САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Бабушкин Максим Владимирович

Оценки приближения функции посредством модулей непрерывности различных порядков

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент
О. Л. Виноградов

Санкт-Петербург – 2020

Оглавление

Обозначения

Следующие обозначения являются общими для всех глав диссертации и используются без дополнительных пояснений. Каждая глава также содержит собственный список обозначений.

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ — соответственно множества комплексных, вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел;
- $[a:b] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$;
- $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее $x \in \mathbb{R}$;
- $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ — дробная часть числа $x \in \mathbb{R}$;
- $\mathcal{A}$ — класс полунорм $P\colon C \to \mathbb{R}_+$, обладающих свойствами:
  - существует такое $M \in \mathbb{R}_+$, что для любой $f \in C$ будет $P(f) \leqslant M\,\|f\|$;
  - для любых $f \in C$ и $h \in \mathbb{R}$ верно $P(f(\cdot + h)) = P(f)$;
- $a_k(f)$, $b_k(f)$, $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f:
$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt,$$
$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt;$$
- C — пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$;
- C^r — пространство r раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций;
- $C(X)$ ($C[a,b] = C([a,b])$) — пространство непрерывных функций, заданных на множестве X;
- $E_n(f)_P$ — наилучшее приближение функции f относительно полунормы P тригонометрическими полиномами порядка меньше n:
$$E_n(f)_P = \inf_{T\in\mathcal{H}_{n-1}} P(f-T);$$

- $\mathcal{H}_n$ — пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n;
- $L_p(X)$ (где $1 \leqslant p < \infty$, $L_p[a,b] = L_p([a,b])$) — пространство измеримых функций f, суммируемых с p-ой степенью на X и нормой $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$;
- L_p (где $1 \leqslant p < \infty$) — пространство измеримых 2π-периодических функций f, суммируемых с p-ой степенью на периоде и нормой $\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$;
- $L_\infty(X)$ ($L_\infty[a,b] = L_\infty([a,b])$) — пространство измеримых существенно ограниченных на множестве X функций f с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in X} |f(x)|$;
- L_∞ — пространство измеримых 2π-периодических существенно ограниченных функций f с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$;
- $S_n f$ — сумма Фурье функции f:

$$S_n f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right);$$

- $S_h^r f$ — функция Стеклова r-го порядка функции f:

$$S_h^1 f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt,$$

$$S_h^r f(x) = S_h^1 S_h^{r-1} f(x) \quad \text{при } r-1 \in \mathbb{N};$$

- $\delta_t^r f$ — центральная разность r-го порядка функции f с шагом t:

$$\delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f\left(x + \frac{rt}{2} - kt\right);$$

- $\sigma_n f = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k f$ — сумма Фейера функции f;
- $\omega_r(f,h)_P = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant h} P\left(\delta_t^r f\right)$ — модуль непрерывности порядка r функции f с шагом h относительно полунормы P.

Если не оговорено противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности; в других случаях символы $\frac{0}{0}$ и $\infty \cdot 0$ понимаются как 0. Сумма $\sum\limits_a^b$ при $b < a$ считается равной нулю. Там, где это не приводит к неясности, вместо $+\infty$ пишется просто ∞.

Введение

Диссертация посвящена уточнению и обобщению известных ранее оценок отклонений некоторых методов приближения.

Диссертация состоит из трёх глав, разделённых на параграфы. Номер каждого утверждения или формулы состоит из двух чисел: номера главы и номера утверждения или формулы в данной главе. Во введении первое число в номерах формул равно нулю. Нумерация утверждений отдельная для каждого типа утверждений. Цитируемые результаты имеют буквенную нумерацию.

Первая глава посвящена улучшению оценок постоянной в неравенстве типа Джексона для периодических функций. Результаты этой главы частично опубликованы в [2].

Неравенством типа Джексона в теории аппроксимации принято называть неравенство, в котором наилучшее приближение функции оценивается посредством модуля непрерывности этой функции или её производных. Для пространства непрерывных 2π-периодических функций оно имеет вид

$$E_n(f) \leqslant \frac{J(m,r,\tau)}{n^r}\omega_m(f^{(r)},\tau/n),$$

где E_n — наилучшее приближение тригонометрическими полиномами порядка меньше n, ω_m — модуль непрерывности порядка m функции f.

Имеется не так много случаев, когда найдена точная постоянная в этом неравенстве

$$J(m,r,\tau) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in C^r}\frac{n^r E_n(f)}{\omega_m(f^{(r)},\tau/n)}.$$

Первый результат, связанный с нахождением точной постоянной, был получен Н. П. Корнейчуком в [22]. Им было установлено, что $J(1,0,\pi)=1$. Отметим ещё результат В. В. Жука (при $r=1$, [15]) и А. А. Лигуна (при нечётном r, [23]): $J(1,r,\pi) = \mathcal{K}_r/2$, где $\mathcal{K}_r$ — константа Фавара.

Большое количество исследований посвящено вопросу получения хороших оценок для J. При этом каждое такое исследование улучшает оценки лишь в определённом диапазоне значений m, r и τ. Например, в случае $m\geqslant 2$, $r\to\infty$, $\tau\geqslant\pi$ лучшей оказывается оценка, найденная в [16, гл. 3, §5, теорема 2]; при $m\to\infty$, $r\in\mathbb{N}$, $\tau<\pi$ — в [16, гл. 7, §1, теорема 4] (где она выражена через нормы сумм Рисса, оцененные в [20]); при $m \in \mathbb{N}$, $r = 0$, $\tau \to \infty$ — в [17, гл. 2, §3, теорема 3]; при $m \in \mathbb{N}$, $r = 0$, $\tau \to +0$ — в [18]; при $m \geqslant 10$, $r = 0$ и некоторой окрестности точки $\tau = \pi$ — в [11]. Работы, содержащие рекордные оценки при малых значениях m, r и некоторых τ: при $r = 0$, $m = 2$ — [8]; $r = 0$, $m = 4, 6, 8$ — [9]; при малых $r \in \mathbb{N}$ — [21] (эта статья обобщает [47]).

В первой главе диссертации устанавливаются оценки для постоянной J, которые улучшают известные в случае $m \to \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\tau \geqslant \pi$. Вычисления показывают, что они оказываются наименьшими из известных и для некоторых малых значений m, r и τ. Наилучшие в указанном случае оценки до настоящего момента содержались в [11], где также имеется подробное сопоставление различных результатов.

Техника получения оценок в целом аналогична таковой из работы [11]. При этом так же ключевую роль играют модификации функций Стеклова $S_{h,2,m}f$. Приведём их определение. Пусть функция f задана на $\mathbb{R}$ и суммируема на любом конечном промежутке. При $h > 0$ полагаем

$$S_{h,2,m}f = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} C_{2m}^{m-j} S_{jh}^2 f = f + \frac{2(-1)^{m-1}}{C_{2m}^m} \int\limits_0^h \delta_t^{2m} f \cdot \frac{(1-t/h)}{h}\, dt,$$

где $S_h^2 f$ — функция Стеклова второго порядка.

Неравенство Джексона выводится из соотношений

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leqslant E_n(f - S_{h,2,m}^l f) + E_n(S_{h,2,m}^l f) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{l-1} E_n(S_{h,2,m}^k (f - S_{h,2,m} f)) + E_n(S_{h,2,m}^l f). \end{aligned}$$

Каждое слагаемое мажорируется модулем непрерывности производной функции f. Улучшение возникающей при этом постоянной достигается за счёт несколько иного, чем в [11], способа оценивания величины $E_n(S_{h,2,m}^k(f - S_{h,2,m}f))$.

В полученной оценке участвует норма оператора $S_{h,2,m}$. Она была вычислена в [2], и соответствующие выкладки приводятся в первой главе. Попутно отметим, что в той же работе вычислены нормы оператора $S_{h,1,m}$, построенного аналогично $S_{h,2,m}$ на основе функций Стеклова первого порядка.

Вывод о том, что найденная оценка лучше известных в указанном случае, делается на основе её асимптотического поведения. В завершение первой главы для малых значений m и r в случаях $\tau = \pi$ и $\tau = 2\pi$ приводятся вычисленные приближённо оценки для $J(m, r, \tau)$, наилучшие среди работ, упомянутых выше.

Вторая глава посвящена оценкам остаточного члена в асимптотических формулах типа Вороновской–Бернштейна для широкого круга методов приближения. Результаты этой главы опубликованы в [3].

Хорошо известна следующая теорема, которая устанавливает порядок приближения функций, имеющих вторую производную, многочленами Бернштейна

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x),$$

где

$$p_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Теорема A (Е. В. Вороновская, см., например, [25, гл. X, §2]; [35, §10.3])**.** *Пусть* f *ограничена на* $[0,1]$ *и имеет вторую производную в точке* $x \in [0,1]$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n f(x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

Если $f \in C^2[0,1]$, *то сходимость равномерная.*

Этот результат был обобщён С. Н. Бернштейном (см. [6, п. 57]) следующим образом. Положим

$$S_{r,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^r p_{n,k}(x).$$

Если функция f ограничена и имеет производную чётного порядка $2i$ в точке x, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} n^i \left(B_n f(x) - \sum_{k=0}^{2i-1} \frac{S_{k,n}(x) f^{(k)}(x)}{k!}\right) = \frac{f^{(2i)}(x)}{i!} \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^i.$$

Другими словами, справедлива асимптотическая формула

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{2i-1} \frac{S_{k,n}(x) f^{(k)}(x)}{k!} + \frac{f^{(2i)}(x)}{i! n^i} \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^i + R_{2i}(x), \qquad (0.1)$$

а для остаточного члена $R_{2i-1}(x)$ верно соотношение

$$R_{2i}(x) = o\left(\frac{1}{n^i}\right) \quad \text{при } n \to \infty.$$

С. А. Теляковский в [28] распространил этот результат на функции, имеющие производную нечётного порядка $2i+1$ в точке x. Формула (0.1) при этом не меняется, а для остаточного члена верно

$$R_{2i+1}(x) = o\left(\frac{1}{n^{i+1/2}}\right).$$

В упомянутых до сих пор результатах не указывается, каким образом свойства функции влияют на скорость стремления к нулю остаточного члена.

Для случая $i = 0$, $f \in C[0,1]$ известна оценка Поповичиу (см., например, [41, Т. 1.6.1])

$$|f(x) - B_n f(x)| \leqslant \frac{5}{4}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

а для $f \in C^1[0,1]$ (Фрейд, см., например, [35, §10.3, Т. 3.2], [7]):

$$|f(x) - B_n f(x)| \leqslant 2\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\omega\left(f', \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right). \tag{0.2}$$

Приведём оценки, когда $f \in C^2[0,1]$.

Теорема B ([31])**.** *Пусть $f \in C^2[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\left|n\left(B_n f(x) - f(x)\right) - \frac{x(1-x)}{2}f''(x)\right| \leqslant x(1-x)\omega\left(f'', \sqrt{\frac{2}{n}}\right).$$

Не так давно это неравенство было несколько улучшено.

Теорема C ([38], см. также [39, Т. 4.3])**.** *Пусть $f \in C^2[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, ω^* — выпуклый модуль непрерывности функции. Тогда*

$$\left|n\left(B_n f(x) - f(x)\right) - \frac{x(1-x)}{2}f''(x)\right| \leqslant \frac{x(1-x)}{2}\omega^*\left(f'', \frac{1}{3\sqrt{n}}\right).$$

В работе [29] даётся более тонкая оценка для отклонений полиномов Бернштейна. В ней обычный модуль непрерывности, рассматриваемый на всём отрезке, заменяется на модуль непрерывности, связанный с конкретной точкой, в которой исследуется точность приближения.

Теорема D ([29]). *Пусть функция f ограничена на $[0,1]$, $x_0 \in [0,1]$ и при всех t, таких что точки x_0+t принадлежат $[0,1]$, имеет место оценка*

$$|f(x_0+t)-f(x_0)| \leqslant \omega(|t|),$$

где ω — некоторый модуль непрерывности. Тогда для приближения функции f в точке x_0 многочленами Бернштейна справедливо неравенство

$$|f(x_0)-B_nf(x_0)| \leqslant 2\omega\left(\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\right).$$

Теорема E ([29]). *Пусть функция f ограничена на $[0,1]$, имеет в точке $x_0 \in [0,1]$ производную первого порядка и при всех t, таких что точки x_0+t принадлежат $[0,1]$, справедливо представление*

$$f(x_0+t)=f(x_0)+f'(x_0)t+v(t)t,$$

для функции $v(t)$ в котором выполняется оценка $|v(t)| \leqslant \omega(|t|)$, где ω — некоторый модуль непрерывности. Тогда для приближения f в точке x_0 многочленами Бернштейна имеет место неравенство

$$|f(x_0)-B_nf(x_0)| \leqslant 2\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\,\omega\left(\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\right).$$

Отметим ещё одну общую теорему.

Теорема F ([37]). *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^r[0,1]$, $L\colon C[0,1] \to C[0,1]$ — линейный положительный оператор. Тогда*

$$\begin{aligned}\left|Lf(x)-\sum_{k=0}^{r}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}L((e_1-x)^k)(x)\right| \\ \leqslant \frac{L\left(|e_1-x|^r\right)(x)}{r!}\omega^*\left(f^{(r)},\frac{L(|e_1-x|^{r+1})(x)}{(r+1)L(|e_1-x|^r)(x)}\right),\end{aligned}$$

где $e_1(x)=x$, ω^* — выпуклый модуль непрерывности.

Во второй главе оценки так же, как в теоремах D и E, ведутся при помощи модуля непрерывности, связанного с точкой. Но при этом оценки даются для несколько большей величины, имеющей отношение к «сильной аппроксимации». Поясним это понятие подробнее.

В 1904 г. Фейер показал, что арифметические средние отклонений непрерывной функции от её сумм Фурье сходятся к нулю, то есть

$$
\begin{aligned}
\sigma_n f(x) - f(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f(x) - f(x) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (S_k f(x) - f(x)) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

В 1913 г. Харди и Литтлвуд поставили вопрос: верно ли это утверждение для средних степенных отклонений

$$
H_n(p, f, x) := \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |S_k f(x) - f(x)|^p\right)^{1/p} ? \tag{0.3}
$$

Для $f \in L_q$, $q > 1$, $p > 0$ они установили, что $H_n(p, f, x) \to 0$ при $n \to \infty$ почти всюду. В дальнейшем Марцинкевич показал, что это верно для $f \in L_1$ при $p = 2$, а Зигмунд распространил этот результат на любые значения $p > 0$ (см., например, [5, гл. VII]). Вопросы, связанные с изучением величин типа (0.3), относят к так называемой «сильной аппроксимации».

В. В. Жук рассматривал величины, аналогичные (0.3), построенные на основе положительных операторов вида

$$
J_\sigma f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x + t/\sigma) K(t)\, dt.
$$

В работе [19] им были получены в терминах выпуклого модуля непрерывности функции f с аргументом, зависящим от φ, оценки величины

$$
\Phi(f, \varphi, y) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(\varphi(y)) - f(\varphi(y + t/\sigma))|^p K(t)\, dt\right)^{1/p}, \tag{0.4}
$$

которая не меньше отклонения

$$
|f(\varphi(y)) - J_\sigma(f \circ \varphi)(y)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} (f(\varphi(y)) - f(\varphi(y + t/\sigma)))\, K(t)\, dt\right|.
$$

Во второй главе устанавливаются оценки величин типа (0.4), мажорирующих остаточные члены в асимптотических формулах Вороновской–Бернштейна для широкого круга методов приближения. Оценки ведутся при помощи выпуклого модуля непрерывности, связанного с индивидуальной точкой.

Приведём пример получаемых результатов применительно к многочленам Бернштейна.

Теорема. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, *ограниченная функция* $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ *имеет в точке* $x \in [0,1]$ *производную* r*-го порядка; при всех* t*, таких что* $x + t \in [0,1]$*, справедливо представление*

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!} t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$, ω *— выпуклый модуль непрерывности. Положим*

$$\overline{S}_{\alpha,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} - x \right|^{\alpha} p_{n,k}(x).$$

Тогда, если $0 < \overline{S}_{pr,n}(x) \leqslant M$*, то*

$$\left| B_n f(x) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} S_{l,n}(x) \right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \left(\frac{k}{n} - x\right)^l \right|^p p_{n,k}(x) \right)^{1/p}$$
$$\leqslant \frac{\overline{S}_{pr,n}^{1/p}(x)}{r!} \omega\left(\left(\frac{\overline{S}_{p(r+1),n}(x)}{\overline{S}_{pr,n}(x)} \right)^{1/p} \right) \leqslant \frac{M^{1/p}}{r!} \omega\left(\left(\frac{\overline{S}_{p(r+1),n}(x)}{M} \right)^{1/p} \right).$$

Если функция $f \in C^r[0,1]$, то участвующий в теореме модуль непрерывности $\omega(t)$ мажорируется выпуклым модулем непрерывности $\omega^*(f^{(r)}, \frac{t}{r+1})$, который, в свою очередь, не превосходит $2\omega_1(f^{(r)}, \frac{t}{r+1})$.

Во второй главе устанавливаются аналогичные общие теоремы, применимые к положительным операторам вида

$$Lf(x) = \sum_{k \in Q} f(x_k) p_k(x),$$
$$Uf(x) = \sum_{k \in Q} \left(\int_E f(t) \varphi_k(t)\, dt \right) p_k(x),$$
$$Vf(x) = \int_E f(x+t) \psi(t)\, dt.$$

Также приводятся примеры приложений результатов к конкретным методам приближения.

Из результатов второй главы следуют теоремы C (см. пример 2.4), D, E, F, а в неравенстве (0.2) удаётся добавить множитель 1/2 перед шагом модуля непрерывности. Аналогичные результаты (также вытекающие из результатов второй главы диссертации), содержащие равномерный (а не локальный) модуль непрерывности функции, содержатся в [4].

Третья глава посвящена установлению двусторонних оценок отклонений сумм Рисса дробного порядка от чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Результаты этой главы опубликованы в [1].

С. Н. Бернштейн установил (см., например, [25, гл. V, §3, гл. VIII, §2]), что отклонение сумм Фейера $\sigma_n f$ характеризует класс Липшица с показателем α при $0 < \alpha < 1$, а именно

$$\|f - \sigma_n f\| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in \operatorname{Lip}\alpha.$$

При $\alpha = 1$ это утверждение уже неверно. Справедливо неулучшаемое по порядку соотношение (см., например, [25, гл. VIII, §2, теоремы 2, 3])

$$\|f - \sigma_n f\| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Но такая же оценка справедлива и для функций из класса Зигмунда, являющегося более широким, чем класс $\operatorname{Lip} 1$.

Тем не менее, как показал Алексич (см. [32]), суммы Фейера можно использовать для характеризации класса $\operatorname{Lip} 1$, если перейти к тригонометрически сопряжённой функции:

$$\|f - \sigma_n f\| = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widetilde{f} \in \operatorname{Lip} 1.$$

С. Б. Стечкин (см. [27]) для случая, когда $f \in C$ и $\widetilde{f} \in C$, установил неравенство

$$\|f - \sigma_n f\| \leqslant C_1 \left(E_n(f) + \omega_1\left(\widetilde{f}, \frac{1}{n}\right)\right)$$

(здесь и далее C_k — постоянные, зависящие только от выписанных аргументов). В частности, отсюда следует

$$\|f-\sigma_n f\| \leqslant C_2\left(\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)+\omega_1\left(\widetilde{f},\frac{1}{n}\right)\right).$$

Двустороннюю оценку такого типа получил В. В. Жук [14]:

$$C_3\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)+n\omega_2\left(\widetilde{F},\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \|f-\sigma_n f\| \leqslant C_4\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)+n\omega_2\left(\widetilde{F},\frac{1}{n}\right)\right),$$

где F — первообразная для функции $f-c_0(f)$.

Полученное неравенство было обобщено В. В. Жуком (см. [13], [16, гл. VII, §1, теоремы 1, 2 и 8]) для сумм Рисса

$$R_{n,r}f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^r\right)\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right),$$

совпадающих с суммами Фейера при $r=1$. Именно, при $f\in C$, $n\in\mathbb{N}$, $r/2\in\mathbb{N}$

$$C_5(r)\omega_r\left(f,\frac{\pi}{n}\right) \leqslant \|f-R_{n,r}f\| \leqslant C_6(r)\omega_r\left(f,\frac{\pi}{n}\right). \tag{0.5}$$

Если же $(r+1)/2\in\mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} C_7(r)\left(\omega_{r+1}\left(f,\frac{\pi}{n}\right)+n\omega_{r+1}\left(\widetilde{F},\frac{\pi}{n}\right)\right) &\leqslant \|f-R_{n,r}f\| \\ \leqslant C_8(r)\left(\omega_{r+1}\left(f,\frac{\pi}{n}\right)+n\omega_{r+1}\left(\widetilde{F},\frac{\pi}{n}\right)\right). \end{aligned} \tag{0.6}$$

Отметим, что независимо от В. В. Жука случай чётного значения r рассматривал также Р. М. Тригуб (см. [30, §3, п. 1]).

Возникает вопрос, нельзя ли неравенства (0.5) и (0.6) распространить на случай, когда r принимает любое положительное, а не только целое значение? На данный момент удаётся ответить на него лишь частично. В третьей главе указанные двусторонние оценки обобщаются на случай дробного модуля непрерывности, но не для всего пространства C, а для его подкласса: для чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье.

Полученные результаты частично соприкасаются с работами С. Ю. Тихонова (см. [44; 45]). В частности, в [45] в качестве леммы без указания конкретных постоянных приводится неравенство (0.5), когда f — чётная функция с неотрицательными коэффициентами Фурье, а r — любое положительное не нечётное число. Однако, вместо отклонения сумм Рисса нечётного порядка в той же работе изучается другая величина. О связи с результатами С. Ю. Тихонова см. также замечание 3.5.

Приведём один из основных результатов третьей главы.

Теорема. *Пусть $\beta > \alpha \geqslant 0$, число β представимо в виде $\beta = 2m + \sigma$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in (-1, 1]$; $f \in C$ — чётная функция с неотрицательными коэффициентами Фурье, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi^\beta}\left(n^\alpha \omega_\beta\left(H_{-\alpha} f^{(-\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right) + \omega_\beta\left(f, \frac{\pi}{n}\right)\right) \leqslant \|f - R_{n-1,\beta-\alpha} f\|$$
$$\leqslant \frac{\pi}{2^\beta C(\beta,\sigma)}\left(\frac{n^\alpha}{\cos\frac{\pi\sigma(n-1)}{2n}}\omega_\beta\left(H_{-\alpha} f^{(-\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right) + \omega_\beta\left(f, \frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Здесь H_γ — преобразование Гильберта дробного порядка (см. формулу (3.2)), $f^{(-\alpha)}$ — первообразная в смысле Вейля; постоянная $C(\beta,\sigma)$ определяется равенством

$$C(\beta,\sigma) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^\beta t \cdot \cos \sigma t \, dt.$$

Данное утверждение обобщает неравенства (0.5) и (0.6) для чётных непрерывных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Неравенство (0.5) получается из данного следствия при $\alpha = 0$ и $\beta = r$, а неравенство (0.6) — при $\alpha = 1$ и $\beta = r + 1$.

Глава 1

Оценки постоянной в неравенстве типа Джексона для периодических функций

В этой главе устанавливаются оценки постоянной $J(m,r,\tau)$ в неравенстве типа Джексона

$$E_n(f) \leqslant \frac{J(m,r,\tau)}{n^r}\omega_m(f^{(r)},\tau/n),$$

которые улучшают известные при $m\to\infty$, $r\in\mathbb{N}$, $\tau\geqslant\pi$.

Далее вводятся необходимые обозначения, после чего формулируется основной результат (теорема 1.1), доказательство которого содержится в § 1.2. Перед этим в § 1.1 вычисляются нормы оператора $S_{h,2,m}$. В § 1.3 даётся описание асимптотического поведения найденной оценки для $J(m,r,\tau)$, на основании которого в § 1.4 она сравнивается с оценкой из [11]. В завершение для малых значений m и r в случаях $\tau=\pi$ и $\tau=2\pi$ приводятся вычисленные приближённо наилучшие оценки для $J(m,r,\tau)$ среди работ, упомянутых во введении.

В этой главе обозначаем через $\Delta^r a_k$ ($\Delta a_k = \Delta^1 a_k$) разность порядка r последовательности $\{a_k\}$:

$$\begin{aligned}
&\Delta^0 a_k = a_k,\\
&\Delta^r a_k = \Delta^{r-1}a_{k+1} - \Delta^{r-1}a_k, \quad r\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Полагаем

$$S_{h,2,m}f = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}C_{2m}^{m-j}S_{jh}^2 f = f + \frac{2(-1)^{m-1}}{C_{2m}^m}\int\limits_0^h \delta_t^{2m} f\cdot\frac{1-t/h}{h}\,dt;$$

$$\alpha_{2,m} = \|S_{h,2,m}\|_{C\to C};$$

$$W_{l,r,m}(f,h)_P = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} P(t^{rl}(S_{t,r,m}^l f)^{(rl)});$$

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \quad \text{(константы Фавара)};$$

$$D_m = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{нечёт.}}}^m\frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2};$$

$$g(r,\tau)=\begin{cases} 2^r\mathcal{K}_r\left(1-\dfrac{4r\mathcal{K}_r^{1/r}}{(r+1)\tau}+\dfrac{4r\mathcal{K}_r^{2/r}}{(r+2)\tau^2}\right) & \text{если } r\in\mathbb{N},\ \tau>2\mathcal{K}_r^{1/r},\\ \dfrac{2\tau^r}{(r+1)(r+2)}, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$\eta(m,k,\tau)=\begin{cases} \dfrac{4^k\mathcal{K}_{2k}D_m^k}{\tau^{2k}}, & \text{если } k\in\mathbb{N},\ \tau>\dfrac{2\mathcal{K}_{2k}^{\frac{1}{2k}}\sqrt{D_m}}{\sqrt{\alpha_{2,m}}},\\ \alpha_{2,m}^k, & \text{в остальных случаях;}\end{cases} \tag{1.1}$$

$$\rho(m,r,\tau)=\begin{cases} \dfrac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\tau}, & \text{если } r \text{ нечётно}, \tau>\dfrac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\mathcal{K}_{2m}},\\ \mathcal{K}_{2m}, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$J(m,r,\tau)_P=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in C^r}\frac{n^rE_n(f)_P}{\omega_m(f^{(r)},\tau/n)_{E_n(\cdot)_P}}, \tag{1.2}$$

$$A(m,r,\tau)=\frac{g(r,\tau)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}\sum_{k=0}^{\lceil m/2\rceil-1}\eta\left(\frac{m+r}{2},k,\tau\right)+\frac{\rho\left(\frac{m+r}{2},r,\tau\right)D_{(m+r)/2}^{\lceil m/2\rceil}}{\tau^m}. \tag{1.3}$$

Вместо символов $E_n(f)_P$, $\omega_m(f,h)_{E_n(\cdot)_P}$, $J(m,r,\tau)_P$ и $W_{l,2,m}(f,h)_{E_n(\cdot)_P}$, как правило, будем использовать сокращения $E_n(f)$, $\omega_m(f,h)$, $J(m,r,\tau)$ и $W_{l,2,m}(f,h)$ соответственно.

Теорема 1.1. *Пусть $m,r,\frac{m+r}{2}\in\mathbb{N}$, $\tau>0$, $P\in\mathcal{A}$. Тогда при $\tau\leqslant 2$*

$$J(m,r,\tau)\leqslant A(m,r,\tau),$$

а в случае $\tau>2$

$$J(m,r,\tau)\leqslant\min_{t\in[2,\tau]}A\left(m,r,t\right).$$

Замечание 1.1. Поскольку

$$\omega_m(f,h)_{E_n(\cdot)_P}\leqslant\omega_m(f,h)_P,$$

то, заменяя P на норму в пространстве C, из теоремы 1.1 получаем те же оценки для точной постоянной в обобщённом неравенстве Джексона в пространстве C. Стандартным образом (см. [16, гл. III, §2]) оценки переносятся и на пространства L_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

Приведём некоторые известные утверждения, которые потребуются в дальнейшем.

Лемма 1.A ([16, гл. 2, §3]). *Пусть $f \in C$, $P \in \mathcal{A}$, функция K непрерывна на множестве $\mathbb{R} \times [a,b]$, где $-\infty < a < b < \infty$. Тогда $\int_a^b K(\cdot,t)\,dt \in C$ и*

$$P\left(\int\limits_a^b K(\cdot,t)\,dt\right) \leqslant \int\limits_a^b P(K(\cdot,t))\,dt.$$

Теорема 1.A (см., например, [16, гл. 3, §1, следствие 2]). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^r$, $P \in \mathcal{A}$. Тогда*

$$E_n(f)_P \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} E_n(f^{(r)})_P. \tag{1.4}$$

Лемма 1.B ([36]). *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\sqrt{\pi(m+1/2)}}{m} \leqslant D_m \leqslant \frac{\pi^2}{4} - \frac{\sqrt{\pi m}}{m+1/2}.$$

1.1. Норма оператора $\mathbf{S_{h,2,m}}$

Здесь и далее считаем, что $C_m^k = 0$, если $k > m$.

Лемма 1.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Положим $a_k = C_{2m}^{m+k}/k$. Тогда*

$$\Delta a_k \leqslant 0, \quad \Delta^2 a_k \geqslant 0, \quad \Delta^3 a_k \leqslant 0.$$

Доказательство. Установим, что

$$\Delta^3 a_k = \frac{C_{2m}^{m+k+3}}{k+3} - 3\frac{C_{2m}^{m+k+2}}{k+2} + 3\frac{C_{2m}^{m+k+1}}{k+1} - \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \leqslant 0.$$

При $k > m$ неравенство тривиально. Если $k = m$, то оно равносильно неравенству $-\frac{1}{m} \leqslant 0$, если $k = m-1$ — неравенству

$$\frac{-2m^2+3m-3}{m(m-1)} \leqslant 0.$$

При $k = m-2$ требуется доказать, что

$$-\frac{3}{m} + \frac{6m}{m-1} - \frac{m(2m-1)}{m-2} \leqslant 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, верно, когда $m = 3$. Если же $m > 3$, то

$$-\frac{3}{m} + \frac{6m}{m-1} - \frac{m(2m-1)}{m-2} \leqslant -\frac{3}{m} + \frac{6m}{m-2} - \frac{m(2m-1)}{m-2}$$

$$= -\frac{3}{m} - \frac{m(2m-7)}{m-2} \leqslant 0.$$

Теперь рассмотрим случай $k \leqslant m-3$. Имеем

$$\Delta^3 a_k = \frac{(2m)!}{(m+k)!(m-k-3)!}\left(\frac{1}{(k+3)(m+k+3)(m+k+2)(m+k+1)}\right.$$
$$-\frac{3}{(k+2)(m+k+2)(m+k+1)(m-k-2)}$$
$$+\frac{3}{(k+1)(m+k+1)(m-k-1)(m-k-2)}$$
$$\left.-\frac{1}{k(m-k)(m-k-1)(m-k-2)}\right).$$

Вычисления показывают, что после приведения к общему знаменателю числитель выражения в скобках примет вид

$$\begin{aligned}&-8k^6 - 72k^5 - 6m^2k^2 - 248k^4 - 6m^3 - 18m^2k - 18mk^2\\ &-408k^3 - 36m^2 - 54mk - 332k^2 - 66m - 132k - 36,\end{aligned}$$

а значит, $\Delta^3 a_k \leqslant 0$.

Неравенство $\Delta^3 a_k \leqslant 0$ доказано для любых $m, k \in \mathbb{N}$. Поскольку $a_k = 0$ при $k > m$, то $\Delta^2 a_k = -\sum\limits_{j=k}^{\infty} \Delta^3 a_j \geqslant 0$, $\Delta a_k = -\sum\limits_{j=k}^{\infty} \Delta^2 a_j \leqslant 0$. $\square$

Лемма 1.2. *Пусть* $j, m \in \mathbb{N}$. *Положим*

$$\lambda_j = \lambda_{j,m} = \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-j} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2},$$
$$\mu_j = \mu_{j,m} = \sum_{k=j+1}^{m} (-1)^{k} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}(k-j).$$

Тогда

(а) $\lambda_j \geqslant 0,\ \Delta\lambda_j \leqslant 0,\ \Delta^2\lambda_j \geqslant 0$;

(б) $\operatorname{sgn}\mu_j = (-1)^{j+1}$ *при* $0 \leqslant j \leqslant m-1$;

(в) $\Delta|\mu_j| \leqslant 0$;

(г) $\sum\limits_{l=0}^{m-1} |\mu_l| = \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$.

Доказательство. (а) Поскольку $C_{2m}^{m+k} = 0$ при $k > m$, то, попарно группируя слагаемые, имеем

$$\lambda_j = \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^{k-j} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2} = -\sum_{l=0}^{\infty} \Delta \frac{C_{2m}^{m+j+2l}}{(j+2l)^2},$$

где разность берётся по j. Отсюда, во-первых, следует, что $\lambda_j \geqslant 0$. Во-вторых, получаем

$$\Delta^2 \lambda_j = -\sum_{l=0}^{\infty} \Delta^3 \frac{C_{2m}^{m+j+2l}}{(j+2l)^2}.$$

В силу леммы 1.1 для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta^3 \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2} = \left(\Delta^3 \frac{C_{2m}^{m+k}}{k}\right) \frac{1}{k} + 3\left(\Delta^2 \frac{C_{2m}^{m+k+1}}{k+1}\right) \Delta \frac{1}{k}$$
$$+ 3\left(\Delta \frac{C_{2m}^{m+k+2}}{k+2}\right) \Delta^2 \frac{1}{k} + \frac{C_{2m}^{m+k+3}}{k+3} \Delta^3 \frac{1}{k} \leqslant 0.$$

Значит, $\Delta^2 \lambda_j \geqslant 0$, $\Delta \lambda_j = -\sum\limits_{k=j}^{\infty} \Delta^2 \lambda_j \leqslant 0$.

(б) Заметим, что

$$\Delta \mu_j = \sum_{k=j+2}^{m} (-1)^k \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2} (k - (j+1)) - \sum_{k=j+1}^{m} (-1)^k \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2} (k-j)$$
$$= \sum_{k=j+2}^{m} (-1)^k \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2} \cdot (-1) - (-1)^{j+1} \frac{C_{2m}^{m+j+1}}{(j+1)^2} = -\sum_{k=j+1}^{m} (-1)^k \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2} = (-1)^j \lambda_{j+1}.$$

Поэтому $\mu_j = -\sum\limits_{k=j}^{\infty} \Delta \mu_k = -\sum\limits_{k=j}^{\infty} (-1)^k \lambda_{k+1}$. Полученная сумма состоит из чередующих знаки и убывающих по модулю слагаемых (пункт (а)), следовательно, $\operatorname{sgn} \mu_j = (-1)^{j+1}$.

(в) Группируя слагаемые попарно, имеем

$$|\mu_j| = \left| \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^k \lambda_{k+1} \right| = -\sum_{l=0}^{\infty} \Delta \lambda_{j+2l+1},$$

где разность берётся по j. Отсюда, принимая во внимание пункт (а),

$$\Delta |\mu_j| = -\sum_{l=0}^{\infty} \Delta^2 \lambda_{j+2l+1} \leqslant 0.$$

(г) В силу утверждения пункта (б)

$$\sum_{l=0}^{m-1}|\mu_l| = \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^{l+1}\mu_l = \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^{l+1}\sum_{k=l+1}^{m}(-1)^k\frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}(k-l)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l+k+1}\frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}(k-l) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l(k-l)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor,$$

что и требовалось. □

Теорема 1.2. *Пусть $P \in \mathcal{A}$, $f \in C$, $h > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$P\left(S_{h,2,m}f\right) \leqslant \alpha_{2,m}P(f), \tag{1.5}$$

где

$$\alpha_{2,m} = \|S_{h,2,m}\|_{C\to C} = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_{j-1}^2+\mu_j^2}{\lambda_j} \leqslant \frac{2m}{m+1}, \tag{1.6}$$

а числа λ_j и μ_j определены так же, как и в лемме 1.2:

$$\lambda_j = \lambda_{j,m} = \sum_{k=j}^{m}(-1)^{k-j}\frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2},$$
$$\mu_j = \mu_{j,m} = \sum_{k=j+1}^{m}(-1)^k\frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}(k-j).$$

Доказательство. Положим

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 1-|t|, & \text{если } t \in [-1,1], \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Используя интегральное представление функции Стеклова второго порядка, имеем

$$S_{h,2,m}f(x) = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C_{2m}^{m+k}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+thk)\psi_2(t)\,dt.$$

Заменяя t на t/k в каждом из интегралов и меняя порядок суммирования и интегрирования, находим

$$S_{h,2,m}f(x) = \frac{2}{C_{2m}^m} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+th) \left(\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \psi_2\left(\frac{t}{k}\right) \right) dt.$$

Применяя лемму 1.A, получаем

$$\begin{aligned} P(S_{h,2,m}f) &\leqslant \frac{2}{C_{2m}^m} \int\limits_{\mathbb{R}} P\left(f(\cdot + th) \left(\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \psi_2\left(\frac{t}{k}\right) \right) \right) \\ &= P(f) \frac{2}{C_{2m}^m} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \psi_2\left(\frac{t}{k}\right) \right| dt. \end{aligned}$$

Принимая во внимание чётность функции ψ_2, имеем

$$\begin{aligned} P(S_{h,2,m}f) &\leqslant P(f) \cdot \frac{4}{C_{2m}^m} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \left| \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \psi_2\left(\frac{t}{k}\right) \right| dt \\ &= P(f) \cdot \frac{4}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{j-1}^{j} \left| \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \left(1 - \frac{t}{k}\right) \right| dt. \end{aligned}$$

Положим

$$\alpha_{2,m} = \frac{4}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{j-1}^{j} \left| \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \left(1 - \frac{t}{k}\right) \right| dt,$$

$$g(t) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \psi_2\left(\frac{t}{k}\right) = \sum_{t<k\leqslant m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \left(1 - \frac{t}{k}\right).$$

Очевидно, что функция g линейна на каждом из промежутков $[j-1, j]$, где $j \in \mathbb{N}, 1 \leqslant j \leqslant m$, непрерывна на $[0, m]$, $g(t) = 0$ при $t \geqslant m$. По лемме 1.2 (пункт (б)) при $1 \leqslant j \leqslant m-1$

$$\operatorname{sgn} g(j) = \operatorname{sgn}(-\mu_j) = (-1)^j.$$

Значит, график функции $|g|$ на отрезке $[j-1, j]$ такой, как показано на рисунке 1.1.

На промежутке $[j-1, j)$

$$g(t) = \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} \left(1 - \frac{t}{k}\right) = \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} + t \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}$$

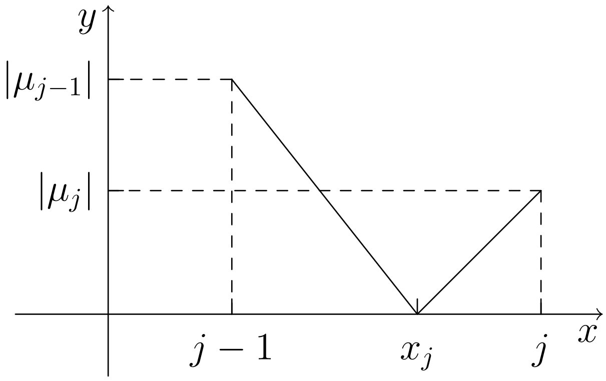

Рис. 1.1. График $y = |g(x)|$ на отрезке $[j-1, j]$

$$= \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k} + (-1)^j \lambda_j t,$$

то есть угловой коэффициент прямых, из которых составлен график, по модулю равен λ_j. Тогда площадь под графиком равна площади двух треугольников

$$S_j = \frac{1}{2}|\mu_{j-1}| \frac{|\mu_{j-1}|}{\lambda_j} + \frac{1}{2}|\mu_j| \frac{|\mu_j|}{\lambda_j} = \frac{\mu_{j-1}^2 + \mu_j^2}{2\lambda_j}.$$

Эта формула остаётся верной и при $j = m$. Таким образом,

$$\alpha_{2,m} = \frac{4}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{j-1}^{j} |g(t)| \, dt = \frac{4}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} S_j = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_{j-1}^2 + \mu_j^2}{\lambda_j}.$$

Теперь получим оценку сверху для $\alpha_{2,m}$. По лемме 1.2 (пункт (в)) последовательность $|g(j)| = |\mu_j|$ убывает, поэтому

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{1}{2}|\mu_{j-1}|(x_j - (j-1)) + \frac{1}{2}|\mu_j|(j - x_j) \\ &\leqslant \frac{1}{2}|\mu_{j-1}|(x_j - (j-1) + j - x_j) = \frac{|\mu_{j-1}|}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, принимая во внимание пункт (г) леммы 1.2,

$$\begin{aligned} \alpha_{2,m} &= \frac{4}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} S_j \leqslant \frac{4}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} \frac{|\mu_{j-1}|}{2} = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{j=0}^{m-1} |\mu_j| \\ &= \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Если k чётное, то

$$\frac{1}{k^2} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \frac{(k+1)^2}{\left\lfloor \frac{k+1+1}{2} \right\rfloor} = \frac{k}{2k^2} \frac{(k+1)^2 \cdot 2}{k+2} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} > 1,$$

если же k нечётное, то

$$\frac{1}{k^2}\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor\frac{(k+1)^2}{\left\lfloor\frac{k+1+1}{2}\right\rfloor}=\frac{k+1}{2k^2}\frac{(k+1)^2\cdot 2}{k+1}=\frac{(k+1)^2}{k^2}>1.$$

Значит, сумма в правой части выражения (1.7) состоит из убывающих по модулю слагаемых. Таким образом,

$$\alpha_{2,m}\leqslant\frac{2}{C_{2m}^m}C_{2m}^{m+1}=\frac{2m}{m+1}. \qquad \square$$

1.2. Доказательство основной теоремы

Доказательству теоремы предпошлём несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1.3. *Пусть $l\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$, $h>0$, $f\in C$, $P\in\mathcal{A}$. Тогда*

$$W_{l,2,m}(f,h)_P\leqslant D_m^l\omega_{2l}(f,h)_P. \tag{1.8}$$

Доказательство. В работе [10, формулы (4.2) и (4.5)] установлено, что

$$P((t^2S_{t,2,m}f)^{(2)})\leqslant D_mP(\delta_t^2f).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}W_{l,2,m}(f,h)_P&=\sup_{0\leqslant t\leqslant h}P(t^{2l}(S_{h,2,m}^lf)^{(2l)})\\&\leqslant D_m^l\sup_{0\leqslant t\leqslant h}P(\delta_t^{2l}f)=D_m^l\omega_{2l}(f,h)_P.\end{aligned} \qquad \square$$

Лемма 1.4. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in[0:2m]$, $\tau>0$, $f\in C^r$, $P\in\mathcal{A}$. Тогда*

$$E_n(f-S_{\tau/n,2,m}f)\leqslant\frac{g(r,\tau)}{C_{2m}^mn^r}\omega_{2m-r}\left(f^{(r)},\frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Полагая $h=\tau/n$ и пользуясь леммой 1.A, имеем

$$\begin{aligned}E_n(f-S_{h,2,m}f)&\leqslant\frac{2}{C_{2m}^m}\int\limits_0^1E_n(\delta_{th}^{2m}f)(1-t)\,dt\\&\leqslant\frac{2}{C_{2m}^m}\int\limits_0^1\omega_{2m}(f,th)(1-t)\,dt.\end{aligned}$$

При любом $\tau > 0$

$$\int\limits_0^1 \omega_{2m}(f, th)(1-t)\,dt \leqslant \int\limits_0^1 (th)^r \omega_{2m-r}(f^{(r)}, th)(1-t)\,dt$$

$$\leqslant h^r \omega_{2m-r}(f^{(r)}, h) \int\limits_0^1 t^r (1-t)\,dt = \frac{h^r}{(r+1)(r+2)} \omega_{2m-r}(f^{(r)}, h).$$

При $r \in [1 : 2m]$ и $\tau > 2\mathcal{K}_r^{1/r}$ для оценки модуля непрерывности под интегралом воспользуемся неравенствами

$$\omega_{2m}(f, t) \leqslant t^r \omega_{2m-r}(f^{(r)}, t), \quad \text{если } t \leqslant \frac{2\mathcal{K}_r^{1/r}}{n},$$

$$\omega_{2m}(f, t) \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \omega_{2m}(f^{(r)}, t) \leqslant \frac{2^r \mathcal{K}_r}{n^r} \omega_{2m-r}(f^{(r)}, t), \quad \text{если } t > \frac{2\mathcal{K}_r^{1/r}}{n}.$$

Положим $b := 2\mathcal{K}_r^{1/r}/\tau$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \omega_{2m}(f, th)(1-t)\,dt = \int\limits_0^b + \int\limits_b^1$$

$$\leqslant \int\limits_0^b (th)^r \omega_{2m-r}(f^{(r)}, th)(1-t)\,dt + \int\limits_b^1 \frac{(b\tau)^r}{n^r} \omega_{2m-r}(f^{(r)}, th)(1-t)\,dt.$$

Последнее выражение в силу возрастания модуля непрерывности не превосходит

$$h^r \omega_{2m-r}(f^{(r)}, bh) \int\limits_0^b t^r (1-t)\,dt + \frac{(b\tau)^r}{n^r} \omega_{2m-r}(f^{(r)}, h) \int\limits_b^1 (1-t)\,dt$$

$$\leqslant \left(\frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{b^{r+2}}{r+2} + \frac{b^r(1-b)^2}{2} \right) \frac{\tau^r}{n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, приходим к доказываемому неравенству. □

Лемма 1.5. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $r \in [0 : 2m]$, $\tau > 0$, $f \in C^r$, $P \in \mathcal{A}$. Тогда*

$$E_n(f - S^l_{\tau/n,2,m} f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{l-1} \eta(m, k, \tau) \right) \frac{g(r, \tau)}{C_{2m}^m n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Положим $h = \tau/n$. Воспользуемся разложением

$$f - S^l_{h,2,m}f = \sum_{k=0}^{l-1} S^k_{h,2,m}(f - S_{h,2,m}f). \tag{1.9}$$

По теореме 1.2

$$E_n(S_{h,2,m}f) \leqslant \alpha_{2,m}E_n(f),$$

поэтому при $k \in [0 : l-1]$

$$E_n(S^k_{h,2,m}f) \leqslant \alpha^k_{2,m}E_n(f). \tag{1.10}$$

Применяя неравенства (1.4) и (1.8), находим

$$E_n(S^k_{h,2,m}f) \leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{n^{2k}}E_n((S^k_{h,2,m}f)^{(2k)}) = \frac{\mathcal{K}_{2k}}{(nh)^{2k}}E_n(h^{2k}(S^k_{h,2,m}f)^{(2k)})$$
$$\leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{\tau^{2k}}W_{k,2,m}(f,h) \leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{\tau^{2k}}D^k_m\omega_{2k}(f,h) \leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{\tau^{2k}}D^k_m 2^{2k}E_n(f).$$

Сопоставляя полученное неравенство и (1.10), заключаем

$$E_n(S^k_{h,2,m}f) \leqslant \min\left\{\alpha^k_{2,m}, \frac{4^k\mathcal{K}_{2k}D^k_m}{\tau^{2k}}\right\}E_n(f) = \eta(m,k,\tau)E_n(f),$$

где функция η определена формулой (1.1).

Возвращаясь к (1.9),

$$E_n(f - S^l_{h,2,m}f) \leqslant \sum_{k=0}^{l-1} E_n(S^k_{h,2,m}(f - S_{h,2,m}f))$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{l-1} \eta(m,k,\tau)E_n(f - S_{h,2,m}f).$$

Доказательство завершается применением леммы 1.4. □

Лемма 1.6. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in [0 : 2m]$, $\tau > 0$, $f \in C^r$, $P \in \mathcal{A}$. *Положим* $l = \lceil m - r/2 \rceil$. *Тогда*

$$E_n(S^l_{\tau/n,2,m}f) \leqslant \frac{\rho(m,r,\tau)D^l_m}{\tau^{2m-r}n^r}\omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Имеем при $h = \tau/n$

$$E_n(S^l_{h,2,m}f) = \frac{1}{h^{2l}} E_n(h^{2l}S^l_{h,2,m}f) \leqslant \frac{1}{h^{2l}} W_{l,2,m}(f^{(-2l)}, h).$$

По лемме 1.3

$$E_n(S^l_{h,2,m}f) \leqslant \frac{D^l_m}{h^{2l}} \omega_{2l}(f^{(-2l)}, h). \tag{1.11}$$

Пусть $p \in [2m : 2l+r]$. Используя свойства модуля непрерывности, а также принимая во внимание неравенство (1.4), находим

$$\omega_{2l}(f^{(-2l)}, h) \leqslant h^{2l+r-p}\omega_{p-r}(f^{(r-p)}, h) \leqslant h^{2l+r-p}\frac{\mathcal{K}_p}{n^p}\omega_{p-r}(f^{(r)}, h)$$
$$\leqslant h^{2l+r-p}\frac{\mathcal{K}_p}{n^p}2^{p-2m}\omega_{2m-r}(f^{(r)}, h).$$

Тогда из (1.11) следует

$$E_n(S^l_{h,2,m}f) \leqslant D^l_m h^r \left(\min_{p\in[2m:2l+r]} \frac{\mathcal{K}_p 2^{p-2m}}{\tau^p} \right) \omega_{2m-r}(f^{(r)}, h). \tag{1.12}$$

Если r чётно, то $2l + r = 2\lceil m - r/2 \rceil + r = 2m$, поэтому

$$\min_{p\in[2m:2l+r]} \frac{\mathcal{K}_p 2^{p-2m}}{\tau^p} = \frac{\mathcal{K}_{2m}}{\tau^{2m}}.$$

Если r нечётно, то $2l + r = 2m + 1$, следовательно,

$$\min_{p\in[2m:2l+r]} \frac{\mathcal{K}_p 2^{p-2m}}{\tau^p} = \min\left\{ \frac{\mathcal{K}_{2m}}{\tau^{2m}}, \frac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\tau^{2m+1}} \right\}$$
$$= \frac{1}{\tau^{2m}} \min\left\{ \mathcal{K}_{2m}, \frac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\tau} \right\}.$$

Таким образом, из (1.12) получаем

$$E_n(S^l_{h,2,m}f) \leqslant \frac{D^l_m h^r}{\tau^{2m}} \rho(m, r, \tau)\omega_{2m-r}(f^{(r)}, h),$$

что и требовалось. □

Лемма 1.7. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in [0 : 2m]$, $\tau > 0$, $f \in C^r$, $P \in \mathcal{A}$, $l = \lceil m-r/2 \rceil$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \inf_{t\in(0,\tau]} \left(\frac{g(r,t)}{C^m_{2m}} \sum_{k=0}^{l-1} \eta(m,k,t) + \frac{\rho(m,r,t)D^l_m}{t^{2m-r}} \right) \frac{1}{n^r}\omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Пусть $t \in (0, \tau]$. Имеем

$$E_n(f) \leqslant E_n(f - S^l_{t/n,2,m} f) + E_n(S^l_{t/n,2,m} f).$$

Применяя для оценки первого слагаемого лемму 1.5, а для второго — лемму 1.6, получаем

$$E_n(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{l-1} \eta(m,k,t) \right) \frac{g(r,t)}{C_{2m}^m n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{t}{n}\right) + \frac{\rho(m,r,t) D_m^l}{t^{2m-r} n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{t}{n}\right)$$
$$\leqslant \left(\frac{g(r,t)}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{l-1} \eta(m,k,t) + \frac{\rho(m,r,t) D_m^l}{t^{2m-r}} \right) \frac{1}{n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right).$$

Остаётся перейти к инфимуму по t. □

Следствие 1.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$, $f \in C$, $P \in \mathcal{A}$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \left(\frac{1}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{m-1} \eta(m,k,\tau) + \frac{\mathcal{K}_{2m} D_m^m}{\tau^{2m}} \right) \omega_{2m}\left(f, \frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Полагая $r = 0$ в лемме 1.7, получаем

$$E_n(f) \leqslant \inf_{t \in (0,\tau]} \left(\frac{1}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{m-1} \eta(m,k,t) + \frac{\mathcal{K}_{2m} D_m^m}{t^{2m}} \right) \omega_{2m}\left(f, \frac{\tau}{n}\right).$$

Инфимум убывающей функции достигается в крайней точке $t = \tau$. □

Теорема 1.3. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in [1 : 2m-1]$, $\tau > 0$, $f \in C^r$, $P \in \mathcal{A}$. Положим $l = \lceil m - r/2 \rceil$,*

$$B(m,r,\tau) = \frac{g(r,\tau)}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{l-1} \eta(m,k,\tau) + \frac{\rho(m,r,\tau) D_m^l}{\tau^{2m-r}}. \tag{1.13}$$

Тогда при $\tau \leqslant 2$

$$E_n(f) \leqslant \frac{B(m,r,\tau)}{n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right),$$

при $\tau > 2$

$$E_n(f) \leqslant \min_{t \in [2,\tau]} B(m,r,t) \cdot \frac{1}{n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Найдём инфимум выражения из леммы 1.7 в случае $\tau \leqslant 2$.

Принимая во внимание лемму 1.B, находим, что $D_m > 2$ при $m \geqslant 15$. Следовательно, учитывая теорему 1.2, имеем

$$D_m \geqslant \alpha_{2,m}. \tag{1.14}$$

Непосредственными вычислениями (1.14) проверяется для $m \in [1:14]$.

Учитывая также неравенства $\mathcal{K}_r \geqslant 1$ и $\mathcal{K}_{2r} < \mathcal{K}_{2r+1}$ при любом $r \in \mathbb{N}$, получаем при $\tau \leqslant 2$

$$B(m,r,\tau) = \frac{2\tau^r}{C_{2m}^m(r+1)(r+2)} \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_{2,m}^k + \frac{\mathcal{K}_{2m} D_m^l}{\tau^{2m-r}}.$$

Исследование при помощи производной полученного выражения показывает, что оно убывает при $\tau \in (0, \tau_0]$, где

$$\tau_0 = \left(\frac{(2m-r)\mathcal{K}_{2m} D_m^l C_{2m}^m (r+1)(r+2)}{2r \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_{2,m}^k} \right)^{\frac{1}{2m}}.$$

При $m \geqslant 15$ принимая во внимание неравенства $\mathcal{K}_{2m} > 1$, $\alpha_{2,m} \leqslant 2$, имеем

$$\begin{aligned} \tau_0^{2m} &\geqslant \frac{(2m-r) D_m^l C_{2m}^m (r+1)(r+2)}{2r(2^l-1)} \\ &\geqslant \frac{1}{2}(2m-r)(r+1)\left(1+\frac{2}{r}\right) C_{2m}^m \left(\frac{D_m}{2}\right)^l. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\min_{r \in [1:2m-1]} (2m-r)(r+1) = 2m.$$

Выше уже отмечалось неравенство $D_m > 2$ при $m \geqslant 15$. Значит,

$$\tau_0 \geqslant (mC_{2m}^m)^{\frac{1}{2m}} \geqslant \left(m \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi(m+1/2)}} \right)^{\frac{1}{2m}} = 2 \left(\frac{1}{\pi(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2})} \right)^{\frac{1}{4m}} > 2.$$

Непосредственным подсчётом убеждаемся, что неравенство $\tau_0 > 2$ верно также при $m \in [1:14]$.

Следовательно, для случая $\tau \leqslant 2$

$$\inf_{t \in (0,\tau]} B(m,r,t) = B(m,r,\tau).$$

Случай $\tau > 2$ тривиальным образом вытекает из леммы 1.7. $\square$

Замечание 1.2. В следствии 1.1 утверждается, что для $m/2 \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$

$$J(m, 0, \tau) \leqslant A(m, 0, \tau).$$

Аналогично можно переформулировать и теорему 1.3. Для этого нужно заменить m на выражение $(m+r)/2$. Полученное утверждение совпадёт с теоремой 1.1, указанной в начале главы, поскольку

$$B\left(\frac{m+r}{2}, r, \tau\right) = A(m, r, \tau).$$

1.3. Асимптотика оценки

Установим некоторые асимптотические соотношения для величины $A(m, r, \tau)$ в случае чётных m и r.

В дальнейшем запись типа $f(x, y) = O(g(x, y))$ при $x \to x_0$ означает, что найдётся постоянная $C(y)$, такая что

$$|f(x, y)| \leqslant C(y)|g(x, y)|$$

в некоторой окрестности x_0. Соотношение

$$f(x, y) \asymp g(x, y) \quad \text{при } x \to x_0$$

равносильно тому, что

$$f(x, y) = O(g(x, y)) \quad \text{и} \quad g(x, y) = O(f(x, y)) \quad \text{при } x \to x_0.$$

Лемма 1.8. *Пусть $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$D^{m/2}_{(m+r)/2} \asymp \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right) \quad \textit{при } m \to \infty.$$

Доказательство. Из леммы 1.B следует, что

$$D_m = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\theta_m\sqrt{\pi}}{\sqrt{m}},$$

где $\theta_m > 0$, $\theta_m = 1 + O(\frac{1}{m})$ при $m \to \infty$. Тогда

$$D^m_m = \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m \left(\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\frac{\theta_m\sqrt{\pi}}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}}.$$

Положим $t_m = \frac{4\sqrt{\pi}}{\pi^2}\theta_m$. Поскольку при всех достаточно больших m (см. [42, par. 3.6.2])

$$e^{-t_m}\left(1-\frac{t_m^2 e^{t_m}}{2\sqrt{m}}\right) \leqslant \left(1-\frac{t_m}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}} \leqslant e^{-t_m},$$

то

$$\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m e^{-t_m\sqrt{m}}\left(1-\frac{t_m^2 e^{t_m}}{2\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}} \leqslant D_m^m \leqslant \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m e^{-t_m\sqrt{m}}.$$

Отсюда

$$D_m^m \asymp \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m e^{-t_m\sqrt{m}}.$$

Имеем

$$e^{-t_m\sqrt{m}} = \exp\left(-\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi^2}(1+O(1/m))\sqrt{m}\right) \sim \exp\left(-\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi^2}\sqrt{m}\right)$$

Следовательно,

$$D_m^m \asymp \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m \exp\left(-\frac{4\sqrt{\pi m}}{\pi^2}\right).$$

Заменяя в последнем соотношении m на $\frac{m+r}{2}$, находим

$$D_{(m+r)/2}^{m/2} = \frac{1}{D_{(m+r)/2}^{r/2}} D_{(m+r)/2}^{(m+r)/2} \asymp \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \exp\left(-\frac{4\sqrt{\pi(m+r)}}{\pi^2\sqrt{2}}\right)$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\,(1+O(1/m))\right)$$
$$\asymp \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right). \qquad \square$$

Лемма 1.9. *Пусть $\tau \in (0, \pi/\sqrt{2})$, $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$A(m,r,\tau) \asymp \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right) \quad \text{при } m \to \infty.$$

Доказательство. Принимая во внимание неравенство $\mathcal{K}_{2k}^{\frac{1}{2k}} \geqslant 1$ при $k \in \mathbb{N}$, теорему 1.2 и лемму 1.B, получаем

$$\frac{2\mathcal{K}_{2k}^{\frac{1}{2k}}\sqrt{D_m}}{\sqrt{\alpha_{2,m}}} > \sqrt{2}\sqrt{D_m} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + o(1).$$

Тогда при всех достаточно больших m будет $\eta(m,k,\tau)=\alpha^k_{2,m}$. Следовательно,

$$A(m,r,\tau)=\frac{g(r,\tau)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}\sum_{k=0}^{m/2-1}\alpha^k_{2,(m+r)/2}+\frac{\mathcal{K}_{m+r}D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m}.$$

Покажем, что последнее слагаемое имеет наибольший порядок роста по m. Учитывая теорему 1.2, имеем

$$\frac{g(r,\tau)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}\sum_{k=0}^{m/2-1}\alpha^k_{2,(m+r)/2}\leqslant\frac{g(r,\tau)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}\cdot 2^{m/2}=O\left(\frac{\sqrt{m}}{2^{m/2}}\right).$$

По лемме 1.8 находим

$$\frac{D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m}\asymp\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m\exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right)=\frac{1}{2^{m/2}}\frac{\left(\frac{\pi}{\tau\sqrt{2}}\right)^m}{\exp\left((2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right)}.$$

Так как $\tau<\pi/\sqrt{2}$, то

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\left(\frac{\pi}{\tau\sqrt{2}}\right)^m}{\left(\exp\left((2/\pi)^{3/2}\right)\right)^{\sqrt{m}}}=\infty.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}A(m,r,\tau)&=o\left(\frac{D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m}\right)+\frac{\mathcal{K}_{m+r}D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m}\\&\asymp\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m\exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right).\end{aligned}$$

□

Лемма 1.10. *Пусть $\tau\in[\pi/\sqrt{2},\pi)$, $m/2\in\mathbb{N}$, $r/2\in\mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$A(m,r,\tau)=O\left(\sqrt{m}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m\exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right)\right)\quad\textit{при } m\to\infty.$$

Доказательство. Поскольку $D_m\to\pi^2/4$ при $m\to\infty$, то при всех достаточно больших m будет $4D_{(m+r)/2}/\tau^2>1$. Тогда

$$\begin{aligned}A(m,r,\tau)&\leqslant\frac{g(r,\tau)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}\sum_{k=0}^{m/2-1}\mathcal{K}_{2k}\left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\tau^2}\right)^k+\frac{\mathcal{K}_{m+r}D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m}\\&=O\left(\frac{\sqrt{m}}{2^m}\right)\frac{\dfrac{2^mD_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m}-1}{\dfrac{4D_{(m+r)/2}}{\tau^2}-1}+O\left(\frac{D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m}\right)\end{aligned}$$

$$= O\left(\sqrt{m}\frac{D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}\right) + O\left(\frac{D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}\right) = O\left(\sqrt{m}\frac{D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}\right).$$

Остаётся принять во внимание лемму 1.8. □

Лемма 1.11. *Пусть $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$A(m,r,\pi) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{g(r,\pi)}{2^r}\frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right) \quad \text{при } m \to \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$A(m,r,\pi) \leqslant \frac{g(r,\pi)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \mathcal{K}_{2k}\left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\pi^2}\right)^k + \frac{\mathcal{K}_{m+r}D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\pi^m}$$
$$\leqslant \frac{g(r,\pi)C_m^{m/2}}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}\frac{4/\pi}{C_m^{m/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\pi^2}\right)^k + \frac{4}{\pi}\frac{(\pi^2/4)^{m/2}}{\pi^m}. \tag{1.15}$$

Принимая во внимание лемму 1.B, при $l \in \mathbb{N}$ получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4D_l}{\pi^2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{\pi^2}D_l} \leqslant \frac{1}{1-(1-\frac{4}{\pi^2}\frac{\sqrt{\pi}l}{l+1/2})} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{l}+\frac{1}{2\sqrt{l}}\right).$$

Полагая $l = (m+r)/2$, находим

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\pi^2}\right)^k \leqslant \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\frac{m+r}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2(m+r)}}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{\pi m}{2}}\left(1+O(1/m)\right).$$

По формуле Стирлинга

$$C_m^{m/2} = \frac{2^m}{\sqrt{\pi m/2}}\left(1+O(1/m)\right).$$

Поэтому

$$\frac{C_m^{m/2}}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} = \frac{1}{2^r}\sqrt{\frac{m+r}{m}}\left(1+O(1/m)\right) = \frac{1}{2^r}\left(1+O(1/m)\right). \tag{1.16}$$

Возвращаясь к неравенству (1.15), имеем

$$A(m,r,\pi) \leqslant \frac{g(r,\pi)}{2^r C_m^{m/2}}\sqrt{\frac{\pi m}{2}}(1+O(1/m)) + \frac{4}{2^m\pi}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{g(r,\pi)}{2^r}\frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right).$$
□

Лемма 1.12. *Пусть $\tau > \pi$, $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$A(m,r,\tau) \leqslant \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1}\right) \frac{g(r,\tau)}{2^r C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right) \quad \text{\textit{при} } m \to \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} A(m,r,\tau) &\leqslant \frac{g(r,\tau)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \mathcal{K}_{2k} \left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\tau^2}\right)^k + \frac{\mathcal{K}_{m+r} D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m} \\ &\leqslant \frac{g(r,\tau)}{C_m^{m/2}} \frac{C_m^{m/2}}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} \left(1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\tau^2}\right)^k\right) + \frac{4}{\pi} \frac{(\pi^2/4)^{m/2}}{\tau^m}. \end{aligned}$$

По лемме 1.B при $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4D_l}{\tau^2}\right)^k = \frac{4D_l}{\tau^2} \frac{1}{1 - \frac{4D_l}{\tau^2}} = \frac{1}{(\tau/\pi)^2 - 1} + O(1/\sqrt{l}) \quad \text{при } l \to \infty.$$

Учитывая (1.16), находим

$$\begin{aligned} &A(m,r,\tau) \\ &\leqslant \frac{g(r,\tau)}{C_m^{m/2}} \frac{1}{2^r} \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1} + O(1/\sqrt{m})\right) (1 + O(1/m)) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \\ &= \frac{g(r,\tau)}{2^r C_m^{m/2}} \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1} + O(1/\sqrt{m})\right) + o\left(\frac{1}{2^m}\right) \\ &= \frac{g(r,\tau)}{2^r C_m^{m/2}} \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1}\right) + O\left(\frac{1}{2^m}\right). \end{aligned}$$

□

Теорема 1.4. *Пусть $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$, $\tau > 0$. Тогда справедливы следующие соотношения.*

При $m \to \infty$

$$A(m,r,\tau) \asymp \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right), \quad \text{\textit{если} } 0 < \tau < \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$A(m,r,\tau) = O\left(\sqrt{m}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right)\right), \quad \text{\textit{если} } \frac{\pi}{\sqrt{2}} \leqslant \tau < \pi,$$

$$A(m,r,\pi) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{g(r,\pi)}{2^r} \frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right), \tag{1.17}$$

$$A(m,r,\tau) \leqslant \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1}\right) \frac{g(r,\tau)}{2^r C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right), \quad \text{\textit{если} } \tau > \pi. \tag{1.18}$$

При $r \to \infty$

$$A(m,r,\tau) \to \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m, \quad \text{\textit{если} } 0 < \tau \leqslant 2,$$
$$A(m,r,\tau) \to \infty, \quad \text{\textit{если} } \tau > 2.$$

При $\tau \to +0$

$$A(m,r,\tau) = \frac{\mathcal{K}_{m+r} D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m} + O(\tau^r). \tag{1.19}$$

При $\tau \to \infty$

$$A(m,r,\tau) \to \frac{2^r \mathcal{K}_r}{C^{(m+r)/2}_{m+r}}.$$

Доказательство. Асимптотические соотношения при $m \to \infty$ следуют из лемм 1.9, 1.10, 1.11 и 1.12.

При $\tau \in (0,2]$ из (1.3) и (1.14) следует равенство

$$A(m,r,\tau) = \frac{1}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} \frac{2\tau^r}{(r+1)(r+2)} \sum_{k=0}^{m/2-1} \alpha^k_{2,(m+r)/2} + \frac{\mathcal{K}_{m+r} D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}. \tag{1.20}$$

При фиксированных значениях m и r имеем

$$A\left(m,r,\tau\right) = \frac{\mathcal{K}_{m+r} D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m} + O(\tau^r) \quad \text{при } \tau \to +0.$$

Из формулы (1.20) также при фиксированных m и $\tau \in (0,2]$ вытекает

$$A(m,r,\tau) = \frac{\mathcal{K}_{m+r} D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m} + O\left(\frac{(\tau/2)^r}{r^{3/2}}\right) \quad \text{при } r \to \infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} A(m,r,\tau) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m.$$

Пусть теперь $\tau > 2$. Из (1.3) при $r \to \infty$

$$A(m,r,\tau) > \frac{g(r,\tau)}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} = \frac{2^r \mathcal{K}_r}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} \left(1 - \frac{4r\mathcal{K}_r^{1/r}}{(r+1)\tau} + \frac{4r\mathcal{K}_r^{2/r}}{(r+2)\tau^2}\right) \to \infty.$$

При $\tau \to \infty$ и фиксированных значениях m и r находим

$$A(m,r,\infty) = \frac{g(r,\infty)}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} = \frac{2^r \mathcal{K}_r}{C^{(m+r)/2}_{m+r}}. \qquad \square$$

1.4. Сопоставление оценок

В работе [11] при $m/2 \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\tau > 0$ установлено неравенство

$$J(m,r,\tau) \leqslant \frac{1}{C_m^{m/2}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \frac{4^k \mathcal{K}_{2k+r} D_{m/2}^k}{\tau^{2k}} + \frac{\mathcal{K}_{m+r} D_{m/2}^{m/2}}{\tau^m} =: J_{\mathrm{VZh2012}}(m,r,\tau).$$

При $\tau \geqslant \pi$ величины A и J_{VZh2012} имеют наименьший порядок по m среди оценок из работ, упомянутых во введении. Установим, что для $r/2 \in \mathbb{N}$, $\tau \geqslant \pi$

$$A(m,r,\tau) < J_{\mathrm{VZh2012}}(m,r,\tau) \quad \text{при } m \to \infty. \tag{1.21}$$

Заметим, что в этом случае

$$g(r,\tau) < 2^r \mathcal{K}_r \left(1 - \frac{1}{\tau}\right). \tag{1.22}$$

Действительно, учитывая неравенство $1 \leqslant \mathcal{K}_r < 4/\pi$, имеем

$$\frac{g(r,\tau)}{2^r \mathcal{K}_r} = 1 - \frac{4r\mathcal{K}_r^{1/r}}{(r+1)\tau} + \frac{4r\mathcal{K}_r^{2/r}}{(r+2)\tau^2} = 1 - \frac{4r\mathcal{K}_r^{1/r}}{\tau}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{\mathcal{K}_r^{1/r}}{(r+2)\tau}\right)$$
$$< 1 - \frac{4r}{\tau}\left(\frac{1}{r+2} - \frac{\pi}{2(r+2)\tau}\right) \leqslant 1 - \frac{4r}{2\tau(r+2)} \leqslant 1 - \frac{1}{\tau}.$$

Принимая во внимание леммы 1.B и 1.8, при $m \to \infty$, находим

$$J_{\mathrm{VZh2012}}(m,r,\pi) \geqslant \frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \left(\frac{4D_{m/2}}{\pi^2}\right)^k = \frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}} \frac{1 - (4D_{m/2}/\pi^2)^{m/2}}{1 - 4D_{m/2}/\pi^2}$$
$$= \frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}} \frac{1 + o(1)}{\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi^2\sqrt{m}}(1 + o(1))} = \frac{\mathcal{K}_r \pi^2}{4\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}} + o\left(\frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}}\right).$$

Учитывая данное неравенство, а также формулу (1.17), для установления соотношения (1.21) при $\tau = \pi$ достаточно проверить выполнение неравенства

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{g(r,\pi)}{2^r} < \frac{\mathcal{K}_r \pi^2}{4\sqrt{\pi}},$$

которое, учитывая (1.22), следует из того, что

$$1 - \frac{1}{\pi} < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Теперь рассмотрим случай $\tau > \pi$. По лемме 1.B при $m \to \infty$ имеем

$$J_{\mathrm{VZh2012}(m,r,\tau)} \geqslant \frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \left(\frac{4D_{m/2}}{\tau^2}\right)^k$$
$$= \frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}} \frac{1+o(1)}{1-4D_{m/2}/\tau^2} = \frac{\mathcal{K}_r \tau^2}{C_m^{m/2}(\tau^2-\pi^2)} + o\left(\frac{1}{C_m^{m/2}}\right).$$

Тогда, принимая во внимание (1.18), неравенство (1.21) будет верным при $\tau > \pi$, если выполнено неравенство

$$\left(1+\frac{4\pi}{\tau^2-\pi^2}\right)\frac{g(r,\tau)}{2^r} < \frac{\mathcal{K}_r \tau^2}{\tau^2-\pi^2}.$$

Учитывая (1.22), достаточно проверить, что

$$\left(1+\frac{4\pi-\pi^2}{\tau^2}\right)\left(1-\frac{1}{\tau}\right) < 1.$$

Поскольку

$$\frac{4\pi-\pi^2}{\tau^2} = \frac{1}{\tau}\cdot\frac{\pi}{\tau}(4-\pi) < \frac{1}{\tau},$$

то

$$\left(1+\frac{4\pi-\pi^2}{\tau^2}\right)\left(1-\frac{1}{\tau}\right) < \left(1+\frac{1}{\tau}\right)\left(1-\frac{1}{\tau}\right) = 1-\frac{1}{\tau^2} < 1.$$

Приведём таблицы рекордных оценок для $J(m,r,\tau)$, вычисленных приближённо с четырьмя значащими цифрами (последняя цифра округлялась вверх). В ячейках таблицы указаны ссылки на соответствующие работы. Отсутствие ссылки означает, что данное число является приближённым значением $\min_{t\in[2,\tau]} A(m,r,t)$. Под ссылкой [16] понимается указание на теорему 2 в §5 главы 3 этой книги; под ссылкой [17] — указание на теорему 3 в §3 главы 2 этой книги.

$m\backslash r$	0	2	4	6	8	10
2	0.5813 [8]	0.4237	0.4175	0.4269	0.4386	0.45
4	0.2192 [9]	0.1584 [21]	0.1519	0.1531	0.1574	0.152 [16]
6	0.08195 [9]	0.05687	0.05083	0.05053	0.05182	0.0492 [16]
8	0.03234 [9]	0.01848	0.01605	0.01571	0.01597	0.01547 [16]
10	0.01279 [11]	0.005715	0.004864	0.004701	0.004742	0.004748 [16]
$m\backslash r$	1	3	5	7	9	11
3	0.2774 [21]	0.2851	0.2853	0.2952	0.2759 [16]	0.2533 [16]
5	0.1038 [21]	0.09805	0.0949	0.09719	0.09285 [16]	0.08199 [16]
7	0.04267	0.03164	0.02984	0.03014	0.03007 [16]	0.02578 [16]
9	0.01358	0.00975	0.009024	0.009008	0.009228	0.007913 [16]
11	0.004142	0.002908	0.002653	0.002623	0.002669	0.002384

Таблица 1.1. Оценки для $J(m, r, \pi)$

$m\backslash r$	0	2	4	6	8	10
2	0.5313 [17]	0.4237	0.4175	0.4269	0.4386	0.45
4	0.1843 [17]	0.1602	0.1519	0.1531	0.1574	0.152 [16]
6	0.06101 [11]	0.05051	0.04935	0.05005	0.05166	0.0492 [16]
8	0.01777 [11]	0.01445	0.01425	0.01453	0.01504	0.01547 [16]
10	0.004997 [11]	0.003996	0.003925	0.003982	0.004102	0.004252
$m\backslash r$	1	3	5	7	9	11
3	0.3275	0.285	0.2853	0.2952	0.2759 [16]	0.2533 [16]
5	0.109	0.09386	0.09358	0.09672	0.09285 [16]	0.08199 [16]
7	0.03226	0.02748	0.02741	0.02833	0.02957	0.02578 [16]
9	0.009119	0.007665	0.00759	0.007792	0.008087	0.007913 [16]
11	0.002516	0.002092	0.002056	0.002096	0.002162	0.002239

Таблица 1.2. Оценки для $J(m, r, 2\pi)$

Глава 2

Оценка усиленной формы остаточного члена в асимптотических формулах типа Вороновской–Бернштейна

В этой главе для широкого круга методов приближения устанавливаются оценки для величины, мажорирующей остаточный член в асимптотической формуле типа Вороновской–Бернштейна.

В § 2.1 приводятся вспомогательные утверждения. Общие теоремы вместе с доказательствами содержатся в § 2.2. Примеры приложений общих теорем к конкретным методам приближения, а именно к многочленам Бернштейна, суммам Саса–Миракьяна, суммам Канторовича, суммам Бернштейна–Дюррмейер, функциям Стеклова 1-го и 2-го порядка, а также суммам Валле-Пуссена, приведены в § 2.3.

В этой главе через Ω обозначаем множество всех модулей непрерывности, то есть возрастающих функций $\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям:

- $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$, если $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$;
- $\omega(0) = \lim\limits_{t\to 0+} \omega(t) = 0$;

Ω^* — множество всех модулей непрерывности, выпуклых вверх на $\mathbb{R}_+$. Через E обозначаем промежуток в $\mathbb{R}$ любого типа (открытый, полуоткрытый или замкнутый, конечный или бесконечный);

$$\omega(f, h, E) = \sup\left\{|f(t_1) - f(t_2)|\colon t_1, t_2 \in E, |t_1 - t_2| \leqslant h\right\};$$

— модуль непрерывности функции, заданной на промежутке E. Полагаем

$$p_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}.$$

2.1. Вспомогательные утверждения

Нам понадобятся следующие известные утверждения.

Теорема 2.A (см., например, [12; 17]). *Для любого модуля непрерывности ω существует выпуклый модуль непрерывности ω^*, такой что при всех неотрицательных t и λ*

$$\omega(\lambda t) \leqslant \omega^*(\lambda t) \leqslant (\lambda+1)\omega(t).$$

Лемма 2.A. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}(t-x)^2\,dt\right)p_{n,k}(x) = \frac{(n-1)x(1-x)+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}, \tag{2.1}$$

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int\limits_{0}^{1}(t-x)^2 p_{n,k}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x) = \frac{2(n-3)x(1-x)+2}{(n+2)(n+3)}. \tag{2.2}$$

При $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 p_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}, \tag{2.3}$$

$$e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\frac{(nx)^k}{k!} = \frac{x}{n}. \tag{2.4}$$

Следующие утверждения приведём с доказательствами.

Лемма 2.B. *Пусть $\omega \in \Omega^*$, $p \geqslant 1$, $\lambda(t) = \left(\omega\left(t^{1/p}\right)\right)^p$. Тогда $\lambda \in \Omega^*$.*

Доказательство. Очевидно, что λ — непрерывная, возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, причём $\lambda(0)=0$. Покажем, что λ выпукла вверх. Отсюда будет следовать (см., например, [17]), что λ — выпуклый модуль непрерывности.

Пусть $0 \leqslant x < y$. Положим

$$l(t) = \frac{\omega(y)-\omega(x)}{y-x}t + \frac{y\omega(x)-x\omega(y)}{y-x} = \alpha t + \beta.$$

В силу возрастания $\omega(t)$

$$\alpha = \frac{\omega(y)-\omega(x)}{y-x} \geqslant 0.$$

Так как ω выпукла вверх, то функция $\frac{\omega(t)}{t}$ убывает на $(0,\infty)$. Поэтому

$$\beta = \frac{y\omega(x)-x\omega(y)}{y-x} = \frac{y}{y-x}\left(\omega(x) - x\frac{\omega(y)}{y}\right) \geqslant \frac{y}{y-x}\left(\omega(x)-\frac{x\omega(x)}{x}\right) = 0.$$

Поскольку ω выпукла вверх,

$$l(x) = \omega(x), \quad l(y) = \omega(y),$$
$$x \leqslant \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p} \leqslant y,$$

то

$$l\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leqslant \omega\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}\right).$$

Принимая во внимание неравенство Минковского, получаем

$$\left(\frac{\omega^p(x) + \omega^p(y)}{2}\right)^{1/p} = 2^{-1/p}\left(l^p(x) + l^p(y)\right)^{1/p} = 2^{-1/p}\left((\alpha x + \beta)^p + (\alpha y + \beta)^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant 2^{-1/p}\left(((\alpha x)^p + (\alpha y)^p)^{1/p} + (\beta^p + \beta^p)^{1/p}\right) = \alpha\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p} + \beta$$
$$= l\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leqslant \omega\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}\right).$$

Таким образом, для любых $0 \leqslant x < y$

$$\frac{\omega^p(x) + \omega^p(y)}{2} \leqslant \omega\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p}\right)^p.$$

Полагая здесь $x = t_1^{1/p}$, $y = t_2^{1/p}$, получаем, что для любых $0 \leqslant t_1 < t_2$

$$\frac{\lambda(t_1) + \lambda(t_2)}{2} \leqslant \lambda\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right),$$

что и означает выпуклость вверх функции λ. □

Лемма 2.C (приведена без доказательства в [37]). *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^r(E)$, $\omega \in \Omega^*$, $x \in E$, для всех u, таких что $x + u \in E$, справедлива оценка*

$$\left|f^{(r)}(x+u) - f^{(r)}(x)\right| \leqslant \omega(|u|).$$

Тогда при $x + t \in E$

$$\left|f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l\right| \leqslant \frac{|t|^r}{r!}\omega\left(\frac{|t|}{r+1}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что лемма верна при $r = 0$. Пусть $r \in \mathbb{N}$, тогда, в силу формулы Тейлора с интегральным остаточным членом

$$f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^t \left(f^{(r)}(x+u) - f^{(r)}(x) \right) (t-u)^{r-1}\, du.$$

Пусть $t > 0$. Применяя интегральное неравенство Иенсена, получаем

$$\left| f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l \right| \leqslant \frac{1}{(r-1)!} \int_0^t \left| f^{(r)}(x+u) - f^{(r)}(x) \right| (t-u)^{r-1}\, du$$

$$\leqslant \frac{1}{(r-1)!} \int_0^t \omega(u)(t-u)^{r-1}\, du = \frac{t^r}{r!} \int_0^t \omega(u) \frac{r}{t^r} (t-u)^{r-1}\, du$$

$$\leqslant \frac{t^r}{r!} \omega \left(\int_0^t \frac{ur}{t^r} (t-u)^{r-1}\, du \right).$$

Интегрируя по частям аргумент модуля непрерывности ω, находим

$$\int_0^t \frac{ur}{t^r} (t-u)^{r-1}\, du = \frac{r}{t^r} \left(\frac{1}{r} \int_0^t (t-u)^r\, du \right) = \frac{t}{r+1}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $t < 0$. $\square$

2.2. Теоремы общего характера

Теорема 2.1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, ограниченная функция $f\colon E \to \mathbb{C}$ имеет в точке $x \in E$ производную r-го порядка, при всех t, таких что $x + t \in E$, справедливо представление*

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!} t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Пусть, далее, $Q \subset \mathbb{Z}$, при всех $k \in Q$ будет $x_k \in E$, $p_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k \in Q} p_k = 1$. Положим

$$L(f) = \sum_{k \in Q} f(x_k) p_k, \quad \alpha_s = \sum_{k \in Q} |x_k - x|^s p_k.$$

Тогда, если $0 < \alpha_{pr} \leqslant M$, $\alpha_{p(r+1)} < \infty$, *то*

$$\left|L(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k\in Q} (x_k - x)^l p_k\right| \leqslant \left(\sum_{k\in Q} \left| f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} (x_k - x)^l\right|^p p_k\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \frac{\alpha_{pr}^{1/p}}{r!} \omega\left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{\alpha_{pr}}\right)^{1/p}\right) \leqslant \frac{M^{1/p}}{r!} \omega\left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{M}\right)^{1/p}\right). \tag{2.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\left|L(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k\in Q} (x_k - x)^l p_k\right| = \left|\sum_{k\in Q} f(x_k) p_k - \sum_{k\in Q} \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} (x_k - x)^l p_k\right|$$
$$= \left|\sum_{k\in Q} \left(f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} (x_k - x)^l\right) p_k\right| \leqslant \sum_{k\in Q} \left|f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} (x_k - x)^l\right| p_k.$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера для сумм, находим

$$\left|L(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k\in Q} (x_k - x)^l p_k\right| \leqslant \left(\sum_{k\in Q} \left| f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} (x_k - x)^l\right|^p p_k\right)^{1/p}.$$

Используя представление для f, лемму 2.B и неравенство Иенсена для сумм, получаем

$$\sum_{k\in Q} \left| f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} (x_k - x)^l\right|^p p_k = \sum_{k\in Q} \left|\frac{\varepsilon(x_k - x)}{r!}\right|^p |x_k - x|^{pr} p_k$$
$$\leqslant \sum_{k\in Q} \left(\frac{\omega\left(|x_k - x|\right)}{r!}\right)^p |x_k - x|^{pr} p_k = \frac{\alpha_{pr}}{(r!)^p} \sum_{k\in Q} \omega\left(\left(|x_k - x|^p\right)^{1/p}\right)^p \frac{|x_k - x|^{pr} p_k}{\alpha_{pr}}$$
$$\leqslant \frac{\alpha_{pr}}{(r!)^p} \omega\left(\left(\sum_{k\in Q} |x_k - x|^p \frac{|x_k - x|^{pr} p_k}{\alpha_{pr}}\right)^{1/p}\right)^p = \frac{\alpha_{pr}}{(r!)^p} \omega\left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{\alpha_{pr}}\right)^{1/p}\right)^p.$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{k\in Q} \left| f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} (x_k - x)^l\right|^p p_k\right)^{1/p} \leqslant \frac{\alpha_{pr}^{1/p}}{r!} \omega\left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{\alpha_{pr}}\right)^{1/p}\right).$$

Осталось принять во внимание, что функция $t\omega\left(\frac{1}{t}\right)$ возрастает при $t > 0$. $\square$

Замечание 2.1. Если в условиях теоремы 2.1 отказаться от требования, чтобы модуль непрерывности был выпуклым, то, считая $\lambda > 0$, с помощью теоремы 2.A получаем

$$\left(\sum_{k\in Q}\left|f(x_k)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(x_k-x)^l\right|^p p_k\right)^{1/p} \leqslant (\lambda+1)\frac{M^{1/p}}{r!}\omega\left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{M}\right)^{1/p}\right),$$

где $\omega \in \Omega$.

Аналогичные замечания можно сделать и ко многим неравенствам, устанавливаемым ниже, но на этом, как правило, мы не будем останавливаться.

Следствие 2.1. *Пусть $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, $x \in E$, для ограниченной функции $f\colon E \to \mathbb{C}$ при всех t, таких что $x+t \in E$, справедливо неравенство*

$$|f(x+t)-f(x)| \leqslant \omega(|t|).$$

Пусть, далее, $Q \subset \mathbb{Z}$, при всех $k \in Q$ будет $x_k \in E$, $p_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k\in Q} p_k = 1$. Положим

$$L(f) = \sum_{k\in Q} f(x_k)p_k.$$

Тогда

$$|L(f)-f(x)| \leqslant \left(\sum_{k\in Q}|f(x_k)-f(x)|^p\,p_k\right)^{1/p} \leqslant \omega\Bigl(\Bigl(\sum_{k\in Q}|x_k-x|^p p_k\Bigr)^{1/p}\Bigr).$$

В частности, при $p=2$

$$\left(\sum_{k\in Q}\left(f(x_k)-f(x)\right)^2 p_k\right)^{1/2} = \Bigl(\left(L(f)-f(x)\right)^2 + L(f^2) - L^2(f)\Bigr)^{1/2}$$
$$\leqslant \omega\Bigl(\Bigl(\sum_{k\in Q}(x_k-x)^2 p_k\Bigr)^{1/2}\Bigr).$$

Для доказательства следствия 2.1 достаточно положить $r=0$ в теореме 2.1. Равенство при $p=2$ проверяется непосредственными вычислениями.

Следствие 2.2. *Пусть* $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, *ограниченная функция* $f\colon E \to \mathbb{C}$ *имеет в точке* $x \in E$ *производную; при всех* t, *таких что* $x+t \in E$, *справедливо представление*

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \varepsilon(t)t,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. *Пусть, далее,* $Q \subset \mathbb{Z}$, *при всех* $k \in Q$ *будет* $x_k \in E$, $p_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k\in Q} p_k = 1$. *Положим*

$$L(f) = \sum_{k\in Q} f(x_k)p_k, \quad \alpha_s = \sum_{k\in Q} |x_k - x|^s p_k.$$

Тогда, если

$$\sum_{k\in Q}(x_k - x)p_k = 0, \quad 0 < \alpha_p \leqslant M, \quad \alpha_{2p} < \infty,$$

то

$$\begin{aligned}&|L(f) - f(x)|\\ &\leqslant \left(\sum_{k\in Q} |f(x_k) - f(x) - f'(x)(x_k - x)|^p\, p_k\right)^{1/p} \leqslant M^{1/p}\omega\left(\left(\frac{\alpha_{2p}}{M}\right)^{1/p}\right).\end{aligned}$$

Для доказательства достаточно положить $r = 1$ в теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, *функция* $f \in L_\infty(E)$ *в точке* $x \in E$ *имеет производную* r*-го порядка, при всех* t, *таких что* $x + t \in E$, *справедливо представление*

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!}t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. *Пусть, далее,* $Q \subset \mathbb{Z}$, *при всех* $k \in Q$ *будет* $p_k \geqslant 0$, $\varphi_k \in L_1(E)$, $\varphi_k(t) \geqslant 0$ *для всех* $t \in E$, $\int\limits_E \varphi_k = 1$, $\sum\limits_{k\in Q} p_k = 1$. *Положим*

$$U(f) = \sum_{k\in Q}\left(\int_E f(t)\varphi_k(t)\,dt\right)p_k, \quad \beta_s = \sum_{k\in Q}\left(\int_E |t-x|^s\varphi_k(t)\,dt\right)p_k.$$

Тогда, если $\beta_{pr} \leqslant M$, $\beta_{p(r+1)} < \infty$, *то*

$$\left| U(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E (t-x)^l \varphi_k(t)\,dt \right) p_k \right|$$
$$\leqslant \left(\sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E \left| f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \right|^p \varphi_k(t)\,dt \right) p_k \right)^{1/p}$$
$$\leqslant \frac{\beta_{pr}^{1/p}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{\beta_{pr}}\right)^{1/p}\right) \leqslant \frac{M^{1/p}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{M}\right)^{1/p}\right).$$

Доказательство. Остаточный член в формуле Вороновской–Бернштейна

$$U(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E (t-x)^l \varphi_k(t)\,dt \right) p_k$$
$$= \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E f(t)\varphi_k(t)\,dt \right) p_k - \sum_{k\in Q} \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \left(\int\limits_E (t-x)^l \varphi_k(t)\,dt \right) p_k$$
$$= \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E f(t)\varphi_k(t)\,dt - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \int\limits_E (t-x)^l \varphi_k(t)\,dt \right) p_k.$$

Выражение под знаком суммы равняется

$$\int\limits_E f(t)\varphi_k(t)\,dt - \int\limits_E \left(\sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \right) \varphi_k(t)\,dt$$
$$= \int\limits_E \left(f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \right) \varphi_k(t)\,dt.$$

Отсюда, применяя неравенство Гёльдера сначала для интегралов, а затем для сумм, получаем

$$\left| U(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E (t-x)^l \varphi_k(t)\,dt \right) p_k \right|$$
$$\leqslant \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E \left| f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \right| \varphi_k(t)\,dt \right) p_k$$

$$\leqslant \sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E \left|f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p \varphi_k(t)\,dt\right)^{1/p} p_k$$
$$\leqslant \left(\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E \left|f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p \varphi_k(t)\,dt\right) p_k\right)^{1/p}.$$

Теперь, принимая во внимание представление для f, находим

$$\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E \left|f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p \varphi_k(t)\,dt\right) p_k$$
$$=\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E \left|\frac{\varepsilon(t-x)}{r!}\right|^p |t-x|^{pr}\varphi_k(t)\,dt\right) p_k$$
$$\leqslant \sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E \left(\frac{\omega\left(|t-x|\right)}{r!}\right)^p |t-x|^{pr}\varphi_k(t)\,dt\right) p_k. \tag{2.6}$$

Положим

$$\mu_{s,k}=\int\limits_E |t-x|^s\varphi_k(t)\,dt.$$

Принимая во внимание лемму 2.B и применяя интегральное неравенство Иенсена, имеем

$$\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E \left(\frac{\omega\left(|t-x|\right)}{r!}\right)^p |t-x|^{pr}\varphi_k(t)\,dt\right) p_k$$
$$=\frac{1}{(r!)^p}\sum_{k\in Q}\mu_{pr,k}\left(\int\limits_E \omega\left(\left(|t-x|^p\right)^{1/p}\right)^p \frac{|t-x|^{pr}\varphi_k(t)}{\mu_{pr,k}}\,dt\right) p_k$$
$$\leqslant \frac{1}{(r!)^p}\sum_{k\in Q}\mu_{pr,k}\omega\left(\left(\int\limits_E |t-x|^p\frac{|t-x|^{pr}\varphi_k(t)}{\mu_{pr,k}}\,dt\right)^{1/p}\right)^p p_k$$
$$=\frac{\beta_{pr}}{(r!)^p}\sum_{k\in Q}\omega\left(\left(\frac{\mu_{p(r+1),k}}{\mu_{pr,k}}\right)^{1/p}\right)^p \frac{\mu_{pr,k}p_k}{\beta_{pr}}.$$

Теперь, применяя неравенство Иенсена для сумм, находим, что последнее выражение не превосходит

$$\frac{\beta_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\sum_{k\in Q}\frac{\mu_{p(r+1),k}}{\mu_{pr,k}}\frac{\mu_{pr,k}p_k}{\beta_{pr}}\right)^{1/p}\right)^p$$

$$=\frac{\beta_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\sum_{k\in Q}\frac{\mu_{p(r+1),k}p_k}{\beta_{pr}}\right)^{1/p}\right)^p=\frac{\beta_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{\beta_{pr}}\right)^{1/p}\right)^p. \qquad (2.7)$$

Таким образом, сопоставляя (2.6) и (2.7), получаем

$$\left(\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E\left|f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p\varphi_k(t)\,dt\right)p_k\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\frac{\beta_{pr}^{1/p}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{\beta_{pr}}\right)^{1/p}\right)\leqslant\frac{M^{1/p}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{M}\right)^{1/p}\right). \qquad \square$$

Следствие 2.3. *Пусть $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, $x\in E$, $f\in L_\infty(E)$, при всех t, таких что $x+t\in E$, справедлива оценка*

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant\omega(|t|).$$

Пусть, далее, $Q\subset\mathbb{Z}$, при всех $k\in Q$ будет $p_k\geqslant 0$, $\varphi_k\in L_1(E)$, $\varphi_k(t)\geqslant 0$ для всех $t\in E$, $\int\limits_E\varphi_k(t)\,dt=1$, $\sum\limits_{k\in Q}p_k=1$. Положим

$$U(f)=\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E f(t)\varphi_k(t)\,dt\right)p_k.$$

Тогда

$$|U(f)-f(x)|\leqslant\left(\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E|f(t)-f(x)|^p\varphi_k(t)\,dt\right)p_k\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\omega\left(\left(\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E|t-x|^p\varphi_k(t)\,dt\right)p_k\right)^{1/p}\right).$$

В частности, при $p=2$

$$\left(\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E(f(t)-f(x))^2\varphi_k(t)\,dt\right)p_k\right)^{1/2}=\left((U(f)-f(x))^2+U(f^2)-U^2(f)\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \omega\left(\left(\sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E (t-x)^2\varphi_k(t)\,dt\right)p_k\right)^{1/2}\right).$$

Для доказательства достаточно положить $r=0$ в теореме 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, функция $f\in L_\infty(E)$ в точке $x\in E$ имеет производную r-го порядка; при всех t, таких что $x+t\in E$, справедливо представление*

$$f(x+t)=\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l+\frac{\varepsilon(t)}{r!}t^r,$$

где $|\varepsilon(t)|\leqslant\omega(|t|)$. Пусть ещё $\psi\in L_1(E)$, $\psi(t)\geqslant 0$ для всех $t\in E$, $\int\limits_E\psi(t)\,dt=1$. Положим

$$V(f)=\int\limits_E f(t)\psi(t)\,dt,\quad \gamma_s=\int\limits_E|t-x|^s\psi(t)\,dt.$$

Тогда, если $\gamma_{pr}\leqslant M$, $\gamma_{p(r+1)}<\infty$, то

$$\left|V(f)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}\int\limits_E(t-x)^l\psi(t)\,dt\right|\leqslant\left(\int\limits_E\left|f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p\psi(t)\,dt\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\frac{\gamma_{pr}^{1/p}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\gamma_{p(r+1)}}{\gamma_{pr}}\right)^{1/p}\right)\leqslant\frac{M^{1/p}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\gamma_{p(r+1)}}{M}\right)^{1/p}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$V(f)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}\int\limits_E(t-x)^l\psi(t)\,dt=\int\limits_E f(t)\psi(t)\,dt-\int\limits_E\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\psi(t)\,dt$$

$$=\int\limits_E\left(f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right)\psi(t)\,dt.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\left|V(f)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}\int\limits_E(t-x)^l\psi(t)\,dt\right|\leqslant\int\limits_E\left|f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|\psi(t)\,dt$$

$$\leqslant \left(\int\limits_E \left|f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p \psi(t)\,dt\right)^{1/p}.$$

Используя представление для f, имеем

$$\int\limits_E \left|f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p \psi(t)\,dt = \int\limits_E \left|\frac{\varepsilon(t-x)}{r!}\right|^p |t-x|^{pr}\psi(t)\,dt$$
$$\leqslant \int\limits_E \left(\frac{\omega\left(|t-x|\right)}{r!}\right)^p |t-x|^{pr}\psi(t)\,dt.$$

Принимая во внимание лемму 2.B и неравенство Иенсена для интегралов, находим

$$\int\limits_E \left(\frac{\omega\left(|t-x|\right)}{r!}\right)^p |t-x|^{pr}\psi(t)\,dt = \frac{\gamma_{pr}}{(r!)^p}\int\limits_E \omega\left(\left(|t-x|^p\right)^{1/p}\right)^p \frac{|t-x|^{pr}\psi(t)}{\gamma_{pr}}\,dt$$
$$\leqslant \frac{\gamma_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\int\limits_E |t-x|^p\frac{|t-x|^{pr}\psi(t)}{\gamma_{pr}}\,dt\right)^{1/p}\right)^p = \frac{\gamma_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\frac{\gamma_{p(r+1)}}{\gamma_{pr}}\right)^{1/p}\right)^p.$$

Остаётся заметить, что функция $t\omega\left(\frac{1}{t}\right)$ возрастает. $\square$

Следствие 2.4. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, функция $f \in L_\infty$ в точке $x \in \mathbb{R}$ имеет производную r-го порядка, при всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо представление*

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!}t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Пусть ещё $\chi \in L_1(\mathbb{R})$, $\chi(t) \geqslant 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \chi(t)\,dt = 1$. Положим

$$W(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\chi(t)\,dt, \quad \delta_s = \int\limits_{\mathbb{R}} |t|^s\chi(t)\,dt.$$

Тогда, если $\delta_{pr} \leqslant M$, $\delta_{p(r+1)} < \infty$, то

$$\left|W(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}\int\limits_{\mathbb{R}} t^l\chi(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l\right|^p \chi(t)\,dt\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \frac{\delta_{pr}^{1/p}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\delta_{p(r+1)}}{\delta_{pr}}\right)^{1/p}\right) \leqslant \frac{M^{1/p}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\delta_{p(r+1)}}{M}\right)^{1/p}\right).$$

Доказательство. Пусть $g(t) = f(x+t)$. Применим к этой функции теорему 2.3, положив в ней $E = \mathbb{R}$, $x = 0$, $\psi = \chi$. Тогда

$$\left| V(g) - \sum_{l=0}^{r} \frac{g^{(l)}(0)}{l!} \int\limits_{\mathbb{R}} t^l \chi(t)\,dt \right| \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| g(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{g^{(l)}(0)}{l!} t^l \right|^p \chi(t)\,dt \right)^{1/p}$$
$$\leqslant \frac{\delta_{pr}^{1/p}}{r!} \omega \left(\left(\frac{\delta_{p(r+1)}}{\delta_{pr}} \right)^{1/p} \right) \leqslant \frac{M^{1/p}}{r!} \omega \left(\left(\frac{\delta_{p(r+1)}}{M} \right)^{1/p} \right).$$

Возвращаясь к функции f, получаем требуемое. $\square$

Замечание 2.2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^r(E)$, $f^{(r)}$ — равномерно непрерывная функция. Положим $g(t) = \omega_1\left(f^{(r)}, t\right)$. Ясно, что $g \in \Omega$, и потому в силу теоремы 2.A найдётся функция $\omega^* \in \Omega^*$, такая что при всех $t, \lambda \geqslant 0$

$$g(\lambda t) \leqslant \omega^*(\lambda t) \leqslant (\lambda + 1) g(t).$$

По лемме 2.C при $x, x+t \in E$

$$\left| f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l \right| \leqslant \frac{|t|^r}{r!} \omega^* \left(\frac{|t|}{r+1} \right).$$

Таким образом, применяя теоремы 2.1–2.3 к функции f, в качестве ω можно брать функцию

$$\omega(t) = \omega^* \left(\frac{t}{r+1} \right),$$

которая, в свою очередь, мажорируется функцией $2\omega_1(f^{(r)}, \frac{t}{r+1})$. Мы не станем останавливаться на этом подробно и ограничимся лишь одним примером (см. пример 2.3).

2.3. Примеры приложений к конкретным методам приближения

Примеры 2.1–2.4 относятся к полиномам Бернштейна

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x).$$

Пример 2.1. Пусть $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, для ограниченной функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ при всех t, таких что $x+t \in [0,1]$, справедливо неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant \omega\left(|t|\right).$$

Тогда

$$|f(x) - B_n f(x)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|^p p_{n,k}(x)\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right|^p p_{n,k}(x)\right)^{1/p}\right).$$

В частности, при $p = 2$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)^2 p_{n,k}(x)\right)^{1/2}$$
$$= \left((B_n f(x) - f(x))^2 + B_n f^2(x) - B_n^2 f(x)\right)^{1/2} \leqslant \omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right). \tag{2.8}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться следствием 2.1, положив в нём $E = [0,1]$, $Q = \{0,1,\ldots,n\}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $p_k = p_{n,k}(x)$. При $p = 2$ также применяется равенство (2.3).

Пример 2.2. Пусть $\omega \in \Omega^*$, $n \in \mathbb{N}$, ограниченная функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ имеет в точке $x \in [0,1]$ производную; при всех t, таких что $x+t \in [0,1]$, справедливо представление

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \varepsilon(t)t,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Тогда

$$|B_n f(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)\right| p_{n,k}(x)$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\,\omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right). \tag{2.9}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться следствием 2.2, положив в нём $p = 1$, $E = [0,1]$, $Q = \{0,1,\ldots,n\}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $p_k = p_{n,k}(x)$,

$$M = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{n,k}(x)} = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$$

(см. равенство (2.3)).

Из неравенств (2.8) и (2.9) следуют теоремы D и E, ранее установленные С. А. Теляковским.

Пример 2.3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^1[0,1]$, $x \in [0,1]$. Тогда

$$\begin{aligned}|B_n f(x) - f(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) \right| p_{n,k}(x) \\ &\leqslant 2\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\,\omega_1\left(f', \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right).\end{aligned}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться примером 2.2 и принять во внимание замечание 2.2.

Оценка из примера 2.3 для отклонения многочленов Бернштейна приводилась в [7; 29], но без множителя 1/2 в аргументе модуля непрерывности.

Пример 2.4. Пусть $n - 1 \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega^*$, ограниченная функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ имеет в точке $x \in [0,1]$ производную второго порядка; при всех t, таких что $x + t \in [0,1]$, справедливо представление

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2 + \frac{\varepsilon(t)}{2}t^2,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\left| B_n f(x) - f(x) - \frac{x(1-x)}{2n} f''(x) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{l=0}^{2} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}\left(\frac{k}{n} - x\right)^l \right| p_{n,k}(x) \\ &\leqslant \frac{x(1-x)}{2n}\,\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Данное утверждение вытекает из теоремы 2.1 аналогично примеру 2.1. При этом используется неравенство для третьего абсолютного момента (см., например, [33, prop. 2.24])

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} - x \right|^3 p_{n,k}(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}x(1-x)}{2n^{3/2}}.$$

Отметим, что отсюда следует теорема C при $n \geqslant 2$ (даже с несколько меньшим множителем у шага модуля непрерывности: $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ вместо $\frac{1}{3}$). Для этого достаточно воспользоваться замечанием 2.2.

Пример 2.5 (суммы Саса–Миракьяна). Полагаем

$$C_nf(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}.$$

Пусть $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, $x\in\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}$, для ограниченной функции $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ при всех t, таких что $x+t\in\mathbb{R}_+$, справедливо неравенство

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant\omega(|t|).$$

Тогда

$$|f(x)-C_nf(x)|\leqslant\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|^p e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\omega\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|^p e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/p}\right).$$

В частности, при $p=2$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)^2 e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/2}$$

$$=\Big((C_nf(x)-f(x))^2+C_n(f^2,x)-C_n^2(f,x)\Big)^{1/2}\leqslant\omega\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 2.1 принять $E=\mathbb{R}_+$, $Q=\mathbb{Z}_+$,

$$x_k=\frac{k}{n},\quad p_k=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!},$$

а при $p=2$ воспользоваться и равенством (2.4).

Пример 2.6 (суммы Канторовича). Полагаем

$$K_nf(x)=\sum_{k=0}^{n}\Big((n+1)\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt\Big)p_{n,k}(x).$$

Пусть $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $f\in L_\infty[0,1]$, при всех t, таких что $x+t\in[0,1]$, справедлива оценка

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant\omega(|t|).$$

Тогда

$$|K_nf(x)-f(x)|\leqslant\Big(\sum_{k=0}^{n}\Big((n+1)\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}|f(t)-f(x)|^p\,dt\Big)p_{n,k}(x)\Big)^{1/p}$$

$$\leqslant\omega\Big(\Big(\sum_{k=0}^{n}\Big((n+1)\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}|t-x|^p\,dt\Big)p_{n,k}(x)\Big)^{1/p}\Big).$$

В частности, при $p=2$

$$\Big(\sum_{k=0}^{n}\Big((n+1)\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}(f(t)-f(x))^2\,dt\Big)p_{n,k}(x)\Big)^{1/2}$$

$$=\Big((K_nf(x)-f(x))^2+K_n(f^2,x)-K_n^2(f,x)\Big)^{1/2}\leqslant\omega\left(\frac{\sqrt{(n-1)x(1-x)+\frac{1}{3}}}{(n+1)}\right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 2.3 положить $E=[0,1]$, $Q=\{0,1,\ldots,n\}$, $p_k=p_{n,k}(x)$,

$$\varphi_k(t)=\begin{cases}n+1, & \text{если } \frac{k}{n+1}\leqslant t\leqslant\frac{k+1}{n+1},\\ 0, & \text{при остальных } t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

При $p=2$ используется и равенство (2.1).

Пример 2.7 (суммы Бернштейна–Дюррмейер)**.** Полагаем

$$D_nf(x)=\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int\limits_0^1 f(t)p_{n,k}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x).$$

Пусть $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $f\in L_\infty[0,1]$, при всех t, таких что $x+t\in[0,1]$, справедлива оценка

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant\omega(|t|).$$

Тогда

$$|D_nf(x)-f(x)|\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int\limits_0^1|f(t)-f(x)|^p\,p_{n,k}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x)\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int\limits_0^1 |t-x|^p p_{n,k}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x)\right)^{1/p}\right).$$

В частности, при $p=2$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int\limits_0^1 (f(t)-f(x))^2\,p_{n,k}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x)\right)^{1/2}$$

$$=\left((D_nf(x)-f(x))^2+D_nf^2(x)-D_n^2f(x)\right)^{1/2}\leqslant \omega\left(\sqrt{\frac{2(n-3)x(1-x)+2}{(n+2)(n+3)}}\right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 2.3 положить $E=[0,1]$, $Q=\{0,1,\ldots,n\}$, $p_k=p_{n,k}(x)$, $\varphi_k(t)=(n+1)p_{n,k}(t)$, а при $p=2$ воспользоваться равенством (2.2).

Пример 2.8 (средние Стеклова 1-го порядка)**.** Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, $h>0$, функция $f\in L_\infty$ в точке $x\in\mathbb{R}$ имеет производную r-го порядка, для всех $t\in\mathbb{R}$ справедливо представление

$$f(x+t)=\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l+\frac{\varepsilon(t)}{r!}t^r,$$

где $|\varepsilon(t)|\leqslant\omega(|t|)$. Тогда

$$\left|S_h^1f(x)-\sum_{l=0}^{\lfloor r/2\rfloor}\frac{f^{(2l)}(x)}{(2l+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2l}\right|\leqslant\left(\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left|f(x+t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l\right|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\frac{h^r}{r!2^r(pr+1)^{1/p}}\omega\left(\frac{h}{2}\left(\frac{pr+1}{p(r+1)+1}\right)^{1/p}\right).$$

В частности, при $r=1$, $p=1$,

$$\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}|f(x+t)-f(x)-f'(x)t|\,dt\leqslant\frac{h}{4}\omega\left(\frac{h}{3}\right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 2.4 положить

$$\chi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{h}, & \text{если } -\dfrac{h}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{h}{2},\\ 0, & \text{при остальных } t\in\mathbb{R},\end{cases}$$

и принять во внимание, что при $s \geqslant 0$

$$\delta_s = \int\limits_{\mathbb{R}} |t|^s \chi(t)\, dt = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} |t|^s\, dt = \frac{2}{h} \int\limits_{0}^{h/2} t^s\, dt = \frac{h^s}{2^s(s+1)}.$$

Пример 2.9 (средние Стеклова 2-го порядка)**.** Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, $h > 0$, функция $f \in L_\infty$ имеет производную r-го порядка в точке $x \in \mathbb{R}$, для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо представление

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!} t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Тогда

$$\left| S_h^2 f(x) - \sum_{l=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{2 f^{(2l)}(x)}{(2l+2)!} h^{2l} \right| \leqslant \left(\frac{1}{h} \int\limits_{-h}^{h} \left| f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l \right|^p \left(1 - \frac{|t|}{h}\right) dt \right)^{1/p}$$
$$\leqslant \frac{h^r}{r!} \left(\frac{2}{(pr+1)(pr+2)} \right)^{1/p} \omega \left(h \left(\frac{(pr+1)(pr+2)}{(p(r+1)+1)(p(r+1)+2)} \right)^{1/p} \right).$$

В частности, при $r = 1$, $p = 1$

$$\frac{1}{h} \int\limits_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x) - f'(x)t| \left(1 - \frac{|t|}{h}\right) dt \leqslant \frac{h}{3} \omega\left(\frac{h}{2}\right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 2.4 положить

$$\chi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\left(1 - \dfrac{|t|}{h}\right), & \text{если } -h \leqslant t \leqslant h, \\ 0, & \text{при остальных } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

и принять во внимание, что при $s \geqslant 0$

$$\delta_s = \int\limits_{\mathbb{R}} |t|^s \chi(t)\, dt = \frac{1}{h} \int\limits_{-h}^{h} |t|^s \left(1 - \frac{|t|}{h}\right) dt$$
$$= \frac{2}{h} \left(\int\limits_{0}^{h} t^s\, dt - \frac{1}{h} \int\limits_{0}^{h} t^{s+1}\, dt \right) = \frac{2}{h} \left(\frac{h^{s+1}}{s+1} - \frac{h^{s+1}}{s+2} \right) = \frac{2h^s}{(s+1)(s+2)}.$$

Примеры 2.10–2.11 относятся к интегралу Валле-Пуссена

$$V_n f(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos^{2n} \frac{t}{2} \, dt.$$

Пример 2.10. Пусть $\omega \in \Omega^*$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, функция $f \in L_\infty$, для всех $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant \omega(|t|).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &|V_n f(x) - f(x)| \\ &\leqslant \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \cos^{2n} \frac{t}{2} \, dt \leqslant \omega\left(\frac{2}{\sqrt{\pi n}} + \frac{1}{\sqrt{n^3}} \right). \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно в следствии 2.4 положить $r = 0$, $p = 1$,

$$\chi(t) = \begin{cases} \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \dfrac{1}{2\pi} \cos^{2n} \dfrac{t}{2}, & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi], \end{cases}$$

и принять во внимание, что (см. [24])

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t| \chi(t) \, dt \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi n}} + \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Пример 2.11. Пусть $\omega \in \Omega^*$, $n \in \mathbb{N}$, функция $f \in L_\infty$ имеет производную в точке $x \in \mathbb{R}$, для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо представление

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \varepsilon(t)t,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Тогда

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x) - f'(x)t| \cos^{2n} \frac{t}{2} \, dt \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}} \omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}} \right).$$

Доказательство. Так как $\frac{t}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \sin \frac{t}{2}$ при $t \in [0, \pi]$, то

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos^{2n} \frac{t}{2} \, dt \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \pi^2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos^{2n} \frac{t}{2} \, dt$$

$$= \pi^2 \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{t}{2} \, dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2(n+1)} \frac{t}{2} \, dt \right)$$

$$= \pi^2 \left(1 - \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right) = \pi^2 \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2} \right) = \frac{\pi^2}{2(n+1)}.$$

Полагая в следствии 2.4

$$\chi(t) = \begin{cases} \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \dfrac{1}{2\pi} \cos^{2n} \dfrac{t}{2}, & \text{если } t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & \text{если } t \in \mathbb{R} \setminus [\pi, \pi], \end{cases}$$

$r = 1$, $p = 1$, $M = \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}$, получаем требуемое. $\square$

Глава 3

Приближение чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье суммами Рисса дробного порядка

Эта глава посвящена установлению двусторонних оценок для отклонения сумм Рисса в классе чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье посредством модуля непрерывности дробного порядка.

В §3.1 приводятся вспомогательные предложения. Основная теорема, имеющая общий характер, формулируется и доказывается в §3.2. Из основной теоремы, в частности, вытекают оценки сверху для величин

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+1}\right)^{r} a_k(f), \quad \|f - S_n f\|.$$

Эти следствия перечислены в §3.3. Далее в §3.4 приводятся двусторонние оценки для отклонений сумм Рисса $\|f - R_{n,r}f\|$.

В этой главе полагаем

$$\Delta_t^{\beta} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{\beta}^{k} f(x - kt)$$

— разность порядка $\beta \in \mathbb{R}_+$ с шагом t функции f,

$$\delta_t^{\beta} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{\beta}^{k} f\left(x + \frac{\beta t}{2} - kt\right)$$

— центральная разность порядка $\beta \in \mathbb{R}_+$ с шагом t функции f;

$$\omega_{\beta}(f,h) = \sup_{0\leqslant t\leqslant h}\left\|\delta_t^{\beta} f\right\|$$

— модуль непрерывности дробного порядка (см. [34; 43]);

$$R_{n,\beta} f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^{\beta}\right)(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— сумма Рисса функции f.

Через θ обозначаем подмножество пространства L_1, состоящее из чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье.

При $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ полагаем

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}, \tag{3.1}$$

где $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

Через $H_\gamma f$ обозначаем функцию, для которой ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{\operatorname{sgn} k}{i} \right)^\gamma c_k(f) e^{ikx} \tag{3.2}$$

является рядом Фурье, то есть H_γ — преобразование Гильберта дробного порядка (см. [40]), $\widetilde{f} = H_1 f$; через $f^{(\alpha)}$ обозначаем функцию, для которой ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (ik)^\alpha c_k(f) e^{ikx} \tag{3.3}$$

является рядом Фурье, то есть $f^{(\alpha)}$ — производная (при $\alpha \geqslant 0$) или первообразная (при $\alpha < 0$) дробного порядка в смысле Вейля (см., например, [26, §19]).

Функции $H_\gamma f$ и $f^{(\alpha)}$ таким образом определены с точностью до множества нулевой меры. Однако, если ряд (3.2) соответствует некоторой непрерывной функции, то под $H_\gamma f$ условимся понимать именно эту функцию. Аналогичное замечание относится к символу $f^{(\alpha)}$ и ряду (3.3).

Полагаем

$$C(\beta, \lambda) = \int_0^{\pi/2} \cos^\beta t \cdot \cos \lambda t \, dt,$$

$$I(\beta, \rho, \sigma, x) = \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t|^\beta \cos \left(\frac{\pi\sigma}{2} + \pi(\rho - \sigma) \left\{ \frac{t}{\pi} \right\} \right) \, dt.$$

3.1. Вспомогательные утверждения

Теорема 3.A (неравенство Чебышёва, см., например, [16, гл. I, §1]). *Пусть функции f и g заданы на отрезке $[a,b]$, причём f возрастает, а g убывает. Тогда*

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \int_a^b g(x) \, dx.$$

Если же функции f и g обе возрастают или обе убывают, то верно обратное неравенство.

Теорема 3.B (см. [46]). *Пусть $x > 0$, $s \in (0,1)$. Тогда*

$$\left(\frac{x}{x+s}\right)^{1-s} \leqslant \frac{\Gamma(x+s)}{x^s\Gamma(x)} \leqslant 1.$$

Теорема 3.C (Пэли, см., например, [5, гл. IV, §2]). *Если функция $f \in C$ и её коэффициенты Фурье неотрицательны, то её ряд Фурье сходится равномерно.*

Замечание 3.1. Из теоремы 3.C, в частности, следует, что для $f \in \theta \cap C$

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) = \|f\| < \infty.$$

Теорема 3.D (см. [16, гл. II, §3, §5]). *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $P \in \mathcal{A}$, $f \in C$. Тогда*

$$P(\sigma_n f) \leqslant P(f).$$

Лемма 3.1. *Пусть $\beta > 0$, $\lambda \in [-2,2]$. Тогда*

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\beta}{\beta+2}\frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \leqslant C(\beta,\lambda) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\beta+2}{\beta+1}}\frac{1}{\sqrt{\beta+1}}.$$

Кроме того,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \leqslant C(\beta,\lambda),$$

в частности, при $\lambda \in [-3/2, 3/2]$

$$\frac{2}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\beta+1}} \leqslant C(\beta,\lambda).$$

Доказательство. В силу чётности функции $C(\beta,\lambda)$ по второму аргументу, в дальнейшем предполагаем $\lambda \in [0,2]$.

Поскольку $\cos\lambda t \leqslant 1$, то

$$C(\beta,\lambda) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^\beta t \cdot \cos\lambda t\, dt \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \cos^\beta t\, dt.$$

С другой стороны, так как функция $\cos x$ убывает на $[0,\pi]$, то

$$C(\beta,\lambda)=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^\beta t\cdot\cos\lambda t\,dt\geqslant\int\limits_0^{\pi/2}\cos^\beta t\cdot\cos 2t\,dt=2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\beta+2}t\,dt-\int\limits_0^{\pi/2}\cos^\beta t\,dt.$$

Далее, так как

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^\beta t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}\right)},$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\beta+2}t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\beta+1}{\beta+2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}\right)},$$

то

$$C(\beta,\lambda)\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}\right)},$$

$$C(\beta,\lambda)\geqslant2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\beta+1}{\beta+2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}\right)}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\beta}{\beta+2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}\right)}.$$

В силу теоремы 3.B

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\leqslant\frac{1}{\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^{1/2}}\left(\frac{\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\beta+1}{2}}\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta+1}}\left(\frac{\beta+2}{\beta+1}\right)^{1/2},$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta+1}}.$$

Отсюда получаем двустороннюю оценку для $C(\beta,\lambda)$.

Принимая во внимание теорему 3.A, имеем

$$C(\beta,\lambda)=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^\beta t\cdot\cos\lambda t\,dt\geqslant\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^\beta t\,dt\int\limits_0^{\pi/2}\cos\lambda t\,dt=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\lambda}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^\beta t\,dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\lambda}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\geqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\beta+1}}.$$

Остаётся заметить, что функция $\frac{\sin x}{x}$ убывает на $[0, \pi]$, откуда следует последнее неравенство леммы. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть* $\beta > 0$, $\rho \in [-1, 1]$, $\sigma \in [0, 1]$. *Положим*

$$J(x) = \int\limits_0^x \sin^\beta t \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + (\rho - \sigma)t\right) dt.$$

Тогда

(а) $J(\pi) = 2\cos\frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \rho - \sigma)$*;*

(б) если $x \in [\pi/2, \pi]$*, то* $J(x) \geqslant \frac{x}{\pi}\cos\frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \rho - \sigma)$*;*

(в) если $x \in (0, \pi)$ *и пара чисел* $(\rho, \sigma) \neq (1, 1)$*, то* $J(x) > 0$.

Доказательство. (а) Заменяя переменную интегрирования по формуле $t = \pi/2 + u$, находим

$$J(x) = \int\limits_{-\pi/2}^{x-\pi/2} \cos^\beta u \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + (\rho - \sigma)\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right) du$$
$$= \int\limits_{-\pi/2}^{x-\pi/2} \cos^\beta u \cos\left(\frac{\pi\rho}{2} + (\rho - \sigma)u\right) du$$
$$= \cos\frac{\pi\rho}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{x-\pi/2} \cos^\beta u \cos(\rho - \sigma)u \, du - \sin\frac{\pi\rho}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{x-\pi/2} \cos^\beta u \sin(\rho - \sigma)u \, du.$$

Отсюда следует, что

$$J(\pi) = 2\cos\frac{\pi\rho}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^\beta u \cos(\rho - \sigma)u \, du = 2\cos\frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \rho - \sigma).$$

(б) Положим

$$J_1(x) := \int\limits_{-\pi/2}^{x-\pi/2} \cos^\beta t \cos(\sigma - \rho)t \, dt, \quad J_2(x) := \int\limits_{-\pi/2}^{x-\pi/2} \cos^\beta t \sin(\sigma - \rho)t \, dt.$$

Тогда полученная выше формула для $J(x)$ принимает вид

$$J(x) = \cos\frac{\pi\rho}{2} \cdot J_1(x) + \sin\frac{\pi\rho}{2} \cdot J_2(x). \tag{3.4}$$

Функция J_1 либо не имеет локальных экстремумов на $(\pi/2, \pi)$, либо имеет на этом интервале единственный локальный максимум, в чём можно убедиться, вычислив её производную. Поэтому

$$J_1(x) \geqslant \min\left\{J_1\left(\frac{\pi}{2}\right), J_1(\pi)\right\} = J_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = C(\beta, \rho-\sigma). \tag{3.5}$$

Используя нечётность подынтегральной функции, получаем

$$J_2(x) = \int\limits_{-\pi/2}^{-(x-\pi/2)} + \int\limits_{-(x-\pi/2)}^{x-\pi/2} = \int\limits_{-\pi/2}^{-(x-\pi/2)} \cos^\beta t \sin(\sigma-\rho)t\,dt$$

$$= -\int\limits_{x-\pi/2}^{\pi/2} \cos^\beta t \sin(\sigma-\rho)t\,dt. \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что выражение $\sin\frac{\pi\rho}{2} \cdot J_2(x)$ неотрицательно, если $\rho \in [-1, 0] \cup [\sigma, 1]$. В этом случае, учитывая (3.4) и (3.5), имеем

$$J(x) \geqslant \cos\frac{\pi\rho}{2} \cdot J_1(x) \geqslant \cos\frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \rho-\sigma) \geqslant \frac{x}{\pi}\cos\frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \rho-\sigma).$$

Рассмотрим теперь случай $\rho \in (0, \sigma)$. Разбивая интеграл J_1 на два слагаемых и производя во втором замену $t = \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)u$, находим

$$J_1(x) = \int\limits_{-\pi/2}^{x-\pi/2} \cos^\beta t \cos(\sigma-\rho)t\,dt$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{0} \cos^\beta t \cos(\sigma-\rho)t\,dt + \int\limits_{0}^{x-\pi/2} \cos^\beta t \cos(\sigma-\rho)t\,dt = \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^\beta t \cos(\sigma-\rho)t\,dt$$

$$+ \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right) \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^\beta \left(\left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)u\right) \cdot \cos\left((\sigma-\rho)\left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)u\right)\,du.$$

Учитывая убывание функции $\cos^\beta x \cdot \cos((\sigma-\rho)x)$ на отрезке $[0, \pi/2]$, получаем

$$J_1(x) \geqslant \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^\beta t \cos(\sigma-\rho)t\,dt + \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right) \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^\beta u \cos(\sigma-\rho)u\,du$$

$$= \frac{2x}{\pi} C(\beta, \sigma - \rho). \tag{3.7}$$

Далее, поскольку $\rho \in (0, \sigma)$, то из (3.6) следует

$$|J_2(x)| = \int\limits_{x-\pi/2}^{\pi/2} \cos^\beta t \sin(\sigma - \rho)t\, dt \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \cos^\beta t \cos(\sigma - \rho)t \operatorname{tg}(\sigma - \rho)t\, dt. \tag{3.8}$$

Так как функция $\operatorname{tg} x$ выпукла вниз на $[0, \pi/2)$, имеем

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^\beta t \cos(\sigma - \rho)t \operatorname{tg}(\sigma - \rho)t\, dt$$
$$\leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \cos^\beta t \cos(\sigma - \rho)t \left(\left(1 - \frac{2}{\pi} t\right) \operatorname{tg} 0 + \frac{2}{\pi} t \operatorname{tg} \frac{\pi(\sigma - \rho)}{2} \right) dt$$
$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi(\sigma - \rho)}{2} \int\limits_0^{\pi/2} t \cos^\beta t \cos(\sigma - \rho)t\, dt. \tag{3.9}$$

Применяя теорему 3.A, находим

$$\int\limits_0^{\pi/2} t \cos^\beta t \cos(\sigma - \rho)t\, dt \leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} t\, dt \int\limits_0^{\pi/2} \cos^\beta t \cos(\sigma - \rho)t\, dt$$
$$= \frac{\pi}{4} C(\beta, \sigma - \rho). \tag{3.10}$$

Сопоставляя (3.8), (3.9) и (3.10), получаем

$$\left| \sin \frac{\pi\rho}{2} \cdot J_2(x) \right| \leqslant \frac{1}{2} \sin \frac{\pi\rho}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi(\sigma - \rho)}{2} C(\beta, \sigma - \rho)$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \sin \frac{\pi\rho}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi(1 - \rho)}{2} C(\beta, \sigma - \rho) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \sigma - \rho).$$

Принимая во внимание последнее неравенство, а также формулы (3.4) и (3.7), имеем

$$J(x) \geqslant \cos \frac{\pi\rho}{2} \cdot \frac{2x}{\pi} C(\beta, \sigma - \rho) - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \sigma - \rho)$$
$$= \left(\frac{2x}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \cos \frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \sigma - \rho)$$
$$\geqslant \left(\frac{2x}{\pi} - \frac{x}{\pi} \right) \cos \frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \sigma - \rho) = \frac{x}{\pi} \cos \frac{\pi\rho}{2} \cdot C(\beta, \sigma - \rho).$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано для всех $\rho \in [-1,1]$.

(в) Если $t \in [0,\pi/2]$, то значение выражения $\frac{\pi\sigma}{2} + (\rho-\sigma)t$ лежит между числами $\frac{\pi\sigma}{2}$ и $\frac{\pi\rho}{2}$. Следовательно, при $x \in (0,\pi/2]$ будет $J(x) > 0$, поскольку соответствующая подынтегральная функция непрерывна и положительна внутри промежутка интегрирования.

Если $x \in (\pi/2,\pi)$ и $\rho \neq \pm 1$, то неравенство $J(x) > 0$ следует из пункта (б) и леммы 3.1.

Если $x \in (\pi/2,\pi)$ и $\rho = \pm 1$, то из (3.4) и (3.6) следует

$$J(x) = \mp \int\limits_{x-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{\beta} t \sin(\sigma \mp 1)t\,dt = \int\limits_{x-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{\beta} t \sin(1 \mp \sigma)t\,dt,$$

а так как пара $(\rho,\sigma) \neq (1,1)$, то подынтегральная функция непрерывна и положительна внутри промежутка интегрирования. Значит, и в этом случае $J(x) > 0$. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть* $\beta > 0$, $\rho \in [-1,1]$, $\sigma \in [-1,1]$, $x \geqslant \frac{\pi}{2}$. *Тогда*

$$I(\beta,\rho,\sigma,x) \geqslant \frac{\cos\frac{\pi\rho}{2}}{\pi} C(\beta,\rho-\sigma).$$

Доказательство. Так как

$$I(\beta,-\rho,-\sigma,x) = I(\beta,\rho,\sigma,x), \quad C(\beta,\rho-\sigma) = C(\beta,\sigma-\rho),$$

то в дальнейшем предполагаем $\sigma \in [0,1]$.

В силу π-периодичности подынтегральной функции, имеем

$$I(\beta,\rho,\sigma,x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x |\sin t|^{\beta} \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + \pi(\rho-\sigma)\left\{\frac{t}{\pi}\right\}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x}\left(\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \int\limits_0^{\pi} \sin^{\beta} t \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + \pi(\rho-\sigma)\frac{t}{\pi}\right) dt \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\pi\left\{\frac{x}{\pi}\right\}} \sin^{\beta} t \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + \pi(\rho-\sigma)\frac{t}{\pi}\right) dt \right).$$

Принимая во внимание лемму 3.2, получаем

$$I(\beta,\rho,\sigma,x) = \frac{1}{x}\left(\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor J(\pi) + J\left(\pi\left\{\frac{x}{\pi}\right\}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(2\left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor \cos\frac{\pi\rho}{2}\cdot C(\beta,\rho-\sigma) + J\left(\pi\left\{\frac{x}{\pi}\right\}\right)\right). \tag{3.11}$$

Если $x \in [\pi/2, \pi)$, то отсюда и из пункта (б) леммы 3.2 следует

$$I(\beta,\rho,\sigma,x) = \frac{1}{x}J(x) \geqslant \frac{\cos\frac{\pi\rho}{2}}{\pi}C(\beta,\rho-\sigma).$$

Если $x \geqslant \pi$, то из (3.11) и пункта (в) леммы 3.2 вытекает

$$I(\beta,\rho,\sigma,x) \geqslant \frac{2}{x}\left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor \cos\frac{\pi\rho}{2}\cdot C(\beta,\rho-\sigma) = \frac{2\cos\frac{\pi\rho}{2}}{\pi\left(1+\frac{\{x/\pi\}}{\lfloor x/\pi\rfloor}\right)}C(\beta,\rho-\sigma)$$

$$\geqslant \frac{\cos\frac{\pi\rho}{2}}{\pi}C(\beta,\rho-\sigma),$$

что и требовалось. □

Лемма 3.4. *Пусть* $\beta > 0$, $\nu \in [0,1]$, $\rho \in [-1,1]$, $\sigma \in [-1,1]$. *Тогда*

$$I\left(\beta,\rho,\sigma,\frac{\pi\nu}{2}\right) \geqslant \frac{\nu^\beta}{\pi}\cos\frac{\pi(\nu\rho+(1-\nu)\sigma)}{2}\cdot C(\beta,\rho-\sigma).$$

Доказательство. Имеем

$$I\left(\beta,\rho,\sigma,\frac{\pi\nu}{2}\right) = \frac{2}{\pi\nu}\int_0^{\pi\nu/2} \sin^\beta t\cos\left(\frac{\pi\sigma}{2}+(\rho-\sigma)t\right)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^\beta \nu t\cos\left(\frac{\pi\sigma}{2}+\nu(\rho-\sigma)t\right)dt.$$

Так как функция $\sin x$ выпукла вверх на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, то при $t \in [0,\pi/2]$

$$\sin\nu t \geqslant (1-\nu)\sin 0 + \nu\sin t = \nu\sin t,$$

поэтому

$$I\left(\beta,\rho,\sigma,\frac{\pi\nu}{2}\right) \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \nu^\beta\sin^\beta t\cos\left(\frac{\pi\sigma}{2}+(\nu\rho+(1-\nu)\sigma-\sigma)t\right)dt$$

$$= \nu^\beta I\left(\beta,\nu\rho+(1-\nu)\sigma,\sigma,\frac{\pi}{2}\right).$$

По лемме 3.3

$$I\left(\beta,\rho,\sigma,\frac{\pi\nu}{2}\right) \geqslant \frac{\nu^\beta}{\pi}\left(\cos\frac{\pi(\nu\rho+(1-\nu)\sigma)}{2}\right)C(\beta,\nu(\rho-\sigma)).$$

Остаётся принять во внимание, что $C(\beta,\nu(\rho-\sigma)) \geqslant C(\beta,\rho-\sigma)$. □

Замечание 3.2. Из лемм 3.1, 3.3 и 3.4, в частности, следует, что при $\beta > 0$, $\rho \in (-1,1)$, $\sigma \in [-1,1]$, $x > 0$ будет

$$I(\beta,\rho,\sigma,x) > 0.$$

Если же $\rho = \pm 1$, то интеграл $I(\beta,\rho,\sigma,x)$ может обратиться в ноль: при $\sigma = \rho$ он равен нулю при любом $x > 0$, а при $\sigma \neq \rho$ из (3.11) и пункта (в) леммы 3.2 следует, что $I(\beta,\rho,\sigma,x) = 0$ в точках $x = \pi m$ ($m \in \mathbb{N}$) и только в них.

Лемма 3.5. *Пусть* $\alpha,\beta,\gamma,t,x \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $f \in \theta$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(f)k^\alpha < \infty$. *Тогда*

$$\delta_t^\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^\beta k^\alpha a_k(f)\cos\left(kx + \pi\beta\left\lfloor\frac{kt}{2\pi}\right\rfloor + \frac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\right).$$

Доказательство. Поскольку (см., например, [34]) при $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k\left(\Delta_t^\beta f\right) = (1-e^{-ikt})^\beta c_k(f),$$

то

$$c_k\left(\delta_t^\beta f\right) = e^{ik\frac{\beta t}{2}}(1-e^{-ikt})^\beta c_k(f).$$

Положим $m(k) := \left\lfloor\frac{kt}{2\pi}\right\rfloor$, $\varepsilon := kt - 2\pi m(k)$, тогда $\varepsilon \in [0,2\pi)$ и

$$1-e^{-ikt} = 1-e^{-i\varepsilon} = e^{-i\frac{\varepsilon}{2}}2i\sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно (3.1) имеем

$$e^{ik\frac{\beta t}{2}}(1-e^{-ikt})^\beta = e^{ik\frac{\beta t}{2}}\left(e^{-i\frac{\varepsilon}{2}}2i\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^\beta = e^{i\beta\frac{kt}{2}}\left|2\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|^\beta e^{i\beta\left(-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \left|2\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|^\beta e^{i\beta\left(\frac{\varepsilon}{2}+\pi m(k)-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^\beta e^{i\beta\pi\left(m(k)+\frac{1}{2}\right)}.$$

Поэтому

$$c_k\left(\delta_t^\beta f\right) = \left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^\beta e^{i\beta\pi\left(m(k)+\frac{1}{2}\right)}c_k(f).$$

Заметим, что $m(-k)+\frac{1}{2} = -\left(m(k)+\frac{1}{2}\right)$, если $\frac{kt}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. Кроме того, условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^\alpha a_k(f) < \infty$ обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость ряда Фурье функции $\delta_t^\beta H_\gamma f^{(\alpha)}$. Тогда

$$\delta_t^\beta H_\gamma f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^\beta e^{i\beta\pi\left(m(k)+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\operatorname{sgn} k}{i}\right)^\gamma (ik)^\alpha c_k(f)e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^{\beta} e^{i\beta\pi\left(m(k)+\frac{1}{2}\right)} e^{-i\gamma\frac{\pi}{2}} k^{\alpha} e^{i\alpha\frac{\pi}{2}} \frac{a_k(f)}{2} e^{ikx}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^{\beta} e^{-i\beta\pi\left(m(k)+\frac{1}{2}\right)} e^{i\gamma\frac{\pi}{2}} k^{\alpha} e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} \frac{a_k(f)}{2} e^{-ikx}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^{\beta} k^{\alpha} a_k(f) \cos\left(\beta\pi\left(m(k)+\frac{1}{2}\right) - \gamma\frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{2} + kx\right).$$

Заменяя $m(k)$ на $\left\lfloor \frac{kt}{2\pi} \right\rfloor$, получаем требуемое. □

3.2. Основная теорема

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, числа $\rho \in (-1,1)$ и $\sigma \in (-1,1]$ таковы, что*

$$\alpha - \gamma = 2l + \rho, \quad l \in \mathbb{Z},$$
$$\alpha + \beta - \gamma = 2m + \sigma, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Пусть, далее, $f \in \theta$, $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$, $h > 0$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(f) \leqslant \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_k}{k^{\alpha} I\left(\beta,\rho,\sigma,\frac{kh}{2}\right)} \right) \frac{1}{2^{\beta} h} \int_0^h \omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, t\right)\, dt.$$

Доказательство. Дополнительно предположим сначала, что f — тригонометрический полином.

Так как при $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0,h]$

$$\cos\left(\frac{k(\rho-\sigma)t}{2} + \pi\beta\left\lfloor\frac{kt}{2\pi}\right\rfloor + \frac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\right)$$
$$= \cos\left(\pi(\rho-\sigma)\frac{kt}{2\pi} + \pi(2m+\sigma-2l-\rho)\left\lfloor\frac{kt}{2\pi}\right\rfloor + \frac{\pi}{2}(2m+\sigma)\right)$$
$$= (-1)^m \cos\left(\pi(\rho-\sigma)\left(\frac{kt}{2\pi} - \left\lfloor\frac{kt}{2\pi}\right\rfloor\right) + \frac{\pi\sigma}{2}\right)$$
$$= (-1)^m \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + \pi(\rho-\sigma)\left\{\frac{kt}{2\pi}\right\}\right),$$

то, по лемме 3.5,

$$\delta_t^{\beta} H_\gamma f^{(\alpha)}\left(\frac{(\rho-\sigma)t}{2}\right) = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^{\beta} k^{\alpha} a_k(f) \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + \pi(\rho-\sigma)\left\{\frac{kt}{2\pi}\right\}\right).$$

Интегрируя обе части этого равенства по отрезку $[0,h]$, получаем

$$\begin{aligned}
&(-1)^m \int\limits_0^h \delta_t^\beta H_\gamma f^{(\alpha)} \left(\frac{(\rho-\sigma)t}{2}\right)\, dt \\
&= \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^h \left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^\beta \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + \pi(\rho-\sigma)\left\{\frac{kt}{2\pi}\right\}\right)\, dt \cdot k^\alpha a_k(f) \\
&= 2^\beta h \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{kh} \int\limits_0^{kh/2} |\sin t|^\beta \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2} + \pi(\rho-\sigma)\left\{\frac{t}{\pi}\right\}\right)\, dt \cdot k^\alpha a_k(f) \\
&= 2^\beta h \sum_{k=1}^\infty I\left(\beta,\rho,\sigma,\frac{kh}{2}\right) k^\alpha a_k(f) =: 2^\beta h \sum_{k=1}^\infty I_k a_k(f).
\end{aligned}$$

Поскольку $I_k > 0$ при $k \in \mathbb{N}$ (см. замечание 3.2), то

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k(f) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k}{I_k} I_k a_k(f) \leqslant \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_k}{I_k}\right) \sum_{k=1}^\infty I_k a_k(f).$$

Отметим, что полученное неравенство остаётся верным и с учётом соглашения $\infty \cdot 0 = 0$.

Далее,

$$\sum_{k=1}^\infty I_k a_k(f) = \frac{1}{2^\beta h} \left| \int\limits_0^h \delta_t^\beta H_\gamma f^{(\alpha)} \left(\frac{(\rho-\sigma)t}{2}\right)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{2^\beta h} \int\limits_0^h \omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, t\right)\, dt.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k(f) \leqslant \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_k}{I_k}\right) \frac{1}{2^\beta h} \int\limits_0^h \omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, t\right)\, dt. \qquad (3.12)$$

Пусть теперь функция f такова, что $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$. Поскольку функционал $\omega_\beta(\cdot, t)$ является полунормой класса $\mathcal{A}$ (свойства модуля непрерывности дробного порядка см., например, в [43]), то по теореме 3.D при $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\omega_\beta\left(H_\gamma \sigma_n f^{(\alpha)}, t\right) = \omega_\beta\left(\sigma_n H_\gamma f^{(\alpha)}, t\right) \leqslant \omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, t\right).$$

Поэтому, применяя неравенство (3.12) к функции $\sigma_n f$, находим

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\lambda_k a_k(f) \leqslant \left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\lambda_k}{I_k}\right)\frac{1}{2^\beta h}\int\limits_0^h \omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, t\right)\,dt. \tag{3.13}$$

Так как $\lambda_k a_k(f) \geqslant 0$ при $k\in\mathbb{N}$, то сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k a_k(f)$ имеет предел (конечный или бесконечный) при $n\to\infty$, значит, к тому же пределу стремится и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\lambda_k a_k(f)$. Таким образом, устремляя n к бесконечности в (3.13), получаем требуемое. □

Замечание 3.3. Теорема 3.1 остаётся верной и в случае $\rho=-1$, если числа λ_k равны нулю при тех же значениях k, при которых равны нулю числа $I\left(\beta,-1,\sigma,\frac{kh}{2}\right)$. То есть (см. замечание 3.2) при k, имеющих вид $\frac{2\pi m}{h}$, где $m\in\mathbb{N}$.

Замечание 3.4. Пусть $n\in\mathbb{N}$, $f(x)=\cos nx$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta/2\in\mathbb{N}$. Тогда из леммы 3.5 следует, что

$$\omega_\beta(H_\alpha f^{(\alpha)}, t) = \begin{cases} 2^\beta n^\alpha\left|\sin\frac{nt}{2}\right|^\beta, & \text{если } 0\leqslant t<\frac{\pi}{n},\\ 2^\beta n^\alpha, & \text{если } t\geqslant\frac{\pi}{n}.\end{cases}$$

Применяя теорему 3.1 при $h=\frac{\pi}{n}$ и считая $\lambda_n=1$ и $\lambda_k=0$ при $k\neq n$, имеем

$$1\leqslant\frac{1}{n^\alpha I\left(\beta,0,0,\frac{\pi}{2}\right)}\frac{n}{2^\beta\pi}\int\limits_0^{\pi/n}2^\beta n^\alpha\left|\sin\frac{nt}{2}\right|^\beta dt = \frac{1}{\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^\beta\,dt}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^\beta\,dt = 1,$$

то есть неравенство из теоремы 3.1 в этом случае обращается в равенство.

3.3. Оценки, содержащие одно слагаемое

Следствие 3.1. *Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta>0$, $\gamma\in\mathbb{R}$, числа $\rho\in[-1,1)$ и $\sigma\in(-1,1]$ таковы, что*

$$\alpha-\gamma=2l+\rho,\quad l\in\mathbb{Z},$$
$$\alpha+\beta-\gamma=2m+\sigma,\quad m\in\mathbb{Z}.$$

Обозначим через d то из чисел ρ и σ, которое расположено ближе к нулю, а через D то из них, которое расположено дальше.

Пусть, далее, $f \in \theta$, $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$, $n-1 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta} a_k(f) \leqslant \frac{\pi}{2^\beta C(\beta,\rho-\sigma)\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}} \frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \pi/n\right)}{n^\alpha}.$$

Доказательство. Полагая в теореме 3.1

$$\lambda_k = \begin{cases} (k/n)^{\alpha+\beta}, & \text{если } k \in [1:n-1], \\ 0, & \text{если } k \geqslant n, \end{cases}$$

при $\rho \in (-1,1)$ находим

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta} a_k(f) \leqslant \frac{1}{2^\beta} \sup_{k\in[1:n-1]} \frac{(k/n)^{\alpha+\beta}}{k^\alpha I\left(\beta,\rho,\sigma,\frac{\pi k}{2n}\right)} \omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Учитывая замечание 3.3, последнее неравенство верно и при $\rho = -1$.

По лемме 3.4

$$\begin{aligned} &\sup_{k\in[1:n-1]} \frac{(k/n)^{\alpha+\beta}}{k^\alpha I\left(\beta,\rho,\sigma,\frac{\pi k}{2n}\right)} \\ &\leqslant \sup_{k\in[1:n-1]} \frac{(k/n)^{\alpha+\beta}}{k^\alpha \frac{1}{\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^\beta \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\rho + \left(1-\frac{k}{n}\right)\sigma\right)\right) C(\beta,\rho-\sigma)} \\ &= \frac{\pi}{n^\alpha C(\beta,\rho-\sigma)} \sup_{k\in[1:n-1]} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\rho + \left(1-\frac{k}{n}\right)\sigma\right)\right)}. \end{aligned}$$

Так как функция $\cos x$ выпукла вверх на промежутке между числами $\pi\rho/2$ и $\pi\sigma/2$, то

$$\begin{aligned} &\inf_{k\in[1:n-1]} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\rho + \left(1-\frac{k}{n}\right)\sigma\right)\right) \\ &= \min\left\{\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{\rho}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma\right), \cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{(n-1)\rho}{n} + \left(1-\frac{n-1}{n}\right)\sigma\right)\right\} \\ &= \min\left\{\cos\frac{\pi(\rho+(n-1)\sigma)}{2n}, \cos\frac{\pi((n-1)\rho+\sigma)}{2n}\right\} \\ &= \min\left\{\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}, \cos\frac{\pi((n-1)d+D)}{2n}\right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность

$$\cos\frac{\pi((n-1)d+D)}{2n} - \cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi(D+d)}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi(n-2)(D-d)}{4n}\right).$$

Так как числа $D+d$ и $D-d$ принадлежат отрезку $[-2,2]$ и оба неположительны или неотрицательны, то полученное выражение неотрицательно, а значит,

$$\min\left\{\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}, \cos\frac{\pi((n-1)d+D)}{2n}\right\} = \cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}.$$

Отсюда получаем требуемое. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha - \gamma$ не является нечётным, числа $\rho \in (-1,1)$ и $\sigma \in (-1,1]$ таковы, что*

$$\begin{aligned} &\alpha - \gamma = 2l + \rho, \quad l \in \mathbb{Z},\\ &\alpha + \beta - \gamma = 2m + \sigma, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Пусть, далее, $f \in \theta \cap C$, $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда

$$\|f - S_{n-1}f\| \leqslant \frac{\pi}{2^\beta C(\beta,\rho-\sigma)\cos\frac{\pi\rho}{2}} \frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \pi/n\right)}{n^\alpha}.$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 при

$$\lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \in [1:n-1],\\ 1, & \text{если } k \geqslant n. \end{cases}$$

следует (см. также замечание 3.1)

$$\|f - S_{n-1}f\| = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(f) \leqslant \frac{1}{2^\beta}\left(\sup_{k\geqslant n}\frac{1}{k^\alpha I(\beta,\rho,\sigma,\frac{\pi k}{2n})}\right)\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2^\beta n^\alpha}\left(\sup_{k\geqslant n}\frac{1}{I(\beta,\rho,\sigma,\frac{\pi k}{2n})}\right)\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Применение леммы 3.3 завершает доказательство. $\square$

Множитель перед модулем непрерывности в неравенстве следствия 3.1 имеет завышенный порядок роста по n, если число $\alpha - \gamma$ нечётное. Следствие 3.2 в этом случае вообще не применимо. Тем не менее справедливы аналогичные неравенства и в случае нечётного значения $\alpha - \gamma$. Они вытекают из указанных следствий, если воспользоваться следующей леммой.

Лемма 3.6. *Пусть $f \in C^1$, $\beta > 0$, $h > 0$. Тогда*

$$\omega_{\beta+1}(f,h) \leqslant h\omega_\beta(f',h).$$

Доказательство. При $0 < t \leqslant h$ имеем

$$\delta_t^{\beta+1} f(x) = \delta_t^\beta \delta_t^1 f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_\beta^k \delta_t^1 f\left(x + \frac{\beta t}{2} - kt\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_\beta^k \int\limits_{-t/2}^{t/2} f'\left(x + \frac{\beta t}{2} - kt + u\right) du.$$

Так как $|(-1)^k C_\beta^k f'(x + \beta t/2 - kt + u)| \leqslant |C_\beta^k| \, \|f'\|$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_\beta^k| \, \|f'\|$ сходится, то ряд

$$\delta_t^\beta(f', x+u) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_\beta^k f'\left(x + \frac{\beta t}{2} - kt + u\right)$$

сходится равномерно по $u \in [-t/2, t/2]$, что означает непрерывность функции $\delta_t^\beta(f')$ и возможность изменения порядка суммирования и интегрирования. Получаем

$$\delta_t^{\beta+1} f(x) = \int\limits_{-t/2}^{t/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_\beta^k f'\left(x + \frac{\beta t}{2} - kt + u\right)\right) du = \int\limits_{-t/2}^{t/2} \delta_t^\beta f'(x+u)\, du.$$

Следовательно,

$$\left\|\delta_t^{\beta+1} f\right\| \leqslant \int\limits_{-t/2}^{t/2} \left\|\delta_t^\beta f'\right\| du = t \left\|\delta_t^\beta f'\right\|.$$

Переходя к супремуму по $t \in [0,h]$ сначала в правой, а затем в левой части, получаем требуемое неравенство. □

Следствие 3.3. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $f \in \theta$, $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$, $n - 1 \in \mathbb{N}$.*

Тогда если $\alpha + \beta - \gamma$ не является нечётным, то

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta} a_k(f) \leqslant \frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2}|\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma)|} \frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \pi/n\right)}{n^\alpha},$$

если $\alpha+\beta-\gamma$ нечётно, то

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta}a_k(f)\leqslant\frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+1}}\frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)},\pi/n\right)}{n^{\alpha-1}}.$$

Доказательство. Применяя следствие 3.1, имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta}a_k(f)\leqslant\frac{\pi}{2^\beta C(\beta,\rho-\sigma)\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}}\frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)},\pi/n\right)}{n^\alpha}.$$

Если $\rho\in[-1/2,1/2]$, то $\rho-\sigma\in[-3/2,3/2]$ и из леммы 3.1 следует

$$\frac{\pi}{2^\beta C(\beta,\rho-\sigma)}\leqslant\frac{\pi}{2^\beta}\frac{3\sqrt{\pi}\sqrt{\beta+1}}{2}\leqslant\frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+2}}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta}a_k(f)\leqslant\frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+2}\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}}\frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)},\pi/n\right)}{n^\alpha}. \tag{3.14}$$

Если же ρ не попадает в промежуток $[-1/2,1/2]$, то применим следствие 3.1, заменяя α на $\alpha-1$, а β на $\beta+1$. Обозначая через ρ_1 такое число, что $\alpha-1-\gamma=2l_1+\rho_1$, где $l_1\in\mathbb{Z}$, $\rho_1\in[-1/2,1/2]$, находим

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta}a_k(f)\leqslant\frac{\pi}{2^{\beta+1}C(\beta+1,\rho_1-\sigma)\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}}\frac{\omega_{\beta+1}\left(H_\gamma f^{(\alpha-1)},\pi/n\right)}{n^{\alpha-1}}$$

(здесь числа d и D имеют уже другой смысл).

Снова применяя лемму 3.1, получаем

$$\frac{\pi}{2^{\beta+1}C(\beta+1,\rho_1-\sigma)}\leqslant\frac{3\pi^{3/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+2}}.$$

Принимая во внимание лемму 3.6, находим

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta}a_k(f)\leqslant\frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+2}\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}}\frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)},\pi/n\right)}{n^\alpha}. \tag{3.15}$$

Теперь оценим выражение $\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}$ в (3.14) и (3.15). Для этого рассмотрим два случая.

Если $\alpha+\beta-\gamma$ не является нечётным, тогда $D\neq 1$ и

$$\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}\geqslant\cos\frac{\pi D}{2}.$$

Если $D = \sigma$, то $\cos\frac{\pi D}{2} = \cos\frac{\pi\sigma}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi\sigma}{2}$. Если же $D \neq \sigma$ (то есть $D = \rho$ или $D = \rho_1$), то $\cos\frac{\pi D}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi\sigma}{2}$. Отсюда следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta} a_k(f) \leqslant \frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2}\cos\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \pi/n\right)}{n^\alpha}.$$

Остаётся заметить, что $\cos\frac{\pi\sigma}{2} = \left|\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\right|$.

Если $\alpha+\beta-\gamma$ нечётно, то $D = 1$ и

$$\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n} = \cos\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1-d}{n}\right) = \sin\frac{\pi}{2}\frac{1-d}{n} \geqslant \frac{1-d}{n}.$$

Так как $d = \rho$ или $d = \rho_1$, то $d \in [-1/2, 1/2]$ и

$$\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta} a_k(f) \leqslant \frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+1}}\frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \pi/n\right)}{n^{\alpha-1}},$$

что и требовалось. □

Следствие 3.4. *Пусть $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $\gamma \in [\alpha-1/2, \alpha+1/2]$ при $\alpha \in [0,1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ при $\alpha \geqslant 1$, $f \in \theta \cap C$, $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\|f - S_{n-1}f\| \leqslant \frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2}}\frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \pi/n\right)}{n^\alpha}.$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 3.2 в предположении, что $\rho \in [-1/2, 1/2]$ (сюда в том числе попадает случай $\alpha \in [0,1)$, $\gamma \in [\alpha-1/2, \alpha+1/2]$). Имеем

$$\|f - S_{n-1}f\| \leqslant \frac{\pi}{2^\beta C(\beta, \rho-\sigma)\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \pi/n\right)}{n^\alpha}.$$

Поскольку $\rho - \sigma \in [-3/2, 3/2]$, то из леммы 3.1 следует

$$\frac{\pi}{2^\beta C(\beta, \rho-\sigma)\frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant \frac{3\pi^{3/2}\sqrt{\beta+1}}{2^{\beta+1/2}} \leqslant \frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2}},$$

а значит, в указанном случае требуемое неравенство установлено.

Пусть теперь ρ не попадает в промежуток $[-1/2, 1/2]$. В этом случае применим следствие 3.2, заменяя α на $\alpha - 1$, а β на $\beta + 1$. Обозначая через ρ_1 такое число, что $\alpha - 1 - \gamma = 2l_1 + \rho_1$, где $l_1 \in \mathbb{Z}$, $\rho_1 \in [-1/2, 1/2]$, находим

$$\|f - S_{n-1}f\| \leqslant \frac{\pi}{2^{\beta+1}C(\beta+1, \rho_1 - \sigma)\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\omega_{\beta+1}\left(H_\gamma f^{(\alpha-1)}, \pi/n\right)}{n^{\alpha-1}}.$$

Поскольку $\rho_1 - \sigma \in [-3/2, 3/2]$, то из леммы 3.1 следует

$$\frac{\pi}{2^{\beta+1}C(\beta+1, \rho_1 - \sigma)\frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant \frac{3\pi^{3/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2}}.$$

Применяя лемму 3.6, находим

$$\begin{aligned} \|f - S_{n-1}f\| &\leqslant \frac{3\pi^{3/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2}} \frac{\omega_{\beta+1}\left(H_\gamma f^{(\alpha-1)}, \pi/n\right)}{n^{\alpha-1}} \\ &\leqslant \frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2}} \frac{\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \pi/n\right)}{n^\alpha}, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

В дальнейшем потребуется следующая лемма.

Лемма 3.7. *Пусть $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $f \in \theta \cap C$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда при $\alpha \in [-\beta, 0]$*

$$\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \pi^\beta n^\alpha \|f - R_{n-1,\alpha+\beta}f\|;$$

если $\alpha > 0$, то из сходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\beta-1} \sum\limits_{l=1}^{k} l^{\alpha+\beta} a_l(f)$ следует $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$ и

$$\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \beta\pi^\beta \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\beta-1} \sum_{l=1}^{k} l^{\alpha+\beta} a_l(f). \tag{3.16}$$

Доказательство. Пусть $f \in \theta$ — тригонометрический полином. Принимая во внимание лемму 3.5, при $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \pi/n]$, $x \in \mathbb{R}$ находим

$$\left|\delta_t^\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, x\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^\beta k^\alpha a_k(f) \cos\left(kx + \pi\beta\left\lfloor\frac{kt}{2\pi}\right\rfloor + \frac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^\beta k^\alpha a_k(f) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} (kt)^\beta k^\alpha a_k(f) + \sum_{k=n}^{\infty} 2^\beta k^\alpha a_k(f)$$

$$\leqslant \pi^\beta \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^\beta k^\alpha a_k(f) + \pi^\beta \sum_{k=n}^{\infty} k^\alpha a_k(f).$$

Отсюда получаем

$$\left\| \delta_t^\beta \left(H_\gamma f^{(\alpha)} \right) \right\| \leqslant \pi^\beta \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^\beta k^\alpha a_k(f) + \sum_{k=n}^{\infty} k^\alpha a_k(f) \right).$$

Если f — произвольная функция из класса $\theta \cap C$, то при $-\beta \leqslant \alpha \leqslant 0$ будет $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$. Применяя полученное неравенство к суммам Фейера $\sigma_N f$ и устремляя N к бесконечности, а затем переходя к супремуму по t, имеем

$$\omega_\beta \left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n} \right) \leqslant \pi^\beta \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^\beta k^\alpha a_k(f) + \sum_{k=n}^{\infty} k^\alpha a_k(f) \right). \tag{3.17}$$

Поэтому

$$\omega_\beta \left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n} \right) \leqslant \pi^\beta n^\alpha \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha+\beta} a_k(f) + \sum_{k=n}^{\infty} a_k(f) \right)$$
$$= \pi^\beta n^\alpha \left\| f - R_{n-1,\alpha+\beta} f \right\|.$$

Докажем теперь второе неравенство леммы. Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, при $N \in \mathbb{N}$ положим

$$\lambda_k = \begin{cases} \mu_k, & \text{если } k \leqslant N, \\ 0, & \text{если } k > N, \end{cases}$$
$$Q_{k-1} = \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{l}{k}\right)^\beta \lambda_l + \sum_{l=k}^{\infty} \lambda_l.$$

Тогда

$$Q_{k-1} - Q_k = \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{l}{k}\right)^\beta \lambda_l + \sum_{l=k}^{\infty} \lambda_l - \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{l}{k+1}\right)^\beta \lambda_l - \sum_{l=k+1}^{\infty} \lambda_l$$
$$= \sum_{l=1}^{k} l^\beta \lambda_l \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) = \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) \sum_{l=1}^{k} l^\beta \lambda_l.$$

Кроме того, $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k = 0$, поэтому

$$Q_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} (Q_{k-1} - Q_k) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) \sum_{l=1}^{k} l^\beta \lambda_l \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\beta}{k^{\beta+1}} \sum_{l=1}^{k} l^\beta \lambda_l.$$

Отсюда, поскольку $\lambda_l \leqslant \mu_l$ при $l \in \mathbb{N}$, получаем

$$Q_{n-1} = \sum_{l=1}^{n-1} \left(\frac{l}{n}\right)^\beta \lambda_l + \sum_{l=n}^{\infty} \lambda_l \leqslant \beta \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\beta-1} \sum_{l=1}^{k} l^\beta \mu_l.$$

При $N \geqslant n$ последнее неравенство равносильно

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^\beta \mu_k + \sum_{k=n}^{N} \mu_k \leqslant \beta \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\beta-1} \sum_{l=1}^{k} l^\beta \mu_l.$$

Устремляя N к бесконечности, получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^\beta \mu_k + \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k \leqslant \beta \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\beta-1} \sum_{l=1}^{k} l^\beta \mu_l.$$

Подставляя вместо μ_k числа $k^\alpha a_k(f)$, находим, что из сходимости ряда в правой части следует сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^\alpha a_k(f)$, а значит и непрерывность функции $H_\gamma f^{(\alpha)}$ при любом $\gamma \in \mathbb{R}$. Для завершения доказательства остаётся принять во внимание неравенство (3.17). $\square$

Следствие 3.5. *Пусть $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $\gamma \in [\alpha - 1/2, \alpha + 1/2]$ при $\alpha \in [0,1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ при $\alpha \geqslant 1$, $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in \theta \cap C$, $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$, $n \in \mathbb{N}$.*

Тогда, если $\alpha + \beta - \gamma$ не является нечётным, то

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi^{\alpha+\beta}} \omega_{\alpha+\beta}\left(H_\mu f, \frac{\pi}{n}\right) &\leqslant \|f - R_{n-1,\alpha+\beta} f\| \\ &\leqslant \frac{3\pi^{5/2}\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2} n^\alpha} \left(\frac{1}{\left|\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\right|} + 1\right) \omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right),\end{aligned}$$

если $\alpha + \beta - \gamma$ нечётно, то

$$\frac{1}{\pi^{\alpha+\beta}} \omega_{\alpha+\beta}\left(H_\mu f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \|f - R_{n-1,\alpha+\beta} f\| \leqslant \frac{3\pi^{5/2}(1+\sqrt{2})\sqrt{\beta+2}}{2^{\beta+3/2} n^{\alpha-1}} \omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Доказательство. Оценки снизу следуют из леммы 3.7. Оценки сверху получаются сопоставлением следствий 3.3 и 3.4. $\square$

Замечание 3.5. Воспользовавшись следствиями 3.2, 3.3 при $\gamma = 0$ и леммой 3.7, можно вывести утверждение (A) в теореме 3.1 работы [45]. Если же взять $\gamma = 1$, то можно получить утверждение (A) теоремы 3.5 той же работы. Частные случаи следствия 3.3 приводились в работах [44] и [45] без указания конкретных постоянных в виде отдельных лемм, соответствующих $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$.

Отметим некоторые соотношения для модулей непрерывности, вытекающие из полученных результатов.

Следствие 3.6. *Пусть* $\beta > 0$, $\gamma \in [-1/2, 1/2]$, $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in \theta \cap C$, $n \in \mathbb{N}$. *Положим*

$$M(\beta,\gamma) := \frac{3\pi^{\beta+5/2}}{2^{\beta+3/2}}\sqrt{\beta+2}\left(\frac{1}{\left|\cos\frac{\pi}{2}(\beta-\gamma)\right|}+1\right),$$
$$N(\beta) := \frac{3(1+\sqrt{2})\pi^{\beta+5/2}}{2^{\beta+3/2}}\sqrt{\beta+2},$$

через l *обозначается некоторое целое число. Тогда*

(а) при $\varepsilon \geqslant 0$

$$\omega_{\beta+\varepsilon}\left(H_\mu f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \pi^\varepsilon M(\beta,\gamma)\omega_\beta\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{n}\right), \qquad \text{если } \beta-\gamma \neq 2l+1,$$
$$\omega_{\beta+\varepsilon}\left(H_\mu f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \pi^\varepsilon N(\beta) n\omega_\beta\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{n}\right), \qquad \text{если } \beta-\gamma = 2l+1;$$

(б) при $0 \leqslant \varepsilon < \beta$

$$\omega_{\beta-\varepsilon}\left(H_\mu f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant M(\beta,\gamma)\frac{n^\varepsilon}{\pi^\varepsilon}\omega_\beta\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{n}\right), \qquad \text{если } \beta-\gamma \neq 2l+1,$$
$$\omega_{\beta-\varepsilon}\left(H_\mu f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant N(\beta)\frac{n^{\varepsilon+1}}{\pi^\varepsilon}\omega_\beta\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{n}\right), \qquad \text{если } \beta-\gamma = 2l+1;$$

(в) при $\alpha \geqslant 1$, $H_\gamma f^{(\alpha)} \in C$

$$\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\mu f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \frac{M(\beta,\gamma-\alpha)\pi^\alpha}{n^\alpha}\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right), \quad \text{если } \alpha+\beta-\gamma \neq 2l+1,$$
$$\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\mu f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \frac{N(\beta)\pi^\alpha}{n^{\alpha-1}}\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right), \qquad \text{если } \alpha+\beta-\gamma = 2l+1;$$

(г) при $\alpha > 0$ *если* $\alpha+\beta-\gamma \neq 2l+1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-1}\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{k}\right) < \infty$, *то* $H_\mu(f^{(\alpha)}) \in C$ *и*

$$\omega_\beta\left(H_\mu(f^{(\alpha)}), \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \frac{\beta M(\alpha+\beta,\gamma)}{\pi^\alpha}\sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha-1}\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{k}\right),$$

если $\alpha+\beta-\gamma = 2l+1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{k}\right) < \infty$, *то* $H_\mu(f^{(\alpha)}) \in C$ *и*

$$\omega_\beta\left(H_\mu f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \frac{\beta N(\alpha+\beta)}{\pi^\alpha}\sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha}\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{k}\right).$$

Доказательство. Положим

$$Q(\beta,\gamma,n)=\begin{cases} M(\beta,\gamma), & \text{если } \beta-\gamma\neq 2l+1,\\ nN(\beta), & \text{если } \beta-\gamma=2l+1.\end{cases}$$

В условиях следствия 3.5 при любых значениях $\alpha+\beta-\gamma$ имеем неравенство

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\mu f,\frac{\pi}{n}\right)&\leqslant \pi^{\alpha+\beta}\left\|f-R_{n-1,\alpha+\beta}f\right\|\\ &\leqslant \frac{Q(\beta,\gamma-\alpha,n)\pi^\alpha}{n^\alpha}\omega_\beta\left(H_\gamma f^{(\alpha)},\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}\tag{3.18}$$

(а) Применяя неравенство (3.18) при $\alpha=0$, имеем

$$\begin{aligned}&\omega_{\beta+\varepsilon}\left(H_\mu f,\frac{\pi}{n}\right)\leqslant \pi^{\beta+\varepsilon}\left\|f-R_{n-1,\beta+\varepsilon}f\right\|=\pi^{\beta+\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta+\varepsilon}a_k(f)+\sum_{k=n}^{\infty}a_k(f)\right)\\ &\leqslant \pi^{\beta+\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta}a_k(f)+\sum_{k=n}^{\infty}a_k(f)\right)=\pi^{\beta+\varepsilon}\left\|f-R_{n-1,\beta}f\right\|\\ &\leqslant \pi^{\varepsilon}Q(\beta,\gamma,n)\omega_\beta\left(H_\gamma f,\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

(б) Из неравенства (3.18) при $\alpha=0$ получаем

$$\begin{aligned}&\omega_{\beta-\varepsilon}\left(H_\mu f,\frac{\pi}{n}\right)\leqslant \pi^{\beta-\varepsilon}\left\|f-R_{n-1,\beta-\varepsilon}f\right\|=\pi^{\beta-\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta-\varepsilon}a_k(f)+\sum_{k=n}^{\infty}a_k(f)\right)\\ &\leqslant \pi^{\beta-\varepsilon}n^{\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta}a_k(f)+\sum_{k=n}^{\infty}a_k(f)\right)=\pi^{\beta-\varepsilon}n^{\varepsilon}\left\|f-R_{n-1,\beta}f\right\|\\ &\leqslant \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\varepsilon}Q(\beta,\gamma,n)\omega_\beta\left(H_\gamma f,\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

(в) Неравенства вытекают из (3.18) непосредственно.

(г) Пусть $k\in\mathbb{N}$. Полагая $\alpha=0$ и заменяя β на $\alpha+\beta$ в неравенстве (3.18), находим

$$\left\|f-R_{k-1,\alpha+\beta}f\right\|\leqslant \frac{1}{\pi^{\alpha+\beta}}Q(\alpha+\beta,\gamma,k)\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\gamma f,\frac{\pi}{k}\right).$$

Тогда

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta+1}}\sum_{l=1}^{k}l^{\alpha+\beta}a_l(f)\leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{k^{\alpha+\beta}}{k^{\beta+1}}\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{l}{k}\right)^{\alpha+\beta}a_l(f)$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha-1} \|f - R_{k-1,\alpha+\beta} f\| \leqslant \frac{1}{\pi^{\alpha+\beta}} \sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha-1} Q(\alpha+\beta,\gamma,k)\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{k}\right).$$

По лемме 3.7 из сходимости полученного ряда следует $H_\mu f^{(\alpha)} \in C$ и

$$\omega_\beta\left(H_\mu f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \frac{\beta}{\pi^\alpha} \sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha-1} Q(\alpha+\beta,\gamma,k-1)\omega_{\alpha+\beta}\left(H_\gamma f, \frac{\pi}{k}\right),$$

что и требовалось. □

3.4. Оценки, содержащие два слагаемых

Следующее утверждение обобщает неравенства (0.5) и (0.6) для чётных непрерывных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Неравенство (0.5) получается из следствия 3.7 при $\alpha = 0$ и $\beta = r$, а неравенство (0.6) — при $\alpha = 1$ и $\beta = r+1$.

Следствие 3.7. *Пусть $\beta > \alpha \geqslant 0$, $\beta = 2m + \sigma$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in (-1, 1]$; $f \in \theta \cap C$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi^\beta}\left(n^\alpha \omega_\beta\left(H_{-\alpha} f^{(-\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right) + \omega_\beta\left(f, \frac{\pi}{n}\right)\right) \leqslant \|f - R_{n-1,\beta-\alpha} f\|$$
$$\leqslant \frac{\pi}{2^\beta C(\beta,\sigma)}\left(\frac{n^\alpha}{\cos\frac{\pi\sigma(n-1)}{2n}}\omega_\beta\left(H_{-\alpha} f^{(-\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right) + \omega_\beta\left(f, \frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Полагая $\gamma = -\alpha$ в лемме 3.7, находим

$$\frac{n^\alpha}{\pi^\beta}\omega_\beta\left(H_{-\alpha} f^{(-\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \|f - R_{n-1,\beta-\alpha} f\|.$$

Из той же леммы 3.7 следует

$$\frac{1}{\pi^\beta}\omega_\beta\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \|f - R_{n-1,\beta} f\| = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^\beta a_k(f) + \sum_{k=n}^{\infty} a_k(f)$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta-\alpha} a_k(f) + \sum_{k=n}^{\infty} a_k(f) = \|f - R_{n-1,\beta-\alpha} f\|.$$

Складывая полученные неравенства, приходим к оценке снизу.

Заменяя α на $-\alpha$ в следствии 3.1 и полагая $\gamma = -\alpha$, находим

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta-\alpha} a_k(f) \leqslant \frac{\pi n^\alpha}{2^\beta C(\beta,\sigma)\cos\frac{\pi\sigma(n-1)}{2n}}\omega_\beta\left(H_{-\alpha} f^{(-\alpha)}, \frac{\pi}{n}\right). \tag{3.19}$$

Полагая $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$ в следствии 3.2, имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k(f) = \|f - S_{n-1}f\| \leqslant \frac{\pi}{2^\beta C(\beta,\sigma)} \omega_\beta \left(f, \frac{\pi}{n}\right). \tag{3.20}$$

Складывая (3.19) и (3.20), получаем требуемую оценку сверху. □

Если порядок модуля непрерывности β не является нечётным числом, то

$$\cos \frac{\pi\sigma(n-1)}{2n} \geqslant \cos \frac{\pi\sigma}{2} > 0,$$

значит, оценки сверху и снизу в следствии 3.7 имеют одинаковый порядок роста по n.

Если же β — нечётное число, то

$$\cos \frac{\pi\sigma(n-1)}{2n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) = \sin \frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{2n}.$$

Это означает, что оценки в следствии 3.7 перестают быть одинаковыми в смысле порядка по n.

В следствии 3.8 приводятся двусторонние оценки в другой форме. Они обладают одинаковым порядком по n вне зависимости от того, является ли порядок модуля непрерывности нечётным или нет.

Следствие 3.8. *Пусть* $\beta > 0$, $\beta = 2m + \sigma$, *где* $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in (-1, 1]$; $f \in \theta \cap C$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^\beta} \left(\omega_\beta\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + \omega_\beta\left(H_1 f, \frac{\pi}{n}\right)\right) &\leqslant \|f - R_{n-1,\beta} f\| \\ &\leqslant \frac{\pi}{2^{\beta-1} C(\beta,\sigma)} \left(\omega_\beta\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + \omega_\beta\left(H_1 f, \frac{\pi}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Из леммы 3.7 следуют неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^\beta} \omega_\beta\left(f, \frac{\pi}{n}\right) &\leqslant \|f - R_{n-1,\beta} f\|, \\ \frac{1}{\pi^\beta} \omega_\beta\left(H_1 f, \frac{\pi}{n}\right) &\leqslant \|f - R_{n-1,\beta} f\|, \end{aligned}$$

сумма которых даёт оценку снизу.

Докажем оценку сверху. Положим

$$\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \sigma \geqslant 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } \sigma < 0. \end{cases}$$

Тогда $\beta-\gamma=2m+(\sigma-\gamma)$. Применяя следствия 3.1 и 3.2, заменяя при этом σ на число $\sigma-\gamma$, находим

$$\begin{aligned}\|f-R_{n-1,\beta}f\| &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta}a_k(f)+\sum_{k=n}^{\infty}a_k(f)\\ &\leqslant \frac{\pi}{2^{\beta}C(\beta,-\gamma-(\sigma-\gamma))}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}}+\frac{1}{\cos\frac{\pi\gamma}{2}}\right)\omega_\beta\left(H_\gamma f,\frac{\pi}{n}\right),\end{aligned}$$

где d — то из чисел $-\gamma$ и $\sigma-\gamma$, которое расположено ближе к нулю, а D — то из них, что расположено дальше.

Поскольку $d,D\in[-1/2,1/2]$, то $\frac{d+(n-1)D}{n}\in[-1/2,1/2]$, значит,

$$\cos\frac{\pi(d+(n-1)D)}{2n}\geqslant\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|f-R_{n-1,\beta}f\| &\leqslant \frac{\pi}{2^{\beta}C(\beta,\sigma)}\left(\frac{1}{1/\sqrt{2}}+\frac{1}{1/\sqrt{2}}\right)\omega_\beta\left(H_\gamma f,\frac{\pi}{n}\right)\\ &= \frac{\pi}{2^{\beta-3/2}C(\beta,\sigma)}\omega_\beta\left(H_\gamma f,\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned} \tag{3.21}$$

В силу леммы 3.5

$$\begin{aligned}\delta_t^{\beta}\left(H_\gamma f,x\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^{\beta}a_k(f)\cos\left(kx+\pi\beta\left\lfloor\frac{kt}{2\pi}\right\rfloor+\frac{\pi}{2}(\beta-\gamma)\right)\\ &= \cos\frac{\pi\gamma}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^{\beta}a_k(f)\cos\left(kx+\pi\beta\left\lfloor\frac{kt}{2\pi}\right\rfloor+\frac{\pi\beta}{2}\right)\\ &+ \sin\frac{\pi\gamma}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|2\sin\frac{kt}{2}\right|^{\beta}a_k(f)\cos\left(kx+\pi\beta\left\lfloor\frac{kt}{2\pi}\right\rfloor+\frac{\pi}{2}(\beta-1)\right)\\ &= \cos\frac{\pi\gamma}{2}\cdot\delta_t^{\beta}(f,x)+\sin\frac{\pi\gamma}{2}\cdot\delta_t^{\beta}\left(H_1 f,x\right).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\omega_\beta\left(H_\gamma f,\frac{\pi}{n}\right) &\leqslant \left|\cos\frac{\pi\gamma}{2}\right|\omega_\beta\left(f,\frac{\pi}{n}\right)+\left|\sin\frac{\pi\gamma}{2}\right|\omega_\beta\left(H_1 f,\frac{\pi}{n}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega_\beta\left(f,\frac{\pi}{n}\right)+\omega_\beta\left(H_1 f,\frac{\pi}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Остаётся сопоставить последнее неравенство и неравенство (3.21). □

Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Получены новые оценки постоянной в неравенстве типа Джексона для периодических функций, улучшающие известные ранее в случае, когда наилучшее приближение оценивается посредством модуля непрерывности достаточно высокого порядка от производной функции.

2. Установлены оценки для остаточного члена в формулах Вороновской–Бернштейна для широкого круга методов приближений. Показано, что эти оценки на самом деле справедливы для большей величины, мажорирующей остаточный член. Полученные результаты обобщают многие, известные ранее.

3. Принадлежащий В. В. Жуку результат о двусторонних оценках для отклонений сумм Рисса, содержащих модули непрерывности самой функции и сопряжённой к её первообразной, был обобщён на случай дробного порядка модулей непрерывности. Эти неравенства установлены для подкласса пространства непрерывных периодических функций: чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Вопрос о распространении этих оценок на всё пространство непрерывных периодических функций остаётся открытым.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Бабушкин М. В.* Приближение чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье суммами Рисса дробного порядка // Пробл. мат. анализа. — 2019. — вып. 101. — с. 35—55.
2. *Бабушкин М. В.*, *Додонов Н. Ю.*, *Жук В. В.* Модифицированные функции Стеклова и формулы численного дифференцирования // Пробл. мат. анализа. — 2018. — вып. 94. — с. 21—34.
3. *Бабушкин М. В.*, *Жук В. В.* О сильной форме асимптотических формул типа Вороновской–Бернштейна с поточечной оценкой остаточного члена // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — т. 449. — с. 32—59.
4. *Жук В. В.*, *Бабушкин М. В.*, *Пудовкин А. А.* О сильной форме асимптотических формул типа Вороновской–Бернштейна // Пробл. мат. анализа. — 2016. — вып. 84. — с. 89—105.

Список литературы

5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

6. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений, т. II. — М. : Изд-во АН СССР, 1954.

7. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. — Л. : Изд-во «Образование», 1990.

8. *Виноградов О. Л.* Точное неравенство для отклонения сумм Рогозинского и второго модуля непрерывности в пространстве непрерывных периодических функций // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 1997. — т. 247. — с. 26—45.

9. *Виноградов О. Л.* Улучшение неравенств типа Джексона для четвёртого, шестого и восьмого модуля непрерывности // Пробл. мат. анализа. — 2015. — вып. 85. — с. 59—70.

10. *Виноградов О. Л.*, *Жук В. В.* Оценки функционалов с известной последовательностью моментов через отклонения средних типа Стеклова // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2010. — т. 383. — с. 5—32.

11. *Виноградов О. Л.*, *Жук В. В.* Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности и поведение констант в неравенствах типа Джексона // Алгебра и анализ. — 2012. — т. 24, № 5. — с. 1—43.

12. *Даугавет И. К.* Введение в классическую теорию приближения функций. — СПб. : Изд-во СПбГУ, 2011.

13. *Жук В. В.* О приближении 2π-периодической функции линейным оператором // Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций. Сборник научных трудов Ленинградского механического института. т. 50 / под ред. Б. А. Рымаренко. — Л. : Ленингр. мех. инст., 1965. — с. 93—115.

14. *Жук В. В.* О приближении 2π-периодической функции значениями некоторого ограниченного полуаддитивного оператора. II // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1967. — т. 13. — с. 41—50.

15. *Жук В. В.* О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // ДАН СССР. — 1971. — т. 196, № 4. — с. 748—750.

16. *Жук В. В.* Аппроксимация периодических функций. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1982.

17. *Жук В. В.* Структурные свойства функций и точность аппроксимации. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1984.

18. *Жук В. В.* Полунормы и модули непрерывности высоких порядков // Труды С.-Петербургского матем. общества. — 1993. — т. 2. — с. 116—177.

19. *Жук В. В.* О сильном приближении функций посредством положительных операторов // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2015. — т. 440. — с. 68—80.

20. *Жук В. В.*, *Пименов С. Ю.* О нормах сумм Ахиезера–Крейна–Фавара // Вестник СПбГУ. Сер. 10. — 2006. — вып. 4. — с. 37—47.

21. *Жук В. В.*, *Тумка О. А.*, *Козлов Н. А.* О константах в неравенствах типа Джексона для наилучших приближений периодических дифференцируемых функций // Вестник СПбГУ. Сер. 10. — 2015. — вып. 1. — с. 33—41.

22. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. — 1962. — т. 145, № 3. — с. 514—515.

23. *Лигун А. А.* О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. — 1973. — т. 13, № 5. — с. 647—654.

24. *Натансон И. П.* О приближённом представлении функций, удовлетворяющих условию Липшица, с помощью интеграла Валле-Пуссена // ДАН. — 1946. — т. 54, № 1. — с. 11—14.

25. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. — М.–Л. : Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1949.

26. *Самко С. Г.*, *Килбас А. А.*, *Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск : Наука и техника, 1987.

27. *Стечкин С. Б.* О приближении периодических функций суммами Фейера // Труды МИАН. — 1961. — т. 62. — с. 48—60.

28. *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций многочленами Бернштейна и многочленами Канторовича // Тр. МИАН. — 2008. — т. 260. — с. 289—296.

29. *Теляковский С. А.* О скорости приближения функций многочленами Бернштейна // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2008. — т. 14, № 3. — с. 162—169.

30. *Тригуб Р. М.* Конструктивные характеристики некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1965. — т. 29, № 3. — с. 615—630.

31. *Виденский В. С.* Линейные положительные операторы конечного ранга. — Л. : ЛГПИ, 1985.

32. *Alexits G.* Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier // Mat. Fiz. Lapok. — 1941. — Vol. 48. — P. 410–422.

33. *Bustamante J.* Bernstein operators and their properties. — Springer International Publishing, 2017.

34. *Butzer P. L.*, *Dyckhoff H.*, *Goerlich E.*, *Stens R. L.* Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Can. J. Math. — 1977. — Vol. 29, no. 4. — P. 781–793.

35. *DeVore R. A.*, *Lorentz G. G.* Constructive approximation. — Berlin : Springer-Verlag, 1993.

36. *Foucart S.*, *Kryakin Y.*, *Shadrin A.* On the exact constant in Jackson–Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. — 2009. — Vol. 29, no. 2. — P. 157–179.

37. *Gonska H.* On the degree of approximation in Voronovskaja's theorem // Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. — 2007. — Vol. 52. — P. 103–115.

38. *Gonska H.*, *Pitul P.*, *Rasa I.* On Peano's form of the Taylor remainder Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators // Proceedings of the international conference on numerical analysis and approximation theory NAAT. — Cluj-Napoca, Romania, 2006. — P. 55–80.

39. *Gupta V.*, *Tachev G.* Approximation with positive linear operators and linear combinations. Vol. 50. — Springer, 2017.

40. *Lohmann A. W.*, *Mendlovic D.*, *Zalevsky Z.* Fractional Hilbert transform // Optics Letters. — 1996. — Feb. 15. — Vol. 21, no. 4. — P. 281–283.

41. *Lorentz G. G.* Bernstein polynomials. — 2nd ed. — New York : Chelsea Publishing Company, 1986.

42. *Mitrinovic D. S.* Analytic inequalities. — Berlin : Springer-Verlag, 1970.

43. *Taberski R.* Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Commentat. Math. — 1977. — Vol. 19. — P. 389–400.

44. *Tikhonov S.* Smoothness conditions and Fourier series // Mathematical inequalities and applications. — 2007. — Vol. 10, no. 2. — P. 229–242.

45. *Tikhonov S.* Trigonometric series of Nikol'skii classes // Acta Math. Hungar. — 2007. — Vol. 114, no. 1/2. — P. 61–78.

46. *Wendel J. G.* Note on the gamma function // Amer. Math. Monthly. — 1948. — Vol. 55, no. 9. — P. 563–564.

47. *Zhuk V. V.*, *Bure V. M.* On constants in the generalized Jackson theorem // J. Math. Sci. — 2015. — Vol. 205, no. 2. — P. 240–246.