrak{B}$ таковы, что любая точка множества A является центром шара из набора $\mathfrak{B}$ произвольно малого радиуса. В таком случае, существует поднабор $\mathfrak{B}'$ набора $\mathfrak{B}$, такой что его шары дизъюнктны, и выполнено условие $\mu(A \setminus \cup_{B\in\mathfrak{B}'}B) = 0$ (объединение берется по всем шарам набора $\mathfrak{B}'$).

Деление гладких функций на полиномы.

Лемма 1.4.3. *Пусть P — полином в пространстве $\mathbb{R}^d$. Если функция $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ равна нулю на множестве корней многочлена P и ее носитель не пересекается с множеством $\{x \in \mathbb{R}^d \mid P(x) = \nabla P(x) = 0\}$, то $\frac{\varphi}{P} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что функция φ имеет носителем достаточно малый шар, центр x_0 которого лежит на поверхности $\{x \in \mathbb{R}^d \mid P(x) = 0\}$, причем на множестве $\operatorname{supp}\varphi$ функция $\partial_d P$ не обращается в нуль (общий случай можно вывести из рассматриваемого при помощи разбиения единицы).

Рассмотрим сначала простейший случай размерности 1. В этом случае, полином P имеет вид $P(x) = (x - x_0)Q(x)$, где линейная функция $(x - x_0)$ не делит многочлен Q, так как $P'(x_0) \neq 0$. Функция $\frac{\varphi}{P}$ есть функция класса C^∞ вне точки x_0, поэтому достаточно доказать, что всякая ее производная непрерывно продолжается в точку x_0. Но это условие легко проверить, если представить функцию φ в окрестности точки x_0 ее многочленом Тейлора, например, непрерывность функции $\frac{\varphi}{P}$ в точке x_0 следует из того, что $\varphi(x) = (x - x_0)\varphi'(x_0) + o(x - x_0)$, т.е. $\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi}{P}(x) = \frac{\varphi'(x_0)}{Q(x_0)}$; для старших производных рассуждение аналогично (надо приблизить функцию φ многочленом Тейлора соответствующего порядка).

Случай произвольной размерности можно легко вывести из одномерного случая, сделав замену переменных $x \to y$, $y_j = x_j$ при $j = 1, 2, \ldots, d-1$

и $y_d = P(x)$. Благодаря условию $\partial_d P \neq 0$, такая замена переменных есть C^∞-гомеоморфизм на образ на носителе функции φ, то есть, она переведет функцию φ в некоторую функцию $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$, а полином P — в полином y_n. Применяя разобранный одномерный случай к функции $\tilde{\varphi}$, получаем, что $\frac{\tilde{\varphi}}{y_n} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$, а следовательно, $\frac{\varphi}{P} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$. □

Аналитическое семейство обобщенных функций. Пусть $\delta \in \mathbb{C}$ — такое число, что $\Re\delta \in (-\infty, 2)$. Определим обобщенную функцию $\mathrm{v.\,p.}\, x^{-\delta}$ согласно правилу

$$\langle \mathrm{v.\,p.}\, x^{-\delta}, \varphi \rangle = \mathrm{v.\,p.} \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sign} x |x|^{-\delta} \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

(интеграл понимается в смысле главного значения лишь в случае $\Re\delta \geqslant 1$). Это семейство обобщенных функций аналитично по параметру δ в полосе определения (см. книгу [37]), его преобразование Фурье можно вычислить по формуле (также см. книгу [37])

$$\mathcal{F}\big[\, \mathrm{v.\,p.}\, x^{-\delta} \big] = 2i\Gamma(1-\delta) \cos \frac{\delta\pi}{2} \operatorname{sign} x |x|^{\delta - 1}, \quad \delta \in (0, 2). \tag{1.4.2}$$

Функции на подмногообразиях. Классическим учебником, в котором изложена теория обобщенных функций на многообразиях, является книга [38]. Пусть S — замкнутое бесконечно гладкое (вложенное) подмногообразие пространства $\mathbb{R}^d$ размерности $d-1$. Под этим мы понимаем, что в окрестности каждой своей точки x множество S может быть представлено как график бесконечно гладкой функции в некоторых координатах, и такие представления согласованы как картирующие отображения. С подмногообразием S естественным образом можно связать пространство $\mathfrak{D}(S)$ бесконечно гладких функций на S с компактным носителем, с естественной топологией. Сопряженное пространство $\mathfrak{D}'(S)$ состоит из обобщенных функций на подмногообразии S (скалярное произведение на гладких функциях задается интегралом по мере Лебега на подмногообразии S). Пространство $\mathfrak{D}(S)$ связано с пространством $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ посредством естественного оператора проекции

$$\Pi_S : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathfrak{D}(S),$$

действующего согласно формуле

$$\Pi_S[\varphi] = \varphi|_S, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d).$$

Лемма 1.4.4. [5] *Оператор Π_S допускает правый обратный.*

Доказательство. Требуется доказать существование непрерывного оператора $\mathrm{Ext} : \mathfrak{D}(S) \to \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$, такого что $\Pi_S \mathrm{Ext}$ есть тождественный оператор. Пусть $\{\zeta_n\}_n$ — локально конечное разложение единицы, такое что на носителе каждого элемента этого разложения поверхность S представляется графиком функции. Определим оператор Ext по формуле $\mathrm{Ext}(f) = \sum_n \mathrm{Ext}_n(f\zeta_n)$, где операторы Ext_n будут определены чуть ниже. При фиксированном n можно, не умаляя общности, считать, что $S \cap \operatorname{supp} \zeta_n = \{(x, h(x)) \mid x \in \mathbb{R}^{d-1}, x \in U_n\}$, здесь U_n — окрестность нуля в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$, кроме того, $h(0) = 0$. Пусть $\psi_n \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ — функция, такая что $\psi_n(0) = 1$ и носитель функции ψ_n содержится в достаточно малой окрестности нуля. Отождествим функции из $\mathfrak{D}(S \cap \operatorname{supp} \zeta_n)$ с функциями из $\mathfrak{D}(U_n)$ каноническим образом. Зададим оператор Ext_n согласно формуле

$$\mathrm{Ext}_n[\varphi](x, \tilde{x}) = \varphi(x)\psi_n(\tilde{x} - h(x)), \quad \varphi \in \mathfrak{D}(U_n).$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что носитель функции ψ_n можно выбрать столь малым, чтобы пересечение носителя функции $\mathrm{Ext}_n[\varphi]$ с множеством S содержалось в окрестности U_n. Ясно, что этот оператор непрерывно

[5] Отметим, что для доказательства этой леммы было бы разумно просто применить теорему об открытом отображении. Однако этого сделать нельзя, так как $\mathfrak{D}$ не есть пространство Фреше.

действует из пространства $\mathfrak{D}(U_n)$ в пространство $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$, кроме того, ясно, что сумма $\sum_n \mathrm{Ext}_n(f\zeta_n)$ не меняет своего значения на поверхности S. $\square$

Немного пространств Бесова. Пространства Бесова были введены О. В. Бесовым в работах [39] и [40]. Современное описание теории этих пространств можно найти в книгах [2, 41]. В первой книге используется более классический подход с позиций вещественного анализа, во второй — с позиций гармонического анализа. Начнем описание с первого подхода. Пусть $i \in [1..d]$ (напомним читателю, что это означает, что i есть произвольное целое число отрезка $[1, d]$), $s \in \mathbb{N}$, а $h > 0$. Символом $\Delta_i^s(h)$ мы будем обозначать оператор конечной разности порядка s с шагом h, примененный по i-ой координате. Его действие задается по правилу

$$\Delta_i^s(h)\big[f\big](x) = \sum_{j=0}^{s}(-1)^j C_s^j f\big(x + h(s-j)\big). \tag{1.4.3}$$

Пусть l_i — вещественное число, которое отвечает "номеру производной" по i-ой координате, q — показатель суммируемости ($1 \leqslant q \leqslant \infty$), а $\theta \in [1, \infty]$ — интерполяционный параметр. Определим полунорму на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$\|f\|_{\mathcal{B}_q^{i,l_i,\theta}} = \left(\int\limits_0^\infty \Big(h^{-l_i}\big\|\Delta_i^s(h)f\big\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}\Big)^\theta \frac{dh}{h}\right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{1.4.4}$$

Здесь s — вспомогательный параметр, на него наложено требование $s > l_i$. В случае, если L_q-норма в определении полунормы (1.4.4) заменена на $L_{q,r}$-норму Лоренца ($1 \leqslant r \leqslant \infty$), то получившуюся полунорму мы будем отмечать символом $\mathcal{B}_{q,r}^{i,l_i,\theta}$. Важным свойством таких полунорм является то, что они не зависят от параметра s, т.е. для всяких чисел s_1 и s_2, $s_1, s_2 > l_i$, полунормы, заданные формулами (1.4.4) с s_1 и s_2 вместо s, эквивалентны.

Определение 1.4.5. Пусть $l = (l_1, l_2, \dots, l_d)$ — вектор с неотрицательными координатами. Однородным пространством Бесова $B^{l,\theta}_{q,r}$ назовем пространство, задаваемое полунормой

$$\|f\|_{B^{l,\theta}_{q,r}} = \sum_{j=1}^{d} \|f\|_{\mathcal{B}^{j,l_j,\theta}_{q,r}}.$$

Отметим очевидные вложения $B^{l,\theta_1}_{q,r_1} \hookrightarrow B^{l,\theta_2}_{q,r_2}$ если $r_2 \geqslant r_1$ и $\theta_2 \geqslant \theta_1$. Процитируем теорему 4 работы [4].

Теорема 1.4.6 (Теорема Коляды). *Пусть $m = (m_1, m_2, \dots, m_d)$ — вектор из натуральных чисел, $d \geqslant 2$, $1 < q < \infty$, а числа l_j удовлетворяют соотношению*

$$l_j = m_j\left(1 - \frac{q-1}{q}\Big(\sum_i m_i^{-1}\Big)\right), \ j = 1, 2 \dots, d. \qquad (1.4.5)$$

В таком случае, $W_1^m \hookrightarrow B^{l,1}_{q,1}$.

Поведение многочленов на бесконечности. Пусть P — многочлен в пространстве $\mathbb{R}^d$. Нас будет интересовать его асимптотическое поведение на бесконечности. Если многочлен в некотором смысле невырожден (эллиптичен), то оказывается, что его асимптотику легко вычислить. Сейчас мы изложим результаты работы [42] В. П. Михайлова, в которой это было сделано. Главной назовем такую грань F многогранника Ньютона $\mathcal{N}(P)$, к которой можно провести внешнюю нормаль с хотя бы одной неотрицательной координатой.

Определение 1.4.7. Пусть E — некоторое подмножество множества $\mathbb{Z}^d_+$, а P — полином. Частью многочлена P, соответствующей множеству E, назовем многочлен P_E, заданный согласно формуле

$$P_E(\xi) = \sum_{k \in E} a_k \xi_k, \ \text{если } P(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d_+} a_k \xi^k.$$

Пусть F — какая-нибудь грань многогранника $\mathcal{N}(P)$. Отметим, что многочлен P_F анизотропно однороден (с некоторой степенью однородности).

Определение 1.4.8. Будем говорить, что многочлен P невырожден, если для всякой главной грани F многогранника $\mathcal{N}(P)$ многочлен P_F не имеет вещественных корней вне координатных плоскостей.

Будем также говорить, что многочлен P полный, если $P(0) \neq 0$ и грань $\{0\}$ не является главной. Это свойство означает, что кроме свободного члена в многочлен P также входят и члены $\xi_j^{k_j}$ при всех j. Процитируем теорему 5.1 из работы [42].

Теорема 1.4.9 (Теорема Михайлова). *Пусть многочлен P полный и невырожденный. В таком случае, найдется константа $c > 0$, такая что*

$$|P(\xi)| + c \asymp \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{N}(P)} \xi^{2k}}, \quad \xi \to \infty.$$

То есть, на бесконечности полином P ведет себя просто как сумма модулей его членов.

1.4.2. Теория банаховых пространств и функциональный анализ

Теория интерполяции. Теория интерполяции является классическим инструментом функционального анализа для доказательства непрерывности операторов. Она изложена, например, в книгах [43, 44]. Комплексный метод с параметром θ мы обозначаем квадратными скобками с индексом θ. Пусть X — банахово пространство. Символом $L_p(X, w)$ мы обозначаем пространство X-значных сильно измеримых функций на некотором σ-конечном пространстве с мерой, суммируемых в степени p с весом w (весом мы называем любую положительную измеримую функцию); о сильной измеримости и определении пространств такого вида см. учебник [1]. Процитируем теорему 5.1 книги [41].

Теорема 1.4.10. *Пусть* (X_0, X_1) *— банахова пара,* $p_0, p_1 \in [1, \infty]$, *а* w_0 *и* w_1 *— пара весов. В таком случае, для всякого числа* $\theta \in (0,1)$ *имеет место интерполяционная формула*

$$\Big[L_{p_0}(X_0, w_0), L_{p_1}(X_1, w_1)\Big]_\theta = L_p\big([X_0, X_1]_\theta, w\big),$$

здесь $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ *и* $w = w_0^\theta w_1^{1-\theta}$.

Кроме того, нам понадобится интерполяция аналитических семейств операторов. Для такой интерполяции обычно используется лемма Стейна (см. книги [45, 46]).

Определение 1.4.11. Пусть $\{T_\alpha\}$, $\alpha \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \in [0,1]\}$, есть семейство ограниченных линейных операторов из пространства L_1 в пространство L_∞, таких что для всяких простых функций f и g функция

$$\alpha \to \int T_\alpha[f]g$$

непрерывна в полосе $\Re\alpha \in [0,1]$, аналитична в ее внутренности и по модулю не превосходит функцию $C_{f,g}e^{e^{b|\Im\alpha|}}$, здесь $b < \pi$ — некоторая абсолютная константа (не зависящая от функций f и g). Семейство операторов $\{T_\alpha\}$, удовлетворяющее этим условиям, назовем допустимым.

Лемма 1.4.12 (Интерполяционная лемма Стейна). *Пусть семейство операторов* T_α *допустимо, а также удовлетворяет следующим неравенствам* (b *есть некоторая абсолютная константа, меньшая* π):

$$\|T_{iy}\|_{\mathcal{L}(L_{p_0}, L_{q_0})} \lesssim e^{e^{b|y|}}, \quad \|T_{1+iy}\|_{\mathcal{L}(L_{p_1}, L_{q_1})} \lesssim e^{e^{b|y|}}.$$

В таком случае, T_t *есть непрерывный оператор из пространства* L_{p_t} *в пространство* L_{q_t}, *где*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}; \quad t \in (0,1).$$

Свойства пространства $C(K)$. Всюду в тексте работы символом K мы обозначаем хаусдорфово компактное топологическое пространство, т.е. компакт. В этом пункте мы изложим некоторые известные свойства пространства $C(K)$, доказательства можно найти в книгах [21, 23].

Теорема 1.4.13 (Теорема Милютина). *Все пространства $C(K)$, где K пробегает множество несчетных метрических компактов, изоморфны.*

Теорема 1.4.14. *Пространство $C(K)$ изоморфно любой своей гиперплоскости (а стало быть, и любому подпространству конечной коразмерности), если компакт K метризуем и бесконечен.*

Также приведем аналог теоремы Кантора–Бернштейна для банаховых пространств (приводимая теорема имеет дело с абстрактным пространством, а не только типа $C(K)$, но мы ее будем использовать лишь в этом контексте; общую формулировку читатель может найти в книге [21], теорема 2.2.3). Напомним, что подпространство $Y \subset X$ называется дополняемым, если существует линейный непрерывный проектор из пространства X на пространство Y.

Теорема 1.4.15 (Теорема Пелчинского). *Пусть K есть метрический несчетный компакт. Пусть банахово пространство X таково, что X вкладывается в $C(K)$ дополняемо и $C(K)$ вкладывается в X дополняемо. В таком случае, $X \cong C(K)$.*

$\mathcal{L}_p$-пространства. Понятие $\mathcal{L}_p$-пространства — естественное с точки зрения конечномерной банаховой структуры обобщение понятия пространства $L_p(\mu)$. Некоторые свойства $\mathcal{L}_p$-пространств изложены, например, в книге [22]. Несмотря на то, что $\mathcal{L}_p$-пространства давно служат естественным инструментом теории банаховых пространств, по-видимому, книги, в которой их теория описана полностью, не существует, так что нам приходится отсылать читателя к оригинальным статьям [47, 48].

Определение 1.4.16. Пусть $p \in [1, \infty]$. Будем говорить, что банахово пространство X есть $\mathcal{L}_p$-пространство, если существует число $\lambda \geqslant 1$, такое что для всякого конечномерного подпространства $E \subset X$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, подпространство $F \subset X$ и обратимый оператор $u : F \to \ell_p^n$, такие что $E \subset F$ и $\|u\|\|u^{-1}\| \leqslant \lambda$.

Все пространства $L_p(\mu)$ являются $\mathcal{L}_p$-пространствами, кроме того, например, $C(K)$ есть $\mathcal{L}_\infty$-пространство. Следующие три теоремы доказаны в работе [48] (они объединены там в теорему 3.2).

Теорема 1.4.17. *Любое дополняемое подпространство $\mathcal{L}_\infty$-пространства есть $\mathcal{L}_\infty$-пространство.*

Теорема 1.4.18. *Банахово пространство X есть $\mathcal{L}_p$-пространство тогда и только тогда, когда X^* есть $\mathcal{L}_{p'}$ пространство ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).*

Теорема 1.4.19. *Пусть банахово пространство X есть $\mathcal{L}_p$-пространство. Тогда существует константа λ, такая что для всякого конечномерного подпространства E пространства X найдется число $n \in \mathbb{N}$, подпространство $F \subset X$, проектор из X на пространство F с нормой не более λ и обратимый оператор $u : F \to \ell_p^n$, такие что $E \subset F$ и $\|u\|\|u^{-1}\| \leqslant \lambda$.*

Предложение 1.4.20. *Пусть F — подпространство банахова пространства E. Предположим, что F есть $\mathcal{L}_\infty$ — пространство. Тогда аннулятор пространства F дополняем в пространстве E^*.*

Доказательство. Рассмотрим естественное фактор-отображение $\pi_{F^*} : E^* \to F^*$. Достаточно предъявить оператор j_{F^*}, обратный к нему в следующем смысле: $\pi_{F^*} j_{F^*} = \mathrm{Id}_{F^*}$. В таком случае, оператор $\mathrm{Id}_{E^*} - j_{F^*}\pi_{F^*}$ есть проектор на пространство $\mathrm{Ann}_{E^*} F$. Действительно, квадрат этого оператор равен ему самому и он тождественен ровно на пространстве $\mathrm{Ann}_{E^*} F$. Мы построим оператор j_{F^*} как предел аналогичных операторов на конечномерных подпространствах пространства F^*.

Пусть G — произвольное конечномерное подпространство пространства F^*. Выберем конечномерное подпространство H, дополняемое в пространстве F^* и изоморфное пространству ℓ_1^n с некоторым n (такое что нормы операторов проекции и изоморфизма ограничены некоторой константой, не зависящей от параметра n), $G \subset H$, при помощи теоремы 1.4.19. Воспользуемся следующим очевидным свойством пространства ℓ_1^n (иногда его называют проективностью): если X и Y суть банаховы пространства, $T : X \to Y$ — проекция, то для любого оператора $S : \ell_1^n \to Y$ существует оператор $S' : \ell_1^n \to X$ (равномерно ограниченный в терминах нормы оператора S), такой что $TS' = S$. Это свойство позволяет в нашем случае построить оператор $S_G : \ell_1^n \to E^*$, такой что $\pi_H \pi_{F^*} S_G = u^{-1}$ (символом u мы обозначили оператор, реализующий изоморфизм пространств ℓ_1^n и H, символом π_H — проекцию из пространства F^* на пространство H). Иными словами, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
E^* \arrow[rr, "\pi_H \pi_{F^*}"] & & H \\
& \ell_1^n \arrow[ul, "S_G"] \arrow[ur, "u^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Определим оператор j_G согласно правилу $j_G = S_G u \pi_H$ или диаграмме

$$\begin{tikzcd}
E^* & F^* \arrow[l, "j_G"'] \arrow[d, "\pi_H"] \\
\ell_1^n \arrow[u, "S_G"] & H \arrow[l, "u"']
\end{tikzcd},$$

тогда на пространстве G имеет место равенство $j_G \pi_{F^*} = \mathrm{Id}_G$. Таким образом, мы построили приближения оператора j_{F^*}. Оператор j_{F^*} можно построить как предельную точку направленности $\{j_G\}_G$ в $*$-слабой операторной топологии на пространстве $\mathcal{L}(F^*, E^*)$. □

Абсолютно суммирующие операторы и теорема Гротендика. Теория абсолютно суммирующих операторов изложена, например, в книгах [22, 23].

Определение 1.4.21. Пусть X и Y — банаховы пространства, T — линейный непрерывный оператор из пространства X в пространство Y. Назовем его r-абсолютно суммрующим, если для всякой конечной последовательности $\{x_k\}_k$ элементов пространства X выполнено неравенство

$$\sum_k \|T(x_k)\|_X^r \lesssim \sup_{\|y^*\|_{Y^*}\leqslant 1} \sum_k |y^*(x_k)|^r,$$

символом Y^* обозначено двойственное с пространством Y пространство, а константа в неравенстве не зависит от последовательности $\{x_k\}_k$.

Определение 1.4.22. Пусть X — банахово пространство. Последовательность его элементов $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ назовем слабо r-суммируемой, если величина

$$\sup_{\|x^*\|_{X^*}\leqslant 1} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, x_k\rangle|^r$$

конечна. Назовем последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сильно r-суммируемой, если ряд $\sum_k \|x_k\|^r$ сходится.

Сильно r-суммируемые последовательности будем для краткости называть просто r-суммируемыми. Нетрудно видеть, что линейный непрерывный оператор $T : X \to Y$ есть r-абсолютно суммирующий, если и только если он переводит слабо r-суммируемые последовательности пространства X в r-суммируемые последовательности пространства Y.

Теорема 1.4.23 (**Теорема Гротендика**). *Любой линейный непрерывный оператор из $\mathcal{L}_1$-пространства в гильбертово пространство есть* 1-*абсолютно суммирующий оператор.*

В частности, из этой теоремы следует, что если для пространства X нашелся не 1-абсолютно суммирующий оператор $T : X \to H$, где H — гильбертово пространство, то X не есть $\mathcal{L}_1$-пространство.

Процитируем также теорему 2.2.8 книги [22].

Теорема 1.4.24. *Если оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ — p-абсолютно суммирующий и $p \leqslant q$, то оператор T — q-абсолютно суммирующий.*

Дополняемость инвариантных подпространств пространств Лебега. Пусть G — локально-компактная коммутативная группа, μ_G — мера Хаара на ней.

Определение 1.4.25. Пусть X — банахово пространство функций на G. Говорят, что X есть инвариантое пространство, если $\|f\|_X = \|f(g\cdot)\|_X$ для всякого $g \in G$ (в частности, функция $f(g\cdot)$ тоже принадлежит пространству X).

Примерами инвариантных пространств могут служить пространства Лебега L_p или однородные простанства Соболева. Почти все пространства, с которыми мы работаем, являются инвариантными. Важным принципом является тот факт, что если инвариантное пространство X дополняемо в пространстве L_p, то существует и инвариантный проектор на пространство X. Эта теорема проста для случая компактной группы G и принадлежит Розенталю, работа [49], для случая локально-компактной группы G.

Теорема 1.4.26 (**Теорема Розенталя**). *Пусть X — инвариантное дополняемое подпространство пространства $L_p(\mu_G)$. Тогда существует непрерывный линейный проектор $P_X : L_p(\mu_G) \to X$, такой что*

$$\forall g \in G \quad P_X[f](g\cdot) = P_X[f(g\cdot)].$$

Нетрудно видеть, что инвариантные операторы из L_p в L_p суть мультипликаторы с ограниченными символами, то есть операторы, заданные по правилу (1.1.1) с некоторой измеримой ограниченной функцией m на двойственной группе.

1.4.3. Общий гармонический анализ

Оценки осцилляторных интегралов. Напомним читателю классическую лемму Ван-дер-Корпута (иногда ее называют второй леммой Ван-дер-Корпута), см. книгу [31], пункт 2.5.2.

Лемма 1.4.27 (Вторая лемма Ван-дер-Корпута). *Предположим, что функция F дважды дифференцируема на интервале (a,b) и функция F'' не обращается в нуль на этом интервале. Тогда*

$$\Big|\int\limits_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| \leqslant \frac{8\sqrt{\pi}}{\sqrt{\min\limits_{\xi\in(a,b)}|F''(\xi)|}}.$$

Из леммы Ван-дер-Корпута нетрудно вывести следующее утверждение (см., например, книгу [50]). Символом $B_r(x)$ мы обозначаем евклидов шар радиуса r с центром в точке x.

Лемма 1.4.28. *Пусть функция $\Psi : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема, выпукла и удовлетворяет условиям $\Psi(0) = 0 = \nabla\Psi(0)$ (шар лежит в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$). Пусть кривизна поверхности $(x, \Psi(x))$ всюду не менее некоторого числа c_0. Тогда для всякой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{d-1})$ с носителем в шаре $B_\varepsilon(0)$ имеет место оценка*

$$\Big|\int\limits_{B_\varepsilon(0)} \varphi(x)e^{2\pi i(\langle a,x\rangle + b\Psi(x))}\,dx\Big| \lesssim (1+|a|+|b|)^{-\frac{d-1}{2}}\big(\|\varphi\|_{L_\infty} + \|\nabla\varphi\|_{L_1}\big),$$

$$a \in \mathbb{R}^{d-1}, b \in \mathbb{R}.$$

Эта оценка равномерна по параметру c_0 и C^3-норме функции Ψ.

Определение 1.4.29. Пусть S есть C^∞-гладкое замкнутое (вложенное) подмногообразие пространства $\mathbb{R}^d$ размерности $d-1$. Будем говорить, что оно удовлетворяет условию выпуклости, если в окрестности каждой точки оно представляется как график выпуклой функции с невырожденным вторым дифференциалом.

Символом λ_S будем обозначать меру Лебега на подмногообразии S. Лемма 1.4.28, в частности, утверждает, что

$$\Big|\mathcal{F}\big[\psi d\lambda_S\big](\xi)\Big| \lesssim \big|1+|\xi|\big|^{-\frac{d-1}{2}}, \quad \psi \in \mathfrak{D}(S),$$

если многообразие S удовлетворяет условию выпуклости. Эта оценка точна. Пусть носитель функции $\psi \in \mathfrak{D}(S)$ мал настолько, что у разных точек в этом множестве разные нормали. В таком случае, сдвигом и поворотом координат мы можем привести поверхность S к виду $S = (x, \Psi(x))$, где функция Ψ удовлетворяет условиям леммы 1.4.28. Если $\xi \in \mathbb{R}^d$, символом $x(\xi)$ обозначим точку на поверхности S, такую что нормаль к поверхности S в этой точке параллельна ξ (если такой точки нет, то $x(\xi) = \infty$). В таком случае, имеет место асимптотическая формула

$$\mathcal{F}\big[\psi d\lambda_S\big](\xi) = \begin{cases} |K(x(\xi))|^{-\frac{1}{2}}|\xi|^{-\frac{d-1}{2}}e^{2\pi i(\langle\xi,x(\xi)\rangle-\frac{d}{4})} + O(|\xi|^{-\frac{d+1}{2}}), & x(\xi) \neq \infty; \\ O(|\xi|^{-N}), \quad \text{для всякого } N \in \mathbb{N}, & x(\xi) = \infty, \end{cases} \tag{1.4.6}$$

символом K мы обозначили гауссову кривизну поверхности S (естественно, мы предполагаем, что многообразие S удовлетворяет условию выпуклости 1.4.29). Эта формула получена в работах [51, 52], см. также книгу [50].

Определим оператор ограничения $\mathcal{R}_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to C^\infty(S)$ по правилу

$$\mathcal{R}_S[\varphi] = \hat{\varphi}|_S. \tag{1.4.7}$$

Теорема 1.4.30 (Теорема об ограничении). *Пусть γ — подмногообразие плоскости, удовлетворяющее условию выпуклости из определения* 1.4.29.

Оператор $\mathcal{R}_\gamma$ непрерывен из пространства $L_p(\mathbb{R}^2)$ в пространство $L_q(C)$ ($p, q \in [1, \infty]$) для всякого компактного подмножества $C \subset \gamma$ тогда и только тогда, когда $3q \leqslant p'$ и $p < \frac{4}{3}$.

Для определения пространства $L_q(C)$ выбирается ограничение меры Лебега на кривой γ на компакт C. Доказательство можно найти в книгах [50, 53]. В старших размерностях аналогичное утверждение до сих пор не доказано. Теорема об ограничении (точнее, гипотеза об ограничении) — одна из центральных нерешенных задач гармонического анализа, она связана с многими другими областями математики, такими как комбинаторная геометрия и уравнения в частных производных. Подробности см. в книгах [50, 53], наилучшие на данный момент результаты см. в работах [54, 55].

С теоремой об ограничении тесно связана другая задача — о доказательстве непрерывности оператора Бохнера–Рисса. Определим оператор Бохнера–Рисса согласно правилу

$$S_\alpha[f] = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\,\mathcal{M}_{\chi_{B_1(0)}(\xi)(1-|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}[f]. \tag{1.4.8}$$

Здесь α может быть и комплексным числом. Если $\Re\alpha > -1$, то определение корректно, более того, операторнозначная функция $\alpha \mapsto S_\alpha$ аналитична. Используя аналитическое продолжение, оператор S_α распространяется на все комплексные значения α как оператор из пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (см. книгу [37]). Связь оператора Бохнера–Рисса с оператором ограничения, заданным формулой (1.4.7), такова: оператор $\mathcal{R}^*_{S^{d-1}}\mathcal{R}_{S^{d-1}}$ (для случая, когда поверхность S есть сфера) есть свертка с преобразованием Фурье меры на сфере; ровно тот же оператор есть S_{-1}.

В случае размерности $d = 2$ установлены все пары чисел p и q ($p, q \in [1, \infty]$), такие что оператор S_α непрерывен как оператор из пространства $L_p(\mathbb{R}^d)$ в пространство $L_q(\mathbb{R}^d)$ (Стейн в работе [56] показал, что в случае $\Re\alpha > \frac{1}{2}$ оператор S_α есть оператор Кальдерона–Зигмунда, Фефферман в своей знаменитой работе [57] показал, что оператор S_0 непрерывен лишь на пространстве L_2, в работе [58] была решена задача для случая положительного числа α, см. также [59], случай отрицательного числа за исключением предельных пар чисел (p, q), удовлетворяющих условию $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2\alpha}{3}$, $\alpha \neq -1$, был рассмотрен в работе [60], предельные пары были рассмотрены в работе [61]). В частности, в случае $\alpha = 1$ оператор S_α непрерывен тогда и только тогда, когда $p < \frac{4}{3}$, $q > 4$ и $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$, в случаях $p = \frac{4}{3}$ и $q = 4$ имеют место определенные неравенства слабого типа. Как и в случае с оператором ограничения, в старших размерностях вопрос до сих пор открыт (см. книги [50, 53]).

Теория Литтлвуда–Пэли. Разложение Литтлвуда–Пэли — классический инструмент гармонического анализа (см., например, книги [46, 62]). Однако нам нужна его анизотропная версия. Пусть Φ — функция в пространстве $\mathbb{R}^d$, такая что $\Phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ и $\Phi(\xi) = 1$ при $|\xi| \leqslant 1$. Функция $\Psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ определена по правилу

$$\Psi(\xi) = \Phi(\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \dots, \lambda_d\xi_d) - \Phi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{1.4.9}$$

Числа λ_j здесь меньше единицы, они задают вид анизотропной однородности разложения. Носитель функции Ψ не содержит начала координат. Определим функции Ψ_k согласно правилу

$$\Psi_k(\xi) = \Psi(\lambda_1^k\xi_1, \lambda_2^k\xi_2, \dots, \lambda_d^k\xi_d), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.4.10}$$

Набор функций $\{\Psi_k\}_k$ обладает следующими свойствами.

1. Существует число N, зависящее только от функции Φ, такое что в каждой точке пространства $\mathbb{R}^d$ не более N функций Ψ_k не равны нулю.

2. Для всякого ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство $\sum_k \Psi_k(\xi) = 1$ (сумма конечна согласно предыдущему пункту).

3. Функция Ψ_k имеет своим носителем множество

$$\Big\{\xi \in \mathbb{R}^d \;\Big|\; \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^{-\frac{1}{\ln \lambda_j}} \asymp e^k\Big\}.$$

Из этих трех свойств следует, что разложение $f = \mathcal{M}_{\Psi_k}[f]$ есть почти ортогональное разложение в $L_2(\mathbb{R}^d)$ в том смысле, что $\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\,\mathcal{M}_{\Psi_k}[f]\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$; это следует из теоремы Планшереля и первых двух свойств набора $\{\Psi_k\}$. Оказывается, что почти ортогональность имеет место и во всех пространствах $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 1.4.31 (Разложение Литтлвуда–Пэли). *Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, а набор $\{\Psi_k\}$ построен из функции Φ как описано выше. Тогда имеет место эквивалентность норм*

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\,\mathcal{M}_{\Psi_k}[f]|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}, \quad p \in (1,\infty).$$

Доказательство этой теоремы читатель может найти в книге [50] (к сожалению, мы не нашли точной ссылки; в книге [50] доказана более общая теорема о квадратичных функциях непрерывного параметра k, см. пункт 1.8.23 этой книги; для дискретного параметра доказательство точно такое же). Основная причина состоит в том, что отображение $f \mapsto \{\mathcal{M}_{\Psi_k}[f]\}_k$ и его сопряженное суть сингулярные интегральные операторы (в смысле книги [50]).

Потенциальные пространства. Операторы дифференцирования суть мультипликаторы Фурье. Пусть функция m — это полином P^{Δ}, $P^{\Delta}(\xi) = P(2\pi i\xi)$, тогда мультипликатор Фурье с символом m есть обычный дифференциальный оператор:

$$P(\partial) = \mathcal{M}_{P^{\Delta}}\,.$$

Таким образом, мультипликаторы позволяют описывать пространства Соболева. Если l — вектор в пространстве $\mathbb{R}^d$, то символом $|\xi^l|$ мы обозначаем "полином" $\xi \mapsto |\xi_1|^{l_1}|\xi_2|^{l_2}\cdots|\xi_d|^{l_d}$.

Определение 1.4.32. Пусть l — вектор в пространстве $\mathbb{R}^d$ с неотрицательными координатами, а q — вещественное число, $q \in [1,\infty]$. Рассмотрим полунорму на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, заданную по правилу

$$\|\varphi\|_{\mathcal{P}^l_q(\mathbb{R}^d)} = \left\| \mathcal{M}_{|\xi^l|}[\varphi] \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Нетрудно видеть, что топология, порождаемая этой полунормой, сильнее топологии пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Замыкание множества $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ по этой полунорме в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ назовем пространством $\mathcal{P}^l_q(\mathbb{R}^d)$.

Потенциальные пространства на торе вводятся аналогичным образом. Также будет удобно ввести в рассмотрение пространства $\tilde{\mathcal{P}}^l_q$, задаваемые полунормой

$$\|\varphi\|_{\tilde{\mathcal{P}}^l_q(\mathbb{R}^d)} = \left\| \mathcal{M}_{(1+|\xi_1|^{l_1})(1+|\xi_2|^{l_2})\cdots(1+|\xi_d|^{l_d})}[\varphi] \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \qquad (1.4.11)$$

Эти полунормы включают в себя не только l-ю производную, но и все производные, младшие ее.

Определение 1.4.33. Введем частичный порядок на множестве $\mathbb{R}^d$ по правилу

$$\alpha \preceq \beta, \text{ если для всякого } j \in [1..d] \quad \alpha_j \leqslant \beta_j.$$

Будем писать $\alpha \prec \beta$ если $\alpha \preceq \beta$, но $\alpha \neq \beta$.

Напомним читателю, что символ $[1..d]$ обозначает множество целых чисел отрезка $[1,d]$. Пользуясь теоремой Михлина о мультипликаторе, нетрудно вывести что

$$\tilde{\mathcal{P}}^\beta_q \hookrightarrow \mathcal{P}^\alpha_q, \quad \beta \succeq \alpha,\ 1 < q < \infty.$$

Аналогично можно ввести пространства с тильдой и для функций на торе и они будут обладать теми же свойствами.

Определение 1.4.34. Пусть l — вектор с неотрицательными координатами в пространстве $\mathbb{R}^d$, а q — вещественное число, $q \in [1, \infty]$. Рассмотрим норму на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, заданную по правилу

$$\|\varphi\|_{W_q^l(\mathbb{R}^d)} = \sum_{j=1}^{d} \Big\| \mathcal{M}_{|\xi_j|^{l_j}}[\varphi] \Big\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Нетрудно видеть, что топология, порождаемая этой нормой, сильнее топологии пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Замыкание множества $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ по этой норме в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ назовем пространством $W_q^l(\mathbb{R}^d)$.

Аналогично случаю потенциальных пространств, можно рассмотреть пространства с тильдой и для пространств Соболева. А именно, пространство $\tilde{W}_q^l$ определяется точно так же, как и пространство без тильды, только символы мультипликаторов меняются на $(1 + |\xi_j|^{l_j})$, $j = 1, 2, \ldots, d$. Как и обычно, те же самые пространства можно определить и на торе. Следующую теорему тоже можно отнести к фольклору. В изотропном случае она доказана в книге [41]. В анизотропном случае доказательство точно такое же, однако мы не нашли ссылки, поэтому повторим его.

Теорема 1.4.35. *Пусть l_1 и l_2 — неотрицательные векторы в пространстве $\mathbb{R}^d$, а $\theta \in (0, 1)$. Пусть вектор l задан равенством $l = \theta l_1 + (1-\theta) l_2$, а число q больше единицы. В таком случае,*

$$\begin{aligned}
\big[\mathcal{P}_q^{l_1}, \mathcal{P}_q^{l_2}\big]_\theta &= \mathcal{P}_q^{l}, \\
\big[\tilde{\mathcal{P}}_q^{l_1}, \tilde{\mathcal{P}}_q^{l_2}\big]_\theta &= \tilde{\mathcal{P}}_q^{l}, \\
\big[W_q^{l_1}, W_q^{l_2}\big]_\theta &= W_q^{l}, \\
\big[\tilde{W}_q^{l_1}, \tilde{W}_q^{l_2}\big]_\theta &= \tilde{W}_q^{l}.
\end{aligned}$$

Равенства верны как для случая пространств функций на пространстве $\mathbb{R}^d$, так и на торе $\mathbb{T}^d$.

Доказательство. Доказательство теоремы есть комбинация разложения Литтлвуда–Пэли и интерполяционной теоремы 1.4.10. Будем доказывать первое из четырех равенств, остальные доказываются аналогично. Для этого сделаем разложение Литтлвуда–Пэли по каждой координате с параметром $\lambda = \frac{1}{2}$ (мы заимствуем обозначения из предыдущего раздела). Это разложит функцию f в сумму $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f_k$, где

$$f_k = \mathcal{M}_{\Psi_{k_1}(\xi_1)\Psi_{k_2}(\xi_2)\dots\Psi_{k_d}(\xi_d)}[f].$$

Благодаря теореме 1.4.31, имеем эквивалентность $\|(\sum_k |f_k|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L_q} \asymp \|f\|_{L_q}$. Нетрудно видеть, что

$$\|f\|_{\mathcal{P}^l_q} \asymp \Big\|\Big(\sum_k \big|\,\mathcal{M}_{|\xi^l|}[f_k]\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L_q} \asymp \Big\|\Big(\sum_k 2^{2\langle l,k\rangle}\big|f_k\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L_q},$$

так как функция f_k сосредоточена на множестве $\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \forall j \ \ |\xi_j| \asymp 2^{k_j}\}$, на этом множестве функция $|\xi|^l$ эквивалентна $2^{\langle k,l\rangle}$. Оператор $f \mapsto \{f_k\}$ обозначим через $\mathfrak{LP}_\Phi$. Выбрав теперь функцию $\tilde{\Phi}$ так, чтобы соответствующая функция $\tilde{\Psi}$ (построенная из функции $\tilde{\Phi}$ по формуле (1.4.9)) была равна единице на носителе функции Ψ, получим коммутативную диаграмму факторизации тождественного оператора:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}^l_q(\mathbb{R}^d) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathfrak{LP}"'] & & \mathcal{P}^l_q(\mathbb{R}^d) \\ & L_q(L_2(\mathbb{Z}^d, 2^{2\langle\cdot,\ell\rangle}), 1) \arrow[ur, "\tilde{\mathfrak{LP}}^*"'] & \end{tikzcd} , \qquad (1.4.12)$$

где символом $\tilde{\mathfrak{LP}}$ обозначен соответствующий вариант оператора $\mathfrak{LP}$ для функции $\tilde{\Phi}$. Согласно теореме 1.4.10, это влечет диаграмму

$$\begin{tikzcd} {[\mathcal{P}^{l_1}_q, \mathcal{P}^{l_2}_q]_\theta} \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathfrak{LP}"'] & & {[\mathcal{P}^{l_1}_q, \mathcal{P}^{l_2}_q]_\theta} \\ & L_q(L_2(\mathbb{Z}^d, 2^{2\langle\cdot,\ell\rangle}), 1) \arrow[ur, "\tilde{\mathfrak{LP}}^*"'] & \end{tikzcd} , \qquad (1.4.13)$$

что и означает верность формулы $\left[\mathcal{P}_q^{l_1}, \mathcal{P}_q^{l_2}\right]_\theta = \mathcal{P}_q^l$. $\square$

Отметим, что мы пользовались лишь классическим разложением Литтлвуда–Пэли, а не анизотропным. Однако, последнее используется в доказательстве третьей и четвертой интерполяционных формул теоремы 1.4.35.

Пространства Бесова. Пространства Бесова $B_q^{l,\theta}$, см. определение 1.4.5, допускают интерпретацию в терминах анализа Фурье. Следующая теорема является частным случаем теоремы 8.1 в книге [41] (в изотропном случае; мы не нашли ссылки, где был бы рассмотрен анизотропный случай, мы не будем пользоваться этой теоремой, приводим ее лишь для полноты изложения). Функции Ψ_k здесь такие же, как и в разделе “теория Литтлвуда–Пэли”. Числа λ_j выбраны по правилу $\lambda_j = 2^{-l_j}$.

Теорема 1.4.36. *Пусть $q \in (1,\infty)$, l — вектор из неотрицательных чисел, $\theta \in [1,\infty]$. Тогда*

$$\|f\|_{B_q^{l,\theta}} \asymp \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \big\| \mathcal{M}_{\Psi_k}[f]\big\|^\theta_{L_p(\mathbb{R}^d)}\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Пользуясь теоремой 1.4.31 и неравенством Минковского, из этой теоремы легко вывести следствие.

Следствие 1.4.37. *Пусть $q \in (1,\infty)$, l — вектор из неотрицательных чисел. В таком случае,*

$$\mathcal{P}_q^l \hookrightarrow B_q^{l,2}, \quad 1 < q \leqslant 2;$$
$$B_q^{l,2} \hookrightarrow \mathcal{P}_q^l, \quad 2 \leqslant q < \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $1 < q \leqslant 2$. Доказательство можно записать одним неравенством:

$$\|f\|_{B_q^{l,2}} \overset{\text{Теор. 1.4.36}}{\lesssim} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \big\| \mathcal{M}_{\Psi_k}[f]\big\|^2_{L_q(\mathbb{R}^d)}\Big)^{\frac{1}{2}} \overset{\text{Нер. Минковского}}{\lesssim}$$
$$\Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|2^k \mathcal{M}_{\Psi_k}[f]\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \overset{\text{Теор. 1.4.31}}{\lesssim} \|f\|_{\mathcal{P}_q^l}.$$

Второй случай рассматривается аналогично. □

Мультипликаторы на пространстве L_1. Хорошо известно, что мультипликаторы на пространстве L_1 (т.е. мультипликаторы Фурье, которые непрерывны на пространстве L_1) суть преобразования Фурье мер (см. книгу [62], пункт 2.1.2). Нам понадобятся теоремы, которые налагают на функцию условия, достаточные для того, чтобы она была мультипликатором. Немало утверждений такого типа принадлежит фольклору. Следующую теорему можно найти в работах [63, 64].

Теорема 1.4.38. *Пусть функция φ на пространстве $\mathbb{R}^d$ непрерывна и удовлетворяет следующим условиям.*

1. *Для всех мультииндексов $\alpha \in \{0,1\}^d$ существует классическая производная $\partial^\alpha f$ и*

$$\forall j = 1,2,\ldots,d \quad \lim_{|\xi_j|\to\infty} \partial^\alpha \varphi(\xi) = 0.$$

2. *Найдется положительное число δ такое что*

$$\prod_{j=1}^{d} |\xi_j|^{1-\delta}(1+|\xi_j|^{2\delta})\big|\partial_1\partial_2\ldots\partial_d\varphi(\xi)\big| \lesssim 1.$$

В таком случае, φ есть мультипликатор на пространстве $L_1(\mathbb{R}^d)$.

Пересадки (transference principle). Зачастую факты гармонического анализа верны не только на пространстве $\mathbb{R}^d$, но и на всех локально-компактных коммутативных группах (например, теорема Бохнера о преобразовании Фурье меры). Введение дополнительной дифференциальной структуры сужает область изучения до групп Ли, или, если ограничиться еще более частным случаем, до двух основных групп $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{T}^d$ (а также двойственной с $\mathbb{T}^d$ группы $\mathbb{Z}^d$). Зачастую общие принципы верны на обеих группах (примером тому могут служить классические теоремы вложения Соболева). Тем не менее, детали могут быть немного разными. Нередко удобно доказать результат для одной группы, а потом перенести его на другую посредством *пересадки* функций. Утверждения, которые позволяют пересаживать теоремы с одной группы на другую, относят к проявлению того, что в англоязычной литературе называется *transference principle*. Процитируем две классические теоремы о пересадке мультипликаторов Фурье (теоремы 3.6.7 и 3.6.9 в книге [46] соответственно).

Теорема 1.4.39. *Пусть функция m на пространстве $\mathbb{R}^d$ такова, что*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^d} \int\limits_{B_r(x)} m(x+t)\,dt = m(x).$$

Предположим также, что оператор $\mathcal{M}_m$ действует из пространства $L_p(\mathbb{R}^d)$ в пространство $L_p(\mathbb{R}^d)$ при некотором числе p, $1 \leqslant p < \infty$. В таком случае, для всякого числа $R > 0$ функция $m_R : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$, заданная по правилу $m_R(z) = m(zR)$, является мультипликатором Фурье на пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ с нормой, не превосходящей норму оператора $\mathcal{M}_m$.

Теорема 1.4.40. *Пусть m — интегрируемая по Риману функция на пространстве $\mathbb{R}^d$, такая что нормы операторов $\mathcal{M}_{m_R}$ на пространстве $L_p(\mathbb{T}^d)$ равномерно ограничены константой (как и в предыдущей теореме, функция m_R заданна по правилу $m_R(z) = m(zR)$). В таком случае, оператор $\mathcal{M}_m$ действует на пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ и ограничен по норме той же константой.*

Теорема Коэна об идемпотентах.

Определение 1.4.41. Будем говорить, что множество $E \subset \mathbb{Z}^d$ принадлежит классу CR, если оно может быть получено из классов смежности подгрупп $\mathbb{Z}^d$

конечным количеством операций объединения, пересечения и перехода к дополнению.

В англоязычной литературе класс CR называют “coset ring”.

Теорема 1.4.42 (Теорема Коэна об идемпотентах). *Пусть E — подмножество решетки $\mathbb{Z}^d$. Включение $\mathcal{F}^{-1}[\chi_E] \in \mathrm{M}(\mathbb{T}^d)$ верно тогда и только тогда, когда множество E принадлежит классу* CR.

Мы привели упрощение теоремы Коэна, на самом деле, она верна на произвольной локально компактной абелевой группе. Общую форму (и доказательство) читатель может найти в книге [65].

Теорема Укиямы. Классическая теория вещественных классов Харди, а также пространств BMO и VMO изложена, например, в книге [50].

Определим вещественный класс Харди $\mathcal{H}_1$ как множество тех обобщенных функций $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, для которых максимальная функция

$$f^*(x) = \sup_{t \geqslant |y-x|} |f * P_t|(y)$$

лежит в пространстве $L_1(\mathbb{R}^d)$ (здесь P_t — ядро Пуассона, $P_t(x) = c_d t(t^2 + |x|^2)^{-\frac{d+1}{2}}$, константа c_d выбрана с условием $\int P_t = 1$). Норма в классе Харди $\mathcal{H}_1$ вводится естественным образом. Определим преобразования Рисса R_j, $j \in [1..d]$ (напомним читателю, что символ $[1..d]$ обозначает множество целых чисел отрезка $[1, d]$), согласно формуле

$$R_j[f] = \mathcal{M}_{\frac{i\xi_j}{|\xi|}}[f].$$

Классическая теорема Стейна–Феффермана утверждает, что

$$\|f\|_{\mathcal{H}_1} \asymp \|f\|_{L_1} + \sum_{j=1}^{d} \|R_j f\|_{L_1}.$$

Нетривиальным является лишь ограничение выражения слева в терминах выражения справа, потому что сингулярные интегральные операторы (каковыми являются преобразования Рисса) переводят пространство $\mathcal{H}_1$ в пространство L_1. Определим пространство $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ как множество функций класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, для которых выражение

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)} = \Bigg(\sup\Big\{\frac{1}{|Q|^2}\int\limits_{Q\times Q}|f(x)-f(y)|^2\,dx\,dy\,\Big|\,Q \text{ — куб пространства } \mathbb{R}^d\Big\}\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

конечно. Это же выражение определяет полунорму в пространстве $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$[6]. Замыкание множества $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ в пространстве $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ называется $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^d)$. Фефферман показал, что $\mathrm{VMO}^* = \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_1^* = \mathrm{BMO}$. Двойственное утверждение к теореме Феффермана–Стейна формулируется так: любую функцию $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$, стремящуюся к нулю на бесконечности, можно представить в виде

$$g = g_0 + \sum_{j=1}^{d} R_j g_j, \quad \|g_0\|_{L_\infty} + \sum_{j=1}^{d}\|g_j\|_{L_\infty} \lesssim \|g\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Укияма в работе [32] дал конструктивное доказательство этого двойственного утверждения, а также обобщил его на более широкий класс мультипликаторов.

Теорема 1.4.43 (Теорема Укиямы). *Пусть* $\theta : S^{d-1} \to \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ *есть отображение класса* $C^\infty(S^{d-1})$, *удовлетворяющее условию* $\theta(\xi) \nparallel \theta(-\xi)$ *для всякого вектора* $\xi \in S^{d-1}$ *(параллельность понимается в том смысле, что векторы пропорциональны с комплексным коэффициентом). Для всякой функции* $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$, *стремящейся к нулю на бесконечности, суще-*

[6] Более точно, пространство BMO есть результат факторизации по подпространству, состоящему из постоянных функций, на котором указанная полунорма вырождается.

ствует решение $G = \{g_j\}_{j=1}^m$ уравнения

$$g = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{M}_{\theta_j\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)}[g_j],$$

удовлетворяющее оценке $\|G\|_{L_\infty} \lesssim \|g\|_{\mathrm{BMO}}$.

Отметим, что по той же двойственности отсюда следует неравенство

$$\|f\|_{\mathcal{H}_1} \asymp \sum_{j=1}^{m} \big\| \mathcal{M}_{\theta_j\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)} f \big\|_{L_1}.$$

Теперь почти очевидным становится обобщение теоремы братьев Рисс, упомянутое в пункте 1.3.3. Напомним читателю, что класс $\mathcal{M}_\theta$ состоит из векторных мер μ, таких что для всякого ненулевого вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ выполнено соотношение $\hat{\mu}(\xi) \parallel \theta(\frac{\xi}{|\xi|})$.

Следствие 1.4.44. *Пусть $\theta : S^{d-1} \to \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ есть отображение класса $C^\infty(S^{d-1})$, удовлетворяющее условию $\theta(\xi) \nparallel \theta(-\xi)$ для всякого вектора $\xi \in S^{d-1}$. В таком случае, любая мера из класса $\mathcal{M}_\theta$ абсолютно непрерывная относительно меры Лебега.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_\theta$. Символом f обозначим решение уравнения $\hat{f}\theta = \hat{\mu}$ (нетрудно видеть, что решение существует, единственно с точностью до аддитивной константы, и представляет собой преобразование Фурье ограничнной непрерывной вне нуля функции). Пусть μ_n и f_n суть свертки μ и f соответственно с гладкой аппроксимативной единицей φ_n. В таком случае, согласно теореме Укиямы,

$$\|f_n\|_{\mathcal{H}_1} \lesssim \sum_{j=1}^{d} \big\|\mu_n\big\|_{L_1} \leqslant \sum_{j=1}^{d} \big\|\mu\big\|_{\mathrm{M}}.$$

По теореме Банаха–Алаоглу, у последовательности f_n есть предельная в топологии $\sigma(\mathcal{H}_1, \mathrm{VMO})$ точка $\tilde{f} \in \mathcal{H}_1$. Тестируя f и $\tilde{f}$ на функциях класса

Шварца (которые принадлежат пространству VMO), получаем, что $f = \tilde{f}$ как обобщенная функция. Стало быть, $f \in \mathcal{H}_1$, что незамедлительно влечет $\mu \in L_1$. $\square$

Глава 2

Теоремы вложения

2.1. Абстрактная билинейная теорема вложения

Как мы говорили, за теоремой 1.2.1 стоят более общие утверждения. Сейчас мы приведем билинейное неравенство, на котором основано как доказательство теоремы 1.2.1, так и доказательство теоремы 1.2.9. Утверждение довольно абстрактно, поэтому после его доказательства мы приведем примеры, которые покажут, почему это теорема вложения, где тут дифференциальные операторы, а где — пространства Соболева. Напомним обозначения: если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, то символом $\xi_{\{1\}}$ мы обозначаем вектор $(\xi_2, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Лемма 2.1.1. *Пусть d_1 и d_2 — натуральные числа, $d_1, d_2 > 1$. Пусть $h : \mathbb{R}^{d_1-1} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Предположим, что локально-суммируемая функция $H : \mathbb{R}^{d_1-1} \to \mathbb{R}_+$ такова, что*

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+ \qquad \int\limits_{\{|h(\zeta)| \in [a,b]\}} H(\zeta)\, d\zeta \lesssim |b-a|, \tag{2.1.1}$$

а числа σ и τ имеют ненулевые мнимые части разных знаков. Пусть ε и R суть вещественные положительные числа, зададим множество $\Omega_{\varepsilon,R}$ по правилу

$$\Omega_{\varepsilon,R} = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^{d_1} \;\Big|\; |h(\xi_{\{1\}})| \geqslant \varepsilon, |\xi_1| \leqslant R\Big\}. \tag{2.1.2}$$

Тогда для любых мер ρ_1 и ρ_2 на пространстве $\mathbb{R}^{d_2}$ имеет место неравенство

$$\Big|\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} f(\xi)\overline{g(\xi)} H(\xi_{\{1\}})\, d\xi\Big| \lesssim \|\rho_1\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_2})} \|\rho_2\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_2})},$$

где функции f и g на пространстве $\mathbb{R}^{d_1}$ определены по правилу

$$\begin{aligned}(\xi_1 - \sigma h(\xi_{\{1\}}))f(\xi) &= \hat{\rho}_1(\xi_1, \Phi(\xi_{\{1\}}));\\ (\xi_1 - \tau h(\xi_{\{1\}}))g(\xi) &= \hat{\rho}_2(\xi_1, \Phi(\xi_{\{1\}})),\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

а $\Phi : \mathbb{R}^{d_1-1} \to \mathbb{R}^{d_2-1}$ — произвольная измеримая функция (неравенство не зависит от чисел ε и R и функции Φ).

Доказательство. На множестве $\Omega_{\varepsilon,R}$ выражения $\xi_1 - \sigma h(\xi_{\{1\}})$ и $\xi_1 - \tau h(\xi_{\{1\}})$ не обнуляются, так как числа $\Im\sigma$ и $\Im\tau$ отличны от нуля. Стало быть, в силу уравнений (2.1.3), интеграл может быть переписан в виде

$$I_{\varepsilon,R} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \frac{\hat{\rho}_1\big(\xi_1, \Phi(\xi_{\{1\}})\big)\overline{\hat{\rho}_2\big(\xi_1, \Phi(\xi_{\{1\}})\big)}H(\xi_{\{1\}})\,d\xi}{\big(\xi_1 - \sigma h(\xi_{\{1\}})\big)\big(\xi_1 - \overline{\tau} h(\xi_{\{1\}})\big)}.$$

Перепишем преобразования Фурье мер по определению и переставим порядки интегрирования:

$$I_{\varepsilon,R} = \int\limits_{\mathbb{R}^{d_2}\times\mathbb{R}^{d_2}} K_{\varepsilon,R}(x,y)\rho_1(x)\overline{\rho_2(-y)}\,dx\,dy,$$

где ядро $K_{\varepsilon,R}$ вычисляется по формуле

$$K_{\varepsilon,R}(x,y) = \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \frac{e^{2\pi i\big((x_1-y_1)\xi_1 + \langle x_{\{1\}} - y_{\{1\}}, \Phi(\xi_{\{1\}})\rangle\big)}H(\xi_{\{1\}})\,d\xi}{\big(\xi_1 - \sigma h(\xi_{\{1\}})\big)\big(\xi_1 - \overline{\tau} h(\xi_{\{1\}})\big)},$$

угловыми скобками обозначено скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{d_2-1}$. Ясно, что для получения равномерной оценки интеграла $I_{\varepsilon,R}$ в терминах величины $\|\rho_1\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_2})}\|\rho_2\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_2})}$ достаточно доказать равномерную при всех $x, y \in \mathbb{R}^{d_2}$ и всех ε и R ограниченность ядра $K_{\varepsilon,R}$. На множестве $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2d_2} \mid x_1 - y_1 = 0\}$ ядро $K_{\varepsilon,R}$ обнуляется (потому что, как можно увидеть из вычисления чуть ниже, в этом случае интеграл по переменной ξ_1 равен нулю), поэтому можно считать, что $x_1 - y_1 > 0$ (симметричный случай рассматривается аналогично).

Зафиксируем значение $\xi_{\{1\}}$ и вычислим интеграл по переменной ξ_1 отдельно. Для этого рассмотрим мероморфную функцию

$$z \mapsto \frac{e^{2\pi i(x_1-y_1)z}}{\bigl(z-\sigma h(\xi_{\{1\}})\bigr)\bigl(z-\overline{\tau} h(\xi_{\{1\}})\bigr)}.$$

Она быстро убывает в полуплоскости $\Im z > 0$ и, благодаря нашим предположениям о мнимых частях чисел σ и τ, имеет там либо два полюса (в точках $\sigma h(\xi_{\{1\}})$ и $\overline{\tau} h(\xi_{\{1\}})$), либо ни одного. Стало быть, представляя интеграл $\int_{\mathbb{R}}$ как $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}$, применяя теорему Коши о вычетах к контуру, состоящему из полуокружности радиуса r с центром в нуле и отрезка $[-r,r]$, и переходя к пределу по $r\to\infty$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i(x_1-y_1)\xi_1}\,d\xi_1}{\bigl(\xi_1-\sigma h(\xi_{\{1\}})\bigr)\bigl(\xi_1-\overline{\tau} h(\xi_{\{1\}})\bigr)} = 2\pi i\frac{e^{2\pi i(x_1-y_1)\sigma h(\xi_{\{1\}})}-e^{2\pi i(x_1-y_1)\overline{\tau} h(\xi_{\{1\}})}}{(\sigma-\overline{\tau})h(\xi_{\{1\}})},$$

если $\Im\sigma h(\xi_{\{1\}}), \Im\overline{\tau} h(\xi_{\{1\}}) > 0$ (множество таких $\xi_{\{1\}}$ мы обозначим символом A_+) и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i(x_1-y_1)\xi_1}\,d\xi_1}{\bigl(\xi_1-\sigma h(\xi_{\{1\}})\bigr)\bigl(\xi_1-\overline{\tau} h(\xi_{\{1\}})\bigr)} = 0$$

в противном случае. То есть,

$$K_{\varepsilon,R}(x,y) =$$
$$2\pi i \int\limits_{A_+\cap\{|h(\xi_{\{1\}})|\geqslant\varepsilon,|\xi_{\{1\}}|<R\}} \frac{\Bigl(e^{2\pi i(x_1-y_1)\sigma h(\xi_{\{1\}})}-e^{2\pi i(x_1-y_1)\overline{\tau} h(\xi_{\{1\}})}\Bigr)e^{2\pi i\langle x_{\{1\}}-y_{\{1\}},\Phi(\xi_{\{1\}})\rangle}H(\xi_{\{1\}})\,d\xi_{\{1\}}}{(\sigma-\overline{\tau})h(\xi_{\{1\}})}.$$

Разобьем множество интегрирования в дизъюнктную сумму множеств:

$$A_+ = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,x,y}, \quad A_{n,x,y} = \left\{\xi_{\{1\}} \in A_+ \;\middle|\; \bigl|h(\xi_{\{1\}})\bigr| \in \left[\frac{n-1}{x_1-y_1}, \frac{n}{x_1-y_1}\right)\right\},$$

а интеграл — в сумму интегралов по ним:

$$\int\limits_{A_+\cap\{|h(\xi_{\{1\}})|\geqslant\varepsilon,|\xi_{\{1\}}|<R\}} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\substack{A_{n,x,y}\cap\\ \{|h(\xi_{\{1\}})|\geqslant\varepsilon,|\xi_{\{1\}}|<R\}}} \ldots\ . \tag{2.1.4}$$

Подынтегральное выражение можно легко оценить:

$$\left|\frac{\left(e^{2\pi i(x_1-y_1)\sigma h(\xi_{\{1\}})}-e^{2\pi i(x_1-y_1)\overline{\tau}h(\xi_{\{1\}})}\right)e^{2\pi i\langle x_{\{1\}}-y_{\{1\}},\Phi(\xi_{\{1\}})\rangle}H(\xi_{\{1\}})}{(\sigma-\overline{\tau})h(\xi_{\{1\}})}\right|\lesssim \begin{cases}|x_1-y_1|H(\xi_{\{1\}}), & \xi_{\{1\}}\in A_{1,x,y};\\ |x_1-y_1|\frac{(e^{-|\Im\sigma|n}+e^{-|\Im\tau|n})H(\xi_{\{1\}})}{n}, & \xi_{\{1\}}\in A_{n,x,y}.\end{cases} \tag{2.1.5}$$

В первом случае мы воспользовались неравенством $|e^a-e^b|\lesssim|a-b|$, $|a|,|b|\lesssim 1$, во втором — неравенством $|e^a-e^b|\lesssim e^{\Re a}+e^{\Re b}$ (осциллирующую экспоненту с функцией Φ мы оба раза заменили на единицу). Таким образом,

$$|K_{\varepsilon,R}(x,y)|\overset{\substack{(2.1.4)\\(2.1.5)}}{\lesssim}|x_1-y_1|\int\limits_{A_{1,x,y}\cap\{|h(\xi_{\{1\}})|\geqslant\varepsilon\}}H(\xi_{\{1\}})\,d\xi_{\{1\}}+ \sum_{n=2}^{\infty}|x_1-y_1|\frac{(e^{-|\Im\sigma|n}+e^{-|\Im\tau|n})}{n}\int\limits_{A_{n,x,y}}H(\xi_{\{1\}})\,d\xi_{\{1\}}\overset{(2.1.1)}{\lesssim} 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-|\Im\sigma|n}+e^{-|\Im\tau|n}}{n}\lesssim 1.$$

Лемма доказана. □

Замечание 2.1.2. Отметим, что лемма 2.1.1 останется верной, если числа σ и τ заменить на функции параметра $\xi_{\{1\}}$, всегда имеющие ненулевые мнимые части разных знаков и принимающие лишь конечное число значений. Доказательство останется тем же, просто надо интеграл по множеству $\{\xi \mid |h(\xi_{\{1\}})|\geqslant\varepsilon\}$ разбить в конечную сумму интегралов по множествам, на которых функции σ и τ постоянны, и для каждого из этих интегралов написать оценку точно тем же методом, что мы применяли для всего интеграла в доказательстве леммы.

Лемма 2.1.1 довольно абстрактна. Приведем пример ее применения и пояснения. Для этого положим $d_1=3$, $d_2=3$, а $h(\xi_2,\xi_3)=\xi_2^2+\xi_3^2$. В таком случае, можно выбрать функцию H тождественно равной единице. Действительно, в выполнении условия (2.1.1) при таком выборе функций можно удостовериться, сделав полярную замену координат (считаем, что $b > a$):

$$\int\limits_{\{\xi_2^2+\xi_3^2\in[a,b]\}} d\xi_2\,d\xi_3 = \int\limits_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}\int\limits_0^{2\pi} r\,d\varphi\,dr = \pi(b-a) \lesssim |b-a|.$$

Выберем функцию Φ тождественной. Тогда, пользуясь теоремой Планшереля, после чего подставляя выбранные параметры в лемму 2.1.1 и применяя полученное утверждение к функциям $\hat{f}$, $\hat{g}$, мы получим неравенство

$$\Big|\langle f,g\rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)}\Big| = \Big|\langle \hat{f},\hat{g}\rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)}\Big| \lesssim \\ \Big\|\big(i\partial_1 - \sigma(\partial_2^2+\partial_3^2)\big)f\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^3)}\Big\|\big(i\partial_1 - \tau(\partial_2^2+\partial_3^2)\big)g\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^3)}, \quad \Im\sigma\Im\tau < 0.$$

Таким образом, мы видим, что функция h играет роль символа некоторого дифференциального (или псевдодифференциального) оператора, функция H — роль потенциала, определяющего потенциальное пространство (или просто весовое пространство, если не пользоваться теоремой Планшереля в начале рассуждения). Несколько непроясненной остается роль функции Φ. Пока что эта функция пригодилась только в теоремах вложения, нужных для задачи о неизоморфности, и там ее роль — понижать размерность (в этом случае $d_1 = 2$, в то время как число d_2 может быть больше), см. пункт 3.1.4.

Обобщением примера может служить следующая теорема.

Определение 2.1.3. Будем говорить, что полином h эллиптичен, если $|h| > 0$ вне нуля.

Теорема 2.1.4. *Пусть $h : \mathbb{R}^{d_1-1} \to \mathbb{R}$ — полином, удовлетворяющий условию однородности (с некоторыми положительными параметрами $a_2, \ldots, a_{d_1}, \delta$)*

$$\forall\lambda > 0 \quad h\Big(\lambda^{\frac{1}{a_2}}\xi_2, \lambda^{\frac{1}{a_3}}\xi_3, \ldots, \lambda^{\frac{1}{a_{d_1}}}\xi_{d_1}\Big) = \lambda^\delta h(\xi_{\{1\}}), \quad \xi\in\mathbb{R}^{d_1}. \tag{2.1.6}$$

Предположим также, что полином h^{Δ}, заданный формулой $h^{\Delta}(\xi) = h(2\pi i\xi)$, эллиптичен. Пусть числа σ и τ имеют ненулевые мнимые части разных знаков. Тогда верно неравенство

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{d_1}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\Big(\sum_{j=2}^{d_1}\xi_j^{2a_j}\Big)^{\frac{\delta-\sum_k \frac{1}{a_k}}{2}}\,d\xi\Big| \lesssim$$
$$\Big\|\big(\partial_1 - \sigma h(\partial_{\{1\}})\big)f\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_1})}\Big\|\big(\partial_1 - \tau h(\partial_{\{1\}})\big)g\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_1})}.$$

В левой части неравенства, по сути, стоит скалярное произведение функций f и g в некотором потенциальном пространстве (как мы видели в примере), однако мы не будем вводить для него отдельного обозначения.

Доказательство. Достаточно проверить, что вес H, заданный формулой

$$H(\xi_{\{1\}}) = \Big(\sum_{j=2}^{d_1}\xi_j^{2a_j}\Big)^{\frac{\delta-\sum_k \frac{1}{a_k}}{2}},$$

удовлетворяет условию (2.1.1) с функцией h^{Δ}. Для этого удобно ввести "сферические" координаты $r, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{d_1}$, заданные по правилу

$$\begin{cases}
r &= \Big(\sum\limits_{j=2}^{d_1}\xi_j^{2a_j}\Big)^{\frac{1}{2}};\\
\xi_{d_1}^{a_{d_1}} &= r\cos\alpha_{d_1};\\
\xi_{d_1-1}^{a_{d_1-1}} &= r\sin\alpha_{d_1}\cos\alpha_{d_1-1};\\
\vdots &= \vdots\,;\\
\xi_3^{a_3} &= r\sin\alpha_{d_1}\sin\alpha_{d_1-1}\ldots\cos\alpha_3;\\
\xi_2^{a_2} &= r\sin\alpha_{d_1}\sin\alpha_{d_1-1}\ldots\sin\alpha_3.
\end{cases}$$

Введение таких координат требует некоторых оговорок: мы сначала разбиваем пространство $\mathbb{R}^{d_1-1}$ на "квадранты", то есть, множества, где знаки координат ξ_j постоянны, и после этого работаем с каждым "квадрантом" отдельно.

Тогда каждый такой “квадрант” может быть как-то параметризован множеством пар $\{(r,\alpha)\}$, таких что число r положительно, а каждая координата α_j лежит либо в отрезке $[0,\frac{\pi}{2})$, либо $[\frac{\pi}{2},\pi)$, либо $[-\frac{\pi}{2},0)$. Будем рассматривать случай первого квадранта (то есть множества q_+, на котором все координаты ξ_j неотрицательны), пусть тогда α пробегает (d_1-2)-мерное множество T. Отметим, что якобиан отображения

$$\{r,\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_{d_1}\}\mapsto\{\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_{d_1}\}$$

имеет вид $r^{-1+\sum_{j=2}^{d_1}\frac{1}{a_j}}Q(\alpha)$, где Q — некоторая функция параметров $\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_{d_1}$, суммируемая по множеству T. Таким образом, мы можем записать интересующий нас интеграл в новых координатах (предполагаем, что $a<b$):

$$\int\limits_{q_+\cap\{|h(\zeta)|\in[a,b]\}} H(\zeta)\,d\zeta=\int\limits_{T}\int\limits_{\{|h_\alpha(r)|\in[a,b]\}} r^{\delta-\sum_k\frac{1}{a_k}}r^{\sum_k\frac{1}{a_k}-1}|Q(\alpha)|\,dr\,d\alpha,$$

здесь h_α — функция на прямой, заданная по правилу $h_\alpha(r)=h(\xi_{\{1\}})$, $\xi_{\{1\}}=\xi_{\{1\}}(r,\alpha)$. Благодаря условию однородности (2.1.6),

$$|h_\alpha(r)|\in[a,b]\ \text{ тогда и только тогда, когда }\ r\in\Big[\Big(\frac{a}{|h_\alpha(1)|}\Big)^{\frac{1}{\delta}},\Big(\frac{b}{|h_\alpha(1)|}\Big)^{\frac{1}{\delta}}\Big].$$

То есть, интеграл может быть переписан в виде

$$\delta^{-1}\int\limits_T\Big(\frac{a}{|h_\alpha(1)|}-\frac{b}{|h_\alpha(1)|}\Big)Q(\alpha)\,d\alpha=\delta^{-1}\int\limits_T\frac{|b-a||Q(\alpha)|}{|h_\alpha(1)|}\,d\alpha\lesssim|b-a|,$$

так как функция $\alpha\mapsto|h_\alpha(1)|$ отделена от нуля (в силу эллиптичности полинома h), а функция Q — суммируема. Лемма доказана. □

2.2. Теоремы вложения для систем уравнений

Лемма 2.1.1 позволяет доказать абстрактное обобщение теоремы 1.2.1, которое нам понадобится в третьей главе.

Теорема 2.2.1. *Пусть N — натуральное число, большее единицы, а числа d_1, d_2, функции h, H, Φ — такие же, как и в лемме* 2.1.1. *Пусть $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_N$ — меры на пространстве $\mathbb{R}^{d_2}$, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{j=0}^{N} h^{N-j}(\xi_{\{1\}})\xi_1^j \hat{\rho}_j(\xi_1, \Phi(\xi_{\{1\}})) = 0, \tag{2.2.1}$$

а функции $g_0, \ldots, g_N$ на пространстве $\mathbb{R}^{d_1}$ заданы формулами

$$g_j(\xi) = \hat{\rho}_j(\xi_1, \Phi(\xi_{\{1\}})), \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Тогда существуют измеримые функции $f_1, f_2, \ldots, f_N$ на пространстве $\mathbb{R}^{d_1}$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcr} \xi_1 f_1(\xi) & = & g_0(\xi); \\ \xi_1 f_2(\xi) - h(\xi_{\{1\}}) f_1(\xi) & = & g_1(\xi); \\ \vdots & = & \vdots\ ; \\ \xi_1 f_j(\xi) - h(\xi_{\{1\}}) f_{j-1}(\xi) & = & g_{j-1}(\xi); \\ \vdots & = & \vdots\ ; \\ \xi_1 f_N(\xi) - h(\xi_{\{1\}}) f_{N-1}(\xi) & = & g_{N-1}(\xi); \\ - h(\xi_{\{1\}}) f_N(\xi) & = & g_N(\xi). \end{array}\right. \tag{2.2.2}$$

и неравенству

$$\sum_{j=1}^{N} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{d_1}} |f_j|^2(\xi) H(\xi_{\{1\}})\, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \sum_{j=0}^{N} \|\rho_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_2})}.$$

Доказательство. Теорема будет выведена из леммы 2.1.1 при помощи элементарных алгебраических преобразований. Отметим, что благодаря условию (2.2.1), система уравнений (2.2.2) имеет решение при каждом значении $\xi \in \mathbb{R}^{d_1}$, таком что $\xi_1 \neq 0$. Поэтому остается лишь доказать неравенство. Пусть σ — некоторое комплексное число. Для каждого числа j, умножим содержащую функцию g_j строку системы уравнений (2.2.2) на σ^j и сложим их все. В результате получим уравнение

$$\bigl(\xi_1 - \sigma h(\xi_{\{1\}})\bigr) f_\sigma = g_\sigma, \quad \text{где } f_\sigma = \sum_{j=1}^{N} \sigma^{j-1} f_j, \quad g_\sigma = \sum_{j=0}^{N} \sigma^j g_j.$$

Пусть τ — другое комплексное число. Подставив его вместо σ, получим уравнение

$$\bigl(\xi_1 - \tau h(\xi_{\{1\}})\bigr) f_\tau = g_\tau, \quad \text{где } f_\tau = \sum_{j=1}^{N} \tau^{j-1} f_j, \quad g_\tau = \sum_{j=0}^{N} \tau^j g_j.$$

Два получившихся уравнения превратятся в уравнения (2.1.3) из леммы 2.1.1, если заметить, что

$$g_\sigma(\xi) = \hat{\rho}_\sigma(\xi_1, \Phi(\xi_{\{1\}})); \quad g_\tau(\xi) = \hat{\rho}_\tau(\xi_1, \Phi(\xi_{\{1\}})),$$

где меры ρ_σ и ρ_τ получаются из мер ρ_j так же, как и функции g_σ и g_τ из функций g_j. Предположим, что числа σ и τ имеют ненулевые мнимые части разных знаков. Тогда, согласно лемме 2.1.1, для любых положительных чисел ε и R имеет место неравенство

$$\Bigl| \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} f_\sigma(\xi)\overline{f_\tau(\xi)} H(\xi_{\{1\}})\, d\xi \Bigr| \lesssim \|\rho_\sigma\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_2})} \|\rho_\tau\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_2})} \lesssim \Bigl(\sum_{j=0}^{N} \|\rho_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_2})} \Bigr)^2,$$

где множество $\Omega_{\varepsilon,R}$ определено формулой (2.1.2). Зафиксируем пока что числа ε и R. Пусть теперь σ_s, τ_t, $s, t = 1, 2, \ldots, N$, — комплексные невещественные числа, такие что σ_s имеют не зависящий от s аргумент, который противоположен аргуненту τ_t, который тоже не зависит от t (например, можно взять $\sigma_s = is$, $\tau_t = -it$; для доказательства теоремы столь подробно определять числа σ_s и τ_t нет необходимости, это делается для удобства дальнейшей модификации теоремы, см. замечание 2.2.2). В таком случае, из вышесказанного следует, что величина

$$c_{s,t} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} f_{\sigma_s}(\xi)\overline{f_{\tau_t}(\xi)} H(\xi_{\{1\}})\, d\xi$$

ограничена по модулю величиной $\left(\sum_{j=0}^{N}\|\rho_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_2})}\right)^2$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что величины $\int_{\Omega_{\varepsilon,R}}|f_j|^2(\xi)H(\xi_{\{1\}})\,d\xi$ являются линейными комбинациями величин $c_{s,t}$ (с коэффициентами, не зависящими от функций f_j и чисел ε и R). Для этого отметим, что величина

$$\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} f(\xi)\overline{g(\xi)}H(\xi_{\{1\}})\,d\xi$$

есть скалярное произведение функций f и g в весовом гильбертовом пространстве. То есть, мы хотим выразить скалярные произведения функций f_j через скалярные произведения функций f_{σ_s} и f_{τ_t}. Для этого достаточно выразить функцию f_j как в качестве линейной комбинации функций f_{σ_s}, так и в качестве линейной комбинации функций f_{τ_t}. Но отображение

$$\{f_j\}_{j=1}^{N} \mapsto \{f_{\sigma_s}\}_{s=1}^{N}$$

обратимо (определитель матрицы этого отображения есть определитель Вандермонда, составленный из чисел σ_s), стало быть, такое выражение существует (аналогично и для чисел τ_t). Теорема доказана, остается только перейти от интеграла по множеству $\Omega_{\varepsilon,R}$ к интегралу по всему пространству $\mathbb{R}^{d_1}$. Это можно сделать, устремив ε к нулю и R к бесконечности, так как подынтегральное выражение в левой части доказываемого неравенства положительно и $\int_{\{h(\zeta)=0\}}H(\zeta)\,d\zeta=0$ благодаря условию (2.1.1). $\square$

Замечание 2.2.2. В теореме 2.2.1 можно считать функцию h комплекснозначной, если ее аргумент принимает конечное множество значений (а модуль является непрерывной функцией). Это следует из замечания 2.1.2. Действительно, если выбрать числа σ_s и τ_t так, чтобы они имели противоположный аргумент при всяких t и s, а функция $\sigma_s h$ не принимала вещественных значений, то значения функций $\sigma_s h$ и $\tau_t h$ всегда будут иметь мнимые части разных знаков, стало быть, лемма 2.1.1 в форме замечания 2.1.2 влечет ограниченность величин $c_{s,t}$ из доказательства теоремы 2.2.1, поэтому оное доказательство можно продолжить и в этом случае, не меняя рассуждения.

Теперь изучим следствия абстрактной теоремы.

Доказательство теоремы 1.2.1. Сначала докажем, что система уравнений (1.2.2) имеет решение в классе обобщенных функций с компактным носителем (ясно, что если решение в таком классе существует, то оно единственно), если обобщенные функции μ_j удовлетворяют условию (1.2.1). Доказательство проведем индукцией по параметру N. В случае $N = 2$ имеется пара обобщенных функций (μ_0, μ_1) с компактными носителями, такая что

$$\partial_2^l \mu_0 + \partial_1^k \mu_1 = 0. \tag{2.2.3}$$

Из этого уравнения следует, что обощенная функция $\partial_2^l \mu_0$ имеет k зануляющихся моментов по первой координате, откуда (вкупе с условием компактности носителя) следует аналогичное условие и для обобщенной функции μ_0. Таким образом, существует функция φ_1 на пространстве $\mathbb{R}^2$, с компактным носителем, такая что $\partial_1^k \varphi_1 = \mu_0$. В таком случае, k-я производная по первой координате обобщенной функции $\mu_1 + \partial_2^l \varphi_1$ равна нулю (в силу определения функции φ_1 и уравнения (2.2.3)), то есть, функция φ_1 есть решение системы (1.2.2) в данном случае. Случай $N = 2$ мы считаем базой индукции.

Пусть нам даны обобщенные функции μ_j, удовлетворяющие уравнению (1.2.1). В таком случае, обобщенные функции $\partial_2^{(N-1)l} \mu_0$ и $\sum_{j=1}^{N} \partial_1^{(j-1)k} \partial_2^{(N-j)l} \mu_j$ удовлетворяют системе уравнений (2.2.3). По доказанному, отсюда следует, что существует обобщенная функция ψ_1 с компактным носителем в $\mathbb{R}^2$, такая что $\partial_1^k \psi_1 = \partial_2^{(N-1)l} \mu_0$ и $-\partial_2^l \psi_1 = \sum_{j=1}^{N} \partial_1^{(j-1)k} \partial_2^{(N-j)l} \mu_j$. Пользуясь базой индукции для порядков дифференцирования k и $(N-1)l$ соответственно (вместо k и l), находим функцию φ_1 с компактным носителем, такую что $\partial_1^k\varphi_1 = \mu_0$ и $\partial_2^{(N-1)l}\varphi_1 = \psi_1$. Перепишем теперь второе уравнение системы (1.2.2) как $\partial_1^k\varphi_2 = \mu_1 + \partial_2^l\varphi_1$. Нетрудно видеть, что теперь оставшееся $(N-1)$ уравнение образует аналогичную систему. Условие

$$\partial_2^{(N-1)l}(\mu_1 + \partial_2^l\varphi_1) + \sum_{j=2}^{N}\partial_1^{(j-1)k}\partial_2^{(N-j)l}\mu_j = 0$$

выполнено, так как $\partial_2^{Nl}\varphi_1 = \partial_2^l\psi_1$. Стало быть, пользуясь предположением индукции, мы можем найти и все остальные функции φ_j. Переход доказан.

Доказательство неравенства начнем с того, что $W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l},l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})} = \mathcal{P}_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l},0)} \cap \mathcal{P}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}$; из симметрии следует, что можно доказывать лишь принадлежность решения второму из пересекаемых пространств справа. Мы представим систему (1.2.2) как часть некоторой большей системы типа (2.2.2). Начнем со случая одной функции f, система (1.2.2) тогда выглядит так:

$$\begin{cases} \partial_1^k f &= \mu_0; \\ -\partial_2^l f &= \mu_1, \end{cases}$$

и содержится в системе уравнений

$$\begin{cases} \partial_1 f_1 & = & \mu_0; \\ \partial_1 f_2 - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_1 & = & 0; \\ \vdots & = & \vdots; \\ \partial_1^k f_j - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{j-1} & = & 0; \\ \vdots & = & \vdots; \\ \partial_1^k f_k - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{k-1} & = & 0; \\ -\partial_2^{\frac{l}{k}} f_k & = & \mu_1. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Здесь через $\partial_2^{\frac{l}{k}}$ обозначен мультипликтор Фурье с символом $\Big((2\pi i\xi_2)^l\Big)^{\frac{1}{k}}$, среди корней из комплексного числа выбираются имеющие наименьший аргумент. Отметим, что аргумент этого символа зависит лишь от знака ξ_2, в частности, принимает не более двух значений. Под словами, что первая система содержится во второй, мы понимаем следующее. Из первых уравнений обеих систем следует, что $f_1 = \partial_1^{k-1} f$. Решая уравнения второй системы шаг за шагом, получаем, что $f_j = \partial_1^{k-j}\partial_2^{\frac{l(j-1)}{k}} f$, в частности, $f_k = \partial_2^{\frac{lk-l}{k}} f$. Ко второй системе можно применять теорему 2.2.1 (с учетом замечания 2.2.2) с параметрами $d_1 = d_2 = 2$, $\Phi(\xi_2) = \xi_2$, $h(\xi_2) = \Big((2\pi i\xi_2)^l\Big)^{\frac{1}{k}}$, $H(\xi_2) = |\xi_2|^{\frac{l-k}{k}}$. Условие (2.1.1) выполнено, так как $H(\xi_2) \lesssim |h'(\xi_2)|$, и функция $|h|$ меняет монотонность не более одного раза. В результате, получим неравенство

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |f_k|^2(\xi)|\xi_2|^{\frac{l-k}{k}}\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|\mu_0\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)} + \|\mu_1\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)},$$

его левая часть, ввиду формулы для функции f_k, как раз и есть $\|f\|_{\mathcal{P}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}}$.

Система (1.2.2) точно так же является частью системы типа (2.2.2). А именно, рассмотрим функции $f_{jj'}$, $j = 1,2,\ldots N$, $j' = 1,2,\ldots,k$, заданные по правилу $f_{jj'} = \partial_1^{k-j'}\partial_2^{\frac{l(j'-1)}{k}} f_j$. Тогда система (1.2.2) превратится в систему

$$\left\{\begin{array}{lcr}
\partial_1 f_{11} & = & \mu_0;\\
\partial_1 f_{12} - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{11} & = & 0;\\
\vdots & = & \vdots;\\
\partial_1 f_{1j'} - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{1j'-1} & = & 0;\\
\vdots & = & \vdots;\\
\partial_1 f_{1k} - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{1(k-1)} & = & 0;\\
\partial_1 f_{21} - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{1k} & = & \mu_1;\\
\partial_1 f_{22} - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{21} & = & 0;\\
\vdots & = & \vdots;\\
\partial_1^k f_{jj'} - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{jj'-1} & = & 0;\\
\vdots & = & \vdots;\\
\partial_1^k f_{Nk} - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{N(k-1)} & = & 0;\\
-\,\partial_2^{\frac{l}{k}} f_{Nk} & = & \mu_N.
\end{array}\right. \tag{2.2.5}$$

В этой системе все правые части, кроме правых частей уравнений $\partial_1 f_{(j+1)1} - \partial_2^{\frac{l}{k}} f_{jk} = \mu_j$ (с традиционной модификацией в случае $j = 0$ и $j = N$), равны нулю. Теорема 2.2.1, примененная к этой системе, дает нам неравенство

$$\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{\mathcal{P}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}} \lesssim \sum_{j=0}^{N} \|\mu_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)}.$$

Теорема 1.2.1 доказана. □

Отметим, что в случае $N = 2$ теорема 1.2.1 может быть записана как неравенство

$$\|f\|_{W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l},l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}} \lesssim \|\partial_1^k f\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_2^l f\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)},$$

или, на языке вложений пространств, $W_1^{(k,l)} \hookrightarrow W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l},l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}$. Это неравенство является частным случаем теоремы В. А. Солонникова из работы [3], см. также пункт 1.3.1 и теорему 1.4.6.

Другие приложения теоремы 2.2.1. Наши рассуждения в параграфе 2.1 имели “многомерный оттенок”. Это даст нам некоторые многомерные следствия.

Теорема 2.2.3. *Пусть* $h : \mathbb{R}^{d_1-1} \to \mathbb{R}$ — *полином, удовлетворяющий условию однородности* (2.1.6), *такой что его характеристический полином* h^{Δ} *эллиптичен. Тогда имеет место неравенство*

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{d_1}} |\hat{f}(\xi)|^2 \Big(\sum_{j=2}^{d_1} \xi_j^{2a_j}\Big)^{\frac{\delta - \sum_k \frac{1}{a_k}}{2}} d\xi \Big|^{\frac{1}{2}} \lesssim \Big\|\partial_1 f\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_1})} + \Big\|h(\partial_{\{1\}}) f\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^{d_1})}.$$

Доказательство. Эта теорема — прямой аналог теоремы 2.1.4. Действительно, выбирая параметры $d_2 = d_1$, $\Phi(\xi_{\{1\}}) = \xi_{\{1\}}$,

$$H(\xi_{\{1\}}) = \Big(\sum_{j=2}^{d_1} \xi_j^{2a_j}\Big)^{\frac{\delta - \sum_k \frac{1}{a_k}}{2}},$$

$N = 2$, в теореме 2.2.1, получаем требуемое утверждение. Тот факт, что выбранные параметры удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1, был проверен при доказательстве леммы 2.1.4. $\square$

Возвращаясь к примеру перед леммой 2.1.4, в котором $d_1 = 3$, $h(\xi_2, \xi_3) = \xi_2^2 + \xi_3^2$, как частный случай теоремы 2.2.3 (после применения теоремы Планшереля), получаем изящное неравенство

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \big\|\partial_1 f\big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^3)} + \big\|(\partial_2^2 + \partial_3^2) f\big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^3)},$$

или, что то же самое,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \lesssim \big\|\partial_1 f\big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^3)} \big\|(\partial_2^2 + \partial_3^2) f\big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^3)},$$

Эквивалентность двух формулировок следует из того, что мы можем растянуть координаты так, чтобы обе части неравенств не изменилась, а в правых частях множители (или слагаемые) стали равными. Автор не знает, известно ли это неравенство. Отметим лишь, что оно, видимо, не следует из результатов классических (но очень точных и тонких) работ [3, 4].

2.3. Билинейные неравенства: эллиптический случай

Мы будем доказывать теорему 1.2.4 в следующем порядке: сначала мы докажем, что утверждение BE (см. определение 1.2.2) выполнено, если параметры удовлетворяют условиям теоремы (положительные результаты); после чего мы сконструируем контрпримеры, которые опровергнут утверждение BE во всех остальных случаях (отрицательные результаты). Хотя эти контрпримеры основаны на общей идеологии, техника варьируется при разных значениях параметров. Чтобы не создавать у читателя затруднений, мы приводим детали во всех вариантах.

2.3.1. Положительные результаты

По условию, хотя бы одно из чисел k и l нечетно; пользуясь симметрией, можем считать, что число k нечетно. В дальнейшем мы предполагаем, что числа σ_1 и τ_1, которые были введены в определении 1.2.3, различны (случай, когда они равны, немного отличается и будет рассмотрен впоследствии). Аналогично доказательству леммы 2.1.1, неравенство (1.2.3) вытекает из равномерной ограниченности следующего интеграла:

$$F(\varepsilon, R, x_1, x_2, y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \frac{|\eta|^{l-1}\xi^{k-1}e^{2\pi i((x_1-y_1)\xi+(x_2-y_2)\eta)}}{((2\pi i\xi)^k - \tau(2\pi i\eta)^l)((-2\pi i\xi)^k - \overline{\sigma}(-2\pi i\eta)^l)} d\xi d\eta, \quad (2.3.1)$$

где множество $\Omega_{\varepsilon,R}$ определено формулой

$$\Omega_{\varepsilon,R} = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \leqslant |\eta| \leqslant R\}.$$

Докажем, что выражение (2.3.1) равномерно ограничено при всех ε и R, $0 < \varepsilon \leqslant R < \infty$, и почти всех четверках вещественных чисел x_1, x_2, y_1, y_2. Все становится немного проще, если в выражении (2.3.1) сначала проинтегрировать по переменной ξ, а потом — по переменной η, и во внутреннем интеграле ввести новую переменную ρ согласно правилу $\xi = \rho|\eta|^{l/k}$. Это влечет формулу

$$F(\varepsilon, R, x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \int\limits_{\varepsilon\leqslant|\eta|\leqslant R} |\eta|^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^{k-1}e^{2\pi i(a\rho|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{\big(\rho^k - \tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)\big(\rho^k - \sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)}\, d\rho\, d\eta,$$

мы ввели обозначения $a = x_1 - y_1$, $b = x_2 - y_2$.

Интегрирование по переменной η ведется по объединению $[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]$, мы докажем равномерную ограниченность интеграла по каждому из двух интервалов объединения. Благодаря симметрии, мы можем рассматривать лишь интервал $[\varepsilon, R]$ (поэтому $\operatorname{sign}\eta$ в знаменателе уйдет). Для определенности мы предполагаем, что $a > 0$ (противоположный случай сводится к этому, если заменить ρ на $-\rho$; отметим, что мы можем не рассматривать случай $a = 0$, так как он соответствует множеству меры 0). После этого, в качестве переменной во внешнем интеграле выберем $(2\pi a)^{k/l}\eta$; эта замена приведет к изменению параметров b, ε и R, но позволит положить $2\pi a = 1$. Мы должны показать, что следующий интеграл равномерно ограничен по ε, R, $0 \leqslant \varepsilon < R$, и b:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} \eta^{-1} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{k-1} e^{i(\rho|\eta|^{l/k} + b\eta)}}{(\rho^k - \tau_1)(\rho^k - \sigma_1)}\, d\rho \right) d\eta. \tag{2.3.2}$$

Мы будем вычислять интеграл по переменной ρ с использованием формулы вычетов, считая ρ комплексной переменной. Так как подынтегральное выражение быстро убывает на бесконечности в верхней полуплоскости, при интегрировании по контуру, который состоит из интервала $[-r, r]$ и верхней полуокружности радиуса r с центром в нуле, после предельного перехода при $r \to \infty$, рассматриваемый интеграл есть $2\pi i$ умножить на сумму вычетов в полюсах подынтегральной функции в верхней полуплоскости. Все полюса являются простыми и суть корни k-ой степени из чисел τ_1 и σ_1 (мы предположили, что $\sigma_1 \neq \tau_1$). Пусть $u^k = \tau_1$ (и $\Re u > 0$). Представляя подынтегральное выражение в виде $\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}$ с $\psi(\rho) = \rho^k - \tau_1$ и используя то, что функция φ регулярна в точке u, вычисляем вычет в точке u:

$$\frac{\varphi(u)}{\psi'(u)} = \frac{u^{k-1} e^{i(u|\eta|^{l/k} + b\eta)}}{k u^{k-1}(\tau_1 - \sigma_1)} = \frac{e^{i(u|\eta|^{l/k} + b\eta)}}{k(\tau_1 - \sigma_1)}.$$

Аналогично, если $v^k = \sigma_1$ (и $\Re v > 0$), то вычет в точке v равен

$$\frac{e^{i(v|\eta|^{l/k} + b\eta)}}{k(\sigma_1 - \tau_1)}.$$

В наших предположениях о числах σ_1 и τ_1, уравнения $\rho^k = \tau_1$ и $\rho^k = \sigma_1$ имеют одно и то же число решений в верхней полуплоскости. Это показывает, что, с точностью до константы, интеграл (2.3.2) равен сумме $(k \pm 1)/2$ выражений вида

$$\frac{1}{k(\tau_1 - \sigma_1)} \int\limits_{\varepsilon}^{R} e^{ib\eta} \frac{e^{iu|\eta|^{l/k}} - e^{iv|\eta|^{l/k}}}{\eta} d\eta, \tag{2.3.3}$$

где u и v — некоторые корни k-ой степени в верхней полуплоскости, соответственно, из чисел τ_1 и σ_1 (отметим, что к счастью, знаменатели в двух упомянутых формулах для вычетов противоположны друг другу).

Вспомним, что число b вещественно, так что мы оцениваем абсолютную величину подынтегральной функции через $C|u - v|\eta^{\frac{l}{k}-1}$ при $\eta \leqslant 1$ и через $e^{-\Im u|\eta|^{l/k}} + e^{-\Im v|\eta|^{l/k}}$ при $\eta > 1$. Оба интеграла $\int_0^1 \eta^{\frac{l}{k}-1}\, d\eta$ и $\int_1^\infty (e^{-\Im u|\eta|^{l/k}} + e^{-\Im v|\eta|^{l/k}})\, d\eta$ сходятся. Это завершает доказательство утверждения $\mathrm{BE}(k, l, \frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2}, \sigma, \tau)$, в случае, когда число k нечетно и σ_1 и τ_1 являются различными числами с мнимыми частями одного знака.

Случай $\sigma_1 = \tau_1$ может быть рассмотрен аналогично. В этом случае, все полюса функции $\rho \mapsto \frac{\rho^{k-1} e^{i(\rho|\eta|^{l/k} + b\eta)}}{(\rho^k - \tau_1)(\rho^k - \sigma_1)}$ имеют порядок 2. После вычислений, двумерный интеграл (2.3.2) представляется в виде линейной комбинации одномерных интегралов вида

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} e^{ib\eta} |\eta|^{\frac{l}{k}-1} e^{iu|\eta|^{l/k}} d\eta.$$

Также это может быть получено предельным переходом при $\tau_1 \to \sigma_1$ в формуле (2.3.3). Этот интеграл равномерно ограничен, снова в силу условия $\Im u > 0$.

2.3.2. Отрицательные результаты

В предыдущем параграфе мы доказали ту часть теоремы 1.2.4, которая касается верности утверждения $\mathrm{BE}(k, l, \frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2}, \sigma, \tau)$ в случае, когда хотя бы одно из чисел k и l нечетно, а числа σ_1 и τ_1, введеные в определении 1.2.3, имеют мнимые части одного знака. Сейчас мы будем опровергать утверждение BE в тех случаях, когда указанные требования не выполнены.

Предположим, что утверждение BE$(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ верно. В таком случае, числа α и β должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{k}+\frac{\beta+\frac{1}{2}}{l}=1. \tag{2.3.4}$$

Это следует из того, что правая часть неравенства (1.2.3) при растяжении $(x,y)\mapsto(\lambda^l x,\lambda^k y)$ умножается на $\lambda^{2kl-2k-2l}$, а левая — на $\lambda^{2\alpha l+2\beta k-k-l}$, стало быть, чтобы утверждение BE$(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ было верным, эти два числа должны быть соизмеримы равномерно по λ; это и дает уравнение (2.3.4). В этом параграфе будет построена пара функций f и g (зависящих от параметров), которые дадут дальнейшие ограничения на числа $k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau$. Мы также предполагаем, что если по крайней мере одно из чисел k и l является четным, то четно l.

Пусть φ, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, — бесконечно дифференцируемая функция на прямой с компактным носителем, равная 1 около нуля. Положим $\psi(\xi,\eta)=\varphi\big(\sqrt{\xi^{2k}+\eta^{2l}}\big)$ и $\psi_t(\xi,\eta)=\psi(\frac{\xi}{t^l},\frac{\eta}{t^k})$, где $t>0$ — достаточно большое число. Далее, пусть $V=\psi_t-\psi$ и $h=\check{V}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Тогда $L_1(\mathbb{R}^2)$-норма функции h оценивается константой, не зависящей от t. В то же время, $\hat{h}=V$ равно 0 около начала координат и равно 1 на большом множестве, если t велико. Отметим также, что $V(\xi,\eta)=v(\sqrt{\xi^{2k}+\eta^{2l}})$ для некоторой функции $v\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$.

Определим функции F и G из класса $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ уравнениями

$$(\partial_1^k-\tau\partial_2^l)F=(\partial_1^k-\sigma\partial_2^l)G=h.$$

Эти уравнения легко разрешимы после перехода к преобразованиям Фурье:

$$\hat{F}(\xi,\eta)=\frac{V(\xi,\eta)}{(2\pi i\xi)^k-\tau(2\pi i\eta)^l},\quad \hat{G}(\xi,\eta)=\frac{V(\xi,\eta)}{(2\pi i\xi)^k-\sigma(2\pi i\eta)^l},$$

и ясно, что решения лежат в классе Шварца (напомним, что полиномы в знаменателях не обращаются в ноль за исключением 0).

Неравенство (1.2.3) для этих функций F и G влечет оценку

$$\Big| \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|V(\xi,\eta)|^2|\xi|^{2\alpha}|\eta|^{2\beta}\,d\xi\,d\eta}{\big((-2\pi i\xi)^k-\overline{\sigma}(-2\pi i\eta)^l\big)\big((2\pi i\xi)^k-\tau(2\pi i\eta)^l\big)}\Big| \lesssim 1$$

независимо от t. Преобразуем интеграл так, как мы делали это раньше, включая замену переменных $\xi = \rho|\eta|^{\frac{l}{k}}$, чтобы получить неравенство

$$\Big| \int_{0}^{+\infty} |\eta|^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V\big(\rho|\eta|^{\frac{l}{k}},\eta\big)^2|\rho|^{2\alpha}}{\big(\rho^k-\tau_1\big)\big(\rho^k-\sigma_1\big)}\,d\rho\,d\eta\Big| \lesssim 1.$$

Степень $|\eta|^{-1}$ во внешнем интеграле возникает после небольших вычислений, использующих уравнение (2.3.4). Знаки η в знаменателе исчезают, если число l четно (если оба числа k и l нечетны, тот же интеграл с коэффициентом два получится после разбиения интеграла по переменной η на интегралы с пределами интегрирования $(-\infty,0]$ и $[0,\infty)$ и замены переменной $\rho\to-\rho$ в первом). Меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Bigg[\frac{|\rho|^{2\alpha}}{\big(\rho^k-\tau_1\big)\big(\rho^k-\sigma_1\big)} \int_{0}^{+\infty} \frac{v^2\big(\sqrt{\rho^{2k}\eta^{2l}+\eta^{2l}}\big)}{\eta}\,d\eta\Bigg]d\rho.$$

Очевидная замена переменных показывает, что интеграл по переменной η равен $\int_0^\infty \frac{v^2(u^l)}{u}\,du$, который в свою очередь не зависит от переменной ρ и становится достаточно большим, если t велико. Таким образом, утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ может быть выполнено, только если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\rho|^{2\alpha}\,d\rho}{\big(\rho^k-\tau_1\big)\big(\rho^k-\sigma_1\big)} = 0. \qquad (2.3.5)$$

Случай четного числа k (оба числа k и l четны)

В этом случае интеграл (2.3.5) может быть переписан в виде

$$2\int_0^\infty \frac{|\rho|^{2\alpha}\,d\rho}{\big(\rho^k-\tau_1\big)\big(\rho^k-\sigma_1\big)} = \frac{2}{k}\int_0^\infty \frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{\big(\rho-\tau_1\big)\big(\rho-\sigma_1\big)}.$$

Оба числа k и l четны, поэтому, в силу симметрии, мы можем предположить, что $\alpha \leqslant \frac{k-1}{2}$. Случай $\alpha = \frac{k-1}{2}$ немного отличается от остальных.

Случай $\alpha = \frac{k-1}{2}$ и $\sigma_1 \neq \tau_1$. В этом случае рассматриваемый интеграл может быть вычислен напрямую:

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{\big(\rho-\tau_1\big)\big(\rho-\sigma_1\big)} = \frac{\log(-\sigma_1)-\log(-\tau_1)}{\sigma_1-\tau_1} \neq 0,$$

если $\sigma_1 \neq \tau_1$. Здесь символ $\log$ обозначает ветвь логарифма, определенную при $\arg z \in [0,2\pi)$, вещественную при $\arg z = 0$.

Случай $\alpha = \frac{k-1}{2}$ и $\sigma_1 = \tau_1$. Если $\sigma_1 = \tau_1$, то интеграл (2.3.5) равен τ_1^{-1}, что также отлично от нуля.

Случай $\alpha < \frac{k-1}{2}$, $\sigma_1 \neq \tau_1$. В этом случае интеграл может быть переписан в виде

$$\int_0^\infty \frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{\big(\rho-\tau_1\big)\big(\rho-\sigma_1\big)} = \frac{1}{\sigma_1-\tau_1}\left(\int_0^\infty \frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{\rho-\sigma_1} - \int_0^\infty \frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{\rho-\tau_1}\right).$$

Оба интеграла в правой части равенства сходятся абсолютно, в силу сделанного предположения $\frac{2\alpha-k+1}{k} < 0$. Таким образом, необходимо доказать, что функция Φ, задаваемая формулой

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\infty \frac{|\rho|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\,d\rho}{\rho-\zeta},$$

является инъективной функцией на области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Перечислим свойства функции Φ.

1. Функция Φ голоморфна на области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

2. Функция Φ не есть тождественный ноль, к примеру, она положительна на множестве $\mathbb{R}_-$.

3. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ имеем $\Phi(\lambda\zeta) = \lambda^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}\Phi(\zeta)$.

Третье свойство можно получить, если сделать замену переменных в интеграле, определяющем функцию Φ. Пусть $\Delta(z)$ есть ветвь функции $z \mapsto z^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}$, определенная на области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, и принимающая положительные значения на отрицательной полуоси вещественной прямой. Согласно третьему свойству функции Φ, $\Phi(\zeta) = \Phi(-1)\Delta(\zeta)$, когда ζ принимает отрицательные вещественные значения. По теореме единственности для аналитических функций, $\Phi(\zeta) = \Phi(-1)\Delta(\zeta)$ при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Но функция Δ является инъективной, так как $\frac{2\alpha-k+1}{k} > -1$, потому что $\alpha \geqslant 0$.

Случай $\alpha < \frac{k-1}{2}$, $\sigma_1 = \tau_1$. Заметим, что рассматриваемый интеграл (2.3.5) в этом случае равен $\Phi'(\sigma_1)$ (где Φ есть голоморфная функция, введенная в предыдущем подпункте). Его значение отлично от нуля, так как производная голоморфной инъективной функции не может обращаться в нуль.

Случай нечетного числа k

В этом случае имеем $|\rho|^{k-1} = \rho^{k-1}$, и интеграл (2.3.5) может быть переписан в виде ($s = \rho^k$):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\rho|^{2\alpha}}{\big(\rho^k - \tau_1\big)\big(\rho^k - \sigma_1\big)}\, d\rho = \frac{1}{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{(s-\tau_1)(s-\sigma_1)}\, ds.$$

Случай $\alpha = \frac{k-1}{2}$. В этом случае знак модуля можно убрать, мы интегрируем аналитическую функцию. Интегрируя по тому же контуру, что и в пункте 2.3.1, видим, что интеграл равен нулю, если числа σ_1 и τ_1 имеют мнимые части одного знака, и не равен нулю, если разных знаков.

Случай $\alpha \neq \frac{k-1}{2}$, $\sigma_1 \neq \tau_1$. Как и раньше, перепишем интеграл в виде

$$\frac{1}{\tau_1 - \sigma_1} \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} \Big(\frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{s - \tau_1} - \frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{s - \sigma_1} \Big)\, ds$$

и введем функцию Φ согласно правилу

$$\Phi(\zeta) = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{s - \zeta}\, ds.$$

Ниже перечислены свойства функции Φ (отметим, что нам нужно проверить, что существует предел по R).

1. Функция Φ аналитична на области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (в частности, предел по R существует).

2. Функция Φ отлична от нуля, например, отлична от нуля на мнимой оси (принимает чисто мнимые значения).

3. Для всякого $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ выполнено тождество $\Phi(-\zeta) = -\Phi(\zeta)$.

4. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ выполнено $\Phi(\lambda\zeta) = \lambda^{\frac{2\alpha-k+1}{\alpha}}\Phi(\zeta)$.

Только первое свойство требует доказательства (включая доказательство факта, что функция Φ корректно определена). Выписывая

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{|s|^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{s - \zeta}\, ds = \int\limits_{0}^{R} s^{\frac{2\alpha-k+1}{k}} \Big(\frac{1}{s - \zeta} - \frac{1}{s + \zeta} \Big)\, ds = \int\limits_{0}^{R} \frac{2\zeta s^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}}{(s - \zeta)(s + \zeta)}\, ds,$$

мы снова получим абсолютно сходящийся интеграл, так как $\frac{2\alpha-k+1}{k} < 1$ согласно равенству (2.3.4) и неотрицательности числа β.

Мы должны доказать, что функция Φ инъективна на области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Обозначим символом Δ ветвь степенной функции $z \mapsto z^{\frac{2\alpha-k+1}{k}}$, которая соответствует изменению аргумента в интервале $(-\pi, \pi]$ и отображает полуось $\mathbb{R}_+$ на саму себя. Благодаря неравенству $|\frac{2\alpha-k+1}{k}| < 1$, функция Δ инъективна. Более того, так как функция Δ переводит верхнюю полуплоскость либо в верхнюю, либо в нижнюю полуплоскость (в зависимости от знака $2\alpha - k + 1$), видим, что

$$\Delta(\zeta_1) + \Delta(\zeta_2) \neq 0 \tag{2.3.6}$$

всегда, когда $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}_+$.

Теперь рассмотрим точку ζ_0, лежащую внутри первого квадранта. Если $|\arg \lambda| < \delta$, где δ достаточно мало, то $\lambda\zeta_0 \in \mathbb{C}_+$, и функция $\lambda \mapsto \Phi(\lambda\zeta_0)$ аналитична. Но для $\lambda > 0$ имеем

$$\Phi(\lambda\zeta_0) = \Delta(\lambda)\Phi(\zeta_0),$$

по четвертому свойству функции Φ, так как $\Phi(\lambda\zeta_0) = C\Delta(\lambda\zeta_0)$ при $|\arg \lambda| < \delta$. По теореме единственности, $\Phi(\zeta) = C\Delta(\zeta)$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}_+$. Очевидно, $C \neq 0$ так как функция Φ отлична от нуля на мнимой полуоси.

Теперь видим, что сужения $\Phi \mid_{\mathbb{C}_+}$ и $\Phi \mid_{\mathbb{C}_-}$ инъективны. Если $\zeta_1 \in \mathbb{C}_+$ и $\zeta_2 \in \mathbb{C}_-$, то $\Phi(\zeta_1) \neq \Phi(\zeta_2)$ согласно формуле (2.3.6) и тому, что Φ нечетна.

Случай $\alpha \neq \frac{k-1}{2}$, $\sigma_1 = \tau_1$. Так же, как и в случае нечетных параметров, рассматриваемый интеграл равен $\Phi'(\sigma_1)$. Это значение отлично от нуля, так как является производной инъективного аналитичного отображения.

2.4. Билинейные неравенства: неэллиптический случай

2.4.1. Положительные результаты

В данном пункте изложено доказательство теоремы 1.2.5. Идейно оно схоже с рассуждениями из пункта 2.3.1, но технически сложнее.

Более удобно работать с функциями f и g, имеющими компактный носитель. Следующее утверждение является прямым следствие того, что множество $\mathfrak{D}$ плотно в $\mathcal{S}$. Мы не доказываем его по причине простоты.

Факт 2.4.1. *Предположим, что неравенство* (1.2.3) *выполнено для некоторых* $k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau$ *с любыми функциями* f *и* g, *лежащими в классе* $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда утверждение* $\mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$ *верно.*

Таким образом, при доказательстве теоремы 1.2.5 мы можем предположить, что функции f и g имеют компактный носитель. Более того, используя растяжения, мы можем перевести носитель внутрь единичного круга с центром в нуле.

Используя симметрию, мы можем предположить, что число k нечетно. Напомним читателю, что утверждение $\mathrm{BE}(k, l, \frac{k-1}{2}, \frac{l-1}{2}, \sigma, \tau)$ следует из равномерной ограниченности ядра, заданного формулой (2.3.1). Однако в случае вещественных чисел σ_1 и τ_1, введеных в определении 1.2.3, ситуация становится более сложной и множество $\Omega_{\varepsilon,R}$ определяется формулой

$$\Omega_{\varepsilon,R} = \Big\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \Big|\ \varepsilon < |\eta| < R,\ |\xi^k - \sigma_1\eta^l| > \varepsilon\, \mathcal{E}(|\eta|),\ |\xi^k - \tau_1\eta^l| > \varepsilon\, \mathcal{E}(|\eta|)\Big\},$$

где $\mathcal{E}$ есть некоторая положительная функция, быстро убывающая в нуле и на бесконечности; позже мы уточним эти требования. Отметим, что по нашему предположению о носителях функций f и g мы можем считать, что $|a| < 2$ и $|b| < 2$, где $a = x_1 - x_2$ и $b = y_1 - y_2$. Также мы можем предположить, что $a > 0$ и $\varepsilon < 1$.

Сделаем традиционную в этой работе замену переменных $\xi = \rho|\eta|^{\frac{l}{k}}$:

$$\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \frac{\xi^{k-1}|\eta|^{l-1}e^{2\pi i(a\xi+b\eta)}\,d\xi\,d\eta}{(\xi^k-\tau_1\eta^l)(\xi^k-\sigma_1\eta^l)} =$$

$$\int\limits_{\varepsilon\leqslant|\eta|\leqslant R}|\eta|^{-1}\int\limits_{B_\varepsilon(\eta)}\frac{\rho^{k-1}e^{2\pi i(a\rho|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{\big(\rho^k-\tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)\big(\rho^k-\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)}\,d\rho\,d\eta.$$

Здесь множество $B_\varepsilon(\eta)$ (не надо путать его с евклидовым шаром) задано формулой

$$B_\varepsilon(\eta)=\Big\{\rho\in\mathbb{R}\,\Big|\ \operatorname{dist}(\rho^k,\{\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l,\tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\})>\varepsilon|\eta|^{-l}\,\mathcal{E}(|\eta|)\Big\}.$$

Возьмем $(2\pi a)^{\frac{k}{l}}\eta$ в качестве новой переменной, переопределим R и b (а ε и a переопределять не будем; нам удобно использовать ограничения $\varepsilon<1$ и $a<2$) и перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_{(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\varepsilon\leqslant|\eta|\leqslant R}|\eta|^{-1}\int\limits_{B_{\varepsilon,a}(\eta)}\frac{\rho^{k-1}e^{i(\rho|\eta|^{l/k}+b\eta)}}{\big(\rho^k-\tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)\big(\rho^k-\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l\big)}\,d\rho\,d\eta, \qquad (2.4.1)$$

где множество $B_{\varepsilon,a}(\eta)$ задано формулой

$$B_{\varepsilon,a}(\eta)=$$
$$\Big\{\rho\in\mathbb{R}\,\Big|\ \operatorname{dist}(\rho^k,\{\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l,\tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l\})>\varepsilon|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|^{-l}\,\mathcal{E}(|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|)\Big\}.$$

Интеграл по переменной ρ можно представлить как контурный (после замены $\int_{\mathbb{R}}=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}$), см. Рис. 2.1. Обозначим единственный вещественный корень уравнения $z^k=s$, $s\in\mathbb{R}$, символом $z_0(s)$. Несложно видеть, что это уравнение имеет имеет ровно $\frac{k-1}{2}$ корней в верхней полуплоскости $\Im z>0$. Следовательно, если число r достаточно велико, то существует также ровно $k-1$ полюс подынтегрального выражения внутри контура ($\frac{k-1}{2}$ полюсов соответствуют уравнению $s=\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l$ и $\frac{k-1}{2}$ — уравнению $s=\tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l$). Выберем функцию $\mathcal{E}$ настолько маленькой, чтобы маленькие полукруги не

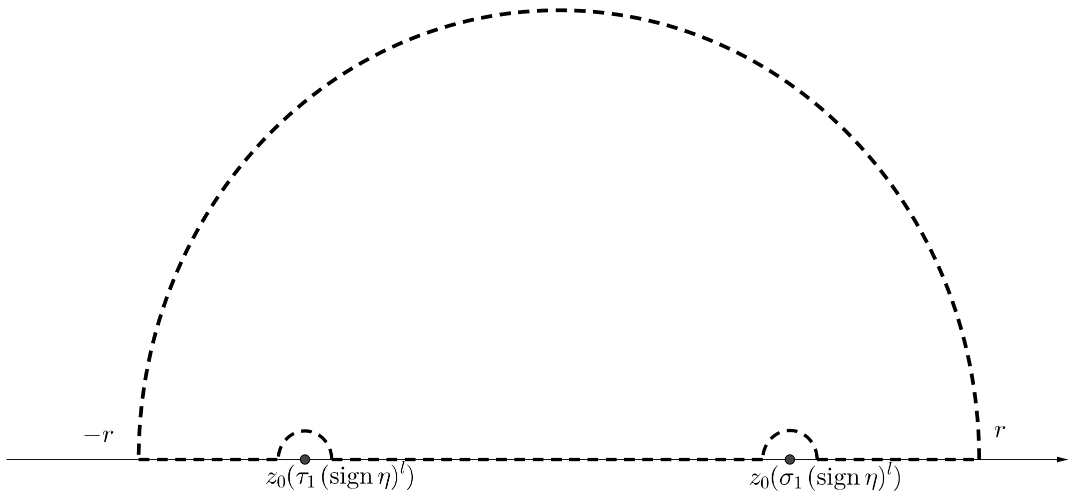

Рис. 2.1. Контур интегрирования.

пересекались ($\mathcal{E}(\eta) \lesssim \eta^l$ подойдет, так как $\varepsilon < 1$). Нам требуется лемма, позволяющая оценивать разницу между интегралом по маленькой полуокружности и "полувычетом"; эта лемма является количественной версией формулы Сохоцкого–Племеля.

Лемма 2.4.2. *Если мероморфная функция ψ имеет простой полюс в точке x_0 на вещественной прямой, то*

$$\left| \int\limits_{\substack{|z-x_0|=r \\ \Im z>0}} \psi(z)\,dz + \pi i \operatorname{Res}_{x_0} \psi \right| \leqslant \pi r \max_{\substack{|z-x_0|\leqslant r, \\ \Im z>0}} |h'|,$$

где $h(z) = (z - x_0)\psi(z)$ (полуокружность интегрирования ориентирована по часовой стрелке).

Доказательство. Так как функция ψ имеет простой полюс в точке x_0, ее можно переписать в виде $\psi(z) = \frac{c}{z-x_0} + \psi_1(z)$, где функция ψ_1 регулярна около точки x_0. Соответственно,

$$\int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \Im z>0}} \psi(z)\,dz = \int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \Im z>0}} \frac{c\,dz}{z-x_0} + \int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \Im z>0}} \psi_1(z)\,dz.$$

Так как $\psi_1(z) = \frac{h(z)-h(x_0)}{z-x_0}$, второй интеграл можно оценить так:

$$\left| \int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \Im z>0}} \psi_1(z)\,dz \right| \leqslant \pi r \max_{\substack{|z-x_0|\leqslant r,\\ \Im z>0}} |\psi_1| \leqslant \pi r \max_{\substack{|z-x_0|\leqslant r,\\ \Im z>0}} |h'|.$$

Первый интеграл может быть легко вычислен следующим образом:

$$\int\limits_{\substack{|z-x_0|=r\\ \Im z>0}} \frac{c\,dz}{z-x_0} = \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ \Im z>0}} \frac{c\,dz}{z} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{c\,d(re^{2\pi i\theta})}{re^{2\pi i\theta}} = -\pi i c.$$

$\square$

Таким образом, сумма интегралов по полуокружностям есть

$$- \pi i e^{ib\eta} \frac{e^{iz_0(\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l)|\eta|^{\frac{l}{k}}} - e^{iz_0(\tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l)|\eta|^{\frac{l}{k}}}}{k(\sigma_1-\tau_1)} + \\ \varepsilon O\Bigg(\max(1, |\eta|^{\frac{l}{k}})|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|^{-l}\,\mathcal{E}(|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|)\Bigg).$$

Сумма одномерных интегралов, приходящих из вычетов, есть сумма интегралов типа (2.3.3), которые, как мы видели ранее, равномерно ограничены. Тем не менее, интеграл, приходящий из “полувычетов”, требует более тонких вычислений. Начнем с оценки погрешности (т.е части интеграла (2.4.1), появляющейся из “O-большого” предыдущей формулы):

$$\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, |\eta|^{\frac{l}{k}})|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|^{-l}\,\mathcal{E}\left(|(2\pi a)^{-\frac{k}{l}}\eta|\right)\frac{d\eta}{|\eta|} =$$

$$\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max\left(1, 2\pi a|\eta|^{\frac{l}{k}}\right)|\eta|^{-l}\,\mathcal{E}(|\eta|)\frac{d\eta}{|\eta|} \overset{a<2}{\leqslant}$$

$$\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 + |\eta|^{\frac{l}{k}}\right)|\eta|^{-l}\,\mathcal{E}(|\eta|)\frac{d\eta}{|\eta|} \leqslant \varepsilon,$$

где $\mathcal{E}(z) = |z|^{2l+1}e^{-|z|}$ (мы умножаем эту функцию на маленькую константу c, чтобы удовлетворить неравенству $\mathcal{E}(|\eta|) \lesssim \eta^l$). Таким образом, вклад погрешности в интеграл (2.4.1) является равномерно ограниченным (и даже небольшим, если ε невелико). Интеграл, приходящий из “полувычетов”, выглядит следующим образом (мы переобозначили ε):

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} e^{ib\eta}\frac{\left(e^{ic_1|\eta|^{\frac{l}{k}}} - e^{ic_2|\eta|^{\frac{l}{k}}}\right)d\eta}{\eta},$$

здесь c_1 и c_2 — некоторые вещественные константы (равные $z_0(\sigma_1(\operatorname{sign}\eta)^l)$ и $z_0(\tau_1(\operatorname{sign}\eta)^l)$ соответственно). Часть интеграла по отрезку $[0,1]$ ограничена, так что мы можем ее отбросить. На луче $(1,\infty)$ используем неравенство треугольника

$$\left|\int\limits_{1}^{R} e^{ib\eta}\frac{\left(e^{ic_1|\eta|^{\frac{l}{k}}} - e^{ic_2|\eta|^{\frac{l}{k}}}\right)d\eta}{\eta}\right| \leqslant \left|\int\limits_{1}^{R} e^{i(b\eta + c_1|\eta|^{\frac{l}{k}})}\frac{d\eta}{\eta}\right| + \left|\int\limits_{1}^{R} e^{i(b\eta + c_2|\eta|^{\frac{l}{k}})}\frac{d\eta}{\eta}\right|$$

и, сделав замену переменных $|c_{1,2}|^{\frac{k}{l}}\eta = e^x$ и переопределив параметр b, приходим к тому, что надо доказать ограниченность интеграла

$$\left|\int\limits_{0}^{\log R} e^{i(be^x \pm e^{\alpha x})}\,dx\right|,$$

где $\alpha = \frac{l}{k} \neq 1$. Остается доказать несложную лемму об осцилляторных интегралах.

Лемма 2.4.3. *Пусть* α, $\alpha \neq 1$, *есть положительный фиксированный параметр. Тогда*

$$\left|\int\limits_0^R e^{i(be^x \pm e^{\alpha x})}\, dx\right| \lesssim 1.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\pm$ есть $-$, оставшийся случай рассматривается аналогично. Для краткости, введем функции h_b, задаваемые формулой $h_b(x) = be^x - e^{\alpha x}$. Конечно, $h_b''(x) = be^x - \alpha^2 e^{\alpha x}$, и это выржание может обращаться в ноль (таким образом, мы не можем напрямую применить лемму 1.4.27). Тем не менее, функция h_b'' может быть небольшой только на множестве небольшой меры. Достаточно проверить, что

$$\left|\int\limits_C^R e^{i(be^x - e^{\alpha x})}\, dx\right| \lesssim 1,$$

где C есть некоторая численная константа, не зависящая от b (но зависящая от α). Функция h_b'' изменяет монотонность на интервале $[C,\infty)$ не более одного раза. Для монотонной функции множество значений, где её модуль не превосходит единицы, есть интервал (или луч). Следовательно, множество $\{x \in [C,\infty) \mid |h_b''(x)| < 1\}$ является объединением не более двух интервалов (это множество ограничено, так как $|h_b''|(x) \to \infty$ при $x \to \infty$). Докажем, что если $|h_b''(z)| < 1$, то $|h_b''(z \pm 1)| > 1$ для $z \in [C,\infty)$. Если это утверждение доказано, то несложно видеть, что интервалы, составляющие множество $\{x \in [C,\infty) \mid |h_b''(x)| < 1\}$, имеют общую длину не более 2. Дополнение этого множества в $[C,\infty)$ есть объединение не более трех интервалов (один из которых есть луч). На каждом из них интеграл может быть оценен числом 20 по лемме 1.4.27, на дополнении этот интеграл может быть оценен числом 2, и лемма доказана.

Чтобы проверить утверждение, обозначим число be^z символом p, а число $\alpha^2 e^{\alpha z}$ — символом q. Если и $|h_b''(z)| < 1$ и $|h_b''(z+1)| < 1$ (мы рассматриваем этот случай, случай $|h_b''(z-1)| < 1$ аналогичен), то

$$q - 1 < p < q + 1 \quad \text{и} \quad e^\alpha q - 1 < ep < e^\alpha q + 1.$$

В этом случае, $e^\alpha q - 1 < e(q+1)$ и $e(q-1) < e^\alpha q + 1$, что влечет $q < \frac{e+1}{|e^\alpha - e|}$. Выбирая $C > 10 + \alpha^{-1} \ln \frac{e+1}{\alpha^2 |e^\alpha - e|}$, получим противоречие. Утверждение доказано. $\square$

Простой алгебраический прием влечет положительные результаты для случая четных чисел k и l.

Следствие 2.4.4. *Предположим, что оба числа k и l четны, но в одно из них число 2 входит лишь в первой степени. Тогда утверждения* $\mathrm{BE}(k, l, \frac{3}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{1}{4}l - \frac{1}{2}, \sigma, \tau)$ *и* $\mathrm{BE}(k, l, \frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}l - \frac{1}{2}, \sigma, \tau)$ *верны, если числа σ_1 и τ_1 вещественны, различны и положительны.*

Удобно выделить упомянутый алгебраический прием особо.

Лемма 2.4.5. *Следующая импликация выполнена при условии $\sigma\tau \neq 0$:*

$$\begin{gathered} \mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau) \ \& \ \mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, -\sigma, -\tau) \ \& \\ \mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, -\tau) \ \& \ \mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, -\sigma, \tau) \Rightarrow \\ \mathrm{BE}(2k, 2l, \alpha + k, \beta, \sigma^2, \tau^2) \ \& \ \mathrm{BE}(2k, 2l, \alpha, \beta + l, \sigma^2, \tau^2). \end{gathered}$$

Доказательство. Применяя утверждение $\mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \pm\sigma, \pm\tau)$ к паре функций $(\partial_1^k \pm \sigma \partial_2^l) f$ и $(\partial_1^k \pm \tau \partial_2^l) g$, получим оценки для четырех скалярных произведений:

$$\Big| \langle (\partial_1^k \pm \tau \partial_2^l) f, (\partial_1^k \pm \sigma \partial_2^l) g \rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}} \Big| \lesssim \big\| (\partial_1^{2k} - \tau^2 \partial_2^{2l}) f \big\|_{L_1} \big\| (\partial_1^{2k} - \sigma^2 \partial_2^{2l}) g \big\|_{L_1}. \tag{2.4.2}$$

Несложно видеть, что величины $\langle \partial_1^k f, \partial_1^k g \rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}}$ и $\langle \partial_2^l f, \partial_2^l g \rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}}$ могут быть выражены как линейные комбинации четырех скалярных произведений, записаных в левой части неравенства (2.4.2), и, таким образом, оценены через выражения, стоящие справа. Нам остается только использовать тождество

$$\langle \partial_1^p \partial_2^q f, \partial_1^p \partial_2^q g \rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}} = (2\pi)^{2p+2q} \langle f, g \rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha+p,\beta+q)}}, \quad p, q, \in \mathbb{N}, \tag{2.4.3}$$

при $(p, q) = (k, 0)$ и $(p, q) = (0, l)$, чтобы получить утверждения $\mathrm{BE}(2k, 2l, \alpha + k, \beta, \sigma^2, \tau^2)$ и $\mathrm{BE}(2k, 2l, \alpha, \beta + l, \sigma^2, \tau^2)$. □

Доказательство следствия 2.4.4. По теореме 1.2.5, утверждения $\mathrm{BE}(\frac{k}{2}, \frac{l}{2}, \frac{k}{4} - \frac{1}{2}, \frac{l}{4} - \frac{1}{2}, \pm\sigma', \pm\tau')$, где $\sigma'_1 = \sqrt{\sigma_1}$ и $\tau'_1 = \sqrt{\tau_1}$, верны (так как одно из чисел $\frac{k}{2}$ и $\frac{l}{2}$ нечетно и числа $\pm\sigma'_1$ и $\pm\tau'_1$ вещественные и различные). Лемма 2.4.5 завершает доказательство.

2.4.2. Отрицательные результаты

Лемма 2.4.6. *Утверждение* $\mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$ *неверно в случае* $\sigma = \tau$ *и* $k \neq l$.

Отметим, что в этой лемме мы не накладываем никаких требований как на числа σ и τ, так и на числа α и β или k и l (кроме того, что $k \neq l$). В эллиптическом случае (когда четверка (k, l, σ, σ) эллиптична, см. определение 1.2.3), эта лемма следует из теоремы 1.2.4. В неэллиптическом случае мы выведем лемму из довольно стандартной конструкции, которая называется примером Knapp'a (например, см. книгу [53]). Автор не смог найти ссылку, точно подходящую к нашему случаю, так что мы повторим это стандартное рассуждение. Отметим, что эффект, благодаря которому утверждение BE неверно в неэллиптическом случае леммы 2.4.6, имеет совсем другую природу, чем проявляющийся в отрицательных результатах пункта 2.3.2. В лемме 2.4.6 все дело в некотом осцилляторном интеграле, в то время как в результатах пункта 2.3.2 “расходится” сингулярный интеграл. Мы ограничиваем себя случаем $k \neq l$, потому что он более сложный и интересный. Безусловно, заключения теоремы 1.2.5, следствия 2.4.4 и леммы 2.4.6 верны (с немного другими, но более простыми доказательствами) и в случае $k = l$. Мы пропускаем эти случаи.

Сформулируем несколько более общую лемму, которая пригодится нам впоследствии.

Лемма 2.4.7. *Пусть* $p, q \in [1, \infty]$, k, l *— натуральные числа,* $k \neq l$, *а число* σ *таково, что многочлен* $\xi^k - \sigma_1 \eta^l$ *не эллиптичен, то есть, имеет отличные от точки* $(0,0)$ *вещественные корни. Предположим, что для каких-нибудь чисел* α *и* β *имеет место неравенство*

$$\|f\|_{\mathcal{P}_q^{(\alpha,\beta)}} \lesssim \|(\partial_1^k - \sigma \partial_2^l) f\|_{L_p}. \tag{2.4.4}$$

Тогда $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$.

Ясно, что лемма 2.4.6 есть частный случай леммы 2.4.7. Доказательству леммы 2.4.7 предпошлем простую вспомогательную оценку.

Лемма 2.4.8. *Пусть* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— выпуклая функция, такая что* $h(0) = h'(0) = 0$. *Тогда для всякой функции* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \phi \subset (0,1)$, *всякой функции* $\Phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ *и всякого числа* $r \in \mathbb{N}$ *имеет место оценка*

$$\left| \iint (\xi - h(\eta)) \phi(n\eta) \phi\big(n^2(\xi - h(\eta))\big) \Phi(\xi, \eta) e^{2\pi i (x\xi + y\eta)}\, d\xi\, d\eta \right| \lesssim n^{-5} \left(1 + \frac{|x|}{n^2} + \frac{|y|}{n}\right)^{-r}.$$

В этой лемме, как и в ее доказательстве, интегралы формально берутся по всей прямой. На самом деле, подынтегральное выражение не обращается в нуль лишь в $O(\frac{1}{n})$-окрестности нуля. Доказательство леммы 2.4.8 читатель может найти в приложении.

Доказательство леммы 2.4.7. Пусть $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ есть некоторая отличная от нуля точка пространства $\mathbb{R}^2$, такая что $\zeta_1^k - \sigma_1 \zeta_2^l = 0$ и $|\zeta_1| > 2$, $|\zeta_2| > 2$. Будем рассматривать только такие функции f, спектры которых лежат в $\frac{1}{2}$-окрестности точки ζ; для таких функций f

$$\|f\|_{\mathcal{P}_q^{(\alpha,\beta)}} \asymp \|f\|_{L_q}.$$

Действительно, пусть Φ — какая-нибудь функция из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, равная единице на $\frac{1}{2}$-окрестности точки ζ и равная нулю в окрестности нуля. Тогда

$$f = \mathcal{M}_{|\xi|^{-\alpha}|\eta|^{-\beta}\Phi(\xi,\eta)}\,\mathcal{M}_{|\xi|^{\alpha}|\eta|^{\beta}}\,f;\quad \mathcal{M}_{|\xi|^{\alpha}|\eta|^{\beta}}\,f = \mathcal{M}_{|\xi|^{\alpha}|\eta|^{\beta}\Phi(\xi,\eta)}\,f,$$

то есть функции f и $\mathcal{M}_{|\xi|^{\alpha}|\eta|^{\beta}}\,f$ получаются друг из друга свертками с фиксированными функциями класса Шварца. Это значит, что их нормы в пространстве $L_q(\mathbb{R}^2)$ соизмеримы.

Пусть $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ есть неотрицательная функция с носителем в отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Символом ϕ_λ обозначим функцию $x \to \phi(\lambda x)$. Последовательность $\{f_n\}_n$, опровергающая неравенство (2.4.4), задается формулой

$$\begin{aligned} &\hat{f}_n(\xi,\eta) = \phi_n(\eta-\zeta_2)\phi_{n^2}(\xi-(\sigma_1\eta^l)^{\frac{1}{k}}), && |\xi-\zeta_1| \leqslant 1, |\eta-\zeta_2| \leqslant 1;\\ &\hat{f}_n(\xi,\eta) = 0, && |\xi-\zeta_1| > 1 \text{ или } |\eta-\zeta_2| > 1. \end{aligned}$$

Ветвь корня k-й степени в первой формуле выбирается так, чтобы $\zeta_1 = \big(\sigma_1\zeta_2^l\big)^{\frac{1}{k}}$. Видим, что носитель функции $\hat{f}_n$ содержится в маленьком $n^{-1} \times n^{-2}$-прямоугольничке R_n, покрывающем n^{-2}-окрестность кривой $\gamma = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^k = \sigma_1\eta^l\}$ возле точки ζ (а именно, большая сторона R_n параллельна касательной к кривой γ в точке ζ), см. Рис. 2.2. Символом R_n° обозначим поляру прямоугольничка R_n,

$$R_n^\circ = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, \forall(\xi,\eta) \in R_n \;\; \big|x(\xi-\zeta_1) + y(\eta-\zeta_2)\big| \leqslant 1\Big\}.$$

Множество R_n° является прямоугольником $n \times n^2$, у которого “главная ось” перпендикулярна “главной оси” R_n (и параллельна нормали в точке ζ к кривой γ). Ясно, что на множестве $\frac{1}{2}R_n^\circ$ значения функции $|f_n|$ не менее $n^{-3}(\int\phi)^2$ (в силу неотрицательности функции ϕ). Отсюда получаем оценку снизу

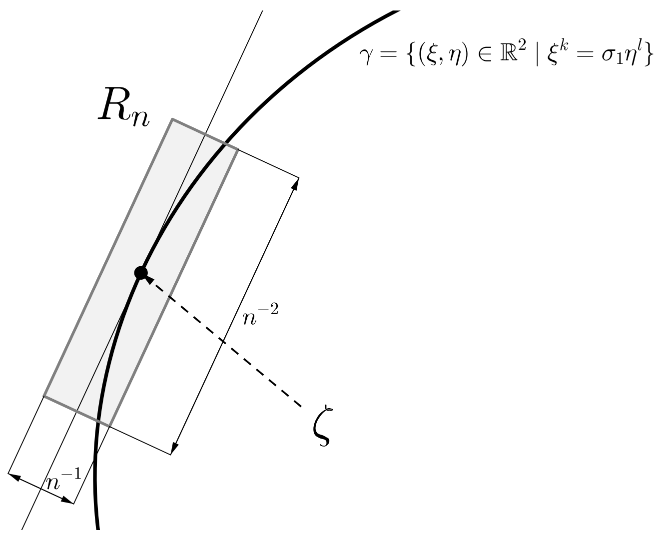

Рис. 2.2. Прямоугольничек R_n и кривая γ в окрестности точки ζ.

на $\mathcal{P}_q^{(\alpha,\beta)}$-норму из неравенства (2.4.4):

$$\|f_n\|^q_{\mathcal{P}_q^{(\alpha,\beta)}} \asymp \|f_n\|^q_{L_q} \geqslant \int\limits_{\frac{1}{2}R_n^\circ} |f_n(x,y)|^q\,dx\,dy \gtrsim n^3 n^{-3q}, \tag{2.4.5}$$

то есть, $\|f_n\|_{L_q} \gtrsim n^{\frac{3}{q}-3}$.

Если n достаточно велико, то

$$\bigl|(\xi^k - \sigma_1\eta^l)\hat{f}_n(\xi,\eta)\bigr| \lesssim n^{-2},$$

так как на прямоугольничке R_n, где лежит носитель функции $\hat{f}_n$, многочлен $(\xi^k - \sigma_1\eta^l)$ не превосходит n^{-2}. Следовательно,

$$\bigl\|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n\bigr\|_{L_\infty} \lesssim \bigl\|(\xi^k - \sigma_1\eta^l)\hat{f}_n\bigr\|_{L_1} \lesssim n^{-5}, \tag{2.4.6}$$

так как последняя функция не превосходит n^{-2} и имеет носитель на прямоугольничке R_n, мера которого есть n^{-3}.

Следующее неравенство есть просто переформулировка леммы 2.4.8 (интеграл, оцениваемый в лемме 2.4.8 есть ни что иное, как выражение $(\partial_1^k -$

$\sigma\partial_2^l)f_n(x,y)$, умноженное на некоторую мнимую экспоненту, которая отвечает за сдвиг и поворот Фурье-образа; для применения леммы 2.4.8 мы просто записываем функцию $(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n(x,y)$ через обратное преобразование Фурье ее Фурье–образа): для всякого числа $\varepsilon > 0$ и всякого фиксированного числа $r > 0$

$$\big|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n(x,y)\big| \lesssim n^{-5}\Big(\Big|\frac{\langle(x,y),e_1\rangle}{n^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\langle(x,y),e_2\rangle}{n}\Big|^2\Big)^{-r},$$
$$\operatorname{dist}\big((x,y),R_n^\circ\big) \geqslant n^\varepsilon, \quad (2.4.7)$$

здесь e_1 и e_2 — единичные векторы, параллельные большой и малой сторонам прямоугольника R_n° соответственно.

Вооруженные доказанными фактами, напишем оценку (символ $B_r(z)$ обозначает шар радиуса r с центром в точке z):

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \big|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n\big|^p = \int\limits_{R_n^\circ + B_{n^\varepsilon}(0)} \big|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n\big|^p + \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus(R_n^\circ + B_{n^\varepsilon})} \big|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f_n\big|^p \overset{\substack{(2.4.6)\\(2.4.7)}}{\lesssim}$$
$$n^{-5p}n^{3+2\varepsilon} + \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus(R_n^\circ + B_{n^\varepsilon})} n^{-5p}\Big(\Big|\frac{\langle(x,y),e_1\rangle}{n^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\langle(x,y),e_2\rangle}{n}\Big|^2\Big)^{-rp}\,dx\,dy \lesssim$$
$$n^{-5p+3+2\varepsilon}.$$

Подставляя эту оценку и оценку (2.4.5) в неравенство (2.4.4), получаем, что $-5 + \frac{3+2\varepsilon}{p} \geqslant \frac{3}{q} - 3$, что, если устремить ε к нулю, и дает неравенство $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$. $\square$

2.5. Смежные вопросы, обобщения и гипотезы

2.5.1. Квадратичные неравенства

Результаты двух предыдущих параграфов дают нам информацию о квадратичных неравенствах.

Определение 2.5.1. Пусть k и l — натуральные числа, α и β — вещественные числа, а σ и τ — комплексные ненулевые числа. Символом $\mathrm{QE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$ мы будем обобзначать утверждение о том, что неравенство

$$\|f\|^2_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|(\partial_1^k - \tau\partial_2^l)f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \|(\partial_1^k - \sigma\partial_2^l)f\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \qquad (2.5.1)$$

верно для всех функций f из класса Шварца.

Замечание 2.5.2. Если для некоторых значений параметров $k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau$ имеет место утверждение $\mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$, то и утверждение $\mathrm{QE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$ верно.

Замечание 2.5.2, что у нас есть некоторые положительные результаты относительно квадратичных неравенств, которые следуют из теоремы 1.2.4, теоремы 1.2.5 и следствия 2.4.4. С отрицательными результатами все иначе.

Замечание 2.5.3. Утверждение $\mathrm{QE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \sigma)$ неверно.

Чтобы убедиться в верности этого замечания в случае, когда четверка (k, l, σ, σ) эллиптична, отметим, что в этом случае функции F и G, построенные в контрпримере в пункте 2.3.2, равны, поэтому они доставляют контрпримеры и к утверждению QE. Если четверка (k, l, σ, σ) неэллиптична, замечание следует из леммы 2.4.7. Оказывается, что квадратичные неравенства имеют больше общих черт с классическими теоремами вложения.

Гипотеза 2.5.4. *Утверждение* $\mathrm{QE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$ *верно, если* $\sigma \neq \tau$ *и параметры удовлетворяют уравнению* (2.3.4).

Мы пока не можем доказать эту гипотезу. Однако, рассуждения в стиле доказательства леммы 2.4.5 позволяют доказать утверждение QE в некоторых случаях, когда утверждение BE точно неверно.

Лемма 2.5.5. *Следующая импликация выполнена при условии* $\Im(\sigma\overline{\tau}) \neq 0$:

$$\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau) \ \&\ \mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,-\sigma,-\tau) \Rightarrow \ \mathrm{QE}(2k,2l,\alpha,\beta+l,\sigma^2,\tau^2).$$

Если $\Re(\sigma\overline{\tau}) \geqslant 0$, *то выполнена импликация*

$$\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau) \ \&\ \mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,-\sigma,-\tau) \Rightarrow \mathrm{QE}(2k,2l,\alpha+k,\beta,\sigma^2,\tau^2).$$

Доказательство. Применив утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ к паре функций $(\partial_1^k+\sigma\partial_2^l)f$ и $(\partial_1^k+\tau\partial_2^l)f$, получим неравенство

$$\left|\langle(\partial_1^k+\sigma\partial_2^l)f,(\partial_1^k+\tau\partial_2^l)f\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)}\right| \lesssim \\ \left\|(\partial_1^{2k}-\tau^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\left\|(\partial_1^{2k}-\sigma^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Аналогично, применение утверждения $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,-\sigma,-\tau)$ к паре функций $(\partial_1^k-\sigma\partial_2^l)f$ и $(\partial_1^k-\tau\partial_2^l)f$ дает неравенство

$$\left|\langle(\partial_1^k-\sigma\partial_2^l)f,(\partial_1^k-\tau\partial_2^l)f\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)}\right| \lesssim \\ \left\|(\partial_1^{2k}-\tau^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\left\|(\partial_1^{2k}-\sigma^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Складывая первое и второе неравенства и применяя неравенство треугольника в левой части, получим

$$\left|\langle\partial_1^k f,\partial_1^k f\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}}+\sigma\overline{\tau}\langle\partial_2^l f,\partial_2^l f\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}}\right| \lesssim \\ \left\|(\partial_1^{2k}-\tau^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\left\|(\partial_1^{2k}-\sigma^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Пользуясь формулой (2.4.3), видим что оба числа $\langle\partial_1^k f,\partial_1^k f\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}} = (2\pi)^{2k}\|f\|^2_{\mathcal{P}_2^{(\alpha+k,\beta)}}$ и $\langle\partial_2^l f,\partial_2^l f\rangle_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta)}} = (2\pi)^{2l}\|f\|^2_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta+l)}}$ — вещественные неотрицательные. Отсюда и следует, что если $\Im(\sigma\overline{\tau}) \neq 0$, то

$$\|f\|^2_{\mathcal{P}_2^{(\alpha,\beta+l)}} \lesssim \left\|(\partial_1^{2k}-\tau^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\left\|(\partial_1^{2k}-\sigma^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)},$$

а если $\Re(\sigma\overline{\tau}) \geqslant 0$, то

$$\|f\|^2_{\mathcal{P}_2^{(\alpha+k,\beta)}} \lesssim \left\|(\partial_1^{2k}-\tau^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\left\|(\partial_1^{2k}-\sigma^2\partial_2^{2l})f\right\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Ввиду произвольности функции f, лемма доказана. $\square$

Лемма 2.1.1 позволяет показать верность гипотезы 2.5.4 и в некоторых случаях нечетных степеней k и l, не охватываемых билинейными результатами.

Лемма 2.5.6. *Утверждение* $\mathrm{QE}(2,l,0,\frac{3}{4}l-\frac{1}{2},\sigma,\tau)$ *выполнено, если четверка* $(2,l,\sigma,\tau)$ *эллиптична, число* l *нечетно, а числа* σ_1 *и* τ_1 *имеют мнимые части одного знака.*

Доказательство. Если одно из чисел k и l нечетно, то из утверждения $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ следует утверждение $\mathrm{BE}(k,l,\alpha,\beta,-\sigma,-\tau)$ (надо сделать замену переменных $x\mapsto -x$ или $y\mapsto -y$ в зависимости от того, какое из чисел нечетно). Поэтому мы можем считать, что числа σ_1 и τ_1 имеют положительные мнимые части. Лемма 2.1.1 с параметрами $d_1=d_2=2$, $\Phi(\xi_2)=\xi_2$, $h(\xi_2)=|\xi_2|^{\frac{l}{2}}$, $H(\xi_2)=|\xi_2|^{\frac{l}{2}-1}$ и функциями σ_1^+ и τ_1^+ параметра $\operatorname{sign}\xi_2$, выбранными так, чтобы $(\sigma_1^+)^2=\sigma_1\operatorname{sign}\xi_2^l$, $(\tau_1^+)^2=\tau_1\operatorname{sign}\xi_2^l$ и $\Im\sigma_1^+>0$, $\Im\tau_1^+<0$ (см. замечание 2.1.2), влечет неравенство

$$\Big|\langle f,g\rangle_{\mathcal{P}_2^{(0,\frac{l}{4}-\frac{1}{2})}}\Big|\lesssim\Big\|\mathcal{M}_{(\xi_1-\sigma_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}})}[f]\Big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\Big\|\mathcal{M}_{(\xi_1-\tau_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}})}[g]\Big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Применяя ту же лемму, только с параметрами $-\sigma_1^+$ и $-\tau_1^+$ вместо σ_1^+ и τ_1^+, получаем неравенство

$$\Big|\langle f,g\rangle_{\mathcal{P}_2^{(0,\frac{l}{4}-\frac{1}{2})}}\Big|\lesssim\Big\|\mathcal{M}_{(\xi_1+\sigma_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}})}[f]\Big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\Big\|\mathcal{M}_{(\xi_1+\tau_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}})}[g]\Big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Применяя первое неравенство к паре фунций $\mathcal{M}_{(\xi_1+\sigma_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}})}[f]$ и $\mathcal{M}_{(\xi_1+\tau_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}})}[f]$, второе неравенство к паре функций $\mathcal{M}_{(\xi_1-\sigma_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}})}[f]$ и $\mathcal{M}_{(\xi_1-\tau_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}})}[f]$, складывая получившиеся неравенства и применяя неравенство треугольника к левой части (т.е. делая то же самое, что и в предыдущей лемме), получаем неравенства

$$\left|\langle f,f\rangle_{\mathcal{P}_2^{(1,\frac{l}{4}-\frac{1}{2})}}+\langle\mathcal{M}_{\sigma_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}}}[f],\mathcal{M}_{\tau_1^+|\xi_2|^{\frac{l}{2}}}[f]\rangle_{\mathcal{P}_2^{(0,\frac{l}{4}-\frac{1}{2})}}\right|\lesssim \Big\|(\partial_1^2-\sigma\partial_2^l)f\Big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}\Big\|(\partial_1^2-\tau\partial_2^l)f\Big\|_{L_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Нетрудно видеть, что функция $\sigma_1^+\tau_1^+$ не зависит от $\operatorname{sign}\xi_2$ (именно здесь мы используем то условие, что у чисел σ_1 и τ_1 мнимые части одного знака, потому что в этом случае $\sigma_1^+(-1) = i\sigma_1^+(1)$, а $\tau_1^+(-1) = i\tau_1^+(-1)$). Поэтому, ее можно вынести множителем из второго скалярного произведения в левой части. Так как числа σ_1^+ и τ_1^+ лежат в первом квадранте, их произведение имеет положительную мнимую часть. Применяя те же рассуждения, что и в доказательстве леммы 2.5.5, получаем утверждение $\mathrm{QE}(2,l,0,\frac{3}{4}l-\frac{1}{2},\sigma,\tau)$. $\square$

Отметим, что утверждение $\mathrm{BE}(2,l,0,\frac{3}{4}l-\frac{1}{2},\sigma,\tau)$ неверно по теореме 1.2.4.

Замечание 2.5.7. Нетрудно видеть, что если утверждения $\mathrm{QE}(k,l,\alpha_0,\beta_0,\sigma,\tau)$ и $\mathrm{QE}(k,l,\alpha_1,\beta_1,\sigma,\tau)$ верны, то верны и все промежуточные утверждения $\mathrm{QE}(k,l,\alpha_\theta,\beta_\theta,\sigma,\tau)$, $\theta\in(0,1)$, где

$$(\alpha_\theta,\beta_\theta)=(1-\theta)(\alpha_0,\beta_0)+\theta(\alpha_1,\beta_1).$$

Это вытекает из взвешенного неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Пары $(\alpha_\theta,\beta_\theta)$ мы будем называть промежуточными для пар (α_0,β_0) и (α_1,β_1). Подведем итог, напрямую следующий из приведенных лемм и результатов для билинейных неравенств.

Теорема 2.5.8. *Утверждение* $\mathrm{QE}(k,l,\alpha,\beta,\sigma,\tau)$ *верно, если пара* (α,β) *удовлетворяет уравнению* (2.3.4), *четверка* (k,l,σ,τ) *эллиптична, и выполнено одно из нижеперечисленных условий.*

1. *Одно из чисел k и l равно 2, другое нечетно, числа σ_1 и τ_1 имеют ненулевые мнимые части одного знака, а пара (α, β) лежит между $(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}, \frac{l}{2} - \frac{1}{2})$ и $(0, \frac{3}{4}l - \frac{1}{2})$, если $k = 2$, и между $(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}, \frac{l}{2} - \frac{1}{2})$ и $(\frac{3}{4}k - \frac{1}{2}, 0)$, если $l = 2$.*

2. *Оба числа k и l нечетны, числа σ_1 и τ_1 имеют ненулевые мнимые части одного знака, а пара (α, β) равна $(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}, \frac{l}{2} - \frac{1}{2})$.*

3. *Оба числа k и l четны, в одно из них число 2 входит в степени 1, число $\sigma\tau^{-1}$ не есть вещественное положительное, $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}l - \frac{1}{2})$ или $(\frac{3}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{1}{4}l - \frac{1}{2})$ (в зависимости от того, какое число не делится на 4; если оба числа не делятся на 4, то (α, β) может принимать не только эти два значения, но и любое промежуточное между ними).*

4. *Оба числа k и l четны, в одно из них число 2 входит в степени 1, произведение квадратных корней из чисел σ и $\overline{\tau}$ имеет неотрицательную вещественную часть, $(\alpha, \beta) = (\frac{3}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{1}{4}l - \frac{1}{2})$ или $(\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}l - \frac{1}{2})$ с теми же оговорками, что и в прошлом пункте.*

5. *Если выполнены предположения обоих предыдущих пунктов, то (α, β) лежит между $(\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}l - \frac{1}{2})$ и $(\frac{3}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{1}{4}l - \frac{1}{2})$.*

Похожие выводы можно сделать и в неэллиптическом случае, но мы этого делать не будем, потому что все равно результаты неполны.

2.5.2. Пересадка теорем вложения на тор

Определение 2.5.9. Пусть f — обобщенная функция на торе $\mathbb{T}^d$. Будем говорить, что f — правильная, если функция $\hat{f}$ зануляется на координатных плоскостях.

Свойство правильности для функций на торе является аналогом условия компактности носителя для функций на плоскости, если речь идет о теоремах вложения (как функции с компактным носителем на пространстве $\mathbb{R}^d$, так и правильные функции на торе восстанавливаются по любой своей производной). Если мы рассматриваем подпространство некоторого пространства, состоящее из правильных функций, мы приписываем к символу, обозначающему пространство, нолик слева, например, ${}_0L_1$ означает, что рассматривается пространство суммируемых правильных функций и т.д. Если X — инвариантное подпространство (см. определение 1.4.25) пространства $L_1(\mathbb{T}^d)$, то пространство ${}_0X$ дополняемо в пространстве X. Проектор не зависит от пространства X (это свертка с линейной комбинацией мер, преобразования Фурье которых суть характеристические функции подгрупп $\mathbb{Z}^d$). Поэтому интерполяционная теорема 1.4.35 остается верной, если ко всем пространствам в ней приписать нолики. Напомним читателю, что символом $\mathcal{P}_q^\alpha(\mathbb{T}^d)$ мы обозначаем замыкание множества $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ по норме $\|\mathcal{M}_{|\xi|^\alpha}[\cdot]\|_{L_q(\mathbb{T}^d)}$, а символом $\tilde{\mathcal{P}}_q^\alpha$ — аналогичное пространство, в котором символ мультипликатора вместо $|\xi|^\alpha$ есть $(1+|\xi_1|)^{\alpha_1}(1+|\xi_2|^{\alpha_2})\cdots(1+|\xi_d|)^{\alpha_d}$. Отметим простой факт: ${}_0\mathcal{P}_q^\alpha \hookrightarrow \tilde{\mathcal{P}}_q^\alpha$ для всякого $q \in (1,\infty)$ и α (при целых значениях параметра α это просто неравенство Пуанкаре, так как нормы задаются суммой норм соответствующих производных в пространстве L_q, а при остальных значениях параметра α следует из теоремы 1.4.35 и предыдущего замечания о том, что эта теорема верна для случая пространств с ноликом).

Теорема 2.5.10. *Пусть k, l, N — натуральные числа, а правильные меры $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N$ на торе $\mathbb{T}^2$ таковы, что выполнено равенство* (1.2.1). *Тогда существует единственный набор правильных функций $f_1, f_2, \ldots, f_N$ из пространства $W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l}, l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}(\mathbb{T}^2)$, решающий систему уравнений* (1.2.2). *Кроме того, эти функции удовлетворяют оценке $\sum_{j=1}^N \|f_j\|_{W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l}, l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}} \lesssim$*

$\sum_{j=0}^{N} \operatorname{var} \mu_j$.

Доказательству теоремы 2.5.10 предпошлем ряд лемм.

Лемма 2.5.11. *Пусть* χ *— гладкая вещественнозначная функция с компактным носителем на пространстве* $\mathbb{R}^d$*, равная единице на множестве* $[-1,1]^d$*. Рассмотрим оператор* Tf_χ[1]*, заданный на классе* $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ *по правилу*

$$\mathrm{Tf}_\chi[\varphi] = \tilde{\varphi}\chi, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d),$$

символом $\tilde{\varphi}$ *мы обозначили периодизацию функции* φ*. Оператор* Tf_χ *непрерывен как оператор из любого пространства* $\tilde{\mathcal{P}}_q^l(\mathbb{T}^d)$*,* $1 < q < \infty$*,* $l \geqslant 0$*, в пространство* $\tilde{\mathcal{P}}_q^l(\mathbb{R}^d)$ *или из пространства* $\tilde{W}_q^l(\mathbb{T}^d)$ *в пространство* $\tilde{W}_q^l(\mathbb{R}^d)$*,* $1 < q < \infty$*,* $l \geqslant 0$*, а также обладает ограниченным левым обратным.*

Доказательство. Начнем доказательство с непрерывности оператора Tf. Пусть l — целочисленный вектор с четными координатами. Докажем теорему для случая потенциального пространства $\tilde{\mathcal{P}}_q^l$. В таком случае, норма задается чистыми производными (см. определение 1.4.33 частичного порядка на множестве индексов),

$$\|\varphi\|_{\tilde{\mathcal{P}}_q^l} \asymp \sum_{\alpha \preceq l} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L_q},$$

и мы можем написать

$$\Big\| \mathrm{Tf}[\varphi] \Big\|_{\tilde{\mathcal{P}}_q^l(\mathbb{R}^d)} = \sum_{\alpha \preceq l} \big\|\partial^\alpha [\chi\tilde{\varphi}]\big\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \sum_{\alpha \preceq l} \|\varphi\|_{\tilde{\mathcal{P}}_q^\alpha(\mathbb{T}^d)} \lesssim \|\varphi\|_{\tilde{\mathcal{P}}_q^l(\mathbb{T}^d)}.$$

Обратимость оператора можно легко получить, если заметить, что на единичном квадрате $\partial^l \,\mathrm{Tf}[\varphi] = \partial^l \tilde{\varphi}$. Однако, мы проведем доказательство по другой схеме, которая работает и для пространств нецелой гладкости.

[1] Символ Tf — сокращение от transfer, так как оператор Tf осуществляет “пересадку” функций с тора на пространство $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим оператор $\mathrm{Tf}' : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$, заданный по правилу

$$\mathrm{Tf}'[\psi](x) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \psi(x+z)\chi(x+z), \quad x \in \mathbb{T}^d.$$

Нетрудно видеть, что оператор Tf' действует непрерывно из пространства $\tilde{\mathcal{P}}^l_q(\mathbb{R}^d)$ в пространство $\tilde{\mathcal{P}}^l_q(\mathbb{T}^d)$. Кроме того, композиция $\mathrm{Tf}'\,\mathrm{Tf}$ есть оператор умножения на функцию w, $w(x) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \chi^2(x+z)$. Отметим, что этот оператор обратим как оператор из пространства $\tilde{\mathcal{P}}^l_q(\mathbb{T}^d)$ в пространство $\tilde{\mathcal{P}}^l_q(\mathbb{T}^d)$ (потому что функция w строго положительна). Стало быть, в диаграмме

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{P}}^l_q(\mathbb{T}^d) \arrow[rr, "w"] \arrow[dr, "\mathrm{Tf}"'] & & \tilde{\mathcal{P}}^l_q(\mathbb{T}^d) \\ & \tilde{\mathcal{P}}^l_q(\mathbb{R}^d) \arrow[ur, "\mathrm{Tf}'"'] & \end{tikzcd} \tag{2.5.2}$$

верхняя стрелка обратима, и оператор Tf обладает левым обратным.

Как мы видим, обратимость с образа оператора Tf следует из непрерывности некоторых операторов в диаграмме (2.5.2), которые не зависят от вектора l. Из теоремы 1.4.35 следует, что те же операторы непрерывны и в случае, когда вектор l может иметь нецелые координаты, поэтому оператор Tf по-прежнему непрерывен и обратим с образа как оператор между соответствующими потенциальными пространствами.

Случай пространств Соболева $\tilde{W}^l_q$ можно либо рассмотреть аналогично, либо заметить что $\tilde{W}^l_q = \cap_{j=1}^d \tilde{\mathcal{P}}^{l_j}_q$, где l_j есть вектор с единственной ненулевой координатой l_j на j-ом месте. $\square$

Замечание 2.5.12. Аналогичное утверждение верно и для пространств Бесова. Надо только установить для них интерполяционные формулы наподобие теоремы 1.4.35 (и это нетрудно сделать при помощи вещественного метода интерполяции).

Следующие две леммы носят вспомогательный характер, они нужны для доказательства следствия 2.5.15, сформулированного ниже. Мы выносим доказательства лемм 2.5.13 и 2.5.14 в приложение.

Лемма 2.5.13. *Пусть τ — комплексное число, такое что $i^{l-k}\tau \notin \mathbb{R}$. Тогда*

$$\max\Big(\|\partial_1^{k-1} f\|_{L_1(\mathbb{T}^2)}, \|\partial_2^{l-1} f\|_{L_1(\mathbb{T}^2)}\Big) \lesssim \|(\partial_1^k - \tau\partial_2^l) f\|_{L_1(\mathbb{T}^2)} \tag{2.5.3}$$

для всякой правильной функции f.

Лемма 2.5.14. *Пусть одно из чисел k и l больше единицы, а число τ удовлетворяет условию из предыдущей леммы. Тогда для всякой правильной функции f имеет место оценка*

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} \lesssim \|(\partial_1^k - \tau\partial_2^l) f\|_{L_1(\mathbb{T}^2)}.$$

Следствие 2.5.15. *Пусть правильные функции $f_1, f_2, \ldots, f_N$ и меры $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N$ на торе $\mathbb{T}^2$ удовлетворяют системе уравнений* (1.2.2). *В таком случае,*

$$\sum_{j=1}^{N}\Big(\|\partial_1^{k-1} f_j\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_2^{l-1} f_j\|_{L_1(\mathbb{R}^2)} + \|f_j\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\Big) \lesssim \sum_{j=0}^{N} \|\mu_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{T}^2)}.$$

Это следствие выводится из лемм 2.5.13 и 2.5.14 примерно тем же способом, что и теорема 2.2.1 из леммы 2.1.1, только рассуждение проще. Надо для каждого числа $j \in [1..N]$ (напомним читателю, что символ $[1..N]$ обозначает множество целых чисел отрезка $[1, N]$) умножить j-е уравнение системы (1.2.2) на σ^{j-1} и все уравнения сложить; получившуюся функцию f_σ оценить при помощи леммы 2.5.13 и леммы 2.5.14, после чего восстановить набор функций $\{f_j\}_j$ из набора функций $\{f_\sigma\}_\sigma$ (упрощение по сравнению с выводом теоремы 2.2.1 состоит в том, что в этот раз нет нужды оценивать билинейную форму).

Доказательство теоремы 2.5.10. Существование и единственность набора функций $\{f_j\}_j$ очевидны (например, можно легко вычислить каждый коэффициент Фурье функции f_j для всякого j). Как обычно, нетривиальность теоремы прячется в оценке. Так как $W_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l},l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})} = \mathcal{P}_2^{(k-\frac{1}{2}-\frac{k}{2l},0)} \cap \mathcal{P}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}$, можно доказывать ограниченность решения лишь в пространстве $\mathcal{P}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}$. Доказательство завершается серией простых неравенств (отметим, что написанное верно в случае $kl \neq 1$, оставшийся случай еще проще, потому что в нем оценивается норма в L_2, а не потенциальном пространстве, и младшие члены не возникают):

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{{}_0\mathcal{P}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}(\mathbb{T}^2)} \lesssim \sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{\tilde{\mathcal{P}}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}(\mathbb{T}^2)} \overset{\text{лем. 2.5.11}}{\lesssim} \\
\sum_{j=1}^{N} \|\operatorname{Tf} f_j\|_{\tilde{\mathcal{P}}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \\
\sum_{j=1}^{N} \|\operatorname{Tf} f_j\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} + \sum_{j=1}^{N} \|\operatorname{Tf} f_j\|_{\mathcal{P}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \\
\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} + \sum_{j=1}^{N} \|\operatorname{Tf} f_j\|_{\mathcal{P}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}(\mathbb{R}^2)} \overset{\text{сл. 2.5.15}}{\lesssim} \\
\sum_{j=0}^{N} \|\mu_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{T}^2)} + \sum_{j=1}^{N} \|\operatorname{Tf} f_j\|_{\mathcal{P}_2^{(0,l-\frac{1}{2}-\frac{l}{2k})}(\mathbb{R}^2)} \overset{\text{теор. 1.2.1}}{\lesssim} \\
\sum_{j=0}^{N} \|\mu_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{T}^2)} + \sum_{j=1}^{N-1} \Big\|\partial_1^k [\operatorname{Tf} f_{j+1}] - \partial_2^l [\operatorname{Tf} f_j]\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)} + \\
\Big\|\partial_1^k [\operatorname{Tf} f_1]\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)} + \Big\|\partial_2^l [\operatorname{Tf} f_N]\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \\
\sum_{j=0}^{N} \|\mu_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{T}^2)} + \sum_{j=1}^{N-1} \Big\|\chi(\partial_1^k \tilde{f}_{j+1} - \partial_2^l \tilde{f}_j)\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)} + \\
\Big\|\chi\partial_1^k \tilde{f}_1\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)} + \Big\|\chi\partial_2^l \tilde{f}_N\Big\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^2)} + \\
\sum_{j=1}^{N} \Big(\|\partial_1^{k-1} f_j\|_{L_1(\mathbb{T}^2)} + \|\partial_2^{l-1} f_j\|_{L_1(\mathbb{T}^2)}\Big) \overset{\text{сл. 2.5.15}}{\lesssim} \sum_{j=0}^{N} \|\mu_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{T}^2)}. \quad \square
\end{aligned}
$$

2.5.3. Линейные теоремы вложения для неэллиптических операторов

Определение 2.5.16. Пусть k и l — натуральные неравные числа, p и q — вещественные числа, $p, q \in [1, \infty]$, α и β — вещественные неотрицательные числа. Символом $\mathrm{LE}(k, l, p, q, \alpha, \beta)$ мы обозначаем утверждение о том, что неравенство

$$\|f\|_{\mathcal{P}_q^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \Big\|\Big((2\pi i)^{-k}\partial_1^k - (2\pi i)^{-l}\partial_2^l\Big)f\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}$$

выполнено для всех функций $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Замечание 2.5.17. Если утверждение $\mathrm{LE}(k, l, p, q, \alpha, \beta)$ верно, то

$$\frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{l} = 1 - \Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)\Big(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\Big). \qquad (2.5.4)$$

Это замечание можно проверить ровно тем же рассуждением, что и аналогичное соотношение для утверждения типа BE, см. начало пункта 2.3.2. Отметим, что выбор коэффициентов $(2\pi i)^{-k}$ и $(2\pi i)^{-l}$ в дифференциальном полиноме особой роли не играет: важно лишь, что соответствующий ему характеристический полином не является эллиптическим; мы выбрали коэффициенты, чтобы характеристический полином имел простейший вид $\xi^k - \eta^l$. В случае эллиптического полинома аналогичное утверждение верно всегда, если выполнено соотношение (2.5.4) и $1 < p \leqslant q < \infty$.

Замечание 2.5.18. Согласно лемме 2.4.7, если утверждение $\mathrm{LE}(k, l, p, q, \alpha, \beta)$ верно, то $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$.

Кривую $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^k = \eta^l\}$ обозначим символом γ. Множество $\gamma \setminus \{0\}$ есть подмногообразие плоскости, более того, в каждой точке оно обладает ненулевой кривизной. Символом $\mathfrak{p}$ мы обозначаем любую точку вида $(\pm 1, \pm 1)$.

Предложение 2.5.19. *Пусть* $p, q \in (1, \infty)$. *Утверждение* $\mathrm{LE}(k, l, p, q, \alpha, \beta)$ *верно тогда и только тогда, когда для каждой точки* $\mathfrak{p}$ *выполнено аналогичное локализованное по спектру неравенство*

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \lesssim \big\| \mathcal{M}_{\xi^k - \eta^l}[f] \big\|_{L_p} \quad \textit{для всех функций } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$
$$\textit{таких что } \operatorname{supp} \hat{f} \subset B_{0.1}(\mathfrak{p}). \quad (2.5.5)$$

Доказательство. Ясно, что локализованное неравенство является частным случаем утверждения LE, поэтому, чтобы доказать предложение, достаточно вывести утверждение LE из неравенства (2.5.5). Согласно замечанию 2.5.18, достаточно рассмотреть случай $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$. В частности, будем считать, что $1 < p \leqslant 2$ и $2 \leqslant q < \infty$.

Пусть $\{\Psi_k\}$ — функции разложения Литтлвуда–Пэли с параметрами растяжения $\lambda_1 = 2^{-k}$ и $\lambda_2 = 2^{-l}$ (см. пункт 1.4.3, мы пользуемся обозначениями того пункта). Благодаря следствию 1.4.37, утверждение $\mathrm{LE}(k, l, p, q, \alpha, \beta)$ последует из неравенства

$$\|f\|_{B_q^{(\alpha,\beta),2}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \Big\| \big((2\pi i)^{-k} \partial_1^k - (2\pi i)^{-l} \partial_2^l\big) f \Big\|_{B_p^{(0,0),2}(\mathbb{R}^2)} \tag{2.5.6}$$

(пространства Бесова построены по указанному разложению Литтлвуда–Пэли)[2]. Пусть функция $\tilde{\Psi}$ равна единице на носителе функции Ψ, а функции $\tilde{\Psi}_k$ — ее растяжения согласно формуле (1.4.10). Предположим, что выполнено неравенство

$$\big\| \mathcal{M}_{\tilde{\Psi}}[f] \big\|_{B_q^{(\alpha,\beta),2}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \Big\| \big((2\pi i)^{-k} \partial_1^k - (2\pi i)^{-l} \partial_2^l\big) f \Big\|_{B_p^{(0,0),2}(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.5.7}$$

Это неравенство инвариантно относительно растяжений, поэтому, если оно выполнено, то выполнено и аналогичное неравенство с заменой $\tilde{\Psi}$ на $\tilde{\Psi}_k$ (с

[2] Отметим, что вывод леммы из этого утверждения не нуждается в теореме 1.4.36. Действительно, при доказательстве леммы мы не пользуемся другими определениями пространства Бесова (или какими-то его свойствами), кроме того, которое описывается в теореме 1.4.36.

той же константой). Но в таком случае, выполнено и неравенство (2.5.6) (потому что $\mathcal{M}_{\tilde{\Psi}_k}\mathcal{M}_{\Psi_k} = \mathcal{M}_{\Psi_k}$). Таким образом, достаточно доказать неравенство (2.5.7). В силу того, что спектр функции в левой части ограничен и отделен от нуля, можно в левой части заменить норму в пространстве Бесова на обычную L_q-норму. Сделаем достаточно мелкое разложение единицы, т.е. представим функцию $\tilde{\Psi}$ в виде конечной суммы $\tilde{\Psi} = \sum_n \chi_n$, где функции χ_n имеют маленький носитель. Можно сделать разложение единицы так, чтобы каждая точка набора $\mathfrak{p}$ содержалась в носителе лишь одной функции из набора $\{\chi_n\}_n$. Неравенство (2.5.7) можно доказывать для каждой функции χ_n вместо $\tilde{\Psi}$ по отдельности. Остается только заметить, что неравенства с функциями χ_n, носители которых содержат точки $\mathfrak{p}$, верны по предположению, остальные — потому что на носителе соответствующей функции χ_n многочлен $\xi^k - \eta^l$ отделен от нуля. □

Отметим, что утверждение LE говорит о непрерывности некоторого линейного оператора (который сопоставляет функции $\big((2\pi i)^{-k}\partial_1^k - (2\pi i)^{-l}\partial_2^l\big)f$ функцию f). Изучим его область определения.

Лемма 2.5.20. *Пусть $p \in (1,\infty)$ — вещественное число, а k и l — натуральные числа. Тогда имеет место равенство пространств*

$$\operatorname{clos}_{L_p(\mathbb{R}^2)}\left(\left\{\big((2\pi i)^{-k}\partial_1^k - (2\pi i)^{-l}\partial_2^l\big)f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\;\middle|\; f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\right\}\right) = \operatorname{clos}_{L_p(\mathbb{R}^2)}\left(\left\{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\;\middle|\; \forall \xi \in \gamma \quad \hat{g}(\xi) = 0\right\}\right).$$

Доказательство. Во-первых, нетрудно видеть, что подмножества, состоящие из функций, спектр которых не содержит нуля, плотны в обоих пространствах (здесь важно условие $p > 1$). Во-вторых, очевидно, что первое пространство содержится во втором, потому что многочлен $\xi^k - \eta^l$ обращается в нуль на множестве γ. В-третьих, во втором пространстве плотны функции g, удовлетворяющие дополнительному условию $\hat{g} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$. Но благодаря лемме 1.4.3, множества

$$\Big\{\big((2\pi i)^{-k}\partial_1^k - (2\pi i)^{-l}\partial_2^l\big) f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \;\Big|\; \hat{f} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2),\ 0 \notin \operatorname{supp}\hat{f}\Big\} \quad \text{и}$$

$$\Big\{g \in \mathcal{F}^{-1}\big(\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)\big) \;\Big|\; 0 \notin \operatorname{supp}\hat{g}, \forall \xi \in \gamma\ \ \hat{g}(\xi) = 0\Big\}$$

совпадают. □

Определение 2.5.21. Пусть S — (вложенное) подмногообразие пространства $\mathbb{R}^d$ размерности $d-1$. Символом ${}_S L_p(\mathbb{R}^d)$ обозначим подпространство пространства $L_p(\mathbb{R}^d)$, заданное формулой

$${}_S L_p(\mathbb{R}^d) = \operatorname{clos}_{L^p}\Big(\big\{\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \,\big|\, \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d), \quad \forall \xi \in S \quad \varphi(\xi) = 0\big\}\Big).$$

В соответствующем разделе пункта 1.4.1 мы требовали, чтобы подмногообразие S было замкнутым (для того, что работать с оператором Π_S). Для определения 2.5.21 такое требование необязательно, более того, наше главное подмногообразие $\gamma \setminus \{0\}$ незамкнуто. Тем не менее, как только мы начнем изучать пространства ${}_S L_p$ более подробно, мы перейдем к рассмотрени замкнутых подмногообразий S. Подробному описанию пространств подобного типа посвящен следующий пункт. В частности, мы покажем, что в случае $p < \frac{4}{3}$ пространство ${}_\gamma L_p$ не совпадает со всем пространством L_p, а в случае $p \geqslant \frac{4}{3}$ — совпадает. Однако для утверждений LE последний случай оказывается неинтересным (см. лемму 2.5.39). Чтобы не утяжелять обозначения, символом ${}_\gamma L_p$ мы обозначаем пространство для многообразия $S = \gamma \setminus \{0\}$.

Символом $\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{\xi^k - \eta^l}$ мы обозначим единственную обобщенную функцию класса $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, которая при умножении на многочлен $\xi^k - \eta^l$ дает единицу Нетрудно видеть, что

$$\langle \mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{\xi^k - \eta^l}, \Phi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{|\xi^k - \eta^l| \geqslant \varepsilon} \frac{\Phi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}{\xi^k - \eta^l}, \quad \Phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2), 0 \notin \operatorname{supp}\Phi. \quad (2.5.8)$$

Утверждение леммы 2.5.20 можно переформулировать, используя введенные обозначения.

Замечание 2.5.22. Пусть функция Φ равна единице в 0.1-окрестности какой-то точки $\mathfrak{p}$ и равна нулю вне 0.2-окрестности этой точки. В случае $p, q \in (1, \infty)$ локализованное неравенство (2.5.5) равносильно непрерывности мультипликатора Фурье с символом $\mathrm{v.\,p.}\,\frac{\Phi(\xi,\eta)}{\xi^k - \eta^l}$ из пространства ${}_{\gamma}L_p(\mathbb{R}^2)$ в пространство $L_q(\mathbb{R}^2)$.

Отметим, что теперь задача становится очень похожа на задачу непрерывности оператора Бохнера–Рисса, о которой сказано в пункте 1.4.3. Действительно, оператор $\mathrm{v.\,p.}\,\frac{\Phi(\xi,\eta)}{\xi^k - \eta^l}$ мало отличается от оператора S_{-1} (оба имеют особенность первого порядка на выпуклой кривой). Специфика нашей задачи состоит в том, что мы изучаем непрерывность оператора такого вида не между пространствами Лебега.

Гипотеза 2.5.23. *Пусть* $p, q \in (1, \infty)$. *Утверждение* $\mathrm{LE}(k, l, p, q, \alpha, \beta)$ *верно тогда и только тогда, когда* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$ *и* $p < \frac{4}{3}$.

Предложение 2.5.24. *Оператор* $\mathcal{M}_{\mathrm{v.p.}\,\frac{\Phi(\xi,\eta)}{\xi^k - \eta^l}}$ *непрерывен из пространства Лебега* $L_p(\mathbb{R}^2)$ *в пространство* $L_q(\mathbb{R}^2)$ *тогда и только тогда когда* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$, $p < \frac{4}{3}$ *и* $q > 4$.

На рисунке 2.3 изображена область допустимых параметров p, q. Область непрерывности оператора $\mathcal{M}_{\mathrm{v.p.}\,\frac{\Phi(\xi,\eta)}{\xi^k - \eta^l}}$ на пространствах Лебега не закрашена, область, при принадлежности параметров которой оператор разрывен, закрашена темно серым. Светло серым помечена область, в которой оператор разрывен на пространствах Лебега, однако, об истинности утверждения LE мы ничего не знаем (это область, в которой гипотеза 2.5.23 интересна). Доказательство предложения 2.5.24, по сути, аналогично доказательству соответствующего утверждения для оператора Бохнера–Рисса. Однако детали несколько отличаются. Всю оставшуюся часть данного пункта мы будем доказывать положительный результат предложения 2.5.24. Отрицательные

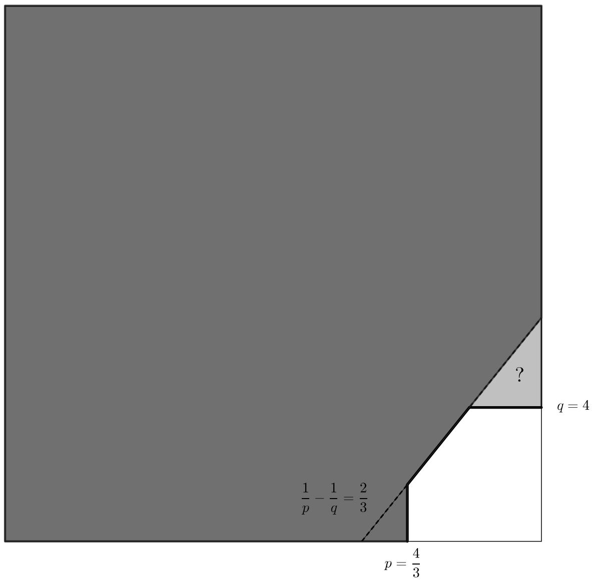

Рис. 2.3. Диаграмма параметров $\frac{1}{p}$ и $\frac{1}{q}$.

результаты мы приведем сразу для гипотезы 2.5.23, однако, для этого понадобится теория следующего пункта, поэтому, отрицательные результаты даны в лемме 2.5.39. Начнем с того, что поменяем обозначения на более подходящие к задаче.

Предложение 2.5.25. *Пусть $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть выпуклая гладкая функция, вторая производная которой не обращается в нуль, такая что $h(0) = h'(0) = 0$, а $\Phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ — функция с носителем в шаре $B_{0.1}(0)$. В таком случае, мультипликатор с символом* $\mathrm{v.\,p.}\, \frac{\Phi(\xi,\eta)}{\eta - h(\xi)}$ *(заданным аналогично формуле* (2.5.8)) *действует непрерывно из пространства $L_p(\mathbb{R}^2)$ в пространство $L_q(\mathbb{R}^2)$, если $p \in [1, \frac{4}{3})$, $q \in (4, \infty]$ и $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > \frac{2}{3}$.*

Отметим, что положительный результат (кроме предельного случая $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2}{3}$) предложения 2.5.24 следует из предложения 2.5.25 при помощи параллельного переноса и поворота координат, а также замены финитизатора Φ

(что не влияет на непрерывность между пространствами Лебега). В предельном случае $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2}{3}$ предложение тоже верно, его можно получить, адаптировав методы работы [61] к нашей ситуации. Мы приведем более простое рассуждение (по-видимому, тоже известное в связи с оператором Бохнера–Рисса, см. пункт 1.4.3), которое требует меньшей адаптации к нашей задаче, но не позволяет охватить предельный случай $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2}{3}$. Символом γ мы теперь будем обозначать кривую $\{(\xi, h(\xi)) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ (в некотором смысле, это та же кривая, что и раньше).

Замечание 2.5.26. Для удобства можно считать, что $\Phi(\xi,\eta) = \phi(\xi)\phi(\eta - h(\xi))$, где $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$, носитель функции ϕ принадлежит отрезку $(-0.1, 0.1)$, и $\phi = 1$ в окрестности нуля.

Учитывая последнее замечание, мы можем естественным образом вложить интересующий нас мультипликатор в аналитическое семейство операторов (обобщенные функции $\mathrm{v.\,p.}\, x^{-\delta}$ определены в пункте 1.4.1)

$$u_\delta[f] = \mathcal{F}^{-1}\Big[\phi(\xi)\phi(\eta - h(\xi))\,\mathrm{v.\,p.}(\eta - h(\xi))^{-\delta}\mathcal{F}[f](\xi,\eta)\Big], \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \quad (2.5.9)$$

иными словами, u_δ есть мультипликатор с символом $\mathrm{v.\,p.}(\eta - h(\xi))^{-\delta}\phi(\eta - h(\xi))\phi(\xi)$. Следующая лемма носит технический характер.

Лемма 2.5.27. *Пусть число $\delta \in \mathbb{C}$ таково, что $\Re\delta \in (0, \frac{3}{2}]$. В таком случае, оператор u_δ действует из пространства $L_1(\mathbb{R}^2)$ в пространство $L_\infty(\mathbb{R}^2)$ и удовлетворяет оценке*

$$\|u_\delta\|_{\mathcal{L}(L_1, L_\infty)} \lesssim e^{e^{0.01|\Im\delta|}}.$$

Доказательство леммы стандартно, читатель может найти его в приложении.

Нам понадобится еще одно аналитическое семейство операторов. На классе $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ зададим их формулой

$$v_{\varkappa,\phi}[f](\xi,\eta) = \frac{\phi(\xi)\phi(\eta - h(\xi))\mathcal{F}[f](\xi,\eta)}{|\eta - h(\xi)|^{\varkappa}}, \tag{2.5.10}$$

здесь ϕ — некоторый финитизатор, т.е. вещественная функция класса $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$, носитель которой лежит в отрезке $(-0.1, 0.1)$, а комплексное число $\varkappa$ удовлетворяет условию $0 < \Re\varkappa < 1$. Изучим непрерывность семейства операторов $v_{\varkappa}$ на пространствах Лебега (мы не будем конкретизировать финитизатор, если его вид нам неважен).

Лемма 2.5.28. *Оператор* $v_{\varkappa}$ *действует непрерывно из пространства* $L_p(\mathbb{R}^2)$ *в пространство* $L_s(\mathbb{R}^2)$, *если* $p < \frac{4}{3}$, $3s \leqslant p'$ *и* $s\Re\varkappa < 1$.

Доказательство. Запишем

$$\Big\|v_{\varkappa}[f](\xi,\eta)\Big\|_{L_s} = \Big(\iint \frac{\phi^s(\xi)\phi^s(\eta - h(\xi))\big|\mathcal{F}[f](\xi,\eta)\big|^s\, d\xi\, d\eta}{|\eta - h(\xi)|^{s\varkappa}}\Big)^{\frac{1}{s}} =$$

$$\Bigg(\int\Bigg(\int \phi^s(\xi)\phi^s(\eta)\Big|\mathcal{F}[f]\big(\xi, \eta + h(\xi)\big)\Big|^s d\xi\Bigg)|\eta|^{-s\varkappa}\, d\eta\Bigg)^{\frac{1}{s}}.$$

Оценим внутренний интеграл при помощи оператора ограничения на выпуклую кривую $(\xi, \eta + h(\xi))$ (см. теорему 1.4.30; оценка равномерна по таким кривым, потому что они получаются друг из друга сдвигом):

$$\int \phi^s(\xi)\Big|\mathcal{F}[f]\big(\xi,\eta + h(\xi)\big)\Big|^s d\xi \lesssim$$

$$\Big\|\mathcal{R}_{(\xi,\eta+h(\xi))}[f]\Big\|^s_{L_s\big(\{(\xi,\eta+h(\xi))|\xi\in\operatorname{supp}\phi\}\big)} \lesssim \|f\|^s_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Остается только заметить, что внешний интеграл сходится, так как функция $\eta \to |\eta|^{-s\Re\varkappa}$ суммируема. □

Опишем теперь операторы, сопряженные с $v_{\varkappa}$. Нетрудно видеть, что

$$v^*_{\varkappa,\phi}[g] = \mathcal{F}^{-1}\Big[g(\xi,\eta)\phi(\xi)\phi(\eta - h(\xi))|\eta - h(\xi)|^{-\overline{\varkappa}}\Big]. \tag{2.5.11}$$

Сопряженная форма леммы 2.5.28 выглядит так:

Лемма 2.5.29. *Оператор* $v_{\varkappa}^*$ *действует непрерывно из пространства* $L_r(\mathbb{R}^2)$ *в пространство* $L_q(\mathbb{R}^2)$, *если* $q > 4$, $3r' \leqslant q$ *и* $r'\Re\varkappa < 1$.

Операторы $v_{\varkappa}$ были введены, потому что с их помощью можно представить операторы u_δ. А именно, имеет место формула

$$u_{\varkappa_1+\overline{\varkappa}_2}[f] = v^*_{\varkappa_2,\tilde{\phi}}\Big[\operatorname{sign}(\eta - h(\xi))v_{\varkappa_1,\phi}[f](\xi,\eta)\Big], \qquad (2.5.12)$$

если $\Re\varkappa_1 + \Re\varkappa_2 < 1$ и функция $\tilde{\phi}$ равна единице на носителе функции ϕ.

Лемма 2.5.30. *Пусть* δ — *комплексное число, удовлетворяющее условию* $\Re\delta \in (0,1)$. *В таком случае, оператор* u_δ *действует из пространства* L_p *в пространство* L_q *при* $1 \leqslant p < \frac{4}{3}$, $q \in (4,\infty]$ *и* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$, *причем его норма ограничена некоторой равномерной константой на прямых* $\Re\delta = c$, $c \in (0,1)$.

Доказательство. Доказательство леммы состоит в аккуратном подборе чисел $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, r и s и применении лемм 2.5.28, 2.5.29 и формулы (2.5.12). Для удобства ограничимся предельным случаем $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2}{3}$ (формально остальные случаи следуют из него, так как мы работаем с мультипликатором, символ которого имеет компактный носитель). Выберем параметры s и r по правилу $s = \frac{p}{3p-3}$ и $r' = \frac{q}{3}$, а параметры $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\Re\varkappa_1 = \frac{3p-3}{3} - \frac{1-\Re\delta}{2}; \quad \Re\varkappa_2 = \frac{3}{q} - \frac{1-\Re\delta}{2}.$$

Во-первых, такие параметры $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ подходят под условия лемм 2.5.28, 2.5.29, стало быть, операторы $v_{\varkappa_1,\phi}$ и $v^*_{\overline{\varkappa_2},\tilde{\phi}}$ непрерывны из пространства $L_p(\mathbb{R}^2)$ в пространство $L_s(\mathbb{R}^2)$ и из пространства $L_r(\mathbb{R}^2)$ в пространство $L_q(\mathbb{R}^2)$ соответственно. Кроме того, $s = r$, потому что $\frac{1}{s} + \frac{1}{r'} = \frac{3p-3}{3} + \frac{3}{q} = 3 - 2 = 1$ и $\Re\delta = \Re\varkappa_1 + \Re\varkappa_2$. Поэтому утверждение леммы следует из формулы (2.5.12). $\square$

Доказательство предложения 2.5.25. Лемма 2.5.27 утверждает, что семейство операторов u_δ допустимо в смысле определения 1.4.11 (с заменой полосы определения), поэтому предложение 2.5.25 получается интерполяцией при помощи леммы 1.4.12 из $\mathcal{L}(L_1, L_\infty)$-ограниченности операторов u_δ при $\Re\delta = \frac{3}{2}$ (которая задается леммой 2.5.27) и $\mathcal{L}(L_p, L_q)$-ограниченности операторов u_δ при $\Re\delta = 1-$ (которая доставляется леммой 2.5.30). $\square$

2.5.4. Описание пространств функций, зануляющихся на кривых

Для изучения свойств пространства ${}_SL_p$, данного определением 2.5.21, полезно изучить его аннулятор, то есть, множество элементов пространства $L_q(\mathbb{R}^d)$ (сопряженного с $L_p(\mathbb{R}^d)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), действие которых равно нулю на всем пространстве ${}_SL_p$. Для удобства применения оператора Π_S из пункта 1.4.1 будем считать, что многообразие S замкнуто. Это не ограничивает общности рассмотрений, однако, применение наших результатов к случаю $S = \gamma \setminus \{0\}$ (и утверждениям LE) требует пояснений (потому что у кривой γ есть предельная точка $\{0\}$, которая ей не принадлежит). Дело в том, что в локальных формулировках утверждения LE, таких как предложения 2.5.19 или 2.5.25, можно ограничиться лишь функциями, преобразование Фурье которых равно нулю вне некоторого малого круга, внутри которого кривая γ есть подмногообразие. Продолжим кривую γ с сохранением выпуклости во внешность этого круга, так чтобы это продложение $\tilde{\gamma}$ было замкнутым подмногообразием в $\mathbb{R}^2$. Так как происходящее вовне указанного круга никак не влияет на результат применения мультипликтора, можно кривую γ и соответствующее пространство функций ${}_\gamma L_p$ заменить на кривую $\tilde{\gamma}$ и соответствующее ей пространство ${}_{\tilde{\gamma}}L_p$.

Для описания аннулятора рассмотрим сопряженное с проекцией Π_S вложение (см. пункт 1.4.1),

$$\Pi_S^* : \mathfrak{D}'(S) \to \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^d),$$

эта формула задает действие обобщенной функции класса $\mathfrak{D}'(S)$ на пробные функции всего пространства.

Лемма 2.5.31. *Аннулятором пространства* ${}_S L_p(\mathbb{R}^d)$ *служит пространство*

$$\bigl\{g \in L_q(\mathbb{R}^d) \bigm| \exists\ \zeta \in \mathfrak{D}'(S) \quad \mathcal{F}[g] = \Pi_S^* \zeta\bigr\}.$$

В частности, указанное в лемме множество замкнуто в пространстве $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Ясно, что аннулятор пространства ${}_S L_p(\mathbb{R}^d)$ содержит приведенное в формулировке множество. Пусть некоторая функция $g \in L_q$ принадлежит пространству $\mathrm{Ann}_{L_q}\ {}_S L_p$. Требуется доказать, что $\mathcal{F}[g] = \Pi_S^* \zeta$, $\zeta \in \mathfrak{D}'(S)$. Отметим, что $\mathcal{F}[g] \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(\mathbb{R}^d) \arrow[rr, "\Pi_S"] \arrow[dr, "\mathcal{F}[g]"'] & & \mathfrak{D}(S) \arrow[dl, "?"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}.$$

Чтобы существовала стрелка, помеченная вопросиком, достаточно, чтобы $\ker \Pi_S \subset \ker \mathcal{F}[g]$ и оператор Π_S допускал правый обратный. Первое условие следует из того, что g аннулирует множество ${}_S L_p$, второе есть утверждение леммы 1.4.4. □

Оказывается, что пространства ${}_S L_p(\mathbb{R}^d)$ не всегда отличаются от пространств Лебега.

Теорема 2.5.32. *Если* $p > \frac{2d}{d+1}$, *то* ${}_S L_p(\mathbb{R}^d) = L_p(\mathbb{R}^d)$.

Отметим, что в этой теореме мы не пользуемся даже предположением выпуклости поверхности S. Благодаря нашему описанию аннулятора (лемма 2.5.31), эта теорема последует из следующей теоремы.

Теорема 2.5.33. *Если* $1 \leqslant q < \frac{2d}{d-1}$, *то не существует ненулевых обобщенных функций* $\zeta \in \mathfrak{D}'(S)$, *таких что* $\Pi_S^*[\zeta]$ *есть преобразование Фурье функции пространства* $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Отметим, что если существует какая-то обобщенная функция ζ, удовлетворяющая условиям теоремы, то умножив ее на функцию $\Phi|_S$, $\Phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$, мы получим обобщенную функцию, также удовлетворяющую условиям теоремы, но имеющую компактный носитель (действительно, условие принадлежности преобразования Фурье пространству L_q сохранится, так как свертка с функцией $\check{\Phi}$ есть ограниченный оператор на этом пространстве). Более того, рассуждая аналогичным образом, мы можем считать, что носитель обобщенной функции ζ лежит в маленькой окрестности некоторой точки множества S.

Отметим пока не доказаную гипотезу.

Гипотеза 2.5.34. *Пусть компактный носитель обобщенной функции* $\zeta \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ *принадлежит множеству* S. *Тогда* $\mathcal{F}[\zeta] \notin L_q$ *при* $q < \frac{2d}{d-1}$.

Доказательство теоремы 2.5.33. Доказательство проведем в два приема: сначала покажем, что если обобщенная функция ζ удовлетворяет условиям теоремы, то она совпадает с квадратично суммируемой функцией (по мере Лебега на поверхности S), после чего уже докажем, что она равна нулю.

Перепишем условие суммируемости в более удобной форме, воспользовавшись усреднениями по всем $(d-1)$-мерным плоскостям (в данной формуле $\mathbb{R}^{d-1}$ отождествлено с каким-то фиксированным подпространством в $\mathbb{R}^d$):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big]\Big|^q(\xi)\,d\xi = \int\limits_{O_d}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big|\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big]\Big|^q\big(O\big(\tilde{\xi}\big)\big)|\tilde{\xi}|\,d\tilde{\xi}d\theta_d(O),$$

здесь θ_d — мера Хаара на группе O_d поворотов пространства $\mathbb{R}^d$, нормированная таким образом, чтобы формула была верна. Если величина слева конечна, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big|\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big]\Big|^q\big(O\big(\tilde{\xi}\big)\big)|\tilde{\xi}|\,d\tilde{\xi} < \infty$$

для почти всех $O \in O_d$. Будем считать, что обобщенная функция ζ имеет носитель в малой окрестности U_x точки $x \in S$. Тогда найдется такой элемент $O \in O_d$, что гиперплоскость $O(\mathbb{R}^{d-1})$ не содержит нормалей к поверхности $S \cap U_x$ и соответствующий интеграл конечен. Применим неравенство Гельдера:

$$\int\limits_{|\tilde{\xi}|\geqslant 1} \Big|\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big]\Big|^2\big(O\big(\tilde{\xi}\big)\big)\,d\tilde{\xi} \leqslant$$

$$\Bigg(\int\limits_{|\tilde{\xi}|\geqslant 1} \Big|\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big]\Big|^q\big(O\big(\tilde{\xi}\big)\big)|\tilde{\xi}|\,d\tilde{\xi}\Bigg)^{\frac{2}{q}}\Bigg(\int\limits_{|\tilde{\xi}|\geqslant 1} |\tilde{\xi}|^{-\frac{2}{q-2}}d\tilde{\xi}\Bigg)^{\frac{q-2}{q}}.$$

Отметим, что при $q < \frac{2d}{d-1}$ имеет место неравенство $\frac{2}{q-2} > d-1$, так что функция $\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big]\big(O\big(\tilde{\xi}\big)\big)$ лежит в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{d-1})$.

Так как плоскость $O(\mathbb{R}^{d-1})$ не содержит нормалей к поверхности $S \cap U_x$, в координатах плоскости $O(\mathbb{R}^{d-1})$ поверхность S в окрестности точки x может быть записана как график некоторой функции $h: O(\mathbb{R}^{d-1}) \to \mathbb{R}$,

$$S = \{(x, h(x)) \mid x \in O(\mathbb{R}^{d-1})\}.$$

В левой части равенства подразумевается, что d-я координата откладывается по нормали к плоскости $O(\mathbb{R}^{d-1})$, в которой лежат точки x. Отображение $x \to (x, h(x))$ является диффеоморфизмом на образ, стало быть, существует обобщенная функция $\zeta_O \in \mathfrak{D}'(O(\mathbb{R}^{d-1}))$, пересаживаемая этим диффеоморфизмом в ζ. В выбранных координатах имеет место формула

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big](\tilde{\xi},\underline{\tilde{\xi}}) = \langle \zeta_O, e^{-2\pi i\left(\langle\tilde{\xi},\cdot\rangle+\underline{\tilde{\xi}}h(\cdot)\right)}\rangle, \quad \tilde{\xi}\in O(\mathbb{R}^{d-1}),\ \underline{\tilde{\xi}}\in\mathbb{R}.$$

В частности, $\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big](\tilde{\xi},0)$ есть $(d{-}1)$-мерное обратное преобразование Фурье обобщенной функции ζ_O. Как мы установили, функция $\mathcal{F}^{-1}[\Pi_S^*[\zeta]]$ суммируема с квадратом, стало быть, по теореме Планшереля, ζ_O есть L_2-функция. Пересаживая ее обратно на поверхность S диффеоморфизмом, получаем, что ζ есть L_2-функция по мере Лебега на поверхности S.

Если ζ есть L_2-функция с компактным носителем, то обобщенная функция $\Pi_S^*[\zeta]$ есть мера ограниченной вариации в пространстве $\mathbb{R}^d$. Отметим, что носитель этой меры имеет размерность $d-1$, поэтому $\dim \Pi_S^*[\zeta] \leqslant d-1$, здесь символом $\dim$ обозначена нижняя размерность Хаусдорфа, см. определение 1.2.10. Оказывается, что условие принадлежности преобразования Фурье пространству $L_q(\mathbb{R}^d)$, $q < \frac{2d}{d-1}$, противоречит условию леммы 4.1.1, более точно, условию типа (1.4.1). Отметим сразу, что если $q \leqslant 2$, обобщенная функция $\Pi_S^*[\zeta]$ должна совпадать с $L^{q'}$ функцией, что невозмножно. Поэтому при дальнейших рассмотрениях будем считать, что $q > 2$.

Для простоты обозначим меру $\Pi_S^*[\zeta]$ символом μ. Напишем неравенство Гельдера (α есть некоторый неотрицательный параметр, меньший d, который предстоит выбрать):

$$I(\mu,\alpha) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\mathcal{F}^{-1}[\mu](\xi)\big|^2 \big(1+|\xi|\big)^{\alpha-d}\, d\xi \leqslant$$

$$\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\mathcal{F}^{-1}[\mu](\xi)\big|^q\, d\xi\Bigg)^{\frac{2}{q}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big(1+|\xi|\big)^{\frac{q(\alpha-d)}{q-2}}\, d\xi\Bigg)^{\frac{q-2}{q}}.$$

Отсюда следует, что если $\mathcal{F}[\mu] \in L_q$ при некотором q, $2 \leqslant q < \frac{2d}{d-1}$, то интеграл $I(\mu,\alpha)$ конечен при некотором $\alpha > d{-}1$ (так как $\frac{q}{q-2} > d$). Покажем, что из конечности интеграла $I(\mu,\alpha)$ следует условие типа (1.4.1).

Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$. Как обычно, введем обозначение $\varphi_r(z) = \varphi(r^{-1}z)$. Напишем простое неравенство

$$\big|\langle \mu, \varphi_r(\cdot + x)\rangle\big| \leqslant I(\mu,\alpha)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\mathcal{F}^{-1}[\varphi_r](\xi)\big|^2 (1+|\xi|^2)^{\frac{d-\alpha}{2}}\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $r \leqslant 1$, тогда мы можем оценить второй множитель:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|\mathcal{F}^{-1}[\varphi_r](\xi)\Big|^2 \Big(1+|\xi|^2\Big)^{\frac{d-\alpha}{2}}\,d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|r^d\mathcal{F}^{-1}[\varphi](r\xi)\Big|^2 \Big(1+|\xi|^2\Big)^{\frac{d-\alpha}{2}}\,d\xi \leqslant$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|r^d\mathcal{F}^{-1}[\varphi](r\xi)\Big|^2 \Big(\frac{1}{r^2}+\frac{|r\xi|^2}{r^2}\Big)^{\frac{d-\alpha}{2}} r^{-d}\,d(r\xi) = r^{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|\mathcal{F}^{-1}[\varphi](z)\Big|^2 \Big(1+|z|^2\Big)^{\frac{d-\alpha}{2}}\,dz.$$

Фиксируя удовлетворяющую условиям леммы 4.1.1 функцию φ, получаем оценку

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(x+z)\,d\mu(z)\Big| \lesssim r^{\alpha}.$$

Из этой оценки, согласно лемме 4.1.1, доказанной в главе 4, следует, что $\dim \mu \geqslant \alpha > d-1$, что противоречит тому, что носитель меры μ содержится в многообразии размерности $d-1$.

В случае $d = 2$ теорему удалось усилить. Однако для возможности такого усиления, многообразие S должно обладать невырожденной кривизной. Напомним читателю, что согласно определению 1.4.29, мы говорим, что замкнутое подмногообразие $S \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию выпуклости, если в окрестности каждой его точки множество S совпадает с графиком C^∞-гладкой функции, вторая производная которой отделена от нуля.

Теорема 2.5.35. *Пусть подмногообразие $S \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию выпуклости. В таком случае, ${}_SL_{\frac{4}{3}} = L_{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)$.*

Доказательство. Благодаря лемме 2.5.31, достаточно показать, что не существует обобщенных функций ζ на кривой S с носителем в окрестности некоторой точки, таких что $\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big] \in L_4(\mathbb{R}^2)$. Предположим противное. Не умаляя общности, можем считать что "некоторая точка" есть нуль и

$$S \cap U(0) = \Big\{(x, h(x)) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\Big\},$$

здесь $U(0)$ — некоторая окрестность нуля, а h — выпуклая функция, вторая производная которой отделена от нуля. Можем также предположить, что $h'(0) = 0$.

Условие $\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\zeta]\big] \in L_4(\mathbb{R}^2)$ можно переписать, пользуясь магическими свойствами числа 4:

$$\Pi_S^*[\zeta] * \Pi_S^*[\zeta] \in L_2(\mathbb{R}^2). \tag{2.5.13}$$

Пусть $\Phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$, определим функцию $\tilde{\Phi} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ формулой

$$\tilde{\Phi}(s,t) = \Phi(s+t, h(s)+h(t)). \tag{2.5.14}$$

При помощи этого определения можно записать действие свертки на тестовую функцию (слева в формуле стоит "скалярное произведение" функций на пространстве $\mathbb{R}^2$, а справа — "скалярные произведения" функций на прямой):

$$\langle \Pi_S^*[\zeta] * \Pi_S^*[\zeta], \Phi\rangle = \langle \zeta, \langle \zeta, \tilde{\Phi}\rangle\rangle. \tag{2.5.15}$$

Изучим замену переменной $(x,y) = \big(s+t, h(s)+h(t)\big)$. Отображение $(s,t) \to (x,y)$ инъективно на множестве $s \leqslant t$ и C^∞-гладко на его внутренности. Его образ есть множество $(S\cap U(0))+(S\cap U(0))$. Таким образом, это отображение позволяет сделать замену переменной:

$$\iint\limits_{(-\varepsilon,\varepsilon)^2} \tilde{\Phi}(s,t)|h'(s)-h'(t)|\,ds\,dt = 2\iint\limits_{(S\cap U(0))+(S\cap U(0))} \Phi(x,y)\,dx\,dy. \tag{2.5.16}$$

Покажем, что если $\Pi_S^*[\zeta] * \Pi_S^*[\zeta] \in L_2(\mathbb{R}^2)$, то $\zeta \in L_2(S)$ (напомним, что это означает, что обобщенная функция ζ квадратично суммируема по мере Лебега на поверхности S). Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$. Тогда, согласно формуле (2.5.15),

$$|\langle \zeta, \varphi \rangle|^2 = \Big| \langle \zeta, \langle \zeta, \tilde{\Phi} \rangle \rangle \Big| = \Big| \langle \Pi_S^*[\zeta] * \Pi_S^*[\zeta], \Phi \rangle \Big| \leqslant \Big\| \Pi_S^*[\zeta] * \Pi_S^*[\zeta] \Big\|_{L_2} \big\| \Phi \big\|_{L_2},$$

где $\tilde{\Phi}(s,t) = \varphi(s)\varphi(t)$ (а функция Φ восстанавливается при помощи формулы (2.5.14)). Используя формулу (2.5.16), получим

$$\|\Phi\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2} \iint\limits_{(-\varepsilon,\varepsilon)^2} |\varphi(s)|^2 |\varphi(t)|^2 |h'(s) - h'(t)| \, ds \, dt \lesssim \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}^4. \qquad (2.5.17)$$

Таким образом,

$$|\langle \zeta, \varphi \rangle| \lesssim \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}).$$

В частности, ζ есть квадратично-суммируемая функция.

Если ζ есть квадратично-суммируемая функция, то свертку можно вычислить напрямик, пользуясь формулами (2.5.15) и (2.5.16),

$$\Pi_S^*[\zeta] * \Pi_S^*[\zeta](x,y) = \frac{\zeta(s)\zeta(t)}{|h'(s) - h'(t)|}, \quad s = s(x,y), t = t(x,y).$$

Мы хотим показать, что функция в правой части равенства не может принадлежать пространству $L_2(\mathbb{R})$. Не умаляя общности, можем считать, что множество $\{|\zeta(s)| \geqslant 1\}$ имеет положительную меру. Пусть I — дуга кривой S, такая что $\Big|\{s \mid |\zeta(s)| > 1\} \cap I\Big| \geqslant 0.9|I|$ (дуги с такими свойствами существуют в окрестности точек плотности множества $\{|\zeta(s)| \geqslant 1\}$). Рассмотрим множество $S_N \subset \mathbb{R}^2$ точек (x,y), для которых $s(x,y), t(x,y) \in I$ и $\frac{1}{N} \leqslant |s-t| \leqslant \frac{1.1}{N}$. Это множество лежит в N^{-2}-окрестности дуги I, и благодаря условию 1.4.29 выпуклости кривой S, имеет место соотношение $|S_N| \asymp N^{-2}$, кроме того, на этом множестве $|h'(s) - h'(t)| \asymp N^{-1}$. Нетрудно видеть, что если в множестве S_N оставить лишь те пары точек (s,t), для которых $|\zeta(s)| > 1, |\zeta(t)| > 1$, то площадь будет не менее $\frac{1}{2}|S_N|$. В таком случае, на множестве меры не менее $\frac{1}{2}|S_N|$ функция $\frac{\zeta(s)\zeta(t)}{|h'(s)-h'(t)|}$ принимает значения, по модулю не меньшие N, мера такого множества не меньше чем N^{-2} с точностью до некоторой абсолютной константы. Это противоречит условию $\Pi_S^*[\zeta] * \Pi_S^*[\zeta] \in L_2$, потому что множества S_N дизъюнктны, если число N пробегает, скажем, множество степеней двойки. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.5.36. Отметим, что в случае $p < \frac{2d}{d+1}$ пространство ${}_SL_p$ не совпадает со всем пространством L_p, по крайней мере, если многообразие S удовлетворяет условию выпуклости 1.4.29. Действительно, из леммы 1.4.28 следует, что соответствующий аннулятор $\mathrm{Ann}_{L_q}\, {}_SL_p$ содержит все функции вида

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\Pi_S^*[\varphi]\big], \quad \varphi \in \mathfrak{D}(S).$$

Автор предполагает, что теорема 1.4.30 позволяет более явно описать пространства ${}_SL_p(\mathbb{R}^2)$ в случае двух переменных. Отметим пока недоказанную гипотезу.

Гипотеза 2.5.37. *Пусть S — гладкое замкнутое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее условию выпуклости* 1.4.29. *Пусть $1 \leqslant p < \frac{4}{3}$. В таком случае,*

$${}_SL_p(\mathbb{R}^2) = \cap_C \operatorname{Ker} \mathcal{R}_S^C, \quad C \textit{ компакт в } S.$$

Символом $\mathcal{R}_S^C$ мы обозначили продолжение по непрерывности оператора $\mathcal{R}_S$ как оператора из пространства $L_p(\mathbb{R}^2)$ в пространство $L_1(C)$.

Следующая лемма служит дополнением результатов о пространствах ${}_SL_p$.

Лемма 2.5.38. *В случае $1 \leqslant p < \frac{4}{3}$ пространство ${}_SL_p(\mathbb{R}^2)$ не дополняемо в пространстве $L_p(\mathbb{R}^2)$.*

Доказательство. Предположим противное. В таком случае, по теореме 1.4.26, существует инвариантный проектор из пространства L_p на пространство ${}_SL_p$. Любой инвариантный оператор из пространства L_p в себя есть мультипликатор Фурье, его символ должен быть ограниченной функцией. Но эта функция должна быть равна единице почти всюду (вне множества S), т.е. она равна единице. Это значит, что ${}_S L_p = L_p$, противоречие. $\square$

Благодаря теореме 2.5.35 мы можем опровергнуть утверждение LE в случае $p \geqslant \frac{4}{3}$.

Лемма 2.5.39. *Утверждение* $\mathrm{LE}(k, l, p, q, \alpha, \beta)$ *неверно в случае* $p \geqslant \frac{4}{3}$, *оператор* u_1, *заданный формулой* (2.5.9), *разрывен как оператор из пространства* $L_p(\mathbb{R}^2)$ *в пространство* $L_q(\mathbb{R}^2)$ *если* $p \geqslant \frac{4}{3}$ *или* $q \leqslant 4$.

Конструкция стандартна, поэтому мы выносим доказательство леммы в приложение.

Глава 3

Неизоморфность банаховых пространств

3.1. Доказательство теоремы о неизоморфизме

Теорема 1.2.9 будет доказана в несколько приемов. Сейчас мы изложим план доказательства на уровне идей, после чего скажем, что конкретно будет происходить в каждом из пунктов данного параграфа. Мы будем рассуждать от противного, пусть пространство $C^P(\mathbb{T}^d)$ вкладывается в пространство типа $C(K)$ дополняемым образом. В таком случае, аннулятор пространства $C^P(\mathbb{T}^d)$ в пространстве $\bigoplus_{j\in[1..\ell]} \mathrm{M}(\mathbb{T}^d)$ (мы отождествили пространство $C^P(\mathbb{T}^d)$ с подпространством пространства $\bigoplus_{j\in[1..\ell]} C(\mathbb{T}^d)$ естественным образом) есть $\mathcal{L}_1$-пространство (см. пункт 1.4.2). В таком случае, по теореме 1.4.23, любой оператор из этого аннулятора в гильбертово пространство — 2-суммирующий. Мы придем к противоречию, построив оператор из аннулятора в весовое пространство квадратично-суммируемых функций, не обладающий этим свойством. Его непрерывность будет обеспечиваться теоремой 2.2.1. Кроме того, чтобы показать, что построенный оператор не 2-суммирующий, нам придется построить слабо 2-суммируемую последовательность (см. определение 1.4.22) элементов аннулятора (она будет некоторой модификацией двойной последовательности характеров), которая при применении оператора перейдет в последовательность элементов гильбертова пространства, не суммируемую с квадратом.

Пункт 3.1.1 посвящен вспомогательным леммам. В пункте 3.1.2 мы выбираем некоторую “двумерную поверхность” из характеров, такую что набор P по прежнему содержит два линейно независимых старших полинома, если полиномы ограничить на эту “поверхность” (то есть рассматривать лишь сужения их преобразований Фурье на поверхность). В пункте 3.1.3 мы сконструируем двойную последовательность элементов аннулятора пространства C^P, которая слабо 2-суммируема. Как уже было отмечено, эта последовательность получается из последовательности характеров. В пункте 3.1.4 мы строим линейный оператор из аннулятора в гильбертово пространство (который сопоставляет набору мер из аннулятора нечто зависящее только от следа их преобразований Фурье на “поверхности”), непрерывность которого следует из теоремы вложения 2.2.1. Наконец, в пункте 3.1.5, мы показываем, что образ построенной слабо 2-суммируемой последовательности не есть 2-суммируемая последовательность, что и доказывает теорему 1.2.9.

“Характерный уровень трудности” задачи достигается, когда переменных по крайней мере три (хотя читатель увидит, что, по существу, эффект двумерен). Мы ведем изложение, ориентируясь на такую ситуацию. Если переменных две, надо действовать примерно так же, наступят лишь довольно очевидные упрощения, но при этом изменятся некоторые формулы. Иногда мы приводим комментарии по поводу изменений в случае двух переменных, иногда — нет.

3.1.1. Вспомогательные утверждения

Доказательству предпошлем два простых утверждения. Для формулировки первого из них нам понадобится вспомогательное пространство функций. Символом $L_{1,\mathrm{null}}$ будем обозначать пространство суммируемых функции, преобразование Фурье которых зануляется на множестве $\{\xi \bigm| |\xi| \leqslant \frac{1}{2}\}$.

Предложение 3.1.1. *Пусть φ есть C^∞-гладкая функция на пространстве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Предположим, что условие*

$$\forall t > 0 \quad \varphi(t^{a_1}\xi_1, t^{a_2}\xi_2, \dots, t^{a_d}\xi_d) = t^{-\gamma}\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \tag{3.1.1}$$

выполнено для некоторых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_d, \gamma$. В таком случае, оператор, заданный на множестве $\mathcal{S} \cap L_{1,\mathrm{null}}$ формулой (1.1.1) *с функцией φ вместо m, продолжается до ограниченного оператора из пространства $L_{1,\mathrm{null}}$ в себя.*

Доказательство. Пусть η — некоторая гладкая функция на пространстве $\mathbb{R}^d$, такая что $\eta(\xi) = 1$, когда $|\xi| \geqslant \frac{1}{3}$, но $\eta(\xi) = 0$, когда $|\xi| < \frac{1}{4}$. Достаточно показать, что мультипликатор Фурье с символом $\varphi\eta$ непрерывен как оператор из пространства $L_1(\mathbb{R}^d)$ в себя. Мы покажем, что функция $\varphi\eta$ удовлетворяет условиям теоремы 1.4.38. Отметим, что функция φ удовлетворяет условию

$$t^{\alpha_j}\partial_j\varphi(t^{a_1}\xi_1, t^{a_2}\xi_2, \ldots, t^{a_d}\xi_d) = t^{-\gamma}\partial_j\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d),$$

которое может быть получено из формулы (3.1.1) дифференцированием. Подобные равенства для производных высшего порядка доказывают справедливость первого условия теоремы 1.4.38 для функции $\varphi\eta$. Чтобы проверить второе условие, воспользуемся равенством

$$t^{\sum_j a_j}\partial_1\partial_2\ldots\partial_d\varphi(t^{a_1}\xi_1, t^{a_2}\xi_2, \ldots, t^{a_d}\xi_d) = t^{-\gamma}\partial_1\partial_2\ldots\partial_d\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d).$$

Выберем $t = \big(\sum_j |\xi_j|^{\frac{1}{a_j}}\big)^{-1}$. В таком случае, точка $(t^{a_1}\xi_1, t^{a_2}\xi_2, \ldots, t^{a_d}\xi_d)$ лежит на поверхности

$$\Big\{\xi \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|^{\frac{1}{a_j}} = 1\Big\},$$

то есть функция φ в этой точке ограничена некоторой равномерной константой. Следовательно,

$$\Big|\partial_1\partial_2\ldots\partial_d\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)\Big| \lesssim \Big(\sum_j |\xi_j|^{\frac{1}{a_j}}\Big)^{-\sum_j a_j - \gamma}.$$

Мы можем предположить, что $1 \lesssim \sum\limits_j |\xi_j|^{\frac{1}{a_j}}$. Нам надо доказать неравенство

$$\Big(\prod_{j=1}^{d} |\xi_j|^{1-\delta}(1 + |\xi_j|^{2\delta})\Big)\Big(\sum_j |\xi_j|^{\frac{1}{a_j}}\Big)^{-\sum_j a_j - \gamma} \lesssim 1,$$

если δ достаточно мало. Доказательство может быть записано цепочкой неравенств (сначала мы пользуемся неравенством $1 \lesssim \sum_j |\xi_j|^{\frac{1}{a_j}}$, потом мы применяем взвешенное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим к набору чисел $\{1 + |\xi_j|^{\frac{1}{a_j}}\}_{j\in[1..d]}$ (напомним читателю, что символ $[1..d]$ обозначает множество целых чисел отрезка $[1, d]$) с набором весов $\{\frac{a_j}{\sum_j a_j}\}_j$, после чего используем неравенство $(1 + |\xi|^d)^{-\varepsilon} \lesssim (1 + |\xi|)^{-d\varepsilon}$ при $d, \varepsilon > 0$, и наконец, нераненство $\frac{\sum_j a_j+\gamma}{\sum_j a_j} > 1$):

$$\Big(\prod_{j=1}^{d}|\xi_j|^{1-\delta}(1+|\xi_j|^{2\delta})\Big)\big(\sum_j|\xi_j|^{\frac{1}{a_j}}\big)^{-\sum\limits_j a_j-\gamma} \lesssim$$

$$\Big(\prod_{j=1}^{d}|\xi_j|^{1-\delta}(1+|\xi_j|^{2\delta})\Big)\Big(1+\sum_j\frac{a_j}{\sum_j a_j}|\xi_j|^{\frac{1}{a_j}}\Big)^{-\sum\limits_j a_j-\gamma} \lesssim$$

$$\prod_{j=1}^{d}\Big(|\xi_j|^{1-\delta}(1+|\xi_j|^{2\delta})\big(1+|\xi_j|^{\frac{1}{a_j}}\big)^{\frac{-(\sum\limits_j a_j+\gamma)a_j}{\sum\limits_j a_j}}\Big) \lesssim$$

$$\prod_{j=1}^{d}\Big((1+|\xi_j|)^{1+\delta}\big(1+|\xi_j|\big)^{\frac{-(\sum\limits_j a_j+\gamma)}{\sum\limits_j a_j}}\Big) \lesssim 1.$$

$\square$

Второе утверждение касается выбора допустимой гиперплоскости: исходная (упомянутая в формулировке теоремы 1.2.9) может даже не быть рациональной, что неудобно. Мы сейчас покажем, что эта гиперплоскость может быть слегка повернута с сохранением допустимости таким образом, что ее пересечение с многогранником $\mathcal{N}(P)$ не меняется, но она становится рациональной. Вот точная формулировка этого утверждения.

Лемма 3.1.2. *Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_N$ и $Z_0, Z_1, \ldots, Z_M$ — два набора целочисленных векторов с неотрицательными координатами в пространстве $\mathbb{R}^d$. Пусть p — вектор с положительными координатами, такой что*

$$\langle X_j, p\rangle = 1, \quad j = 0, 1, \ldots, N; \quad \langle Z_j, p\rangle < 1, \quad j = 0, 1, \ldots, M. \tag{3.1.2}$$

В таком случае, существует рациональный вектор p_1 с положительными координатами, такой что соотношения (3.1.2) *верны с заменой p на p_1, а аффинная гиперплоскость $\tilde{L} = \{X \big| \langle X, p_1\rangle = 1\}$ содержит по крайней мере d линейно независимых целочисленных точек.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что рациональность вектора p_1 следует из того, что гиперплоскость $\tilde{L}$ содержит d линейно независимых целочисленных векторов. Во-вторых, пусть $\mathcal{X}$ есть линейная оболочка множества $\{X_1 - X_0, X_2 - X_0, \ldots, X_N - X_0\}$. Символами $e_1, e_2, \ldots, e_s$ обозначим векторы в пространстве $\mathbb{R}^d$, такие что векторы $p, e_1, e_2, \ldots, e_s$ образуют ортогональный базис в пространстве $\mathcal{X}^\perp$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ — большое число. Множество $\mathbb{Z}^d$ есть $\sqrt{d}$-сеть в пространстве $\mathbb{R}^d$, следовательно, для каждого индекса s существуют целочисленная точка E_s, такая что $\operatorname{dist}(\lambda e_s, E_s) \leqslant \sqrt{d}$. Определим гиперплоскость $\tilde{L}$ как аффинную оболочку множеств $X_0, X_1, \ldots, X_N$ и $X_0 + E_1, X_0 + E_2, \ldots, X_0 + E_s$. Эта гиперплоскость содержит по крайней мере d целочисленных точек (потому что $N \geqslant \dim \mathcal{X} = d - s - 1$). Если число λ достаточно велико, то эти точки линейно независимы. Пусть p_1 —вектор, такой что $\langle X, p_1\rangle = 1$ для всех $X \in \tilde{L}$. Утверждение леммы последует, если мы покажем, что $p_1 \to p$ при $\lambda \to \infty$. Но вектор p_1 однозначно определен условиями

$$\langle X_i, p_1\rangle = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, N; \quad \langle E_i, p_1\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Вторая группа уравнений может быть переписана в виде $\langle e_i - \frac{\lambda e_i - E_i}{\lambda}, p_1\rangle = 0$. Для вектора p уравнения почти такие же: уравнения первой группы вообще не меняются, а каждое уравнение второй группы заменяется на уравнение $\langle e_i, p_1\rangle = 0$. В таком случае, матрица системы, которая определяет вектор p_1, стремится при $\lambda \to \infty$ к матрице системы, определяющей вектор p. Последняя система невырождена, то есть, $p_1 \to p$. Следовательно, $\langle Z_j, p_1\rangle < 1$, и p_1 есть вектор с положительными координатами при условии, что число λ достаточно велико. $\square$

После модификации допустимой гиперплоскости при помощи леммы 3.1.2, условия (3.1.2) можно переписать так:

$$\langle X_j, a\rangle = b, \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad \langle Z_j, a\rangle < b, \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

здесь b — это натуральное число, а a — вектор с натуральными координатами. Мы сдвигаем всю конфигурацию на вектор Y. Полученные точки удовлетворяют условиям

$$\langle X_j + Y, a\rangle = b + \langle Y, a\rangle, \quad j = 0, 1, \dots, N;$$
$$\langle Z_j + Y, a\rangle < b + \langle Y, a\rangle, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Сдвинутая гиперплоскость пересекает k-ю координатную ось в точке, координата которой равна $\frac{b+\langle Y,a\rangle}{a_k}$. Пусть C — большое натуральное число. Определим вектор Y формулой

$$Y = (Ca_1a_2 \dots a_d, Ca_1a_2 \dots a_d, \dots, Ca_1a_2 \dots a_d) - X_0.$$

Этот вектор имеет положительные координаты (если число C достаточно велико), а числа $\frac{b+\langle Y,a\rangle}{a_k}$ натуральны при таком выборе вектора Y. Таким образом, мы можем сдвинуть гиперплоскость (вместе с многогранником $\mathcal{N}(P)$) так, что она будет пересекать координатные оси в точках с натуральными координатами.

3.1.2. Преобразование набора операторов

Напомним читателю, что мы рассматриваем пространство $C^P(\mathbb{T}^d)$, порожденное набором полиномов $P = \{P_j\}_{j=1,2,\dots,\ell}$, а точнее, дифференциальными операторами

$$P_j(\partial) = \sum_{\langle a,\alpha\rangle \leqslant k} c_{\alpha,j}\partial^\alpha, \quad j = 1, 2, \dots, \ell. \qquad (3.1.3)$$

Компоненты вектора a обозначены символами $a_1, a_2, \dots, a_d$. Старшая часть σ_j оператора P_j состоит из членов суммы (3.1.3), степень которых удовлетворяет условию $\langle a, \alpha\rangle = k$. Символ τ_j обозначает сумму всех остальных членов полинома P_j, то есть, младшую часть оператора P_j.

Теорема 3.1.3. *Пусть среди многочленов σ_j, $j \in [1..\ell]$, есть хотя бы два непропорциональных. В таком случае пространство $C^P(\mathbb{T}^d)$ не есть $\mathcal{L}_\infty$–пространство.*

Теорема 1.2.9 есть частный случай теоремы 3.1.3, это следует из теоремы 1.4.17, которая гласит, что дополняемое подпространство пространства $C(K)$ есть $\mathcal{L}_\infty$–пространство.

В данном пункте мы опишем некоторые преобразования набора P, приводящие его к удобному для дальнейших действий виду. Иногда они делаются ценой перехода к дополняемому подпространству.

Во-первых, подпространство ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ пространства $C^P(\mathbb{T}^d)$, состоящее из правильных функций, дополняемо в пространстве $C^P(\mathbb{T}^d)$ (см. определение 2.5.9 и обсуждение после него). Следовательно (по теореме 1.4.17), достаточно показать, что пространство ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ не есть $\mathcal{L}_\infty$-пространство. Пусть $s_1, \dots, s_d \in \mathbb{N}$, рассмотрим набор полиномов $S = \{x_1^{s_1} \dots x_d^{s_d} P_j \mid j \in [1..\ell]\}$. Ясно, что пространства ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ и ${}_0C^S(\mathbb{T}^d)$ изоморфны (именно для этого мы перешли к подпространству правильных функций). Переход ко второму пространству соответствует сдвигу всех степеней мономов многочленов набора $\{P_j\}_j$ на вектор $(s_1, \dots, s_d)$. Согласно лемме 3.1.2 и рассуждению после нее, за счет небольшого поворота допустимой гиперплоскости и такого сдвига, координаты вектора a в равенстве (3.1.3) можно сделать натуральными, число k — тоже натуральным, а аффинную гиперплоскость $\{u \mid \langle a, u\rangle = k\}$ заставить пересекать все координатные положительные полуоси в точках с натуральными координатами. Из всего этого, в частности, последует, что $a_j > 0$ при всех j. Перенумеровав координаты, мы можем предположить, что

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_d > 0. \tag{3.1.4}$$

В дальнейшем мы предполагаем, что это все уже было сделано. Итак, наша цель — доказать теорему 3.1.3 при этих предположениях для случая пространства $X = {}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ вместо $C^P(\mathbb{T}^d)$.

Во-вторых, пусть $t_1, t_2, \ldots, t_d$ — натуральные числа. Рассмотрим пространство $\ddot{X}$, состоящее из функций f на торе $\mathbb{T}^d$, таких что функция, заданная по правилу $(z_1, \ldots, z_d) \mapsto f(z_1^{t_1}, \ldots, z_d^{t_d})$ есть функция из пространства X. Ясно, что пространство $\ddot{X}$ изоморфно подпространству Y пространства X, состоящему из функций $g \in X$, таких что $\widehat{g}(k_1, \ldots, k_d) = 0$, если для некоторого $j = 1, \ldots, d$ число k_j не кратно t_j. Кроме того, пространство Y дополняемо в пространстве X: проекция задается сверткой с мерой, преобразование Фурье которой есть характеристическая функция подгруппы $\{(t_1\zeta_1, t_2\zeta_2, \ldots, t_d\zeta_d) \mid \zeta \in \mathbb{Z}_0^d\}$, на торе $\mathbb{T}^d$. Таким образом, достаточно показать, что пространство Y не есть $\mathfrak{L}_\infty$–пространство (опять же, благодаря теореме 1.4.17).

С другой стороны, нетрудно видеть, что пространство $\ddot{X}$ фактически есть не что иное, как $C^{\ddot{P}}(\mathbb{T}^d)$, где $\ddot{P} = \{\ddot{P}_1, \ldots, \ddot{P}_\ell\}$, а каждый полином $\ddot{P}_j$ получен из полинома P_j формальной подстановкой переменной $t_i x_i$ вместо x_i при всех $i \in [1..d]$. Таким образом, $\ddot{P}_j$ состоит из тех же мономов, что и P_j, но с другими коэффициентами. Отметим, что набор старших частей полиномов $\ddot{P}_j$ также содержит хотя бы две непропорциональных. Таким образом, мы можем работать с пространством $\ddot{X}$ и набором $\ddot{P}$ вместо P, если это более удобно.

Рассмотрим характеристические полиномы операторов, сопряженных относительно двойственности, задаваемой формой $(f, g) \mapsto \int f\bar{g}$, (а именно, $T_j(\partial) = (P_j(\partial))^*$):

$$T_j^{\Delta}(\xi_1, \ldots, \xi_d) = \sum_{\langle a,\alpha\rangle \leqslant k} \bar{c}_{\alpha,j}(2\pi i\xi_1)^{\alpha_1} \ldots (2\pi i\xi_d)^{\alpha_d}(-1)^{|\alpha|} =$$
$$= \sum_{\langle a,\alpha\rangle = k} \ldots + \sum_{\langle a,\alpha\rangle < k} \ldots \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_j(\xi_1, \ldots, \xi_d) + \rho_j(\xi_1, \ldots, \xi_d).$$

Здесь, как и обычно, $T^{\Delta}(\xi) = T(2\pi i\xi)$. Таким образом, Π_j есть характеристический полином сопряженных операторов $\sigma_j(\partial)^*$, а ρ_j — характеристический полином оператора τ_j^*. Коэффициенты полинома Π_j будут обозначаться символами $d_{\alpha,j}$. Соответствующие полиномы для операторов $\ddot{P}_j$ выглядят так:

$$\ddot{T}_j^{\Delta}(\xi_1, \ldots, \xi_d) = T_j^{\Delta}(t_1\xi_1, \ldots, t_d\xi_d) = \Pi_j(t_1\xi_1, \ldots, t_d\xi_d) +$$
$$+\rho_j(t_1\xi_1 + \ldots + t_d\xi_d) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{\Pi}_j(\xi_1, \ldots, \xi_d) + \ddot{\rho}_j(\xi_1, \ldots, \xi_d).$$

Перенумеровав полиномы P_j, если потребуется, можем предполагать, что полином Π_1 не равен тождественно нулю. Мы накладываем на набор чисел $t_1, \ldots, t_d$ условие $\Pi_1(t_1, \ldots, t_d) \neq 0$ (в дальнейшем, на этот набор будут также наложены и другие условия).

Нашей целью до конца данного пункта будет сведение теоремы 3.1.3 к предложению 3.1.4 ниже. Это будет сделано довольно простым алгебраическим преобразованием набора $\{P_j\}_j$. Тем не менее, как само упомянутое предложение, так и его вывод несколько громоздки и требуют дополнительных обозначений, поэтому мы предпошлем формулировке доказательство.

Как мы знаем, по крайней мере два полинома среди $\ddot{\Pi}_j$, $j \in [1..\ell]$, непропорциональны. В таком случае, по крайней мере два непропорциональных полинома есть и среди полиномов

$$\widetilde{\Pi}_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_d) = \ddot{\Pi}_j(\zeta_1^{a_1}, \ldots, \zeta_d^{a_d}),$$

потому что такая замена переменных переводит член $\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_d^{\alpha_d}$ в $\zeta_1^{\alpha_1 a_1}\dots\zeta_d^{\alpha_d a_d}$, и разные члены переходят в разные. Введем еще одну серию переменных:

$$\zeta_1 = \eta_1, \zeta_2 = \eta_1 + \eta_2, \dots, \zeta_d = \eta_1 + \eta_d.$$

Эта подстановка обратима, следовательно, и среди полиномов

$$\widetilde{\widetilde{\widetilde{\Pi}}}_j(\eta_1, \dots, \eta_d) = \widetilde{\Pi}_j(\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \dots, \eta_1 + \eta_d)$$

найдутся два непропорциональных. Далее, имеем

$$\widetilde{\widetilde{\widetilde{\Pi}}}_j(\eta_1, \dots, \eta_d) = \Pi_j(t_1\eta_1^{a_1}, t_2(\eta_1 + \eta_2)^{a_2}, \dots, t_d(\eta_1 + \eta_d)^{a_d}).$$

Раскрывая скобки, мы видим, что коэффициент при члене η_1^k в полиноме $\widetilde{\widetilde{\widetilde{\Pi}}}_j(\eta_1, \dots, \eta_d)$ равен $\Pi_j(t_1, \dots, t_d)$. Действительно, есть лишь один способ получить $\eta_1^k = \eta_1^{a_1\alpha_1+\dots+a_d\alpha_d}$, когда мы раскрываем произведение

$$d_{\alpha,j}(t_1\eta_1^{a_1})^{\alpha_1}(t_2(\eta_1 + \eta_2)^{a_2})^{\alpha_2}\dots(t_d(\eta_1 + \eta_d)^{a_d})^{\alpha_d}.$$

По нашим предположениям, этот коэффициент не равен нулю в случае $j = 1$. Положим

$$\gamma_j = \frac{\Pi_j(t_1, \dots, t_d)}{\Pi_1(t_1, \dots, t_d)}$$

для $j \geqslant 2$. В таком случае, многочлены $\widetilde{\widetilde{\widetilde{\Pi}}}_j(\eta_1, \dots, \eta_d) - \gamma_j\widetilde{\widetilde{\widetilde{\Pi}}}_1(\eta_1, \dots, \eta_d)$ не имеют члена, пропорционального η_1^k в случае $j \geqslant 2$ и кроме того, по крайней мере один из этих полиномов не равен нулю. Не умаляя общности, можем считать, что $\widetilde{\widetilde{\widetilde{\Pi}}}_2 - \gamma_2\widetilde{\widetilde{\widetilde{\Pi}}}_1 \neq 0$.

Теперь мы модифицируем исходные полиномы: P_1 остается прежним, а каждый полином P_j, $j \geqslant 2$, заменяется на $P_j - \gamma_j P_1$. Такая модификация не изменяет пространство $C^P(\mathbb{T}^d)$. Для краткости, мы переобозначаем эти многочлены старыми символами $P_1, \dots, P_\ell$ и все введенные выше обозначения будем относить прямо к этим измененным полиномам. При таком соглашении, $\widetilde{\widetilde{\Pi}}_2(\eta_1, \ldots, \eta_d)$ есть ненулевой полином, не имеющий члена, пропорционального η_1^k, в то время как полином $\widetilde{\widetilde{\Pi}}_1(\eta_1, \ldots, \eta_d)$ включает в себя член, пропорциональный (с ненулевым коэффициентом) η_1^k.

Мы хотим обеспечить, чтобы многочлен $\widetilde{\widetilde{\Pi}}_2(\eta_1, \eta_2, \eta_2, \ldots, \eta_2)$ (от двух переменных) был ненулевым. Для этой цели мы изучим выражение, которое получается из одного монома, входящего в многочлен $\Pi_2(\eta_1, \ldots, \eta_d)$: это

$$d_{\alpha,2} t_1^{\alpha_1} \ldots t_d^{\alpha_d} \eta_1^{a_1\alpha_1} (\eta_1 + \eta_2)^{a_2\alpha_2 + \ldots + a_d\alpha_d}.$$

Раскроем скобки и выберем член, в который переменная η_2 входит в наибольшей степени. Этот член равен

$$d_{\alpha,2} t_1^{\alpha_1} \ldots t_d^{\alpha_d} \eta_1^{a_1\alpha_1} \eta_2^{k - a_1\alpha_1}.$$

Степень $k - a_1\alpha_1$ принимает наибольшее значение, когда α_1 — наименьшее возможное. Введем обозначение $\overline{\alpha} = \min\{\alpha_1 \colon \langle a, \alpha \rangle = k, d_{\alpha,2} \neq 0\}$. Тогда, после раскрытия скобок, многочлен $\widetilde{\widetilde{\Pi}}_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_2)$ содержит член

$$\eta_1^{a_1\overline{\alpha}} \eta_2^{k - a_1\overline{\alpha}} \sum_{\substack{\langle a, \alpha \rangle = k \\ d_{\alpha,2} \neq 0,\ \alpha_1 = \overline{\alpha}}} d_{\alpha,2} t_1^{\overline{\alpha}} t_2^{\alpha_2} \ldots t_d^{\alpha_d}.$$

Коэффициент при этом члене равен $\sum d_{\alpha,2} t_1^{\overline{\alpha}} t_2^{\alpha_2} \ldots t_d^{\alpha_d}$, это — ненулевой полином переменных $t_1, \ldots, t_d$, обозначим его символом p. Выберем $t_1, t_2, \ldots, t_d$ так, чтобы, вдобавок к уже введенному требованию $\Pi_1(t_1, \ldots, t_d) \neq 0$, выполнялось еще и условие $p(t_1, \ldots, t_d) \neq 0$.

При таком выборе, многочлены $\widetilde{\widetilde{\Pi}}_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_2)$ и $\widetilde{\widetilde{\Pi}}_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_2)$ окажутся линейно независимыми. Заведомо, таким же свойством обладают и многочлены

$$\ddot{\Pi}_1(\xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_2}, \ldots, \xi_2^{a_d}) \text{ и } \ddot{\Pi}_2(\xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_2}, \ldots, \xi_2^{a_d}).$$

Напомним читателю, что мы можем рассматривать пространство $\ddot{X}$ и набор $\ddot{P}$ вместо пространства X и набора полиномов P. Таким образом, теорема 1.2.9 сведена к следующему утверждению. Напомним, что $a_1, a_2, \ldots, a_d, k$ — параметры допустимой гиперплоскости после модификации.

Предложение 3.1.4. *Предположим, что числа a_j, $j = 1, 2, \ldots, d$, и k натуральны, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_d > 0$, а полиномы $P = \{P_j\}_{j\in[1..\ell]}$ удовлетворяют следующему дополнительному условию: среди старших частей*

$$\Pi_j(\xi_1, \ldots, \xi_d) = \sum_{\langle a,\alpha\rangle = k} d_{\alpha,j}(2\pi i\xi_1)^{\alpha_1} \ldots (2\pi i\xi_d)^{\alpha_d}$$

характеристических полиномов операторов $P_j(\partial)^*$, первые два, т. е. Π_1 и Π_2, обладают тем свойством, что многочлены

$$\Pi_1(\xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_2}, \ldots, \xi_2^{a_d}) \text{ и } \Pi_2(\xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_2}, \ldots, \xi_2^{a_d})$$

линейно независимы. В таком случае, пространство ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ не есть $\mathcal{L}_\infty$-пространство.

Замечание 3.1.5. Роль переменных ζ_i и η_i была вспомогательной, в дальнейшем они не используются.

Замечание 3.1.6. В случае, если число переменных равно двум, дополнительное условие выглядит так: многочлены $\Pi_1(\xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_2})$ и $\Pi_2(\xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_2})$ линейно независимы. Это может быть проверено просто перенумерацией многочленов, потому что это равносильно тому, что многочлены $\Pi_1(\xi_1, \xi_2)$ и $\Pi_2(\xi_1, \xi_2)$ линейно независимы. С другой стороны, если число переменных — хотя бы три, нетрудно видеть, что многочлены $\Pi_1(\xi_1, \xi_2^{a_2}, \ldots, \xi_2^{a_d})$ и $\Pi_2(\xi_1, \xi_2^{a_2}, \ldots, \xi_2^{a_d})$ также линейно независимы. Это будет использовано в дальнейшем.

Введем обозначение $A(\xi_1, \xi_2) = \Pi_1(\xi_1, \xi_2^{a_2}, \ldots, \xi_2^{a_d})$ и $B(\xi_1, \xi_2) = \Pi_2(\xi_1, \xi_2^{a_2}, \ldots, \xi_2^{a_d})$, и модифицируем операторы T_j еще раз. А именно, пусть u — наибольшая степень x, такая что ненулевой член $c\xi_1^x\xi_2^v$, $(a_1x+v=k)$ имеется в A или в B. Переставляя, если надо, многочлены Π_1 и Π_2, мы можем считать, что ненулевое кратное монома $\xi_1^u\xi_2^v$ встречается в многочлене A. В таком случае, мы вычитаем кратное многочлена P_1 из многочлена P_2 таким образом, чтобы член $\xi_1^u\xi_2^v$ исчез из многочлена B. Далее, мы нормируем многочлен A так, чтобы этот член появлялся в многочлене A с коэффициентом 1. После этого, мы обозначаем символом $u_1 < u$ наибольшую степень y, такую что многочлен B содержит ненулевой член вида $e\xi_1^y\xi_2^w$, $(a_1y+w=k)$. Простыми действиями как и раньше, мы можем обеспечить выполнение условия $e=1$ и удалить моном, кратный моному $\xi_1^{u_1}\xi_2^w$, из многочлена A.

3.1.3. Построение специальных элементов

Мы считаем, что набор многочленов P уже был преобразован, как описано в предыдущем пункте. Мы также будем использовать обозначения из прошлого пункта.

Пространство $C^P(\mathbb{T}^d)$ можно изометрично вложить в прямую сумму $C(\mathbb{T}^d)\bigoplus\ldots\bigoplus C(\mathbb{T}^d)$, состоящую из ℓ копий пространства $C(\mathbb{T}^d)$, согласно формуле

$$f\mapsto(P_1(\partial)f,\ldots,P_\ell(\partial)f).$$

Аннулятор образа пространства $C^P(\mathbb{T}^n)$ относительно этого вложения состоит из наборов мер $(\mu_1,\ldots,\mu_\ell)$ на торе $\mathbb{T}^d$, таких что

$$P_1(\partial)^*\mu_1+\ldots+P_\ell(\partial)^*\mu_\ell=0. \tag{3.1.5}$$

Однако, как было сказано, мы будем работать с меньшим пространством ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$, аннулятор которого задан условием

$$\sum_{j=1}^{\ell}\int\limits_{\mathbb{T}^d}P_j(\partial)fd\mu_j=0 \tag{3.1.6}$$

для всех правильных тригонометрических полиномов f на торе $\mathbb{T}^d$. Отметим, что если все меры μ_j правильны, то условия (3.1.5) и (3.1.6) эквивалентны. В этом пункте мы будем работать лишь с правильными мерами, то есть, использовать условие (3.1.5).

Более точно, мы построим элементы вида

$$\lambda \cdot (z_1^p z_2^q z_3^{\left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right]} \dots z_d^{\left[q^{\frac{a_d}{a_2}}\right]}, c_{pq} z_1^p z_2^q z_3^{\left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right]} \dots z_d^{\left[q^{\frac{a_d}{a_2}}\right]}, 0, \dots, 0) \tag{3.1.7}$$

в аннуляторе пространства ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$. Символом λ мы обозначили нормированную меру Лебега на торе. Натуральные числа p и q будут подчинены некоторым условиям, которые мы укажем позже. В частности, все допустимые числа p и q будут достаточно большими. Наконец, квадратные скобки обозначают целую часть числа, то есть, наибольшее целое число, меньшее либо равное данному.

Мы хотим построить элементы так, чтобы числа c_{pq} были равномерно ограничены. В таком случае, элементы, заданные формулой (3.1.7), образуют слабо 2-суммируемую последовательность в аннуляторе, так как

$$\left\{ z_1^p z_2^q z_3^{\left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right]} \dots z_d^{\left[q^{\frac{a_d}{a_2}}\right]} \right\}_{p,q}$$

есть ортонормированная система в $L_2(\lambda)$ (из-за первых двух сомножителей, z_1^p и z_2^q).

Замечание 3.1.7. Если число переменных равно 2, надо строить элементы вида

$$\lambda \cdot (z_1^p z_2^q, c_{pq} z_1^p z_2^q, 0, 0, \dots, 0)$$

вместо заданных формулой (3.1.7), опять же, с равномерной ограниченностью коэффициентов c_{pq}. Равномерная ограниченность получается тем же методом, что описан ниже, но вычисления упрощаются.

Набор мер, заданный формулой (3.1.7), должен удовлетворять условию (3.1.5). Пусть T_1^Δ и T_2^Δ — характеристические полиномы операторов $P_1(\partial_1)^*$ and $P_2(\partial)^*$, тогда условие (3.1.5) принимает вид

$$T_1^\Delta(p, q, [q^{\frac{a_3}{a_2}}], \dots, [q^{\frac{a_d}{a_2}}]) + c_{pq} T_2^\Delta(p, q, [q^{\frac{a_3}{a_2}}], \dots, [q^{\frac{a_d}{a_2}}]) = 0,$$

откуда

$$-c_{pq} = \frac{T_1^\Delta(p, q, [q^{\frac{a_3}{a_2}}], \dots, [q^{\frac{a_d}{a_2}}])}{T_2^\Delta(p, q, [q^{\frac{a_3}{a_2}}], \dots, [q^{\frac{a_d}{a_2}}])}.$$

Член вида $ap^\alpha q^\beta$ (a есть численный коэффициент, α и β — неотрицательные не обязательно целые числа) называется старшим, если $a_1\alpha + a_2\beta = k$, и младшим, если $a_1\alpha + a_2\beta < k$. Напишем элементарное неравенство (в нем $x_1, x_2, ..., x_s \geqslant 0$):

$$\Big|[x_1][x_2]\dots[x_s] - x_1x_2\dots x_s\Big| \leqslant \Big|[x_1] - x_1\Big| \cdot [x_2][x_3]\dots[x_s] +$$
$$+ x_1\Big|[x_2]\dots[x_s] - x_2\dots x_s\Big| \leqslant x_2\dots x_s + x_1\Big|[x_1]\dots[x_s] - x_2\dots x_s\Big|.$$

Повторяя рассуждение, мы приходим к оценке

$$\Big|[x_1][x_2]\dots[x_s] - x_1x_2\dots x_s\Big| \leqslant x_2\dots x_s + x_1x_3x_4\dots x_s +$$
$$+ x_1x_2x_4\dots x_s + x_1\dots x_{s-1}$$

(каждое слагаемое справа содержит $s-1$ множитель). Следовательно, при $l = 1, 2$, число

$$|T_l^\Delta(p, q, q^{\frac{a_3}{a_2}}, \dots, q^{\frac{a_d}{a_2}}) - T_l^\Delta(p, q, [q^{\frac{a_3}{a_2}}], \dots, [q^{\frac{a_d}{a_2}}])|$$

ограничено суммой некоторого числа младших членов. Действительно, если $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ — натуральные числа, и $a_1\alpha_1 + \dots + a_d\alpha_d \leqslant k$, то

$$p^{\alpha_1} q^{\alpha_2} q^{\alpha_3 \frac{a_3}{a_2}} \dots q^{\alpha_d \frac{a_d}{a_2}} = p^{\alpha_1} q^{\frac{a_2\alpha_2 + \dots + a_d\alpha_d}{a_2}}$$

превращается в младший моном после выкидывания любого множителя слева.

Напомним, что мы обозначили символами A и B многочлены от двух переменных, которые появляются из старших частей полиномов P_1 и P_2 (см. окончание пункта 3.1.2). Соответственно, мы можем записать

$$|c_{pq}| \leqslant \frac{|A(p, q^{\frac{1}{a_2}})| + (\text{сумма модулей младших членов})}{|B(p, q^{\frac{1}{a_2}})| - (\text{сумма модулей младших членов})}$$
$$\leqslant \frac{p^u q^{\frac{v}{a_2}} + |\sum_{y<u, a_1y+z=k} c_y p^y q^{\frac{z}{a_2}}| + \text{младшие члены}}{p^{u_1} q^{\frac{v_1}{a_2}} - |\sum_{y<u_1, a_1y+z=k} c'_y p^y q^{\frac{z}{a_2}}| - \text{младшие члены}}.$$

Здесь натуральные числа u и u_1 — такие же, как и в конце пункта 3.1.2, а числа v и v_1 определены равенствами, $a_1u + v = a_1u_1 + v_1 = k$. Удобно переписать предыдущее неравенство в терминах “переменных” $p^{\frac{1}{a_1}}$ и $q^{\frac{1}{a_2}}$:

$$|c_{pq}| \leqslant \frac{\left(p^{\frac{1}{a_1}}\right)^{a_1u}\left(q^{\frac{1}{a_2}}\right)^{k-a_1u} + \sum_{y<u} |c_y| \left(p^{\frac{1}{a_1}}\right)^{a_1y}\left(q^{\frac{1}{a_2}}\right)^{k-a_2y} + \text{младшие члены}}{\left(p^{\frac{1}{a_1}}\right)^{a_1u_1}\left(q^{\frac{1}{a_2}}\right)^{k-a_1u_1} - \sum_{y<u_1} |c'_y| \left(p^{\frac{1}{a_1}}\right)^{a_1y}\left(q^{\frac{1}{a_2}}\right)^{k-a_2y} - \text{младшие члены}} =$$
$$= \frac{\left(\frac{p^{\frac{1}{a_1}}}{q^{\frac{1}{a_2}}}\right)^{a_1u} + \sum_{y<u} |c_y| \left(\frac{p^{\frac{1}{a_1}}}{q^{\frac{1}{a_2}}}\right)^{a_1y} + \text{младшие члены}}{\left(\frac{p^{\frac{1}{a_1}}}{q^{\frac{1}{a_2}}}\right)^{a_1u_1} - \sum_{y<u_1} |c'_y| \left(\frac{p^{\frac{1}{a_1}}}{q^{\frac{1}{a_2}}}\right)^{a_1y} - \text{младшие члены}}.$$

Каждый “младший член” в последней формуле имеет вид

$$A\frac{\left(p^{1/a_1}\right)^{\alpha}\left(q^{1/a_2}\right)^{\beta}}{\left(q^{1/a_2}\right)^{k}},$$

где $\alpha + \beta < k$. Наложим следующее условие на числа p и q: $\frac{\Delta}{2} \leqslant \frac{p^{1/a_1}}{q^{1/a_2}} \leqslant \Delta$, где Δ — достаточно большое число. Это число может быть выбрано настолько большим, что и в числителе, и в знаменателе средняя сумма станет не более чем $1/10$ от первого слагаемого. Далее, каждый младший член удовлетворяет оценке

$$\frac{\left(p^{1/a_1}\right)^{\alpha}\left(q^{1/a_2}\right)^{\beta}}{\left(q^{1/a_2}\right)^{k}} \leqslant \Delta^{\alpha}\frac{1}{\left(q^{1/a_2}\right)^{k-\alpha-\beta}}.$$

Наложим еще условие $q > C$, где C — достаточно велико (константа C выбирается после того, как число Δ зафиксировано). Увеличивая параметр C, мы можем сделать суммы младших членов (как в числителе, так и в знаменателе) меньшими, чем 1/10 от первого слагаемого. Таким образом, число c_{pq} становится равномерно ограниченным в терминах Δ и C, если числа p и q удовлетворяют всем перечисленным условиям.

3.1.4. Построение оператора в гильбертово пространство

Пусть набор $(\mu_1, \ldots, \mu_\ell)$ мер на торе ортогонален пространству ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ в смысле условия (3.1.6). В результате изложенных ниже рассмотрений, мы сопоставим каждому такому набору элемент гильбертова пространства. Этот элемент будет зависеть от набора линейным непрерывным образом. Мы сконструируем его в несколько приемов.

Сначала мы уберем члены вида $z_1^{k_1} \ldots z_d^{k_d}$, подчиненные условию $\min_i |k_i| \leqslant 1000$, из ряда Фурье мер μ_j. Это делается взятием 1001-го остаточного члена ряда Фурье по всем переменным по очереди. Такая операция линейна и непрерывна. Поэтому, для простоты обозначений, мы можем считать, что меры μ_j сами удовлетворяют условию $\widehat{\mu}(k_1, \ldots, k_d) = 0$ если $|k_j| \leqslant 1000$ хотя бы для одного j. Меры, удовлетворяющие такому условию, автоматически являются правильными, то есть, они удовлетворяют не только условию (3.1.6), но и условию (3.1.5):

$$P_1(\partial)^* \mu_1 + \ldots + P_\ell(\partial)^* \mu_\ell = 0.$$

Символом ψ обозначим неотрицательную бесконечно дифференцируемую функцию на пространству $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющую неравенству $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ всюду, равенству $\psi(\xi) = 0$ при $\max_j |\xi_j| > 20$ и равенству $\psi(\xi) = 1$ при $\max_j |\xi_j| \leqslant 10$. Положим $\varphi = \check{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и распространим меры μ_j на пространство $\mathbb{R}^d$ периодически (сохранив для этих распространений прежние обозначения μ_j). Тогда меры $\lambda_j = \varphi\mu_j$, $j = 1, \dots \ell$ суть меры ограниченной вариации в пространстве $\mathbb{R}^d$. Мы хотим включить меры λ_j в уравнение наподобие уравнения (3.1.5).

Напомним читателю, что частичный порядок на множестве индексов был введен в определении 1.4.33. Зарядом умеренного роста в пространстве $\mathbb{R}^d$ назовем комплексную меру *локально* ограниченной вариации, такую что существует натуральное число N для которого вариации меры на шаре $B_r(0)$ не превосходит cr^N при $r > 1$.

Лемма 3.1.8. *Пусть мультииндекс α имеет неотрицательные координаты, u — функция класса Шварца, а λ — заряд умеренного роста на пространстве $\mathbb{R}^d$. В таком случае, обобщенную функцию $\partial^\alpha(u\lambda)$ можно представить в виде*

$$\partial^\alpha(u\lambda) = u\partial^\alpha\lambda + \sum_{\beta\prec\alpha} c_\beta \partial^\beta \lambda_\beta, \tag{3.1.8}$$

здесь λ_β есть мера, полученная из меры λ умножением на некоторую производную функции u, а c_β — численные коэффициенты.

Доказательство. В случае $\alpha = 0$ доказывать нечего. Предположим, что равенство (3.1.8) верно для некоторого мультииндекса α. Продифференцировав это равенство по j-ой переменной, получим

$$\partial_j\partial^\alpha(u\lambda) = u\partial_j\partial^\alpha\lambda + \partial_j u\partial^\alpha\lambda + \sum_{\beta<\alpha} c_\beta\partial_j\partial^\beta\lambda_\beta.$$

Таким образом, достаточно проверить следующее утверждение: если $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то имеет место равенство

$$v\partial^\gamma\lambda = \sum_{\beta\leqslant\gamma} \alpha_\beta\partial^\beta\widetilde{\lambda}_\beta \tag{3.1.9}$$

с некоторыми численными коэффициентами α_β и мерами $\widetilde{\lambda}_\beta$, каждая из которых получается умножением меры λ на некоторую производную функции v.

Опять же, доказывать нечего в случае $\gamma = 0$. Но если равенство (3.1.9) имеет место для некоторого мультииндекса γ и всех функций v, мы можем записать

$$v\partial_j\partial^\gamma\lambda = \partial_j(v\partial^\gamma\lambda) - (\partial_j v)\partial^\gamma\lambda$$

и применить предположение индукции (3.1.9) как к мере $v\partial^\gamma\lambda$, так и к мере $(\partial_j v)\partial^\gamma\lambda$. $\square$

Так как набор мер $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell)$ удовлетворяет условию (3.1.5), согласно лемме 3.1.8, имеет место равенство

$$P_1(\partial)^*(\varphi\mu_1) + \ldots + P_\ell(\partial)^*(\varphi\mu_\ell) = \varphi \cdot \sum_{j=1}^{\ell} P_j(\partial)^*\mu_j + \sum_{\langle a,\alpha\rangle<k} b_\alpha\partial^\alpha\lambda_\alpha =$$
$$\sum_{\langle a,\alpha\rangle<k} b_\alpha\partial^\alpha\lambda_\alpha,$$

где λ_α суть некоторые меры ограниченной вариации на пространстве $\mathbb{R}^d$, зависящие линейно и непрерывно от мер $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ на торе $\mathbb{T}^d$, а b_α суть некоторые численные коэффициенты. Напомним, что $P_j(\partial)^* = \sigma_j^* + \tau_j^*$, где σ_j^* — старшая часть оператора (см. пункт 3.1.2). Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\sum_{l=1}^{\ell} \sigma_j^*(\varphi\mu_j) + \text{младшие члены} = 0. \tag{3.1.10}$$

Каждый младший член пропорционалем производной порядка α, $\langle a, \alpha\rangle < k$, некоторой меры на пространстве $\mathbb{R}^d$ (и все эти меры зависят от мер $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ линейно и непрерывно).

Наша цель — избавиться от младших членов. Преобразование Фурье любой производной функции φ имеет носитель в кубе с центром в нуле и стороной длины 40. Далее, на торе меры μ_j не имеют спектра по крайней мере в кубе с центром в нуле и стороной длины 2000. Таким образом, меры, содержащиеся в младших членах, не имеют спектра в шаре $\{\xi \mid |\xi| \leqslant 100\}$. Следовательно, операторы, описанные в предложении 3.1.1, применимы к этим мерам; в результате их применения опять же получатся меры.

Напомним читателю, что допустимая гиперплоскость, с которой мы работаем, задана уравнением $\langle a, \alpha \rangle = k$, где целые координаты a_j вектора a были подчинены некоторым условиям, но (см. пункт 3.1.2) числа $m_j = k/a_j$ были целыми. С точностью до численного коэффициента, каждый младший член имеет вид $\partial^\beta \lambda$, где $\langle a, \beta \rangle < k$, т.е. $\frac{\beta_1}{m_1} + \ldots + \frac{\beta_d}{m_d} < 1$. Рассмотрим мультипликатор Фурье с символом

$$u_j(\xi_1, \ldots, \xi_d) = \frac{(2\pi i \xi_1)^{\beta_1} \ldots (2\pi i \xi_{j-1})^{\beta_{j-1}} (2\pi i \xi_j)^{\beta_j + 3m_j} (2\pi i \xi_{j+1})^{\beta_{j+1}} \ldots (2\pi i \xi_d)^{\beta_d}}{(2\pi i \xi_1)^{4m_1} + \ldots + (2\pi i \xi_d)^{4m_d}}. \quad (3.1.11)$$

Отметим, что знаменатель приведенного символа обнуляется лишь в нуле. Подстановка

$$\xi \mapsto (t^{\frac{1}{4m_1}} \xi_1 \ldots, t^{\frac{1}{4m_d}} \xi_d)$$

равносильна умножению символа на число

$$t^{-1} t^{\frac{1}{4}\left(\frac{\beta_1}{m_1} + \ldots + \frac{\beta_d}{m_d}\right) + \frac{3}{4}} = t^\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{4}\Big(\frac{\beta_1}{m_1} + \ldots + \frac{\beta_d}{m_d} - 1\Big),$$

и ясно, что $\gamma < 0$. Согласно предложению 3.1.1, оператор $\mathcal{M}_{u_j}$ переводит меру λ в меру. С другой стороны,

$$\partial^\beta \lambda = \sum_{j=1}^{d} \partial_j^{m_j} \mathcal{M}_{u_j} \lambda,$$

и все дифференциальные мономы $\partial_j^{m_j}$ — старшие (соответствуют мультииндексам, лежащим на нашей аффинной гиперплоскости). Таким образом, уравнение (3.1.10) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{\ell} \sigma_j^*(\varphi \mu_j) + \sum_{j=1}^{d} \partial_j^{m_j} \rho_j = 0, \quad (3.1.12)$$

где ρ_j — некоторые меры на пространстве $\mathbb{R}^d$, зависящие от исходных мер $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ линейно и непрерывно. Конкретный вид мультипликаторов, с помощью которых были получены меры ρ_j, будет использован в дальнейшем. Далее, операторы σ_j^* не имеют членов, равных "чистым дифференцированиям" $\partial_i^{m_i}$ (это следует из преобразований набора операторов, см. пункт 3.1.2). Группируя вместе все члены, соответствующие одному фиксированному дифференциальному моному ∂^α (с условием $\langle a, \alpha\rangle = k$) в первой сумме равенства (3.1.12), приходим к уравнению

$$\sum_{\langle a,\alpha\rangle = k} \partial^\alpha \nu_\alpha = 0, \tag{3.1.13}$$

где $\nu_\alpha = \rho_j$, если $\alpha = (0, 0, \ldots, m_j, 0, \ldots, 0)$ (m_j находится на j-м месте), а для остальных индексов α мера ν_α есть линейная комбинация мер $\varphi\mu_j$ (в дальнейшем нам понадобится более детальное описание структуры этой линейной комбинации). В частности, меры ν_α зависят линейно и непрерывно от исходного набора мер $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$.

Перепишем уравнение (3.1.13) в терминах преобразования Фурье и ограничим результат на "поверхность" $\big\{(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_d/a_2}) \subset \mathbb{R}^d \mid (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2\big\}$:

$$0 = \sum_{\langle a,\alpha\rangle = k} (2\pi i\xi_1)^{\alpha_1} (2\pi i)^{\alpha_2 + \ldots + \alpha_d} |\xi_2|^{\frac{\alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_d a_d}{a_2}} \widehat{\nu}_\alpha\big(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_d/a_2}\big) = \\ \sum_{\langle a,\alpha\rangle = k} \xi_1^{\alpha_1} |\xi_2|^{\frac{k - a_1\alpha_1}{a_2}} \Big[(2\pi i)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_d} \widehat{\nu}_\alpha\big(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_d/a_2}\big)\Big]. \tag{3.1.14}$$

Наконец, положим

$$f_s(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\substack{\langle a,\alpha\rangle = k, \\ \alpha_1 = s}} (2\pi i)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_d} \widehat{\nu}_\alpha(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_d/a_2}),$$

здесь сумма равна нулю 0, если не существует α, таких что $\alpha_1 = s$ и $\langle \alpha, a\rangle = k$. В этих обозначениях, уравнение (3.1.14) примет вид

$$\sum_{s=0}^{m_1} \xi_1^s |\xi_2|^{\frac{(m_1-s)a_1}{a_2}} f_s(\xi_1, \xi_2) = 0; \tag{3.1.15}$$

отметим, что функция f_s может быть отлична от нуля только если $a_1 s \leqslant k$, т.е. $s \leqslant k/a_1 = m_1$).

Важно отметить, что функция f_s есть ограничение преобразования Фурье некоторой меры ограниченной вариации в пространстве $\mathbb{R}^d$ на “поверхность” $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_d/a_2})$.

Уравнение (3.1.15) есть условие разрешимости для некоторой системы уравнений (на самом деле — частный случай условия (2.2.1)). Отметим, что функции f_s непрерывны *a priori*, таким образом мы можем вести наши рассмотрения вне координатных плоскостей. Будем рассуждать индукцией по параметру m_1. Если $m_1 = 1$, то уравнение (3.1.15) превращается в $|\xi|^{\frac{m_1 a_1}{a_2}} f_0(\xi) + \xi_1 f_1(\xi) = 0$, т.е. $\frac{f(\xi)}{\xi_1} = -\frac{f_1(\xi)}{|\xi_2|^{\frac{m_1 a_1}{a_2}}} = \psi_1(\xi)$, и мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -|\xi_2|^{\frac{m_1 a_1}{a_2}} \psi_1(\xi) = f_1(\xi), \\ \xi_1 \psi_1(\xi) = f_0(\xi). \end{cases} \tag{3.1.16}$$

Определение функции ψ_1 или система (3.1.16) влекут непрерывность функции ψ_1 всюду, кроме, возможно, нуля. Таким образом, уравнение (3.1.15) с $m_1 = 1$ гарантирует разрешимость системы (3.1.16) относительно “неизвестной” функции ψ_1.

В общем случае, перепишем уравнение (3.1.15) в виде

$$\psi_1(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_0(\xi)}{\xi_1} = -\frac{\sum\limits_{s=1}^{m_1} \xi_1^{s-1} |\xi_2|^{\frac{(m_1-s)a_1}{a_2}} f_s(\xi)}{|\xi_2|^{\frac{m_1 a_1}{a_2}}} = -\frac{\sum\limits_{s=0}^{m_1-1} \xi_1^{s} |\xi_2|^{\frac{(m_1-1-s)a_1}{a_2}} f_{s+1}(\xi)}{|\xi_2|^{\frac{m_1 a_1}{a_2}}}.$$

Таким образом, мы получаем два равенства:

$$\xi_1 \psi_1(\xi) = f_0(\xi),$$

$$|\xi_2|^{\frac{(m_1-1)a_1}{a_2}} (f_1(\xi) + |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}} \psi_1(\xi)) + \sum_{s=0}^{m_1-1} \xi_1^s |\xi_2|^{\frac{(m_1-1-s)a_1}{a_2}} f_{s+1}(\xi) = 0,$$

второе уравнение есть уравнение (3.1.15) (с $m_1 - 1$ замененным на m_1) для функций

$$f_1(\xi) + |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}} \psi_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_{m_1}(\xi).$$

Рассуждая по индукции, легко теперь понять, что если условие (3.1.15) выполнено с непрерывными функциями $f_0, f_1 \ldots, f_{m_1}$, то существуют функции $\psi_1, \ldots, \psi_{m_1}$ двух переменных, которые непрерывны всюду, кроме начала координат, и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} & \xi_1 \psi_1(\xi) & = f_0(\xi), \\ -|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}} \psi_1(\xi) + & \xi_1 \psi_2(\xi) & = f_1(\xi), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}} \psi_{m_1-1}(\xi) + & \xi_1 \psi_{m_1}(\xi) & = f_{m_1-1}(\xi), \\ -|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}} \psi_{m_1}(\xi) & & = f_{m_1}(\xi). \end{cases} \tag{3.1.17}$$

Искомый оператор из аннулятора пространства ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ в гильбертово пространство действует по правилу

$$(\mu_1, \ldots, \mu_\ell) \mapsto (f_0, \ldots, f_{m_1}) \mapsto (\psi_1, \ldots, \psi_{m_1}).$$

Гильбертово пространство реализуется как весовое пространство L_2 на плоскости. Таким образом, непрерывность оператора доставляется следующей теоремой вложения.

Теорема 3.1.9. *Пусть выполнено равенство* (3.1.17), *где*

$$f_j(\xi_1, \xi_2) = \widehat{\rho}_j(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \dots, |\xi_2|^{a_d/a_2}),$$

а ρ_j суть меры на пространстве $\mathbb{R}^d$. Тогда

$$\max_j \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\psi_j(\xi)|^2 |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1} d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \max_j \|\rho_j\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^d)}.$$

Нетрудно видеть, что эта теорема есть частный случай теоремы 2.2.1 с параметрами $d_1 = 2$, $d_2 = d$, $\Phi(\xi_2) = (|\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \dots, |\xi_2|^{a_d/a_2})$, $h(\xi_2) = |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}}$, $H(\xi_2) = |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1}$.

3.1.5. Противоречие

Если пространство ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ есть $\mathcal{L}_\infty$-пространство, то согласно предложению 1.4.20 и теореме 1.4.23, оператор, построенный в предыдущем пункте, должен быть 1-абсолютно суммирующим, следовательно, по теореме 1.4.24, 2-абсолютно суммирующим. В пункте 3.1.3 мы построили специальные элементы вида

$$\lambda(z_1^p z_2^q z_3^{\left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right]} \dots z_n^{\left[q^{\frac{a_d}{a_2}}\right]}, c_{pq} z_1^p z_2^q z_3^{\left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right]} \dots z_d^{\left[q^{\frac{a_d}{a_2}}\right]}, 0, \dots, 0) \qquad (3.1.18)$$

в аннуляторе пространства ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$. Напомним читателю, что эти элементы составляли слабо 2-суммируемую последовательность, в частности, для того, чтобы прийти к противоречию, достаточно показать, что сумма квадратов норм образов этих элементов под действием оператора из пункта 3.1.4 образует расходящийся ряд.

Будем считать, что числа p и q достаточно велики. В частности, мы можем считать, что все компоненты вектора $(p, q, \left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right], \dots, \left[q^{\frac{a_d}{a_2}}\right])$ не менее 1000. Символом $\pi_{p,q}$ обозначим меру

$$z_1^p z_2^q z_3^{\left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right]} \dots z_d^{\left[q^{\frac{a_d}{a_2}}\right]} \cdot \lambda$$

на торе $\mathbb{T}^d$ (здесь λ — мера Лебега на торе), в таком случае элементы, заданные формулой (3.1.18), превращаются в

$$(\pi_{p,q}, c_{pq}\pi_{p,q}, 0, \dots, 0). \tag{3.1.19}$$

Они удовлетворяют условию

$$P_1(\partial)^*\pi_{p,q} + c_{pq}P_2(\partial)^*\pi_{p,q} = 0,$$

см. уравнение (3.1.5). Пусть ψ — функция, введенная в начале пункта 3.1.4, и пусть $\varphi = \check{\psi}$, так же как и ранее. Преобразование Фурье (на $\mathbb{R}^d$) меры $\varphi\pi_{p,q}$ есть функция

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \mapsto \psi\Big(\xi_1 - p, \xi_2 - q, \xi_3 - \left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right], \dots, \xi_d - \left[q^{\frac{a_d}{a_2}}\right]\Big). \tag{3.1.20}$$

В соответствии с пунктом 3.1.4, нам понадобится сужение этой функции на “поверхность”

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{\frac{a_3}{a_2}}, \dots, |\xi_2|^{\frac{a_d}{a_2}}).$$

Мы обозначаем это ограничение символом $\kappa_{p,q}$:

$$\kappa_{p,q}(\xi_1, \xi_2) = \psi\Big(\xi_1 - p, |\xi_2| - q, |\xi_2|^{\frac{a_3}{a_2}} - \left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right], \dots, |\xi_2|^{\frac{a_d}{a_2}} - \left[q^{\frac{a_d}{a_2}}\right]\Big).$$

При $j \geqslant 3$ имеем

$$\Big||\xi_2|^{\frac{a_j}{a_2}} - \left[q^{\frac{a_j}{a_2}}\right]\Big| \leqslant 1 + \Big||\xi_2|^{\frac{a_j}{a_2}} - q^{\frac{a_j}{a_2}}\Big| \leqslant 1 + \big||\xi_2| - q\big|,$$

потому что $a_j \leqslant a_2$ при $j \geqslant 3$ (это соглашение мы приняли в пункте 3.1.2, см. формулу (3.1.4)). Таким образом, соотношение $\kappa_{p,q}(\xi_1, \xi_2) = 1$ следует из неравенств $|\xi_1 - p| \leqslant 5$ и $||\xi_2| - q| \leqslant 5$. С другой стороны, ясно что $\kappa_{p,q}(\xi_1, \xi_2) = 0$, если $\max\{|\xi_1 - p|, ||\xi_2| - q|\} > 20$.

Напомним, что числа p и q были подчинены некоторым условиям, влекущим, в частности, что p и q велики. Предположим, что они настолько велики, что $\xi_1 \asymp p$ и $|\xi_2| \asymp q$ для всякой пары (p, q), такой что $\kappa_{p,q}(\xi_1, \xi_2) \neq 0$. Принимая во внимание соотношение $q^{\frac{1}{a_2}} \asymp p^{\frac{1}{a_1}}$ (см. пункт 3.1.3), получаем

$$|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}} \asymp q^{\frac{a_1}{a_2}} \asymp p \asymp \xi_1 \tag{3.1.21}$$

для такой пары чисел (ξ_1, ξ_2).

Поймем теперь, как будут выглядеть равенства (3.1.12), (3.1.13) и (3.1.15) в нашей ситуации. Точнее, мы анализируем структуру мер ν_α из равенства (3.1.13) и функций f_s из равенства (3.1.15). Начнем с равенства (3.1.12). Имеются лишь две "исходные" меры ($\pi_{p,q}$ и $c_{pq}\pi_{p,q}$) и они соответствуют индексам $j = 1, 2$ в формуле (3.1.12). Эта формула также включает в себя функции, составленные из членов $\partial_j^{m_j} \rho_j$. Но все меры ρ_j были получены как результат применения некоторых мультипликаторов, символы которых убывают на бесконечности степенным образом. Точнее, если мы положим $\xi_j = |\xi_2|^{\frac{a_j}{a_2}}$, $j > 2$, в формуле (3.1.11) для символа мультипликатора и после этого воспользуемся соотношением $\xi_1 \asymp |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}} = |\xi_2|^{\frac{m_2}{m_1}}$, мы видим, что символ ведет себя как

$$\frac{|\xi_1|^{\beta_1} |\xi_2|^{m_2(\frac{\beta_2}{m_2} + \ldots + \frac{\beta_d}{m_d}) + 3m_2}}{|\xi_1|^{4m_1} + |\xi_2|^{4m_2}} \asymp \frac{|\xi_2|^{m_2(\frac{\beta_1}{m_1} + \ldots + \frac{\beta_d}{m_d}) + 3m_2}}{|\xi_2|^{4m_2}} \asymp$$
$$|\xi_2|^{m_2(-1 + \frac{\beta_1}{m_1} + \ldots + \frac{\beta_d}{m_d})} \asymp |\xi_1|^{-m_1 \sigma},$$

здесь $\sigma = 1 - (\frac{\beta_1}{m_1} + \ldots + \frac{\beta_d}{m_d}) > 0$.

Таким образом, в равенстве (3.1.15) функция $f_0(\xi_1, \xi_2)$ появляется из второй суммы в равенстве (3.1.12), то есть, $f_0(\xi_1, \xi_2) = O(|\xi_1|^{-m_1 \sigma})$, равномерно по p и q (чтобы избежать громоздких индексов, мы не отмечаем зависимость функций f_j от параметров p и q в наших обозначениях, считая пока их фиксированными). Мы также должны изучить функции $f_1, \ldots, f_{u-1}, f_u$, число u было введено в конце пункта 3.1.2. Далее, мы будем пользоваться обозначениями A и B для двух специальных полиномов двух переменных, которые также были введенны в конце того пункта. Важно, что функции $f_1, \ldots, f_d$ появятся из выражения

$$A(\xi_1, |\xi_2|^{\frac{1}{a_2}})\kappa_{p,q}(\xi_1, \xi_2) + B(\xi_1, |\xi_2|^{\frac{1}{a_2}})c_{pq}\kappa_{p,q}(\xi_1, \xi_2),$$

после приведения подобных членов. По сути, они появляются из первого слагаемого (содержащего A), потому что многочлен B не содержит членов вида $C \cdot \xi_1^x \xi_2^v$ с $x \geqslant u$ и $C \neq 0$ по построению. Более того, нетрудно видеть, что если $u > 1$ (отметим, что случай $u = 1$ также может встретится), то функции $f_1, \ldots, f_{u-1}$ тождественно равны нулю, в то время как $f_d = \kappa_{p,q}$ при всех u. Таким образом, несколько первых уравнений системы (3.1.17) выглядят так (опять же, до этого момента мы не отражали зависимость функций f_j от параметров p и q, а теперь начнем это делать):

$$\xi_1 \psi_1^{(p,q)}(\xi) = f_0^{(p,q)}(\xi),$$
$$-|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}} \psi_j^{(p,q)}(\xi) + \xi_1 \psi_{j+1}^{(p,q)}(\xi) = 0, \;\; j = 1, \ldots, u-1;$$
$$-|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}} \psi_u^{(p,q)}(\xi) + \xi_1 \psi_{u+1}^{(p,q)}(\xi) = \kappa_{p,q}(\xi)$$

(есть некоторое отличие от написанного в случае $u = 1$, что, впрочем, несущественно). Остальные равенства в данный момент не важны.

Будем решать описанные уравнения по очереди, начиная с первого, чтобы найти все функции $\psi_j^{(p,q)}$. Отметим, что $f_0^{(p,q)}(\xi) = O(|\xi_1|^{-\varepsilon})$ равномерно по параметрам p и q, для некоторого числа $\varepsilon > 0$, а также $\xi_1 \asymp |\xi_1|^{\frac{a_1}{a_2}}$ на носителе функции $\psi_j^{(p,q)}$, поэтому нетрудно видеть, что $\psi_j^{(p,q)}(\xi) = O(|\xi_1|^{-1-\varepsilon})$, $j \in [1..u]$, и

$$\psi_{u+1}^{(p,q)}(\xi) = \frac{1}{\xi_1}\Big(\kappa_{p,q}(\xi) + O(|\xi_1|^{-\varepsilon})\Big);$$

кроме того, функция $\psi_{u+1}^{(p,q)}$ не равняется нулю лишь на носителе функции $\kappa_{p,q}$. Предполагая, что числа p и q достаточно велики, мы может сделать так, чтобы второй член в скобках был меньше чем, скажем, 10^{-6} на носителе функции $\kappa_{p,q}$. Теперь становится ясно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\psi_{u+1}^{(p,q)}(\xi)|^2 |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1} d\xi \gtrsim \iint\limits_{\substack{|\xi_1 - p| \leqslant 5 \\ ||\xi_2| - q| \leqslant 5}} |\xi_1|^{-2} |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1} d\xi \geqslant$$

$$\gtrsim p^{-2} q^{\frac{a_1}{a_2}} q^{-1} \gtrsim p^{-2} p q^{-1} = p^{-1} q^{-1}$$

(мы воспользовались формулой (3.1.21)).

Остается просуммировать $p^{-1}q^{-1}$ по множеству всех допустимых значений p и q. Для всякого q мы имеем $p \asymp q^{\frac{a_1}{a_2}}$ и число допустимых p примерно равно $q^{\frac{a_1}{a_2}}$. Таким образом,

$$\sum_q \sum_p p^{-1} q^{-1} \gtrsim \sum_q q^{\frac{a_1}{a_2}} (q^{-\frac{a_1}{a_2}} q^{-1}) \gtrsim \sum_q q^{-1} = \infty.$$

$\square$

3.2. Примеры конкретных наборов дифференциальных операторов

Причиной неизоморфности некоторого пространства C^P пространству типа $C(K)$ может быть не только теорема Гротендика. Приведем пример из работы [30], в котором отсутствие изоморфизма берется из структуры идемпотентов алгебры мер на торе. А именно, рассмотрим пространство, порожденное одним полиномом $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2$ (на трехмерном торе).

Нетрудно видеть, что это пространство изоморфно пространству Y,

$$Y = \{f \in C(\mathbb{T}^3) \mid \hat{f}(p,q,r) = 0, \text{ если } p^2 + q^2 = r^2\}.$$

В свою очередь, если это пространство вкладывается дополняемо в пространство $C(K)$, то характеристическая функция множества $\{(p,q,r) \in \mathbb{Z}^2 \mid p^2 + q^2 = r^2\}$ есть преобразование Фурье меры (это можно объяснить так: в этом случае мы работаем с $\mathcal{L}_\infty$-пространством, стало быть, можем применить предложение 1.4.20 и получить, что аннулятор нашего пространства дополняем в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{T}^3)$; пользуясь теоремой 1.4.26, мы можем сделать проектор на аннулятор инвариантным, т.е. мультипликатором, символ которого есть характеристическая функция множества $\{(p,q,r) \in \mathbb{Z}^2 \mid p^2 + q^2 \neq r^2\}$). Согласно теореме 1.4.42, такое возможно лишь если указанное множество принадлежит классу CR (см. определение 1.4.41), что, естественно, не так.

Тем не менее, иногда отсутствие изоморфизма можно получить, применяя теорему 1.2.9 к измененному набору полиномов. Например, рассмотрим пространство, порожденное двумя полиномами $P_1(\xi_1,\xi_2) = (\xi_1 + \xi_2)^n$, $P_2(\xi_1,\xi_2) = a\xi_1 + b\xi_2$, здесь $n > 1$ — натуральное число, a и b — вещественные числа. Отметим, что теорема 1.2.9 не применима к этому набору наследников напрямую. Однако если сделать замену переменных на торе $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$, то пространство функций C^P перейдет в пространство функций, порожденных полиномами $Q_1(\xi_1,\xi_2) = \xi_1^n$, $Q_2(\xi_1,\xi_2) = \frac{a+b}{2}\xi_1 + \frac{a-b}{2}\xi_2$. В случае $a \neq b$ к этому набору можно применить теорему 1.2.9, пространство C^P в этом случае не вкладывается дополняемо в пространство типа $C(K)$, в случае же $a = b$ имеет место очевидный изоморфизм.

Опишем естественную процедуру уменьшения числа переменных, которая позволяет доказать недополняемость в пространстве $C(K)$ в некоторых новых ситуациях. Рассмотрим индекс $j \in \{1, \dots, d+1\}$. Пусть k — целое число. Рассмотрим подпространство $Y_{j,k}$ пространства $C^P(\mathbb{T}^{d+1})$, состоящее из функций вида $f(z_{\{j\}})z_j^k$, где f есть функция на торе $\mathbb{T}^d$. Как обычно, символом $z_{\{j\}}$ обозначена точка

$$(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_{d+1}) \in \mathbb{T}^d.$$

Мы утверждаем, что подпространство $Y_{j,k}$ дополняемо в пространстве $C^P(\mathbb{T}^{d+1})$. Действительно, определим проекцию формулой

$$(Pg)(z_{\{j\}}, z_j) = (2\pi)^{-1} \left(\int_{\mathbb{T}} g(z_{\{j\}}, \zeta)\zeta^{-k} d\zeta \right) z_j^k.$$

Проектор P ограничен как оператор на пространстве $C(\mathbb{T}^{d+1})$, он коммутирует с дифференцированиями, его образ как оператора на пространстве $C^P(\mathbb{T}^{d+1})$ есть пространство $Y_{j,k}$.

Изучим теперь действие дифференцирований на пространстве $Y_{j,k}$. Пусть $\prod_{m=1}^{d+1} \partial_m^{s_m}$ есть дифференциальный моном. Его применение к функции вида $f(z_{\{j\}})z_j^k$ дает $(2\pi i k)^{s_j} \left(\prod_{m\neq j} \partial_m^{s_m}\right) f(\cdot) \times z_j^k$. Таким образом, пространство $Y_{j,k}$ изоморфно пространству $C^{P_1}(\mathbb{T}^d)$ для некоторого набора P_1 полиномов, зависящих от d переменных. Этот набор будет называться прямым наследником набора P. Стоит различать два случая. В случае $k = 0$, набор P_1 получается удалением из многочленов набора P всех членов, которые делятся на x_j. В таком случае, назовем получившийся набор прямым наследником первого типа. Если $k \neq 0$, то надо все члены x_j заменить на ненулевую константу. В таком случае, набор P_1 называется прямым наследником второго типа. Естественно, наследником набора P мы называем любой набор Q многочленов меньшего числа переменных, полученный последовательным переходом к прямому наследнику (по разным переменным). Наследником первого типа набора полиномов P назовем набор, получающийся из набора P последовательным переходом к наследнику первого типа (по разным переменным). Если какой-то из наследников набора P приведет нас к пространству гладких функций, второе сопряженное которого не есть $\mathcal{L}_\infty$-пространство, то и само пространство $C^P(\mathbb{T}^{d+1})$ не есть $\mathcal{L}_\infty$-пространство (потому что мы постоянно переходили к дополняемому подпространству, см. теорему 1.4.17).

Перейдем к примерам. Рассмотрим набор A_1, состоящий из трех полиномов от трех переменных: ξ_1, ξ_2 и $\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3$. Нетрудно видеть, что любая допустимая для этого набора гиперплоскость проходит лишь через степени, принадлежащие третьему моному. Таким образом, теорема 1.2.9 не применима к этому набору напрямую. Однако набор $B_1 = \{\xi_1, \xi_2\}$ является прямым наследником первого типа набора A_1, а к нему эта теорема применима. Следовательно, пространство $C^{A_1}(\mathbb{T}^3)$ не есть $\mathcal{L}_\infty$-пространство.

Интересно, что в этом случае рассмотрение прямых наследников второго типа (они имеют вид $\{\xi_1, \xi_2, C(\xi_1 + \xi_2)\}$) приводит к тем же заключениям. Этот эффект исчезает для набора полиномов $A_2 = \{\xi_1, \xi_2, \xi_1^2\xi_3 + \xi_2^2\xi_3\}$. По-прежнему, набор B_1, являющийся прямым наследником первого типа по третьей переменной, допускает применение теоремы 1.2.9, в то время как для наследников второго типа эту теорему применить нельзя (и нетрудно видеть, что наследники второго типа соответствуют пространствам, изоморфноым пространству $C(\mathbb{T}^2)$, это последует из теоремы 3.3.9).

Приведем пример противоположного характера. Рассмотрим набор $A_3 = \{\xi_1 \ldots \xi_{d+1}, \xi_{d+1}^2(\xi_1^d + \ldots + \xi_d^d)\}$, состоящий из двух полиномов от $d+1$ переменной ($d \geqslant 1$). Покажем, что для всякой допустимой гиперплоскости $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{d+1} x_{d+1} = 1$ (числа α_j положительны), проходящей через точку $(1, \ldots, 1)$, некоторые из степеней второго многочлена лежат над ней, то есть, гиперплоскость отделяет эти степени от нуля. Действительно, в противном случае имеем

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{d+1} = 1 \tag{3.2.1}$$

и $d\alpha_j + 2\alpha_{d+1} \leqslant 1$ при $1 \leqslant j \leqslant d$. Складывая эти неравенства при всех j, получаем, что $d(\alpha_1 + \ldots + \alpha_d) + 2d\alpha_{d+1} \leqslant d$. Используя равенство (3.2.1), приходим к неравенству $1 + \alpha_{d+1} \leqslant 1$, противоречие.

Таким образом, теорему 1.2.9 опять применить нельзя. Любой прямой наследник первого типа для набора A_3 состоит из не более чем одного оператора, и к нему теорему 1.2.9 опять применить нельзя. Однако, ее можно применить к прямому наследнику второго типа, а именно, к набору $B_3 = \{c_1\xi_1 \ldots \xi_d, C_2(\xi_1^d + \ldots + \xi_d^d)\}$ от d переменных (точка $(1, \ldots, 1)$ лежит на гиперплоскости в $\mathbb{R}^d$, проходящей через точки $de_1, \ldots, de_d$, где символом e_j обозначен j-й координатный вектор).

Любопытно, что в случае $d > 2$ теорему 1.2.9 уже нельзя применить ни к какому наследнику второго типа набора B_3, а также ни к какому из младших наследников (и ни к какому наследнику первого типа, потому что все они по-прежнему состоят из единственного оператора каждый): в размерности $d - 1$ точка $(1, \ldots, 1)$ лежит строго под плоскостью, проходящей через точки $de_1, \ldots, de_{d-1}$. Таким образом, предложенная процедура позволяет снижать размерность, но не всегда именно до двух.

3.3. Эллиптический случай

3.3.1. Теорема о многочлене

Для доказательства теоремы, дающей изоморфизм пространств $C^P(\mathbb{T}^d)$ и $C(\mathbb{T}^d)$ (теорема 3.3.9 следующего пункта), нам понадобится изучить поведение на бесконечности одного класса многочленов. Пусть P и Q — два многочлена в $\mathbb{R}^d$. Будем писать $|Q| \ll |P|$, если для некоторого положительного числа δ существует число $N \in \mathbb{N}$, такое что неравенство $|Q(x)| \lesssim |x|^{-\delta}|P(x)|$ выполнено при всех $x \in \mathbb{R}^d$, таких что $|x| \geqslant N$ и все координаты вектора x по модулю не меньше единицы (в дальнейшем множество точек пространства $\mathbb{R}^d$, каждая координата которых по модулю не менее единицы, будем обозначать символом $\mathbb{R}^d_{++}$). В этом пункте мы хотим найти условия, достаточные для неравенств типа $|Q| \ll |P|$. Однако прежде мы изучим чуть более простой вопрос — когда многочлен P доминирует каждый свой моном. В случае, когда переменные пробегают *все* вещественные числа, ответ дается теоремой 1.4.9. В случае, когда допускаются лишь целые ненулевые значения переменных (или, что почти то же самое, вещественные числа, по модулю не меньшие единицы), ответ похож, но детали несколько другие. Строгим рассуждениям мы предпошлем эвристику, которая пояснит их.

Пусть P — полином в пространстве $\mathbb{R}^d$, а F — грань его многогранника Ньютона. Напомним (см. определение 1.4.7), что ограничением многочлена P на грань F называется многочлен P_F, состоящий из тех мономов многочлена P, индексы которых принадлежат грани F.

Пусть F есть $(d-1)$-мерная грань многогранника $\mathcal{N}(P)$ (предположим пока, что такие грани вообще есть). Предположим также, что содержащая грань F гиперплоскость неотрицательна (см. определение 1.2.6, для простоты в дальнейшем будем в таком случае писать, что грань F неотрицательна). Пусть эта гиперплоскость задана уравнением $\langle k, f\rangle = 1$, f — вектор с неотрицательными координатами в $\mathbb{R}^d$ (геометрически вектор f есть нормаль к грани F). В таком случае, многочлен P_F анизотропно однороден:

$$P_F(\lambda^{f_1}x_1, \lambda^{f_2}x_2, \ldots, \lambda^{f_d}x_d) = \lambda P_F(x) \tag{3.3.1}$$

(символами f_j мы обозначили координаты вектора f). Предположим, что полином P_F не имеет вещественных корней, кроме нуля. В таком случае, формула (3.3.1) влечет неравенство $|x|^k \lesssim |P_F(x)|$ для всякой степени $k \in \mathbb{Z}^d_+$, лежащей в одной гиперплоскости с F, при всех $x \in \mathbb{R}^d$. То есть, достаточным (и в данном случае необходимым) условием того, что P_F мажорирует все свои мономы, является его *эллиптичность* (см. определение 2.1.3).

Как мы установили, эллиптический анизотропно однородный полином мажорирует все свои мономы. Однако нас интересуют произвольные полиномы. Пусть F — грань многогранника $\mathcal{N}(P)$ произвольной размерности. Символом $n(F)$ обозначим множество внешних единичных нормалей к грани F. Набор множеств $\{n(F)\}_F$ можно естественным образом отождествить с набором граней двойственного с $\mathcal{N}(P)$ многогранника (двойственность задается полярным соответствием). При таком отождествлении множество $n(F)$ сопоставляется грани размерности $d-1-\dim F$, а отношения принадлежности граней "разворачиваются": если $F \subset \tilde{F}$, то $n(\tilde{F}) \subset n(F)$ и такое же включение выполнено для соответственных граней двойственного многогранника. Рассмотрим теперь пересечение множеств $n(F)$ с "первым квадрантом", то есть, множеством $\mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall j\ x_j \geqslant 0\}$.

Определение 3.3.1. Будем говорить, что грань F многогранника $\mathcal{N}(P)$ неотрицательна, если множество $n(F) \cap \mathbb{R}^d_+$ непусто.

Определение 3.3.2. Многочлен P назовем невырожденным, если для всякой неотрицательной грани F многочлен P_F не имеет вещественных корней вне координатных плоскостей.

Отметим, что даже для анизотропно однородного многочлена условие невырожденности слабее условия эллиптичности (потому что невырожденный многочлен может иметь корни на координатных плоскостях). Например, многочлен R, заданный по правилу $R(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)$, невырожден, но не эллиптичен.

Теорема 3.3.3. *Для всякого невырожденного многочлена P существует число $N \in \mathbb{N}$, такое что неравенство*

$$|x^k| \lesssim |P(x)|, \quad k \in \mathcal{N}(P), \quad x \in \mathbb{R}^d_{++},$$

выполнено при $|x| \geqslant N$.

Определение 3.3.4. Солидной оболочкой выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^d_+$ назовем наименьшее множество K_+, такое что если $\beta \preceq \alpha$ и $\alpha \in K$, то $\beta \in K_+$ (порядок тот же, что и в определении 1.4.33).

Следствие 3.3.5. *Пусть многочлен P невырожден, а $k \in \operatorname{int} \mathcal{N}_+(P)$ (внутренность берется относительно топологии пространства $\mathbb{R}^d_+$). Тогда $|x|^k \ll |P(x)|$.*

Доказательство. Отметим, что если утверждение теоремы 3.3.3 верно, то аналогичное неравенство выполнено и для нецелых "степеней" k, т.е. для всякого вектора $k \in \mathcal{N}(P)$ неравенство

$$|x^k| \lesssim |P(x)|, \quad \text{где } x \in \mathbb{R}^d_{++},$$

выполнено при достаточно больших x. Например, это следует из того, что k есть конечная выпуклая комбинация вершин многогранника $\mathcal{N}(P)$. Чтобы доказать следствие, остается заметить, что если степень k лежит во внутренности множества $\mathcal{N}_+(P)$, то для малого числа δ точка $k + \delta(1, 1, \ldots, 1)$ тоже там лежит. Это значит, что существует точка $l \in \mathcal{N}(P)$, такая что $k + \delta(1, 1, \ldots, 1) \preceq l$. Применяя теорему 3.3.3 к точке l, получаем следствие. $\square$

В качестве примера приведем полином R, заданный формулой

$$R(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^4\xi_2^5 + i\xi_1^7\xi_2^5 + \xi_1^8\xi_2^4 + i\xi_1^9\xi_2^2 + \xi_1^9 + \xi_1^4 + \xi_1^2\xi_2^4.$$

На рисунке 3.1 изображен многогранник Ньютона полинома R (он закрашен более темным серым), его солидная оболочка (закрашена светло серым цветом), а также две его положительные грани размерности 1 (это два жирных ребра) и две неотрицатльные грани размерности 1, которые при этом не являются положительными (они нарисованы жирным курсивом). Нетрудно видеть, что полином R невырожден. Мономы, соответствующие точкам B и C,

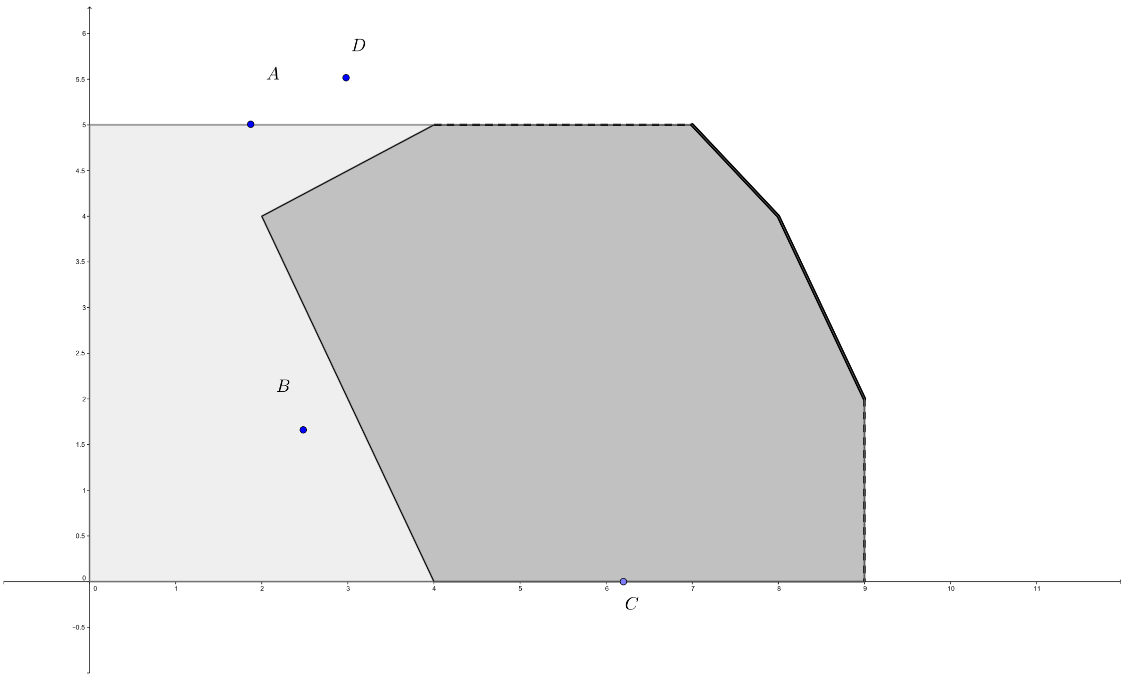

Рис. 3.1. Иллюстрация примера к следствию 3.3.5.

подчинены ему в том смысле, что их степени лежат во внутренности множества $\mathcal{N}_+(R)$ (в относительной топологии), а мономы, соответствующие точкам A и D — нет (и нетрудно видеть, что для них заключение следствия 3.3.5 неверно).

Доказательству теоремы 3.3.3 предпошлем некоторые простые рассуждения. Нам будет удобно работать в логарифмической шкале. Если $x \in \mathbb{R}^d_{++}$, то символом $\overrightarrow{\ln}|x|$ мы будем обозначать вектор $(\ln|x_1|, \ln|x_2|, \ldots, \ln|x_d|) \in \mathbb{R}^d_+$. Покроем множество точек пространства $\mathbb{R}^d_{++}$ множествами L_F, где F пробегает множество неотрицательных граней многогранника $\mathcal{N}(P)$, определенными по правилу

$$L_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^d_{++} \,\Big|\, \frac{\overrightarrow{\ln}|x|}{|\overrightarrow{\ln}|x||} \in n(F) \right\}, \quad |\overrightarrow{\ln}|x|| = \Big(\sum_{j=1}^{d} \ln^2|x_j| \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Например, в случае многочлена R из прошлого абзаца таких множеств формально будет 9, пять из них соответствуют неотрицательным вершинам, четыре — неотрицательным ребрам. На самом деле, в этом примере образ множества L_F в логарифмических координатах для неотрицательной грани F — это просто луч угла $\mathbb{R}^2_+$, то есть, по сути множеств 7, четыре луча: $\mathbb{R}_+ \cdot (0,1)$, $\mathbb{R}_+ \cdot (1,1)$, $\mathbb{R}_+ \cdot (2,1)$ и $\mathbb{R}_+ \cdot (1,0)$; а также три конуса, на которые эти лучи делят первый квадрант.

Как обычно, символ $(L_F)_\delta$ обозначает δ-окрестность множества L_F, только в логарифмических координатах:

$$(L_F)_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d_{++} \mid \operatorname{dist}(\overrightarrow{\ln}|x|, L_F) < \delta\}.$$

Лемма 3.3.6. *Для всякого положительного числа δ и всякой степени $k \in \mathcal{N}(P)$ выполнено неравенство*

$$|x^k| \lesssim |P_F(x)|, \quad x \in (L_F)_\delta,$$

если полином P невырожден, а F есть неотрицательная грань многогранника $\mathcal{N}(P)$.

Доказательство. Начнем доказательство со случая $k \in F$, $x \in L_F$. Отметим, что неравенство $|x^k| \lesssim |P_F(x)|$ инвариантно относительно сдвига точки $\overrightarrow{\ln}|x|$ на векторы из множества $n(F)$, потому что при таком сдвиге правая и левая части неравенства умножаются на одну и ту же константу (тому подтверждением формула (3.3.1)). Согласно определению, принадлежность точки $\overrightarrow{\ln}|x|$ множеству L_F означает, что, сдвигая точку $\overrightarrow{\ln}|x|$ на вектор из множества $n(F)$, можно достичь начала координат. Но в начале координат неравенство $|x^k| \lesssim |P_F(x)|$, очевидно, имеет место (так как логарифмическое начало координат соответствует конечному множеству точек — тем, координаты которых равны ± 1). Заменить условие $x \in L_F$ на условие $\operatorname{dist}(\ln|x|, L_F) < \delta$ нетрудно: если рядом с точкой x есть точка из множества L_F, то точку x

можно сдвинуть в δ-окрестность начала координат (в логарифмических координатах), а на такой окрестности неравенство выполнено (так как в обычных координатах ему соответствует ограниченное множество, отделенное от координатных плоскостей; на таком множестве полином P_F равномерно ограничен снизу). Таким образом, случай $k \in F$ полностью разобран.

Если же $k \notin F$, то, учитывая разобраный случай, достаточно показать, что на множестве $(L_F)_\delta$ имеет место неравенство $|x^k| \lesssim |x^l|$ для некоторой степени $l \in F$. Это следует из того, что

$$\langle \overrightarrow{\ln}|x|, k - l\rangle < \delta|k - l| \lesssim 1, \quad x \in (L_F)_\delta,$$

потому что если $y \in L_F$, то $\langle \overrightarrow{\ln}|y|, k - l\rangle \leqslant 0$. □

Лемма 3.3.7. *Пусть полином P невырожден, а F — неотрицательная грань его многогранника Ньютона. Для любых двух положительных чисел N и ε найдется число $M > 0$, такое что неравенство*

$$|P(x) - P_F(x)| \leqslant \varepsilon|P_F(x)|, \quad x \in (L_F)_N \setminus (\cup_{F\subset F_j} L_{F_j})_M$$

выполнено при достаточно большом $|x|$ (символом F_j мы обозначили произвольную неотрицательную грань многогранника $\mathcal{N}(P)$, которая содержит грань F).

В этой лемме, по аналогии с обозначением $(L_F)_\delta$, символом $(\cup_{F\subset F_j} L_{F_j})_M$ обозначена M-окрестность множества $\cup_{F\subset F_j} L_{F_j}$ в логарифмических координатах.

Доказательство. Зафиксируем число N. Благодаря лемме 3.3.6, достаточно доказать, что для всякого числа ε существует число M, такое что неравенство $|x^l| \leqslant \varepsilon|x^k|$, $k \in F$, $l \notin F$, выполнено для всех достаточно больших по модулю векторов x из множества $(L_F)_N \setminus (\cup_{F\subset F_j} L_{F_j})_M$. Опять же, переходя к логарифмической шкале, его можно переписать в виде

$$\langle \overrightarrow{\ln}|x|, l-k\rangle \leqslant \ln\varepsilon.$$

Если точка l не лежит ни в какой неотрицательной грани F_j, содержащей грань F, то выражение слева равномерно линейно убывает по $\ln|x|$ на множестве L_F, стало быть, при достаточно большом $|x|$ станет меньше $-N|k-l|+\ln\varepsilon$. Пусть $l\in F_j$ при некотором фиксированном j. Можем считать, что F_j есть грань наименьшей размерности, содержащая точку l и грань F одновременно. В таком случае, существует последовательность $\{F'_s\}_{s=0}^{i}$ неотрицательных граней многогранника $\mathcal{N}(P)$, такая что $F'_0=F$, $\dim F'_s-\dim F'_{s-1}=1$, $F'_{s-1}\subset F'_s$ при $s=1,2,\ldots,i$, и $F'_i=F_j$. Пусть векторы e_s, $s\in[1..i]$, таковы, что $e_0=k$, $\sum_{s=1}^{i}e_s=k-l$, грань F'_{s+1} лежит в аффинной оболочке грани F'_s и векторов $\sum_{t=0}^{s+1}e_t$, $s>0$, и для всякого $s>0$ имеет место неравенство $\langle p,e_s\rangle\leqslant 0$, $p\in n(F)$ (такие последовательности граней F'_s и векторов e_s легко найти, если записать точку l как выпуклую комбинацию вершин грани F_j).

По определению, существует точка p, такая что $\frac{p}{|p|}\in n(F)$ и $|p-\overrightarrow{\ln}|x||<N$. В частности, это означает, что $\langle p,l-k\rangle\leqslant 0$. Если $\langle p,l-k\rangle<-N|l-k|+\ln\varepsilon$, то и доказывать нечего, поэтому предположим, что это не так. Тогда, в частности, $|\langle p,e_s\rangle|\leqslant N|l-k|+|\ln\varepsilon|$ для всякого $s>0$, так как все скалярные произведения $\langle p,e_s\rangle$ неположительны. Это значит, что

$$|p-\pi_{F_j^{\perp}}p|\lesssim N|l-k|+|\ln\varepsilon|,$$

следовательно, $x\in(L_{F_j})_{C(l,k)(N(|l-k|+1)+|\ln\varepsilon|)}$. Стало быть, можно взять $M=C(N(|l-k|+1)+|\ln\varepsilon|)$, где константа C собирает в себя всевозможные константы $C(k,l)$. $\square$

Доказательство теоремы 3.3.3. Пусть $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Применяя лемму 3.3.7 ко всем неотрицательным граням многогранника $\mathcal{N}(P)$ размерности $d-1$ (в данном случае число M не нужно, так как мы берем грани максимальной размерности), получаем, что

$$|P(x) - P_F(x)| \leqslant \frac{1}{2}|P_F(x)|, \quad x \in (L_F)_{N_1},$$

при достаточно больших x, откуда, используя лемму 3.3.6, получаем неравенство

$$|x|^k \lesssim |P(x)|$$

на множестве $(L_F)_{N_1}$ для всякого N_1 при достаточно больших x. Пусть теперь F — любая грань размерности $d-2$, а N_2 — любое положительное число. Выбрав число N_1 достаточно большим и взяв его в качестве числа M в лемме 3.3.7, мы получим неравенство

$$|P(x) - P_F(x)| \leqslant \frac{1}{2}|P_F(x)|, \quad x \in (L_F)_{N_2} \setminus (\cup_{F \subset F_j} L_{F_j})_{N_1},$$

при достаточно больших x, откуда по лемме 3.3.6 следует неравенство

$$|x|^k \lesssim |P(x)|$$

на множестве $(L_F)_{N_2}$ для всякого N_2 (потому что на выкидываемом множестве $(\cup_{F \subset F_j} L_{F_j})_{N_1}$ мы его уже имеем), опять же, при достаточно больших x. Применяя аналогичным образом леммы 3.3.7 и 3.3.6 по очереди к граням меньших размерностей, мы получим, что искомое неравенство выполнено на всем множестве $\mathbb{R}^d_{++}$ (так как множества L_F его полностью покрывают). □

3.3.2. Теорема об изоморфизме

Пусть P — набор полиномов. Что можно о нем сказать, если к нему напрямую неприменима теорема 1.2.9? Это значит, что если F — положительная грань многогранника $\mathcal{N}(P)$, то все многочлены $(P_j)_F$, $j \in [1..\ell]$, пропорциональны какому-то одному, скажем, $(P_1)_F$, т.е.

$$(P_j)_F = \alpha_j(F)(P_1)_F, \quad j = 2, 3 \ldots, \ell. \tag{3.3.2}$$

Покажем, что в таком случае коэффициенты α_j не зависят от грани F (то есть, такое же соотношение можно написать и для всякой другой положительной грани). Пусть две грани F_1 и F_2 имеют общую вершину p. В таком случае, соотношение (3.3.2) выполнено для мономов степени p как с коэффициентами $\alpha_j(F_1)$, так и с коэффициентами $\alpha_j(F_2)$. Следовательно, эти наборы коэффициентов равны, так как $(P_1)_p \neq 0$ (иначе $(P_j)_p = 0$ для всех j и точка p не является вершиной многогранника $\mathcal{N}(P)$). Таким образом, надо показать, что множество положительных граней связно в следующем смысле: от одной грани можно пройти до другой, на каждом шаге переходя к грани, смежной с данной по вершине; нетрудно видеть, что вершину можно заменить на любую грань меньшей размерности (так как если две грани максимальной размерности смежны по какой-то грани меньшей размерности, то они смежны и по вершине). На языке двойственного многогранника (см. определение в начале пункта 3.3.1) задача звучит так: "множество граней, пересекающихся с множеством $\mathbb{R}^d_+$, связно в том смысле, что от одной грани можно переходить к другой, если они обе лежат внутри какой-то одной грани". Решение таково: пусть F_1 и F_2 — две грани двойственного многогранника, $x_1 \in F_1 \cap \mathbb{R}^d_+$, $x_2 \in F_2 \cap \mathbb{R}^d_+$, проведем двумерную плоскость через точки x_1, x_2 и начало координат; сечение двойственного многогранника этой плоскостью будет выпуклым многоугольником, причем по его границе можно пройти от точки x_1 до точки x_2, не покидая множества $\mathbb{R}^d_+$; проходя по границе многоугольника, мы будем посещать различные грани двойственного многогранника (мы учитываем их все), нетрудно видеть, что переход от одной грани к другой при таком проходе будет удовлетворять требованиям задачи.

Таким образом, коэффициенты α_j в соотношении (3.3.2) не зависят от положительной грани F. Рассмотрим набор $\tilde{P} = (P_1, P_2 - \alpha_2 P_1, P_3 - \alpha_3 P_1, \ldots, P_\ell - \alpha_\ell P_1)$, как уже было отмечено, $C^P \cong C^{\tilde{P}}$. Его можно характеризовать следующим образом: на всех положительных гранях многогранника $\mathcal{N}(\tilde{P})$ присутствуют лишь мономы первого полинома. Оказывается, что если потребовать невырожденность первого полинома, а также чуть более сильные условия на конфигурацию (чтобы “младшие многочлены” не залезали не только на положительные, но и на неотрицательные грани), то полученное пространство будет изоморфно пространству $C(K)$.

Определение 3.3.8. Набор $P = \{P_j\}_{j\in[1..\ell]}$ полиномов в пространстве $\mathbb{R}^d$ назовем невырожденным, если существует линейный изоморфизм $T : \mathbb{C}^\ell \to \mathbb{C}^\ell$, для которого набор $\tilde{P}$, заданный по правилу

$$\tilde{P}_i = \sum_{j=1}^{\ell} T_{ij} P_j, \quad i \in [1..\ell],$$

таков, что характеристический многочлен $\tilde{P}_1^\Delta$ дифференциального полинома $\tilde{P}_1(\partial)$ невырожден в смысле определения 3.3.2 и для всякого полинома $\tilde{P}_j$, $j = 2, 3, \ldots, \ell$, имеет место включение $\mathcal{N}(\tilde{P}_j) \subset \operatorname{int}\mathcal{N}_+(\tilde{P}_1)$ (см. определение 3.3.4).

Теорема 3.3.9. *Пусть набор полиномов P и все его наследники первого типа (см. параграф 3.2) невырождены. Тогда $C^P(\mathbb{T}^d) \cong C(\mathbb{T}^d)$.*

Используя пример многочлена A_2 из предыдущего пункта, можно показать, что накладывать условия на наследники набора необходимо. Доказательству теоремы предпошлем лемму о мультипликаторе Фурье, которая есть простое следствие результатов предыдущего пункта.

Лемма 3.3.10. *Пусть полином P невырожден, а полином Q ему подчинен в том смысле, что $\mathcal{N}(Q) \subset \operatorname{int}\mathcal{N}_+(P)$. В таком случае, мультипликатор Фурье с символом*

$$\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}, \quad P(\xi) \neq 0, \xi \in \mathbb{Z}_0^d; \quad 0, \quad P(\xi) = 0 \text{ или } \xi \notin \mathbb{Z}_0^d,$$

непрерывно действует на пространстве $L_1(\mathbb{T}^d)$.

Доказательство. Пусть функция $\eta \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ имеет носитель в отрезке $(-1, 1)$ и равна единице на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, а функция $\Phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ равна единице на кубе $[-N, N]^d$, где число N таково, что при $|x| > N$ многочлен P не имеет корней (кроме тех, у которых какая-то координата не превосходит $\frac{1}{2}$), такое число существует по теореме 3.3.3. Покажем, что мультипликатор Фурье с символом Ψ,

$$\Psi(\xi) = \frac{Q(\xi)(1 - \Phi(\xi))}{P(\xi)} \prod_{j=1}^{d} (1 - \eta(\xi_j)),$$

действует на пространстве $L_1(\mathbb{R}^d)$. Проверим, что он удовлетворяет условиям теоремы 1.4.38. Для этого поймем, как действуют дифференцирования на функцию Ψ (мы применяем правило дифференцирования произведения и изучаем каждое слагаемое, большая часть слагаемых вклада не вносит). Если мы дифференцируем множитель $(1 - \Phi(\xi))$, то получившееся выражение равно нулю при достаточно большом ξ, стало быть, на условия теоремы 1.4.38 слагаемые, в которых есть производная $(1 - \Phi)$, не влияют. В частности,

$$\partial^\alpha[\Psi] = \sum_{I \cup J = \alpha} C_{|\alpha|}^{|I|} (1 - \Phi) \partial^I \Big[\frac{Q}{P}\Big] \partial^J \Big[\prod_{j=1}^{d} (1 - \eta(\cdot_j))\Big] + o(e^{-|\cdot|}).$$

Нетрудно видеть, что производная $\partial^I \big[\frac{Q}{P}\big]$ есть выражение вида $\frac{Q_I}{P^{|I|}}$, где

$$\mathcal{N}(Q_I) \subset (|I| - 1)\,\mathcal{N}_+(P) + \mathcal{N}(Q) \subset \operatorname{int} |I|\,\mathcal{N}_+(P).$$

То есть, многочлены Q_I и $P^{|I|}$ удовлетворяют условию следствия 3.3.5, стало быть, $|Q_I| \ll P^{|I|}$, то есть, оба условия теоремы 1.4.38 выполнены, так как при $|\xi| < \frac{1}{2}$ функция Ψ равна нулю.

Утверждение леммы следует из того, что функция Ψ есть мультипликатор на пространстве $L_1(\mathbb{R}^d)$ и теоремы 1.4.39. □

Доказательство теоремы 3.3.9. Множество $\mathbb{Z}^d$ можно представить в виде дизъюнктного объединения множеств, у которых зануляется определенный набор координат (например, множество точек, у которых ни одна координата не зануляется, множество точек, у которых зануляется вторая, третья и девятая координаты, и т.п.). Такое разбиение индуцирует разложение пространства $C^P(\mathbb{T}^d)$ в прямую сумму

$$C^P(\mathbb{T}^d) = \bigoplus_{0\leqslant\tilde{d}\leqslant d} \bigoplus_{\tilde{P}_{\tilde{d}}} {}_0C^{\tilde{P}_{\tilde{d}}}(\mathbb{T}^{\tilde{d}}),$$

во внутреннюю прямую сумму входят все наследники набора P первого типа уровня $\tilde{d}$ (то есть, полученные забыванием каких-то $d-\tilde{d}$ координат). Достаточно показать, что для всякого наследника $\tilde{P}$ имеет место изоморфизм ${}_0C^{\tilde{P}}(\mathbb{T}^{\tilde{d}}) \cong C(K)$. Так как в теореме условие накладывается на все наследники набора P, достаточно проверить, что ${}_0C^P(\mathbb{T}^d) \cong C(\mathbb{T}^d)$. Так как применение линейного биективного отображения к набору полиномов не меняет соответствующее пространство функций, мы можем считать, что линейный изоморфизм (не путать с изоморфизмом банаховых пространств) из определения 3.3.8 уже применен к набору P (то есть, многочлен P_1 старший, а остальные ему подчинены в смысле определения 3.3.8). Рассмотрим оператор $\mathcal{M}_{P_1^\Delta}$ как оператор из пространства ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ в пространство ${}_0C(\mathbb{T}^d)$. Этот оператор, если сузить его на подпространство конечной коразмерности, осуществляет изоморфизм на образ, который является подпространством конечной коразмерности в пространстве ${}_0C(\mathbb{T}^d)$. Действительно, непрерывность и обратимость с образа описанного оператора задается эквивалентностью

$$\|P_1(\partial)f\|_{{}_0C(\mathbb{T}^d)} \asymp \sum_{j=1}^{\ell} \|P_j(\partial)f\|_{{}_0C(\mathbb{T}^d)}.$$

По лемме 3.3.10, это соотношение верно, если функция f не имеет спектра в корнях многочлена P_1^Δ (которых в множестве $\mathbb{Z}_+^d$ конечное число, по теореме 3.3.3). Таким образом, мы установили, что имеет место изоморфизм между подпространствами конечной коразмерности пространств ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$

и ${}_0C(\mathbb{T}^d)$. Из общих соображений про пространства типа $C(K)$ следует, что пространство ${}_0C^P(\mathbb{T}^d)$ изоморфно пространству типа $C(K)$. Изложим их подробно. Имеет место изоморфизм ${}_0C(\mathbb{T}^d) \cong C(K)$: во-первых, пространство ${}_0C(\mathbb{T}^d)$ вкладывается дополняемо в пространство $C(\mathbb{T}^d)$, во-вторых пространство ${}_0C(\mathbb{T}) \cong C(\mathbb{T})$ вкладывается в ${}_0C(\mathbb{T}^d)$ дополняемо; изоморфизм теперь следует из теоремы 1.4.13 (которая дает $C(\mathbb{T}) \cong C(\mathbb{T}^d)$) и теоремы 1.4.15. Таким образом, пространство ${}_0C(\mathbb{T}^d)$ изоморфно любому своему подпространству конечной коразмерности (по теореме 1.4.14), то есть,

$${}_0C^P(\mathbb{T}^d) \cong C(K) \oplus E, \quad \dim E < \infty,$$

но последнее пространство очевидным образом изоморфно пространству $C(\tilde{K})$, где $\tilde{K}$ есть дизъюнктное объединение компакта K и $\dim E$ точек. $\square$

Глава 4

Размерность мер, подчиненных дифференциальным условиям

4.1. Утверждение о размерности

4.1.1. Усиление леммы Фростмана

Лемма 4.1.1. *Пусть* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *— неотрицательная гладкая функция с носителем в единичном шаре, зависящая только от евклидовой нормы аргумента и убывающая при его увеличении, такая что* $\varphi(x) = 1$ *при* $|x| \leqslant \frac{3}{4}$. *Если борелевская комплекснозначная мера* μ *такова, что для некоторых параметров* α *и* β *для любого набора* $B_{r_j}(x_j)$ *евклидовых шаров* d*-мерного пространства, такого что шары* $B_{r_j}(x_j)$ *попарно не пересекаются, имеет место равномерная по набору шаров оценка*

$$\sum_j \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{r_j}(x_j + y)\, d\mu(y) \Big| \lesssim \big(\sum r_j^\alpha \big)^\beta, \tag{4.1.1}$$

то $\dim \mu \geqslant \alpha$.

Символом φ_λ здесь обозначена функция $\varphi(\lambda^{-1}\cdot)$. Отличие нашей леммы от леммы 1.4.1 состоит в том, что наша версия позволяет работать с знакопеременными (или даже комплекснозначными) мерами. Кроме того, условие (4.1.1) сложнее условия (1.4.1), оно нелокально (и, безусловно, следует из условия (1.4.1) в случае неотрицательной меры, с параметром $\beta = 1$). Отметим также, что заключение леммы не зависит от параметра β (важно лишь, что этот параметр положителен).

Доказательству леммы 4.1.1 предпошлем подготовительные рассуждения. Во-первых, имеет место очевидное равенство

$$\dim \mu = \min(\dim \Re\mu, \dim \Im\mu).$$

Таким образом, достаточно доказать лемму 4.1.1 для вещественнозначных мер.

Во-вторых, нам понадобится более слабая версия теоремы Лебега о точках плотности (которая неверна для произвольной меры).

Лемма 4.1.2. *Пусть μ — вещественнозначная борелевская мера с ограниченной вариацией на пространстве $\mathbb{R}^d$, пусть A_+ и A_- — множества ее разложения Хана, пусть μ_+ — положительная часть меры μ. Рассмотрим множество*

$$P_+ = \Big\{x \in A_+ \,\Big|\, \exists\, \delta(x), \quad \text{\textit{такое что}} \quad \forall r < \delta(x) \quad \mu_+\big(B_r(x)\big) \leqslant 10\mu\big(B_r(x)\big)\Big\}. \tag{4.1.2}$$

Тогда $\mu(P_+) = \mu(A_+)$.

Доказательство. Символом Q_+ обозначим множество $A_+ \setminus P_+$, мы хотим показать, что $\mu_+(Q_+) = 0$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Символом U_ε обозначим открытое множество, такое что $A_+ \subset U_\varepsilon$ и $\mu_-(U_\varepsilon) < \varepsilon$. Для каждой точки x в множестве Q_+ найдется последовательность чисел r_k, $r_k \to 0$, такая что $\mu_+(B_{r_k}(x)) \geqslant 10\mu(B_{r_k}(x))$ и $B_{r_k}(x) \subset U_\varepsilon$. Таким образом, согласно теореме 1.4.2[1], найдется дизъюнктный набор шаров $B_{r_j}(x_j)$, такой что $\mu_+(Q_+ \setminus \cup_j B_{r_j}(x_j)) = 0$. Поэтому, $\mu_+(\cup_j B_{r_j}(x_j)) \geqslant \mu_+(Q_+)$. С другой

[1] В применении этой теоремы скрыта некоторая тонкость: дело в том, что в условии теоремы шары замкнуты, а мы обычно работаем с открытыми шарами. Дело в том, что, благодаря регулярности меры μ, неважно, открытые или замкнутые шары брать при определении множества P_+.

стороны, $\bigl|\mu_-(\cup_j B_{r_j}(x_j))\bigr| \leqslant \bigl|\mu_-(U_\varepsilon)\bigr| < \varepsilon$. Запишем

$$\mu_+\bigl(\cup_j B_{r_j}(x_j)\bigr) = \sum_j \mu_+\bigl(B_{r_j}(x_j)\bigr) \geqslant 10\sum_j \mu\bigl(B_{r_j}(x_j)\bigr) =$$

$$10\sum_j \mu_+\bigl(B_{r_j}(x_j)\bigr) + 10\sum_j \mu_-\bigl(B_{r_j}(x_j)\bigr) \geqslant 10\mu_+\bigl(\cup_j B_{r_j}(x_j)\bigr) - 10\varepsilon.$$

Следовательно, $9\mu_+(\cup_j B_{r_j}(x_j)) \leqslant 10\varepsilon$, то есть, $9\mu_+(Q_+) \leqslant 10\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем, что $\mu_+(Q_+) = 0$. □

Рассмотрим множества $P_+^{(N)}$, заданные формулой

$$P_+^{(N)} = \Bigl\{x \in A_+ \Bigm| \forall r < \frac{1}{N} \quad \mu_+\bigl(B_r(x)\bigr) \leqslant 10\mu\bigl(B_r(x)\bigr)\Bigr\}.$$

Естественно, $P_+ = \cup_N P_+^{(N)}$. Таким образом, для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $N \in \mathbb{N}$, такое что $\mu_+\bigl(P_+^{(N)}\bigr) \geqslant \mu_+(A_+) - \varepsilon$. Нам хочется слегка изменить неравенство в определении (4.1.2).

Факт 4.1.3. *Предположим, что для некоторой фиксированной точки x и всех чисел $r \leqslant 2\delta$ имеет место неравенство $\mu_+\bigl(B_r(x)\bigr) \leqslant 10\mu\bigl(B_r(x)\bigr)$. В таком случае,*

$$\int \varphi_r(x+y)\,d\mu_+(y) \leqslant 10\int \varphi_r(x+y)\,d\mu(y) \qquad (4.1.3)$$

при всех $r < \delta$ и любой гладкой функции φ с носителем в шаре $B_1(0)$, зависящей только от радиуса и убывающей при его увеличении.

Этот факт мы не доказываем ввиду его очевидности.

Лемма 4.1.4. *Пусть μ — вещественнозначная борелевская мера с ограниченной вариацией. Пусть μ_+ и μ_- — ее положительная и отрицательная части соответственно. Тогда* $\dim\mu = \min(\dim\mu_+, \dim\mu_-)$.

Доказательство. Неравенство $\dim\mu \geqslant \min(\dim\mu_+, \dim\mu_-)$ очевидно.

Пусть мера μ_+ сосредоточена на множестве A_+, а μ_- — на множестве A_-, т.е. $\mu_+(A_+) = \mu(A_+)$ и $\mu_-(A_-) = \mu(A_-)$. Предположим противное, пусть $\dim\mu > \dim\mu_+$. Это означает, что существует некоторое борелевское множество F, такое что $\mu_+(F) > 0$ и $\dim F < \dim\mu$. Естественно, $\mu_+(A_+\cap F) > 0$ и $\dim\big(A_+\cap F\big) < \dim\mu$. Но $\mu(A_+\cap F) = \mu_+(A_+\cap F) > 0$, противоречие. □

Доказательство леммы 4.1.1. Предположим противное, пусть нашлось борелевское множество F, такое что $\mu(F) \neq 0$, но $\dim(F) < \alpha^- < \alpha$. Согласно лемме 4.1.4, мы можем предположить, что $F \subset A_+$, более того, мы можем предположить, что $F \in P_+^{(N)}$ для некоторого большого числа N (потому что эти множества сходятся к множеству A_+ по мере) и F компактно (по регулярности меры μ). Пусть $\mu(F) = c_0$. Согласно определению размерности Хаусдорфа, существует покрытие множества F шарами $B_{r_j}(x_j)$ с центрами x_j, лежащими в множестве F, радиусы r_j которых не превосходят δ (которое мы полагаем не превосходящим $\frac{1}{10N}$), такое что неравенство $\sum_j r_j^{\alpha^-} \leqslant c_1$ выполнено с некоторой равномерной константой c_1. Разобьем множество шаров на множества шаров соизмеримого радиуса:

$$E_k = \big\{j \mid r_j \in (2^{-k-1}, 2^{-k}]\big\}.$$

Очевидно что $|E_k| \leqslant 2^{k\alpha^-}c_1$. По принципу Дирихле, найдется число $k \gtrsim \log\frac{1}{\delta}$, такое что

$$\mu_+\big(F \cap \cup_{j\in E_k} B_{r_j}(x_j)\big) \geqslant \frac{c_0}{k^2}.$$

Зафиксируем число δ и также это число k на некоторое время. Символом D_k обозначим подмножество множества E_k, такое что множество $\{x_j \mid j \in D_k\}$ есть максимальное 2^{-k}-разделенное подмножество множества $\{x_j \mid j \in E_k\}$. В таком случае, выполнены два указанных ниже свойства.

1. Имеет место включение $\cup_{j\in D_k} B_{3r_j}(x_j) \supset F \cap \cup_{j\in E_k} B_j$, в частности, $\sum\limits_{j\in D_k} \mu_+\big(B_{3r_j}(x_j)\big) \geqslant \frac{c_0}{k^2}$.
2. Набор $B_{4r_j}(x_j)$, $j \in D_k$, покрывает каждую точку пространства $\mathbb{R}^d$ конечное число раз (равномерно, то есть, кратность не зависит от точки).

Пользуясь этими двумя утверждениями, и вспоминая, что функция φ равна 1 на шаре $B_{\frac{3}{4}}(0)$, запишем

$$\frac{c_0}{k^2} \leqslant \sum_{j\in D_k} \mu_+(B_{3r_j}(x_j)) \leqslant \sum_{j\in D_k} \int \varphi_{4r_j}(x_j+y)\,d\mu_+(y) \leqslant$$
$$10\sum_{j\in D_k} \int \Big|\varphi_{4r_j}(x_j+y)\,d\mu(y)\Big| \lesssim \Big(\sum_{j\in D_k} r_j^{\alpha}\Big)^{\beta} \leqslant \Big(|D_k|2^{-k\alpha}\Big)^{\beta} \lesssim c_1^{\beta} 2^{\beta k(\alpha^- - \alpha)}.$$

Отсюда следует, что $k \lesssim 1$, что противоречит неравенству $k \gtrsim \log\frac{1}{\delta}$ при малом δ.

4.1.2. Вывод теоремы о размерности из усиленной леммы Фростмана

Нам понадобится некоторая адаптация теоремы 1.4.6 под нужды нашей задачи. А именно, мы будем пользоваться простым следствием, которое приведено ниже. Вывод этого следствия, по сути, аналогичен выводу соответствующего следствия из теоремы Укиямы, приведенного нами в пункте 1.4.3.

Следствие 4.1.5. *Пусть $m = (m_1, m_2, \ldots, m_d)$ — вектор из натуральных чисел, $d \geqslant 2$, а число q_j задано по правилу*

$$m_j - 1 = m_j\bigg(1 - \frac{q_j - 1}{q_j}\Big(\sum_i m_i^{-1}\Big)\bigg).$$

В таком случае, если для всякого $j = 1, 2, \ldots, d$ обобщенная функция $\partial_j^{m_j} f$ есть мера μ_j, то $\partial_j^{m_j-1} f \in L_{q_j}$ и для всякого числа j и имеет место оценка

$$\big\|\partial_j^{m_j-1}\big\|_{L_{q_j}} \lesssim \operatorname{var}\mu, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d).$$

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, а функции ϕ_n определены по правилу $\phi_n(x) = n^{-d}\phi(n^{-1}x)$. В таком случае, функции $f_n = f * \phi_n$ принадлежат классу $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, функции $\partial_j^{m_j} f_n$ равномерно по n огранчены в пространстве $L_1(\mathbb{R})$, следовательно, по теореме 1.4.6, функции $\partial_j^{m_j-1} f_n$ равномерно ограничены в пространстве $L_{q_j}(\mathbb{R}^d)$. Выберем из них слабо сходящуюся подпоследовательность, пусть она сходится к некоторой функции g. Из сходимости $\partial_j^{m_j-1} f_n \to \partial_j^{m_j-1} f$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ и того, что множество $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ плотно в пространстве $L_{q_j'}$, сопряженном с пространством L_{q_j}, следует, что $g = \partial_j^{m_j-1} f$. Следствие доказано. $\square$

Пусть φ — функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ с носителем в единичном шаре. Как обычно, определим функции φ_r согласно формуле $\varphi_r(x) = \varphi(r^{-1}x)$, при $r > 0$.

Лемма 4.1.6. *Пусть шары $B_{r_j}(y_j)$ пространства $\mathbb{R}^{d-1}$ дизъюнктны, а $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — произвольная функция. Предположим, что функция f имеет компактный носитель. Если $\mu = (\partial_i^{m_i} f)_i$ есть векторная мера, то для всех индексов $i \in [1..d]$ и произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ с носителем в единичном шаре имеет место неравенство*

$$\sum_j \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(x_i)\varphi_{r_j}(x_{\{i\}} + y_j)\, d\mu_i(x) \Big| \lesssim \Big(\sum_j r_j^{d-1} \Big)^{\frac{1}{q_i'}} \|\mu\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^d)}$$

для некоторых фиксированных чисел q_i' и всех $y_j \in \mathbb{R}^{d-1}$ и $r_j < 1$ равномерно (однако, константы могут зависеть от функций φ и ψ).

Доказательство. Для простоты обозначений, будем считать что $i = 1$. Запишем

$$\sum_j \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(x_1)\varphi_{r_j}(x_{\{1\}} + y_j)\, d\mu_1(x)\Big| =$$

$$\sum_j \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi'(x_1)\varphi_{r_j}(x_{\{1\}} + y_j)\partial_1^{m_1-1} f(x)\, dx\Big| \leqslant$$

$$\sum_j \Big\|\psi'(x_1)\varphi_{r_j}(x_{\{1\}} + y_j)\Big\|_{L^{q_1'}} \Big\|\partial_1^{m_1-1} f\Big\|_{L^{q_1}\left(B_{r_j}(y_j)\right)} \lesssim$$

$$\sum_j r_j^{\frac{d-1}{q_1'}} \Big\|\partial_1^{m_1-1} f\Big\|_{L^{q_1}\left(B_{r_j}(y_j)\right)} \leqslant$$

$$\Big(\sum_j r_j^{d-1}\Big)^{\frac{1}{q_1'}} \Big(\sum_j \Big\|\partial_1^{m_1-1} f\Big\|^{q_1}_{L^{q_1}\left(B_{r_j}(y_j)\right)}\Big)^{\frac{1}{q_1}} \leqslant$$

$$\Big(\sum_j r_j^{d-1}\Big)^{\frac{1}{q_1'}} \big\|\partial_1^{m_1-1} f\big\|_{L^{q_1}} \lesssim \Big(\sum_j r_j^{d-1}\Big)^{\frac{1}{q_1'}} \|\mu\|_{\mathrm{M}(\mathbb{R}^d)}$$

Число q_1 берется из соотношения однородности (1.4.5) (число q_1 подбирается с таким расчетом, чтобы первая координата l_1 вектора l равнялась $m_1 - 1$, нетрудно видеть, что такой выбор всегда возможен), число q_1' есть его сопряженное ($\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1'} = 1$). Первое неравенство цепочки есть неравенство Гельдера, второе следует из замены переменной в интеграле при растяжении, третье — опять неравнество Гельдера, а четвертое задается следствием 4.1.5.

$\square$

Лемма 4.1.7. *Пусть μ есть борелевская мера на пространстве $\mathbb{R}^{k+l}$. Предположим, что $\mu(I \times A) = 0$ для всякого параллелепипеда $I \subset \mathbb{R}^k$ и всякого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^l$, такого что $\dim A < \alpha$. В таком случае, $\dim \mu \geqslant \alpha$.*

Доказательство. Докажем, что $\mu\big|_{I\times A} = 0$ для всяких I и A как в условии леммы. Действительно, σ-алгебра измеримых подмножеств множества $I \times A$ порождена множествами $\tilde{I} \times (A \cap J)$, где J есть произвольный параллелепипед в пространстве $\mathbb{R}^l$, а $\tilde{I}$ есть параллелепипед внутри I. Согласно условию, $\mu(\tilde{I}\times (A\cap J)) = 0$ (потому что $\dim A\cap J \leqslant \dim A < \alpha$). Следовательно, $\mu\big|_{I\times A} = 0$.

Предположим противное условию леммы, пусть $\mu(F) \neq 0$, но $\dim F < \alpha$. В таком случае, $\dim \pi_{\mathbb{R}^l}[F] < \alpha$, потому что проекция не увеличивает размерность (так как проекция есть липшицево отображение). Таким образом, $\mu\big|_{\mathbb{R}^k\times\pi_{\mathbb{R}^l}[F]} = 0$. Но $F \subset \mathbb{R}^k \times \pi_{\mathbb{R}^l}[F]$, что противоречит предположению $\mu(F) \neq 0$. $\square$

Доказательство теоремы 1.2.11. Предположим противное, пусть F есть некоторое борелевское множество, такое что $\mu(F) \neq 0$, но $\dim F < d-1$. Благодаря симметрии задачи, можем предположить, что $\mu_1(F) \neq 0$. Кроме того, можно считать, что множество F компактно (благодаря регулярности меры). Умножая f на гладкую функцию с компактным носителем, равную 1 на множестве F, мы можем сделать носитель функции f компактным, не теряя при этом условия, что некоторые старшие производный этой функции есть меры. Чтобы придти к противоречию, достаточно показать, что для всякого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^{d-1}$, такого что $\dim A < d-1$, и всякой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times A} \psi(x_1)\,d\mu_1(x) = 0. \tag{4.1.4}$$

В таком случае, аппроксимируя характеристические функции интервалов гладкими функциями, придем к предположениям леммы 4.1.7 при $\alpha = d-1$, которая, в таком случае утверждает, что $\mu_1(F) = 0$.

Рассмотрим теперь меру μ_ψ на пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$, заданную формулой

$$\mu_\psi(B) = \int\limits_{\mathbb{R}\times B} \psi(x_1)\,d\mu_1(x).$$

Согласно лемме 4.1.6, мера μ_ψ удовлетворяет предположениям леммы 4.1.1 при $\alpha = d-1$, $k = 1$, $l = d-1$. Таким образом, $\dim \mu_\psi \geqslant d-1$ и равенство (4.1.4) выполнено для всех борелевских множеств A, таких что $\dim A < d-1$. $\square$

Отметим, что теорема 1.2.11 точна в следующем смысле: существуют функции f (и векторные меры $\mu = (\partial_i^{m_i} f)_i$), такие что $\dim \mu = d-1$. Рассмотрим одномерную меру (эта мера есть сверточное ядро оператора взятия конечной разности порядка s, заданного формулой (1.4.3); мы будем использовать для нее то же обозначение)

$$\Delta_s(h) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^{s-j} C_s^j \delta_{hj}.$$

У этой меры первые s моментов обнуляются, таким образом, найдется функция f_h^s с компактным носителем, такая что $\partial^s f_h^s = \Delta_s(h)$. Рассмотрим функцию F на пространстве $\mathbb{R}^d$, заданную формулой

$$F(x) = \prod_{i=1}^{d} f_h^{m_i}(x_i).$$

В таком случае, для каждого значения индекса i, мера $\partial_i^{m_i} F$ имеет носителем объединение $(d-1)$-мерных кубов

$$\{x \mid x_i = hj,\ \forall k \neq i \quad x_k \in [0,(m_k+1)h]\},$$

здесь $j = 0,1,2,\ldots,m_i$. Этот пример показывает точность теоремы 1.2.11.

Теорема 1.2.11 в случае $m_1 = m_2 = \ldots = m_d = m$ есть частный случай гипотезы 1.3.1. Действительно,

$$\Big\{\big(\partial_1^m f, \partial_2^m f, \ldots, \partial_d^m f\big) \in \mathrm{M}(\mathbb{R}^2) \mid f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\Big\} = \mathcal{M}_{\theta_m},$$
$$\theta_m(\xi) = (\xi_1^m, \xi_2^m, \ldots, \xi_d^m),$$

и образ отображения θ_m содержит d линейно независимых точек (например, все векторы стандартного базиса).

4.2. Теоремы вложения, связанные с вопросом о размерности

4.2.1. Общая гипотеза и ее двойственная формулировка

Сейчас мы приведем гипотезу, которая, с одной стороны, должна быть полезна для утверждений типа теоремы 1.2.11 (см. доказательство леммы 4.1.6), с другой стороны, в двумерном случае следует из теоремы 1.2.1; в некотором смысле, гипотезу можно считать естественным обобщением теоремы 1.2.1 на случай старшей размерности.

Определение 4.2.1. Пусть $m = (m_1, m_2, \ldots, m_d)$ — вектор из натуральных чисел. Будем говорить, что обобщенная функция $\zeta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ имеет порядок не более n относительно вектора m, если существуют меры $\mu_k \in \mathrm{M}(\mathbb{R}^d)$ с компактными носителями, такие что

$$\zeta = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+^d,\\ \langle k, m\rangle = n}} \partial_1^{m_1 k_1} \partial_2^{m_2 k_2} \ldots \partial_d^{m_d k_d} \mu_k. \tag{4.2.1}$$

Полунормой порядка n относительно вектора m обобщенной функции ζ (обозначаемой $\|\zeta\|_n$) назовем инфимум выражения $\sum_k \operatorname{var} \mu_k$ по всем представлениям вида (4.2.1).

Гипотеза 4.2.2. *Пусть $m = (m_1, m_2, \ldots, m_d)$ — вектор из натуральных чисел ($d \geqslant 2$). Пусть для всякого индекса $j = 1, 2, \ldots, d$ обобщенная функция $\partial_j^{m_j N} f$ имеет порядок не более n относительно вектора m (считаем, что $n < N$). В таком случае,*

$$\|f\|_{B_{q,r}^{\ell,\theta}} \lesssim \sum_{j=1}^{d} \big\|\partial_j^{m_j N}\big\|_n, \quad \ell_j = m_j\Big(N - n - \frac{q-1}{q}\Big(\sum_i m_i^{-1}\Big)\Big),$$

$$j = 1, 2 \ldots, d, \; r, \theta \in [1, \infty],$$

если функция f имеет компактный носитель и $q \in (1, \infty)$.

Теорема 1.4.6 является частным случаем этой гипотезы при $n = 0$.

Замечание 4.2.3. Гипотеза 4.2.2 может быть сформулирована и для тора. В этом случае, условие компактности носителя функции ζ надо заменить ее правильностью (см. определение 2.5.9).

Используя принципы пункта 2.5.2, можно показать, что формы гипотезы для тора и евклидова пространства эквивалентны. Мы докажем частный случай гипотезы 4.2.2 для случая тора.

Доказательство гипотезы 4.2.2 в случае $d = 2$, $q = r = \theta = 2$ **на торе.** Пусть вектор m есть (k, l). Тогда из формулы однородности следует, что вектор ℓ есть $\big((N-n)k - \frac{1}{2} - \frac{l}{2k}, (N-n)l - \frac{1}{2} - \frac{k}{2l}\big)$.

Пусть правильная обобщенная функция f имеет порядок не более n относительно вектора (k, l). Согласно определению 4.2.1, это значит что существуют наборы мер $\{\mu_{1j}\}_{j=0}^n$ и$\{\mu_{2j}\}_{j=0}^n$, такие что

$$\begin{cases} \partial_1^{kN} f &= \sum\limits_{j=0}^{n} \partial_1^{kj}\partial_2^{l(n-j)}\mu_{1j};\\ \partial_2^{lN} f &= \sum\limits_{j=0}^{n} \partial_1^{kj}\partial_2^{l(n-j)}\mu_{2j}. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Мы хотим представить эту систему из двух уравнений как часть некоторой большей системы типа (1.2.2) подобно тому, как мы это делали при выводе теоремы 1.2.1 из теоремы 2.2.1. Так как мы работаем с правильными функциями, отрицательные степени операторов дифференцирования корректно определены (по формуле $\partial_j^\kappa = \mathcal{M}_{(2\pi i\xi_j)^\kappa}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$). В таких обозначениях мы можем переписать первое уравнение системы (4.2.2):

$$\begin{cases} \partial_1^k\Big(\partial_1^{(N-n-1)k}f\Big) - \partial_2^l\Big(\sum\limits_{j=0}^{n-1}\partial_1^{(j-n)k}\partial_2^{(n-j-1)l}\mu_{1j}\Big) & = \mu_{1n};\\ \partial_1^k\Big(\sum\limits_{j=0}^{n-1}\partial_1^{(j-n)k}\partial_2^{(n-j-1)l}\mu_{1j}\Big) - \partial_2^l\Big(\sum\limits_{j=0}^{n-2}\partial_1^{(j-n+1)k}\partial_2^{(n-j-2)l}\mu_{1j}\Big) & = \mu_{1(n-1)};\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ \partial_1^k\Big(\partial_1^{-k}\mu_{10}\Big) & = \mu_{10}. \end{cases}$$

Аналогичным образом можно записать и второе уравнение системы (4.2.2). Связать эти две системы можно, соединив функции $\partial_1^{(N-n-1)k}f$ и $\partial_2^{(N-n-1)l}f$ системой уравнений

$$\begin{cases} \partial_1^k\big(\partial_2^{(N-n-1)l}f\big) - \partial_2^l\big(\partial_1^k\partial_2^{(N-n-2)l}f\big) & = 0;\\ \partial_1^k\big(\partial_1^k\partial_2^{(N-n-2)l}f\big) - \partial_2^l\big(\partial_1^{2k}\partial_2^{(N-n-3)l}f\big) & = 0;\\ & \ \vdots\\ \partial_1^k\big(\partial_1^{(N-n-2)k}\partial_2^l f\big) - \partial_2^l\big(\partial_1^{(N-n-1)k}f\big) & = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что три выписанные системы уравнений вместе составляют систему уравнений типа (1.2.2). По теореме 1.2.1,

$$\big\|\partial_1^{(N-n-1)k}f\big\|_{W_2^{(k-\frac12-\frac{k}{2l},l-\frac12-\frac{l}{2k})}} + \big\|\partial_2^{(N-n-1)l}f\big\|_{W_2^{(k-\frac12-\frac{k}{2l},l-\frac12-\frac{l}{2k})}} \lesssim \sum_{j=0}^{n}\big(\operatorname{var}\mu_{1j} + \operatorname{var}\mu_{2j}\big).$$

Сумма норм слева оценивается снизу величиной $\|f\|_{B_{2,2}^{\left((N-n)k-\frac12-\frac{l}{2k},(N-n)l-\frac12-\frac{k}{2l}\right),2}}$. Переходя к инфимуму по всем представлениям вида (4.2.2), получаем требуемую оценку. $\square$

Интересной представляется двойственная формулировка гипотезы 4.2.2.

Гипотеза 4.2.4. *Пусть обобщенная функция g принадлежит пространству $(B_{q,r}^{\ell,\theta})^*$ (двойственность задается стандартным образом:* $\langle f, g\rangle =$

$\int fg$). В таком случае, если параметры d, n, N, m, p, r, θ подчинены тем же условиям, что и в гипотезе 4.2.2, *то существует решение уравнения*

$$g = \sum_{j=1}^{d} (-1)^{m_j N} \partial_j^{m_j N} g_j, \tag{4.2.3}$$

удовлетворяющее оценке

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+^d, \\ \langle k,m \rangle = n}} \left\| \partial_1^{m_1 k_1} \partial_2^{m_2 k_2} \dots \partial_d^{m_d k_d} g_j \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{(B_{q,r}^{\ell,\theta})^*}. \tag{4.2.4}$$

Замечание 4.2.5. В случае $p \in (1, \infty)$ имеет место формула $(B_{p,r}^{\ell,\theta})^* = B_{p',r'}^{-\ell,\theta'}$.

Замечание 4.2.6. Оценку (4.2.4) можно трактовать как принадлежность решения $\{g_j\}$ некоторому пространству Соболева.

Предложение 4.2.7. *Гипотезы* 4.2.2 *и* 4.2.4 *равносильны.*

Доказательство. Пусть функция f имеет компактный носитель, а функции g_j решают уравнение (4.2.3). В таком случае, напишем

$$\langle f, g \rangle = \langle f, \sum_{j=1}^{d} (-1)^{m_j N} \partial_j^{m_j N} g_j \rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle \partial_j^{m_j N} f, g_j \rangle.$$

Пусть функции $\partial_j^{m_j N} f$ есть обобщенные функции порядка не более n, пусть для всякого числа j, $j \in [1..d]$, меры μ_{jk} с компактным носителем решают уравнение (4.2.1). В таком случае, мы можем продолжить формулу:

$$\sum_{j=1}^{d} \langle \partial_j^{m_j N} f, g_j \rangle = \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+^d, \\ \langle k,m \rangle = n}} \langle \partial_1^{m_1 k_1} \partial_2^{m_2 k_2} \dots \partial_d^{m_d k_d} \mu_{jk}, g_j \rangle,$$

то есть,

$$\langle f, g \rangle = (-1)^n \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+^d, \\ \langle k,m \rangle = n}} \langle \mu_{jk}, \partial_1^{m_1 k_1} \partial_2^{m_2 k_2} \dots \partial_d^{m_d k_d} g_j \rangle. \tag{4.2.5}$$

Предположим, что гипотеза 4.2.4 верна. Докажем гипотезу 4.2.2. Нетрудно видеть, что гипотеза 4.2.2 следует из более слабого утверждения, когда в определении 4.2.1 порядка обобщенной функции представляющие меры заменены L_1-функциями (этот вывод полностью аналогичен выводу следствия 4.1.5 из теоремы 1.4.6). Будем доказывать это чуть более слабое утверждение. Пусть функция $g \in (B^{\ell,\theta}_{q,r})^*$ такова что

$$\langle f, g\rangle \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_{B^{\ell,\theta}_{q,r}}\|g\|_{(B^{\ell,\theta}_{q,r})^*}.$$

Применяя к ней гипотезу 4.2.4, построим функции g_j, решающие уравнение (4.2.3) и удовлетворяющие оценке (4.2.4). В таком случае, благодаря формуле (4.2.1) и гипотезе 4.2.4, для всякого набора мер μ_{jk}, имеет место неравенство

$$\|f\|_{B^{\ell,\theta}_{p,r}}\|g\|_{(B^{\ell,\theta}_{p,r})^*} \overset{(4.2.5)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{d}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}_+^d,\\ \langle k,m\rangle = n}}\|\mu_{jk}\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}\Big\|\partial_1^{m_1k_1}\partial_2^{m_2k_2}\dots\partial_d^{m_dk_d}g_j\Big\|_{L_\infty} \lesssim$$

$$\sum_{j=1}^{d}\|\partial_j^{m_jN}f\|_n\|g\|_{(B^{\ell,\theta}_{q,r})^*}.$$

Вывод гипотезы 4.2.4 из гипотезы 4.2.2 абсолютно аналогичен. Отметим лишь, что мы позволили себе неряшливость при интегрировании по частям в начале доказательства. Гипотезу 4.2.2 достаточно проверить для случая $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$, общий случай можно получить из этого предельным переходом. А в предположении $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ вычисления становятся корректными. $\square$

4.2.2. Доказательство частного случая гипотезы 4.2.4, двойственного теореме Гальярдо–Ниренберга–Соболева

В этом пункте мы докажем частный случай гипотезы 4.2.4, который соответствует классическому вложению Гальярдо–Ниренберга–Соболева $W_1^1 \hookrightarrow L_{\frac{d}{d-1}}$ в двойственной формулировке.

Предложение 4.2.8. *Пусть $g \in L_d(\mathbb{R}^d)$. Тогда существуют ограниченные функции $g_1, g_2, \ldots, g_d$, такие что*

$$\sum_{j=1}^{d} \partial_j g_j = g \tag{4.2.6}$$

и выполнено неравенство $\sum_{j=1}^{d} \|g_j\|_{L_\infty} \lesssim \|g\|_{L_d}$.

Благодаря предложению 4.2.7, предложение 4.2.8 следует из вложения Гальярдо–Ниренберга–Соболева. Наше доказательство интересно тем, что мы предъявим решение уравнения (4.2.6) явно. Отметим, что более сильное утверждение (в оценке (4.2.4) для данного случая также участвуют нормы функций g_j в пространстве W_d^1) было доказано явно в работе [15]. Тем не менее, наша конструкция все равно представляет интерес, потому что она намного проще конструкции работы [15] (в частности, мы не используем разложение Литтлвуда–Пэли и его мартингальную структуру).

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по размерности. В качестве базы рассмотрим случай $d = 2$, кроме того, рассмотрение этого случая сделает более понятным изложение индукционного перехода.

Случай $d = 2$. Положим $\partial_1 g_1 = g\psi$, где ψ — некоторая функция, которую предстоит выбрать. Посмотрим, какие условия надо наложить на функцию ψ, чтобы функция g_1 была ограничена.

$$\big|g_1(x_1,x_2)\big|^2 = \Big|\int\limits_{-\infty}^{x_1} g(s,x_2)\psi(s,x_2)\,ds\Big|^2 \leqslant \Big(\int\limits_{-\infty}^{x_1} g^2(s,x_2)\,ds\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{x_1} \psi^2(s,x_2)\,ds\Big).$$

Например, хорошим требованием будет

$$\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^2(s,x_2)\,ds\Big)^{\frac12} \lesssim \frac{\|g\|_2}{\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(s,x_2)\,ds\Big)^{\frac12}}.$$

Введем в рассмотрение две полезные функции: функцию ширины $w(x_2)$ и функцию высоты $h(x_1)$, заданные по следующему правилу:

$$h(x_1) = \|g(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}; \quad w(x_2) = \|g(\cdot,x_2)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Отметим, что эти функции удовлетворяют простым соотношениям

$$\int h(x_1)\,dx_1 = \|g\|^2_{L_2}; \quad \int w(x_2)\,dx_2 = \|g\|^2_{L_2}.$$

Вспоминая, что интеграл по переменной x_2 от функции $(1-\psi)g$ должен быть ограниченной функцией, можем записать все требования к функции ψ:

$$\|\psi_1(\cdot,x_2)\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim \frac{\|g\|_2}{w(x_2)}; \quad \|(1-\psi_1)(x_1,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \lesssim \frac{\|g\|_2}{h(x_1)}. \tag{4.2.7}$$

Например, условия (4.2.7) выполнены, если выполнены неравенства

$$|\psi_1(x_1,x_2)| \lesssim \frac{h(x_1)}{w(x_2)}; \quad |1-\psi(x_1,x_2)| \lesssim \frac{w(x_2)}{h(x_1)},$$

что, например, верно для функции $\psi(x_1,x_2) = \chi_{\{\frac{h(x_1)}{w(x_2)}\geqslant 1\}}(x_1,x_2)$.

Общий случай. Нам потребуются обозначения. Пусть I — непустое подмножество множества $[1..d]$ (напомним читателю, что символ $[1..d]$ обозначает множество целых чисел отрезка $[1,d]$) мощности n, $0 < n \leqslant d$. Координаты, номера которых не принадлежат множеству I, соберем в одну $(d-n)$-мерную переменную x_I. Дополнение множества I будем обозначать символом $\overline{I}$. Тогда $x = (x_I, x_{\overline{I}})$. Пусть $G \in L_1(\mathbb{R}^d)$ — произвольная функция. Введем следующее обозначение:

$$\int\limits_I G(x_I) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x_I,x_{\overline{I}})\,dx_{\overline{I}}.$$

Согласно теореме Фубини, эта функция определена для почти всех векторов $x_I \in \mathbb{R}^{d-n}$ и суммируема как функция на $\mathbb{R}^{d-n}$. Сформулируем чуть более сильное, чем предложение 4.2.8, утверждение, которое нам будет более удобно доказывать по индукции.

Пусть $g \in L_d$. Тогда существует разбиение пространства $\mathbb{R}^d$ на дизъюнктные множества A_j, $j \in [1..d]$, такое что

$$\Big\| \int\limits_{\{j\}} |g\chi_{A_j}| \Big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{d-1})} \lesssim \|g\|_{L_d}$$

для всех j.

Утверждение будем доказывать индукцией по размерности. База $d = 1$ очевидна (более того, в качестве базы можно принять и случай $d = 2$). Докажем переход. Разобьем пространство $\mathbb{R}^d$ на дизъюнктные множества B_j, $j \in [1..d]$, согласно следующему правилу:

$$B_j = \Big\{ x \,\Big|\, \forall i \in [1..d] \setminus \{j\} \quad \int\limits_{\overline{\{j\}}} |g|^d(x_j) \leqslant \int\limits_{\overline{\{i\}}} |g|^d(x_i) \Big\},$$

то есть, для каждого индекса j мы "усредняем" функцию $|g|^d$ по всем координатам, кроме j-ой, после чего выбираем наибольшее из этих "усреднений". Мы допускаем некоторую вольность, употребляя нестрогие неравенства в определении множеств B_j: непонятно, к какому множеству отнести точки, в которых наблюдается равенство сравниваемых величин; в случае равенства, точка может быть отнесена к любому из множеств (естественно, это все должно происходить с сохранением измеримости рассматриваемых множеств). Имеем следующее разложение функции g:

$$g = \sum_{j=1}^{d} g\chi_{B_j} = \sum_{j=1}^{d} g_j.$$

Понятно, что если для каждой из функций g_j мы получим разбиение, как требуется в доказательстве, с нужной оценкой, то, беря на каждом множестве B_j свое разбиение, получим аналогичное разложение для функции f. Поэтому зафиксируем число j и рассмотрим теперь функцию $G = |g|^{\frac{d}{d-1}}\chi_{B_j}$ на $(d-1)$-мерном пространстве $\{y \mid y_j = x_j\}$. Согласно предположению индукции, существуют множества $C_1, C_2, \cdots, C_d$ (мы нумеруем этот набор из $d-1$

множества числами от 1 до d, исключая j), такие что

$$\sum_i \chi_{C_i} = \chi_{\mathbb{R}^{d-1}}, \quad \forall i \neq j \quad \int\limits_{\{i\}} |G\chi_{C_i}| \lesssim \|G\|_{L^{d-1}}.$$

Докажем теперь, что выбор $A_i = C_i$ дает аналогичное разложение для функции g_j (мы теперь "разморозили" переменную x_j и рассматриваем C_i как подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, заданное послойно). Для этого достаточно доказать неравенство

$$\int\limits_{\{i\}} \left|g\chi_{B_j}\chi_{C_i}\right| \lesssim \|g\|_{L^d}.$$

Напишем неравенство Гельдера:

$$\int\limits_{\{i\}} \left|g\chi_{B_j}\chi_{C_i}\right| \leqslant \Big(\int\limits_{\{i\}} |g|^{\frac{d}{d-1}}\chi_{B_j}\chi_{C_i}\Big)^{\frac{d-1}{d}} \Big(\int\limits_{\{i\}} \chi_{B_j}\Big)^{\frac{1}{d}}. \tag{4.2.8}$$

Функции χ_{B_j} и χ_{C_i} можно писать в какой угодно степени, так как от возведения в степень они совсем не меняются. По построению множества B_j, имеет место оценка

$$\chi_{B_j}(x) \leqslant \frac{\int\limits_{\{i\}} |g|^d(x_i)}{\int\limits_{\{j\}} |g|^d(x_j)}, \quad i \neq j.$$

Стало быть, вторая скобка выражения справа в формуле (4.2.8) не превосходит

$$\frac{\|g\|_{L_d}}{\Big(\int\limits_{\{j\}} |g|^d(x_j)\Big)^{\frac{1}{d}}}.$$

Отметим, что знаменатель есть не что иное, как L_{d-1}-норма функции G в слое $x_j = const$ (в степени $\frac{d-1}{d}$), кроме того (по свойству множества C_i)

$$\Big(\int\limits_{\{i\}} |g|^{\frac{d}{d-1}}\chi_{B_j}\chi_{C_i}\Big)^{\frac{d-1}{d}} \leqslant \Big(\int\limits_{\{j\}} |g|^d(x_j)\Big)^{\frac{1}{d}},$$

и стало быть, требуемая оценка доказана. $\square$

Глава 5

Заключение

5.1. Что еще надо изучить?

В заключение мы еще раз перечислим гипотезы, разбросанные по тексту, а также скажем о вопросах, на которые мы совсем не имеем ответов.

По аналогии с эллиптическим случаем билинейных оценок (теорема 1.2.4), можно ставить вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий на параметры $k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau$ для выполнения утверждения $\mathrm{BE}(k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau)$ в случае, когда четверка (k, l, σ, τ) не является эллиптической (см. определение 1.2.3). Частичными продвижениями в этом направлении являются теорема 1.2.5 и следствие 2.4.4, дающие достаточные условия, и лемма 2.4.6, предоставляющая необходимые. Тем не менее, до полного разрешения задачи далеко — например, автор не знает, что происходит в случае, когда один из полиномов $\xi_1^k - \sigma_1\eta^l$ и $\xi_1^k - \tau_1\eta^l$ эллиптичен, а другой — нет. По-видимому, вопрос о построении контрпримеров к утверждениям BE (аналогичных контрпримеру пункта 2.3.2) связан с изучением свойств функций из пространств ${}_{\gamma}L_1$, рассмотренных в пункте 2.5.4 (мы наглядно показали это на более простом примере утверждений LE, см. определение 2.5.16 из пункта 2.5.3; простота здесь понимается в том смысле, что при рассмотрении утверждений типа LE мы не интересовались предельными показателями $p = 1, q = \infty$). Приведем еще раз гипотезу 2.5.23.

Неравенство

$$\|f\|_{\mathcal{P}_q^{(\alpha,\beta)}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \Big\|\big((2\pi i)^{-k}\partial_1^k - (2\pi i)^{-l}\partial_2^l\big) f\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}$$

верно, если выполнено условие однородности (2.5.4), $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant \frac{2}{3}$ *и* $p < \frac{4}{3}$. По-видимому, это утверждение (если оно верно) может быть полезно и для изучения классического оператора Бохнера–Рисса (см. пункт 1.4.3).

Логично предположить, что верна предельная версия теоремы 2.5.32 о том, что в случае $p = \frac{2d}{d+1}$ пространства ${}_SL_p(\mathbb{R}^d)$ и $L_p(\mathbb{R}^d)$ совпадают, если многообразие S удовлетворяет условию выпуклости из определения 1.4.29. В случае $d = 2$ эта гипотеза есть наша теорема 2.5.35. Отметим, что из этой гипотезы следует, что оператор ограничения на поверхность S, заданный формулой (1.4.7), не может быть ограничен как оператор из пространства $L_{\frac{2d}{d+1}}$ ни в какое пространство Лебега или Лоренца. Этот факт неочевиден, он был доказан в работе [66] (на самом деле, было доказано более сильное утверждение о неограниченности оператора ограничения как оператора из пространства Лоренца $L_{\frac{2d}{d+1},1}$ в пространство Лоренца $L_{1,\infty}$ при предельном показателе) при помощи техники множеств Какейя (о множествах Какейя см. книгу [53]).

Гипотеза 4.2.2 представляется автору желаемым совмещением результатов ван Шафтингена для однородных операторов с подходом Коляды (см. пункт 1.3.1). К сожалению, даже в случае однородных операторов и размерности $d \geqslant 3$, неясно, как вывести ее из результатов ван Шафтингена. При этом ясно, что гипотеза 4.2.2 родственна теореме ван Шафтингена (по крайней мере, в случае размерности 2). По-видимому, для ее доказательства надо развивать новые методы, более совершенные, чем предложены в данной работе.

5.2. Благодарности

Я искренне благодарен

- моему научному руководителю С. В. Кислякову за постановку исходной задачи (это была версия утверждения BE и связанный с ней вариант теоремы 1.2.1), постоянное внимание к работе и советы.

- М. Войчеховскому, который познакомил меня с гипотезой 1.3.1, также спасибо ему за внимание к моей работе, советы и многократное обсуждение результатов диссертации и связанных вопросов.

- А.А. Логунову, В.Г. Мазье, А.И. Назарову, А. Сигеру и Е.О. Степанову за обсуждение различных результатов работы.

Результаты диссертации были доложены на петербургском семинаре по комплексному и линейному анализу в ПОМИ РАН, семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики в МИАН, семинаре по функциональному анализу в ИМ ПАН и семинаре по геометрии банаховых пространств факультета математики Ягеллонского университета. Спасибо организаторам этих семинаров за возможность представить свои результаты.

Я также выражаю благодарность ПОМИ РАН за хорошую рабочую атмосферу и возможность заниматься научной работой.

В течении моей учебы в аспирантуре я был материально поддержан Лабораторией им. П.Л. Чебышева СПБГУ (грант Правительства РФ 11.G34.31.0026), я благодарен Лаборатории за поддержку и замечательную рабочую атмосферу. Работа была поддержана стипендией им. В.А. Рохлина (2013 год) и грантами РФФИ 11-01-00526 (2011–2013 год) и 14-01-00198 А (2014 год), спасибо.

Список литературы

1. Иосида К. *Функциональный анализ.* 3 изд. Изд. ЛКИ, 2010.

2. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* Москва: Наука, 1975.

3. Солонников В. А. *О некоторых неравенствах для функций из классов* $\mathbf{W}_p(R^n)$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 194–210.

4. Коляда В. И. *О вложении пространств Соболева* // Мат. зам. 1993. Т. 54, № 3. С. 48–71.

5. Мазья В. Г. *Пространства Соболева.* Ленинград: Изд. ЛГУ, 1985.

6. Tartar L. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces.* Lect. Notes UMI. Springer, 2007.

7. Sobolev S. *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales* // Мат. зам. 1936. Vol. 1(43), no. 1. P. 39–72.

8. Соболев С. Л. *Об одной теореме функционального анализа* // Мат. сб. 1938. Т. 4(46), № 3. С. 471–497.

9. Kuznetsov N. G., Nazarov A. I. *Sharp constants in Poincaré, Steklov and related inequalities (a survey)* // Препринты СПбМО. 2014. URL: `http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2014` (дата обращения: 27.09.2014).

10. Gagliardo E. *Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabli* // Ric. Mat. 1959. Vol. 8, no. 1. P. 24–51.

11. Nirenberg L. *On ellipltic partial differential equations* // Ann. Scuola Norm. Sup Pisa. 1959. Vol. 13, no. 3. P. 115–162.

12. John F. *Rotation and strain* // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14, no. 3. P. 391–413.

13. Бесов О. В., Ильин В. П. *Теорема вложения для предельного показателя* // Мат. зам. 1969. Т. 6, № 2. С. 129–138.

14. Dorronsoro J. R. *Differentiability properties of functions with bounded variation* // Ind. Univ. Math. Journ. 1989. Vol. 38, no. 4. P. 1027–1045.

15. Bourgain J., Brezis H. *On the equation* $\operatorname{div} Y = f$ *and application to control of phases* // Journ. AMS. 2002. Vol. 16, no. 2. P. 393–426.

16. van Schaftingen J. *Limiting Bourgain–Brezis inequalities for systems of linear differential equations*: *Theme and variations* // Journ. fixed point th. appl. 2014. P. 1–25.

17. van Schaftingen J. *Limiting Sobolev inequalities for vector fields and cancelling linear differential operators* // Journ. EMS. 2013. Vol. 15, no. 3. P. 877–921.

18. van Schaftingen J. *Estimates for* L_1*-vector fields* // C. R. Math. 2004. Vol. 339. P. 181–186.

19. Pełczyński A., Senator K. *On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical Banach spaces" and a Sobolev type embedding theorem* // Studia Math. 1986. Vol. 84. P. 169–215.

20. Strichartz R. S. *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations* // Duke Math. Journ. 1977. Vol. 44. P. 705–713.

21. Albiac F., Katlon N. J. *Topics in Banach space theory.* Iss. Grad. texts Math., no. 223. Springer, 2006.

22. Diestel J., Jarschow H., Tonge A. *Absolutely summing operators.* Cambridge Univ. Press, 1995.

23. Wojtaszczyk P. *Banach spaces for analysts.* Iss. Cambridge stud. adv. Math., no. 25. Cambridge University Press, 1991.

24. Grothendieck A. *Erratum au mémoire*: *produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1955–1956. Vol. 6. P. 117–120.

25. Хенкин Г. М. *Отсутствие равномерного гомеоморфизма между пространствами гладких функций от одного и от n переменных* ($n \geqslant 2$) // Мат. сб. 1967. Т. 74(116), № 4. С. 595–607.

26. Кисляков С. В. *Соболевские операторы вложения и неизоморфность некоторых банаховых пространств* // Функц. ан. и его прил. 1975. Т. 9, № 4. С. 22–27.

27. Кисляков С. В., Сидоренко Н. Г. *Отсутствие локальной безусловной структуры в анизотропных пространствах гладких функций* // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 3. С. 64–77.

28. Kwapień S., Pełczyński A. *Absolutely summing operators and translation-invariant spaces of functions on compact abelian groups* // Math. Nachr. 1980. Vol. 94. P. 303–340.

29. Кисляков С. В., Максимов Д. В. *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным набором дифференциальных операторов* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2005. Т. 327. С. 78–97.

30. Максимов Д. В. *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным набором дифференциальных операторов.* II // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2006. Т. 333. С. 62–65.

31. Havin V., Jöricke B. *The Uncertainty principle in harmonic analysis.* Springer, 1994.

32. Uchiyama A. *A constructive proof of the Fefferman–Stein decomposition of* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ // Acta Math. 1982. Vol. 148, no. 1. P. 215–241.

33. Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems.* Oxford Math. Mon. 2000.

34. Roginskaya M., Wojciechowski M. *Singularity of vector valued measures in terms of Fourier transform* // Journ. Fourier Anal. Appl. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 213–223.

35. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* Москва–Ижевск: Инст. Комп. Исслед., 2004.

36. Mattila P. *Geometry of sets and measures in Euclidean space.* Cambridge Univ. Press, 1995.

37. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. *Обобщенные функции и действия над ними.* Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.

38. де Рам Ж. *Дифференцируемые многообразия.* Москва: Изд. иностр. лит., 1956.

39. Бесов О. В. *О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения* // ДАН СССР. 1959. Т. 126, № 6. С. 1163–1165.

40. Бесов О. В. *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения* // Тр. МИАН. 1961. Т. 60. С. 42–81.

41. Peetre J. *New thoughts on Besov spaces.* Duke Univ. Math. Ser. I. Duke University, 1976.

42. Михайлов В. П. *О поведении на бесконечности одного класса многочленов* // Тр. МИАН. 1967. Т. 91. С. 59–80.

43. Берг Й., Лефстрем Й. *Интерполяционные пространства. Введение.* Москва: Мир, 1980.

44. Трибель Х. *Теория интерполяии, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* Москва: Мир, 1980.

45. Стейн И. М., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* Москва: Мир, 1974.

46. Grafakos L. *Classical Fourier analysis.* 2 edition. Springer, 2008.

47. Lindenstrauss J., Pełczyński A. *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications* // Studia Math. 1968. Vol. 29. P. 275–326.

48. Lindenstrauss J., Rosenthal H. P. *The $\mathcal{L}_p$ spaces* // Israel Journ. Math. 1969. Vol. 7. P. 325–349.

49. Rosenthal H. P. *Projections onto translation-invariant subspaces of $L^p(G)$.* 1966. Vol. 63.

50. Stein E. M. *Harmonic analysis, real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals.* Princeton Univ. Press, 1993.

51. Herz C. S. *Fourier Transforms Related to Convex Sets* // Ann. Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 81–92.

52. Hlawka E. *Über Integrale auf konvexen Körper* I // Monatsh. Math. 1950. Vol. 54. P. 1–36.

53. Tao T. *Recent progress on the Restriction conjecture.* 2003. URL: `http://arxiv.org/abs/math/0311181` (дата обращения: 27.09.2014).

54. Bourgain J., Guth L. *Bounds on oscillatory integral operators based on multilinear estimates.* 2010. to appear in GAFA. URL: `http://arxiv.org/abs/1012.3760` (дата обращения: 27.09.2014).

55. Guth L. *A restriction estimate using polynomial partitioning.* 2014. URL: `http://arxiv.org/abs/1407.1916` (дата обращения: 27.09.2014).

56. Stein E. M. *Interpolation of linear operators* // Trans. AMS. 1956. Vol. 83. P. 482–492.

57. Fefferman C. *The multiplier problem for the ball* // Ann. Math. 1971. Vol. 94. P. 330–336.

58. Carleson L., Sjölin P. *Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc* // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 287–299.

59. Fefferman C. *A note on spherical summation multipliers* // Israel Journ. Math. 1973. Vol. 15. P. 44–52.

60. Borjeson L. *Estimates for the Bochner–Riesz operator with negative index* // Ind. Univ. Math. Journ. 1986. Vol. 35, no. 2. P. 225–233.

61. Bak J.-G. *Sharp estimates for the Bochner–Riesz operator of negative order in* $\mathbb{R}^2$ // Proc. AMS. 1997. Vol. 125, no. 7. P. 1977–1986.

62. Стейн И. М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* Москва: Мир, 1978.

63. Belinsky E. S., Dveyrin M. Z., Malamud M. M. *Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators* // Russ. Journ. Math. Phys. 2005. Vol. 12, no. 1. P. 6–16.

64. Dveirin M. Z. *The question on multipliers in L^1 and C* // Journ. of Math. Sci. 2011. Vol. 174, no. 4. P. 453–468.

65. Graham C. C., McGehee O. C. *Essays in commutative harmonic analysis.* Berlin: Springer, 1979.

66. Beckner W., Carbery A., Semmes S., Soria F. *A note on restriction of the Fourier transform to spheres* // Bull. LMS. 1989. Vol. 21, no. 4. P. 394–398.

Публикации автора по теме диссертации

- Кисляков С. В., Максимов Д. В., Столяров Д. М., *Пространства гладких функций, порожденные неоднородными дифференциальными выражениями*// Функц. ан. и его прил.. 2013. Т. 47, н. 2. Стр. 89–92.

- Столяров Д. М., *Билинейные теоремы вложения для дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^2$*// Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 424. Стр. 210–235.

- Stolyarov D. M., Wojciechowski M., *Dimension of gradient measures*// C. R. Math. 2014. Vol. 352. Pp. 791–795.

Приложение

Доказательство леммы 2.4.8. Сделаем две замены переменной:

$$\iint \phi(n\eta)\phi\big(n^2(\xi - h(\eta))\big)(\xi - h(\eta))\Phi(\xi,\eta)e^{2\pi i(x\xi+y\eta)}\,d\xi\,d\eta =$$

$$n^{-5}\iint \phi(\eta)\phi(\xi)\xi\tilde{\Phi}(\xi,\eta)e^{2\pi i\left(\frac{x}{n^2}(\xi+h_n(\eta))+\frac{y}{n}\eta\right)}\,d\xi\,d\eta, \qquad (0.1)$$

$$\text{где } \tilde{\Phi}(\xi,\eta) = \Phi\Big(\frac{\xi}{n^2} + h\big(\frac{\eta}{n}\big), \frac{\eta}{n}\Big).$$

Функция h_n здесь определена формулой $h_n(\eta) = n^2 h(\frac{\eta}{n})$. Разобьем плоскость $\mathbb{R}^2$ на два множества: множество, где $|x| < c|y|$ (для некоторой константы c) и его дополнение. Первое множество назовем хорошим, второе — плохим. Выберем константу c настолько малой, что векторы хорошего множества непараллельны нормалям к кривой $(\eta, h(\eta))$, $\eta \in (-1,1)$. В таком случае, когда точка (x,y) принадлежит хорошему множеству, производная фазовой функции $\eta \mapsto \frac{x}{n^2}(\xi + h_n(\eta)) + \frac{y}{n}\eta$ равномерно по ξ отделена от нуля на отрезке $(-1,1)$, вне которого подынтегральное выражение равно нулю. Это (а также тот факт, что каждая частная производная функции $\tilde{\Phi}$ ограничена равномерно по n) позволяет переписывать интеграл, заданный формулой (0.1), используя формулу интегрирования по частям по переменной η (интегрируя функцию $2\pi i(\frac{x}{n^2}h_n'(\eta) + \frac{y}{n})e^{2\pi i\left(\frac{x}{n^2}(\xi+h_n(\eta))+\frac{y}{n}\eta\right)}$ и дифференцируя все остальное; при первом интегрировании "все остальное" есть $\frac{\phi(\eta)\phi(\xi)\xi\tilde{\Phi}(\xi,\eta)}{2\pi i(\frac{x}{n^2}h_n'(\eta)+\frac{y}{n})}$), сколь угодно большое количество раз (если точка (x,y) принадлежит хорошему множеству), что и приведет нас к требуемой оценке $\big(1 + \frac{|x|}{n^2} + \frac{|y|}{n}\big)^{-r}$ для любого r. Для того, чтобы получить оценку, когда точка (x,y) принадлежит плохому множеству, надо много раз проинтегрировать по частям по переменной ξ (интегрируя мнимую экспоненту и дифференцируя все остальное), что даст оценку $O(|1 + \frac{|x|}{n^2}|^{-r})$ для любого r. На плохом множестве эта оценка не превосходит требуемую. □

Доказательство леммы 2.5.13. Оценим норму функции $\partial_2^{l-1} f$, оставшийся случай аналогичен. Нетрудно видеть, что функция $\partial_2^{l-1} f$ получается из функции $(\partial_1^k - \tau\partial_2^l)f$ применением мультипликатора Фурье с символом

$$\frac{(2\pi i n)^{l-1}}{((2\pi i m)^k - \tau(2\pi i n)^l)}, \quad (m,n) \neq (0,0); \quad 0, \quad m = 0, n = 0. \tag{0.2}$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что указанная функция есть мультпликатор на пространстве $L_1(\mathbb{R}^2)$. По теореме 1.4.38, функция $(\xi,\eta) \mapsto (1-\Phi(\xi,\eta))\frac{(2\pi i\eta)^{l-1}}{((2\pi i\xi)^k - \tau(2\pi i\eta)^l)}$, где Φ — гладкая функция с носителем в единичном круге, тождественно равная единице в окрестности нуля, является мультипликатором на пространстве $L_1(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, по теореме 1.4.39, функция, заданная формулой (0.2), является мультипликатором на пространстве $L_1(\mathbb{T}^2)$. $\square$

Доказательство леммы 2.5.14. Достаточно показать, что мультипликатор Фурье с символом

$$\frac{1}{((2\pi i m)^k - \tau(2\pi i n)^l)}, \quad (m,n) \neq (0,0),$$

действует из пространства $L_1(\mathbb{T}^2)$ в пространство $L_2(\mathbb{T}^2)$. Это следует из того, что указанный символ принадлежит пространству $\ell_2(\mathbb{T}^2)$. Действительно, эту принадлежность легко проверить:

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{\big|(2\pi i m)^k - \tau(2\pi i n)^l)\big|^2} \lesssim \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{m^{2k}+n^{2l}} < \infty,$$

если одно из чисел k и l больше единицы. $\square$

Доказательство леммы 2.5.27. Если символом $d\gamma_\phi$ обозначить меру, действующую по правилу

$$d\gamma_\phi(A) = \int\limits_{(-1,1)} \phi(\xi)\chi_A\big((\xi,h(\xi)\big)\,d\xi, \quad A \text{ — борелевское множество в } \mathbb{R}^2,$$

(это мера на кривой γ с плотностью $\frac{\phi}{\sqrt{1+(h')^2}}$ относительно меры Лебега на кривой γ), а символом ζ — обобщенную функцию, заданную по правилу

$$\langle \zeta, \Psi\rangle = \langle \mathrm{v.\,p.}\,\eta^{-\delta}, \phi(\eta)\Psi(\xi,\eta)\rangle, \quad \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$

(слева в этой формуле стоит “скалярное произведение” функций на пространстве $\mathbb{R}^2$, а справа — на пространстве $\mathbb{R}$ как функций переменной η), то ядро оператора u_δ можно записать так:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[u_\delta](x,y) = \mathcal{F}^{-1}\Big[d\gamma_\phi * \zeta\Big](x,y) = \mathcal{F}^{-1}[d\gamma_\phi](x,y)\mathcal{F}^{-1}[\zeta](x,y) = \\ \mathcal{F}^{-1}[d\gamma_\phi](x,y)\Big(\check{\phi} * \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to y}\big[\mathrm{v.\,p.}\,\eta^{-\delta}\big]\Big)(y).\end{aligned} \tag{0.3}$$

Согласно лемме 1.4.28, первый множитель не превосходит $(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{4}}$ (и ни коим образом не зависит от параметра δ), то есть, для того, чтобы доказать лемму, достаточно показать, что

$$\Big|\Big(\check{\phi} * \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to y}\big[\mathrm{v.\,p.}\,\eta^{-\delta}\big]\Big)(y)\Big| \lesssim e^{e^{0.01|\Im\delta|}}|1+y^2|^{\frac{1}{4}}.$$

Воспользовавшись формулой (1.4.2) для преобразования Фурье обобщенной функции $\mathrm{v.\,p.}\,\eta^{-\delta}$и очевидным неравенством $|\Gamma(1-\delta)\cos\frac{\delta\pi}{2}| \lesssim e^{e^{0.01|\Im\delta|}}$, когда $\Re\delta \in (0,\frac{3}{2}]$, приходим к неравенству

$$\Big|\check{\phi} * \operatorname{sign} x|x|^{\delta-1}\Big|(y) \lesssim (1+|y|^2)^{\frac{1}{4}}, \quad \Re\delta \in \big(0, \frac{3}{2}\big],$$

которое очевидно, так как функция $\check{\phi}$ убывает быстрее любой степени y. $\square$

Доказательство леммы 2.5.39. Докажем сначала второе утверждение. Символ мультипликатора вещественен, поэтому оператор u_1 самосопряжен, стало быть, достаточно доказать, что он не действует из пространства L_p в пространство L_q, когда $q \leqslant 4$. Покажем, что $u_1[\chi_{B_\varepsilon(0)}] \notin L_q$, $q \leqslant 4$, при достаточно малом ε. Для этого воспользуемся формулой (0.3) для ядра оператора u_1. Это ядро есть произведение функции вида $|x^2+y^2|^{-\frac{1}{2}}e^{2\pi i(\langle (x,y), x(x,y)\rangle - \frac{d}{4})}+$

$O(|x^2+y^2|^{-\frac{3}{2}})$, $x, y \to \infty$, см. формулу (1.4.6), и функции $\check{\phi}*(-\chi_{(-\infty,0)}+\chi_{(0,\infty)})$ (см. формулу (1.4.2) для преобразования Фурье функции $\mathrm{v.\,p.}\, x^{-1}$). При достаточно большом y функция $\check{\phi} * (-\chi_{(-\infty,0)} + \chi_{(0,\infty)})$ равна $-1 + O(y^{-1})$, так как $\int \check{\phi} = \phi(0) = 1$, поэтому, ядро имеет вид $(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}e(x,y)+O((x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}})$, где $e(x, y)$ — некоторая экспонента, скорость осцилляции которой равномерно ограничена. То есть, свертка ядра с характеристической функцией малого шара будет по амплитуде примерно равна ядру (так как в малой окрестности любой точки экспонента e почти не меняет своего значения), т.е. будет соизмерима с $(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$. Но эта функция не принадлежит пространству L_q при $q \leqslant 4$.

Докажем теперь первое утверждение леммы. Нам будет более удобно работать с геометрической формой утверждения LE (которая задана в предложении 2.5.25) с финитизатором, данным в замечании 2.5.26. Таким образом, нам надо показать, что мультипликатор с символом $\mathrm{v.\,p.}\, \frac{\phi(\xi)\phi(\eta-h(\xi))}{\eta-h(\xi)}$ разрывен как оператор из пространства ${}_{\gamma}L_p$ в пространство L_q (где $\gamma = \{(\xi, h(\xi)) \mid \xi \in (-1, 1)\}$) в случае $p \geqslant \frac{4}{3}$. Ввиду теорем 2.5.32 и 2.5.35, это следует из только что доказанного второго утверждения леммы. $\square$