

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Санкт-Петербургский государственный университет»

На правах рукописи

Сергеев Василий Александрович

**Адиабатические задачи в квантовой механике  
и теории распространения волн**

Специальность 1.1.2 —  
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д. ф.-м. н., доцент, профессор СПбГУ  
Федотов Александр Александрович

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
1.1	Исследуемые задачи и изучаемые решения	4
1.2	Обзор существующих результатов, актуальность темы исследования	8
1.3	Цели и задачи работы, положения, выносимые на защиту	11
1.4	Дополнительные сведения	12
1.5	Структура диссертации	13
<b>2</b>	<b>Основные результаты</b>	<b>14</b>
2.1	Асимптотическое поведение решения $\Psi_n$	14
2.2	Решение $\Psi_{cs}$ и его асимптотики	21
2.3	Асимптотическое поведение решения $U_n$	32
<b>3</b>	<b>Делокализация адиабатической нормальной волны <math>\Psi_n</math></b>	<b>38</b>
3.1	Вспомогательные объекты	38
3.2	Удобное представление для $\Psi_n$ вне потенциальной ямы	39
3.3	Точки перевала и линии наискорейшего спуска функции $S$	40
3.4	Асимптотика $\mathcal{T}(x, \tau)$ при $(\tau, \xi)$ , близких к $(\tau_n, 0)$	51
3.5	Оценка $\mathcal{E}(x, \tau)$	60
<b>4</b>	<b>Поверхностная волна и «просачивание» волновой функции в потенциальную яму</b>	<b>61</b>
4.1	Вновь о точке перевала и линиях наискорейшего спуска функции $S$	61
4.2	Асимптотика $\mathcal{T}(x, \tau)$ при $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$ и $0 \leq \xi \leq \delta_2$	63
4.3	Грубая оценка $\mathcal{E}(x, \tau)$	65
4.4	Асимптотическое поведение $\mathcal{E}(x, \tau)$ при $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$	68
<b>5</b>	<b>Решение <math>\Psi_{cs}</math> и его асимптотики</b>	<b>73</b>
5.1	Построение решения $\Psi_{cs}$	73
5.2	Асимптотики $\Psi_{cs}$ вдали от края непрерывного спектра	74
5.3	Асимптотики $\Psi_{cs}$ около края непрерывного спектра	80
<b>6</b>	<b>Асимптотики решения <math>U_n</math></b>	<b>88</b>
6.1	Переход к интегралам по конечным контурам	88
6.2	Точки перевала и линии наискорейшего спуска функции $S_a$	90
6.3	Завершение доказательств асимптотик $U_n$ в дне	93

<b>Заключение</b> . . . . .	<b>97</b>
<b>А Об интегральных представлениях для решений <math>\Psi_n</math> и <math>U_n</math></b> . . . . .	<b>98</b>
А.1 Производящее решение $\Psi$ . . . . .	98
А.2 Определение функции $R$ . . . . .	99
А.3 О функции $L_0$ . . . . .	100
А.4 Формулы для решений $U_n$ . . . . .	101
<b>В К обсуждению результатов</b> . . . . .	<b>104</b>
В.1 Получение формулы для $\Psi_n$ в пограничном слое . . . . .	104
В.2 К обсуждению теорем 5 и 6 при $p - 1 \ll 1$ . . . . .	104
В.3 Асимптотики функции $\mathcal{F}$ . . . . .	106
В.4 О согласованности асимптотик $\Psi_{cs}$ . . . . .	107
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>108</b>
<b>Публикации автора по теме диссертации</b> . . . . .	<b>110</b>

# Глава 1. Введение

В настоящей диссертации рассматриваются две родственные задачи. Первая из них — квантово-механическая задача об адиабатической эволюции, порождённой одномерным оператором Шрёдингера на полуоси с потенциалом, представляющим собой линейно сужающуюся со временем прямоугольную потенциальную яму. Вторая задача — модельная задача акустики океана о распространении звука в прибрежном водном клине. В каждой из задач присутствует малый асимптотический параметр: в квантово-механической задаче потенциал медленно меняется со временем, а в акустической задаче глубина водного слоя медленно меняется с изменением одной из координат (водный клин узок). Мы изучаем асимптотики решений квантово-механической задачи, близких в некоторые моменты времени к собственным функциям оператора Шрёдингера, а также асимптотики аналогичных решений акустической задачи. Следуя акустической терминологии, мы будем называть упомянутые решения обеих задач *адиабатическими нормальными волнами*. Также мы строим и изучаем решения квантово-механической задачи, являющиеся аналогами адиабатических нормальных волн для непрерывного спектра оператора Шрёдингера.

Ниже, в разделе 1.1, мы сформулируем исследуемые задачи и охарактеризуем подробнее изучаемые нами решения этих задач. Отметим, что во введении мы лишь кратко опишем выносимые на защиту результаты. Их подробное описание, как качественное, так и строгое, содержится в отдельной главе — главе 2. В разделе 1.2 мы дадим краткий обзор существующих результатов по теме исследования, а также поговорим об актуальности этой темы, новизне полученных результатов и значимости работы. Далее, в разделе 1.3, мы сформулируем основные цели и задачи данной работы, а также перечень положений, выносимых на защиту. В разделе 1.4 мы кратко обсудим математические методы, использованные в данной работе, степень достоверности и апробацию полученных результатов, а также личный вклад автора в их получение. Наконец, в последнем разделе введения — разделе 1.5 — мы опишем для удобства читателя структуру текста диссертации.

## 1.1 Исследуемые задачи и изучаемые решения

### 1.1.1 Квантово-механическая задача

Мы рассматриваем при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения уравнения Шрёдингера

$$i\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + v(x, \tau)\Psi, \quad x > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \Psi \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.1)$$

Говорят, что уравнение (1.1) описывает адиабатическую эволюцию, порождаемую в  $L^2(\mathbb{R}_+)$  стационарным оператором Шрёдингера

$$H(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x, \tau)$$

с условием Дирихле при  $x = 0$ . Оператор  $H(\tau)$  зависит от «медленного» времени  $\tau$  как от параметра. Нас интересует случай, когда потенциал  $v$  представляет собой линейно сужающуюся со временем прямоугольную потенциальную яму:

$$v(x, \tau) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 - \tau, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Терминология теории распространения волн позволит нам описать при  $\varepsilon \rightarrow 0$  асимптотическое поведение изучаемых решений уравнения (1.1) наиболее ярко и естественно. С помощью замены переменной  $\tau \mapsto t = \tau/\varepsilon$  уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + v(x, \varepsilon t) \Psi. \quad (1.3)$$

В (1.3) потенциал медленно меняется с течением времени  $t$ . Подобное уравнение было введено М. А. Леонтовичем и В. А. Фоком для приближённого описания распространения электромагнитных волн в тропосфере [1, Chapter 11]. Если в (1.3) воспринимать  $t$  и  $x$  как пространственные переменные, то можно сказать, что (1.3) с  $v$ , определённым в (1.2), описывает распространение акустических волн в полуплоскости  $P = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ , содержащей узкий сектор  $W = \{(t, x) \in P \mid x \leq 1 - \varepsilon t\}$  с полупрозрачной границей<sup>1</sup>. Представляя ось  $x$  направленной вниз, можно воспринимать сектор  $W$  как узкий прибрежный водный клин, а сектор  $P \setminus W$  — как океаническое дно и берег, см. рис. 1.1. Это позволяет использовать при обсуждении решений уравнения (1.1) очень удобную для нас акустическую терминологию, с помощью которой наблюдаемые эффекты можно, как нам кажется, описать наиболее понятно. Подчёркнём, что на самом деле, конечно, решения уравнения (1.1) — это волновые функции, описывающие плотность вероятности обнаружения квантовой частицы, а акустические термины используются при их обсуждении лишь для удобства. Точное описание распространения именно акустических волн осуществляется с помощью уравнения Гельмгольца, которое будет выписано ниже, в посвящённом акустической задаче разделе 1.1.2.

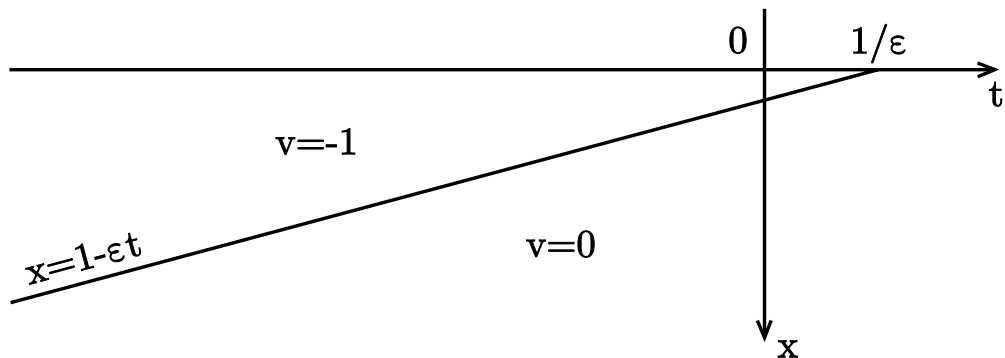


Рис. 1.1: Полуплоскость  $P$ . Потенциал  $v$  принимает значение  $-1$  в секторе  $W$  и равен нулю в секторе  $P \setminus W$ .

<sup>1</sup>Далее мы будем многократно использовать введённые обозначения  $P$  и  $W$ , не повторяя их определения каждый раз отдельно. При этом мы будем сохранять эти обозначения и при использовании других переменных (например,  $\tau = \varepsilon t$  вместо  $t$ ).

Как нетрудно установить, спектр оператора  $H(\tau)$  состоит из (абсолютно) непрерывного спектра, заполняющего полуось  $[0, +\infty)$ , и из конечного числа отрицательных собственных значений. С течением времени  $\tau$  собственные значения оператора  $H(\tau)$  одно за другим приближаются к краю непрерывного спектра и, достигнув его, исчезают. При этом момент исчезновения  $n$ -го собственного значения  $E_n(\tau)$  есть

$$\tau_n = 1 - \pi(n - 1/2), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

В работе [2] А. А. Федотовым был построен при  $\tau \leq 1$  набор таких решений  $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  уравнения (1.1), что решение  $\Psi_n$  имеет внутри потенциальной ямы асимптотику вида

$$\Psi_n(x, \tau) \sim e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\tau_n}^{\tau} E_n(s) ds} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi_{n,m}(x, \tau), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.5)$$

пока существует  $n$ -е собственное значение  $E_n(\tau)$  оператора  $H(\tau)$ . Здесь  $\psi_{n,0}(\cdot, \tau)$  — собственная функция  $H(\tau)$ , соответствующая  $E_n(\tau)$ . Формальные асимптотические решения вида (1.5) часто используются в физике. В задачах акустики решения такого типа называют адиабатическими нормальными волнами, и мы будем использовать этот термин для решений  $\Psi_n$ . Вблизи момента  $\tau_n$  исчезновения собственного значения  $E_n(\tau)$  и после него решение  $\Psi_n$  имеет совершенно иное асимптотическое поведение. В работе [2] решения  $\Psi_n$  были асимптотически изучены внутри потенциальной ямы, при  $0 \leq x \leq 1 - \tau$ . В главах 3 и 4 настоящей диссертации, следуя работам [S1] и [S2], мы исследуем поведение решений  $\Psi_n$  вне потенциальной ямы, при  $x \geq 1 - \tau$ . Используя акустическую терминологию, чтобы более ярко проиллюстрировать наблюдаемые эффекты, мы можем качественно описать поведение адиабатической нормальной волны  $\Psi_n$  на полуплоскости  $P$  следующим образом: при  $\varepsilon t = \tau < \tau_n$  поле локализовано внутри «водного клина»  $W$  (т. е. внутри потенциальной ямы), при  $\tau \sim \tau_n$  оно излучается из  $W$  в «дно»  $P \setminus W$  преимущественно вдоль выделенного направления, образуя «прожектор», а при  $\tau > \tau_n$  в «дне» вдоль «границы раздела сред» (т. е. вне потенциальной ямы вблизи её границы) распространяется поверхностная волна, «просачивающаяся» в сектор  $W$  при  $\tau \sim \tau_m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ . Подробное описание этих результатов читатель может найти в разделе 2.1 главы 2.

В главе 5 мы, следуя [S3] и [S4], строим и изучаем при  $\tau \leq 1$  решение  $\Psi_{cs}$  уравнения (1.1), которое можно назвать аналогом адиабатической нормальной волны для непрерывного спектра оператора  $H(\tau)$ . В акустических терминах можно качественно описать решение  $\Psi_{cs}$  как результат рассеяния падающей из бесконечности плоской волны  $e^{-iEt - i\sqrt{E}x}$ ,  $E > 0$ , на имеющем полупрозрачную границу секторе  $W$ . В  $W$  решение  $\Psi_{cs}$  представляет собой сумму прошедшей в этот сектор волны и всех волн, получающихся из неё при отражениях от границ сектора. Вне  $W$  решение  $\Psi_{cs}$  есть сумма падающей волны, волны, отражённой от границы  $\{x = 1 - \varepsilon t\}$  сектора  $W$ , а также всех преломлённых волн, вышедших из  $W$  через границу  $\{x = 1 - \varepsilon t\}$  после (вообще говоря, многократного) отражения внутри  $W$ . Для решения  $\Psi_{cs}$  мы получаем при  $\varepsilon \rightarrow 0$  асимптотические формулы как внутри «водного клина»  $W$ , так и под этим клином, в «дне». В частности, оказывается, что при значениях спектрального параметра  $E > 0$ , близких к краю непрерывного спектра оператора  $H(\tau)$ , падающая на сектор  $W$  плоская волна заметно просачивается в него только при  $\tau \sim \tau_n$ ,

$n \in \mathbb{N}$ . При  $0 < E \ll \varepsilon^{2/3}$  это просачивание становится малым, и плоская волна почти полностью отражается от  $W$ . Явные формулы для решения  $\Psi_{cs}$  и детальное описание его асимптотического поведения содержатся в разделе 2.2 главы 2.

### 1.1.2 Акустическая задача

Мы рассматриваем двумерную модель для описания распространения звука в узком прибрежном водном клине. Пусть  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. На полуплоскости<sup>2</sup>  $P_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ , см. рис. 1.2, мы рассматриваем уравнение Гельмгольца

$$\Delta U + k^2(\varepsilon_1 x, y)U = 0, \quad (1.6)$$

где  $\varepsilon_1 = \operatorname{tg}(\varepsilon/2)$ , а  $k$  — кусочно-постоянная функция:

$$k(\varkappa, y) = \begin{cases} k_0, & \text{если } 0 \leq y \leq -\varkappa, \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{где } k_0 > 1.$$

Сектор  $W_a = \{(x, y) \in P_a \mid y \leq -\varepsilon_1 x\}$  изображает узкий прибрежный водный клин, а сектор  $P_a \setminus W_a$  — океаническое дно и берег. Уравнение (1.6) мы дополняем граничным условием Дирихле при  $y = 0$  (на «поверхности») и условием непрерывности решения  $U$  вместе с нормальной производной при  $y = -\varepsilon_1 x$ ,  $x < 0$  (на «границе раздела сред»).

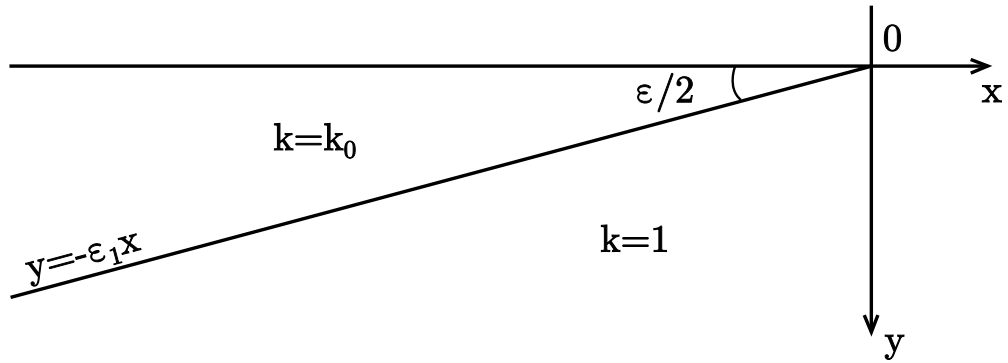


Рис. 1.2: Полу плоскость  $P_a$ .

При попытке разделения переменных в уравнении (1.6) возникает аналогичный оператору  $H(\tau)$  из квантово-механической задачи «поперечный» оператор

$$H_a(\varkappa) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2(\varkappa, y)$$

с граничным условием Дирихле при  $y = 0$ , зависящий от «медленной» переменной  $\varkappa = \varepsilon_1 x$  как от параметра. Легко видеть, что спектр оператора  $H_a(\varkappa)$  имеет структуру, аналогичную таковой у оператора  $H(\tau)$ : непрерывный спектр оператора  $H_a(\varkappa)$  заполняет полуось  $(-\infty, 1]$ , и при каждом  $\varkappa$  имеется конечное количество собственных значений, причём все они лежат на интервале  $(1, k_0^2)$ .

<sup>2</sup>Здесь и далее мы часто будем обозначать схожие объекты, возникающие в акустической и квантово-механической задачах, одним и тем же символом, добавляя к «акустическим» объектам верхний или нижний индекс  $a$ .

С ростом  $\varkappa$  эти собственные значения одно за другим приближаются к краю непрерывного спектра и, достигнув его, исчезают. При этом  $n$ -е собственное значение  $E_{a,n}(\varkappa)$  исчезает в момент

$$\varkappa_n = -\frac{\pi(n - 1/2)}{\sqrt{k_0^2 - 1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

В работе [3] А. А. Федотовым были построены при  $x \leq 0$  решения  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  уравнения (1.6), аналогичные решениям  $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  уравнения (1.1). Пока существует  $n$ -е собственное значение  $E_{a,n}(\varkappa)$  оператора  $H_a(\varkappa)$ , решение  $U_n$  имеет в водном клине  $W_a$  асимптотику вида

$$U_n(x, y) \sim e^{-\frac{i}{\varepsilon_1} \int_{\varkappa_n}^{\varkappa} \sqrt{E_{a,n}(s)} ds} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \psi_{n,m}^{(a)}(\varkappa, y), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

где  $\psi_{n,0}^{(a)}(\varkappa, \cdot)$  —  $n$ -я собственная функция оператора  $H_a(\varkappa)$ , ср. (1.8) и (1.5). Мы называем решения  $U_n$  адиабатическими нормальными волнами, как и решения  $\Psi_n$ . Решение  $U_n$  описывает звуковую волну, идущую из океана к берегу. Когда эта волна достигает достаточно мелкой воды, соответствующее собственное значение оператора  $H_a(\varkappa)$  исчезает, и асимптотическое поведение решения  $U_n$  меняется. Как оказывается, асимптотическое поведение  $U_n$  на полуплоскости  $P_a$  имеет такой же качественный характер, как и поведение решения  $\Psi_n$  квантово-механической задачи на полуплоскости  $P$ , описанное выше: акустическое поле, локализованное при  $\varkappa < \varkappa_n$  внутри водного клина  $W_a$ , излучается при  $\varkappa \sim \varkappa_n$  из клина  $W_a$  в дно в виде «луча прожектора», и далее в дне вдоль границы раздела сред распространяется поверхностная волна, из которой поле просачивается обратно в воду при  $\varkappa \sim \varkappa_m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ . Эти результаты были описаны в заметке [S5]. Их подробному описанию посвящён раздел 2.3 главы 2, а их получению — глава 6.

## 1.2 Обзор существующих результатов, актуальность темы исследования

Здесь мы обсудим имеющиеся результаты по исследуемой тематике (степень разработанности темы), актуальность темы исследования, научную новизну полученных результатов, а также теоретическую и практическую значимость работы.

### 1.2.1 Степень разработанности темы исследования, научная новизна полученных результатов

В квантовой механике адиабатические теоремы формулируются обычно следующим образом, см., например, [4, Section 2]: при  $\varepsilon \rightarrow 0$  рассматривается задача Коши для уравнения вида

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial s}(s) = H(s) \psi(s),$$

где  $H(s)$  — самосопряжённый гамильтониан, достаточно гладко зависящий от медленного времени  $s$ , и предполагается существование подходящего семейства спектральных проекторов  $P(s)$ . Тогда, если начальное данное  $\psi(0) \in \text{Range}(P(0))$ , то для фиксированного  $T > 0$  при  $s \in [0, T]$  имеет

место равномерная оценка вида

$$\text{dist}\left(\psi(s), \text{Range}(P(s))\right) = O(\varepsilon^\gamma),$$

где число  $\gamma > 0$  определяется конкретными предположениями об  $H(s)$ . В частности, роль играют структура спектра оператора  $H(s)$  и свойства  $P(s)$ .

Адиабатические теоремы в квантовой механике берут начало в работе М. Борна и В. А. Фока [5], рассмотревших случай чисто дискретного спектра оператора  $H(s)$ , и в работе Т. Като [6], рассмотревшего случай собственного значения, изолированного от существенного спектра. Читатель может ознакомиться с «панорамой» адиабатических теорем в обзоре [4, Section 3], см. также упомянутые в этом обзоре работы [5–15]. В процитированной выше работе Дж. Аврона и А. Элгарта [4] доказана адиабатическая теорема без классического условия «зазора» между собственным значением и остальной частью спектра оператора  $H(s)$ . Эта теорема применима, в частности, для основного состояния атома в квантованном электромагнитном поле. При этом, насколько нам известно, случай, когда собственное значение поглощается непрерывным спектром и исчезает, не рассматривался до работ А. А. Федотова и соавтора [2, 16], в которых было начато рассмотрение описанной выше модельной квантово-механической задачи (1.1) с оператором Шрёдингера  $H(\tau)$ . В работах автора и А. А. Федотова [S1, S2] было продолжено исследование построенных в [2] решений  $\Psi_n$ , близких в некоторые моменты времени к собственным функциям оператора  $H(\tau)$ . Полученные нами результаты являются новыми<sup>3</sup>. По-видимому, если результаты, полученные для модельной задачи, записать в инвариантных терминах, то они останутся справедливыми и для более широкого круга задач (например, в случае, когда собственное значение приближается к краю непрерывного спектра с конечной скоростью). Такое обобщение, однако, выходит за рамки настоящей диссертации.

В работе Дж. Аврона и соавторов [9] рассматривалась адиабатическая эволюция в случае, когда упомянутый выше спектральный проектор  $P(s)$  соответствует ограниченному участку спектра, отделённому лакунами от остальной части спектра. При этом рассматриваемый участок может содержать и существенный спектр. В [9] показано, что если начальное данное принадлежит  $\text{Range}(P(0))$ , то результат эволюции с точностью до асимптотически малой поправки принадлежит  $\text{Range}(P(s))$ . В работе В. В. Суханова [17] рассматривалась адиабатическая эволюция для оператора Дирака на вещественной оси с быстро убывающим потенциалом. Спектр этого оператора представляет собой двукратный непрерывный спектр, заполняющий всю ось, а начальное данное в работе [17] было выбрано из класса Шварца. Насколько нам известно, для оператора Шрёдингера с непрерывным спектром, заполняющим полуось, адиабатическая эволюция состояния, соответствующего непрерывному спектру, не рассматривалась до работ А. А. Федотова и автора [S3, S4], и результаты этих работ являются полностью новыми.

Задачи о распространении звука в медленно меняющемся океане много исследовались как физиками (см., например, книгу [18] и литературные ссылки в ней), так и математиками (см.

<sup>3</sup>Полученные результаты являются полностью новыми в квантово-механической постановке. Если рассматривать уравнение (1.3) как приближённо описывающее распространение звука, то можно считать, что некоторые из наблюдаемых эффектов были нестрого описаны А. Д. Пирсом и другими авторами, см. ниже о существующих результатах для акустической задачи. При этом строгое математическое обоснование этих эффектов в любом случае является новым.

обзор [19] и литературные ссылки в нём). Акустическая задача о распространении звука в водном слое с медленно меняющейся глубиной рассматривалась многими физиками как аналитически на физическом уровне строгости, см. [20–29], так и численно, см., например, [30–34]. В частности, рассмотрение в этой задаче адиабатических нормальных волн было предложено А. Д. Пирсом [20]. Следует выделить работы А. Д. Пирса [21], Дж. М. Арнольда и Л. Б. Фелсена [22], А. Камела и Л. Б. Фелсена [23], в которых разными методами<sup>4</sup> было нестрого получено описание эффектов, возникающих при достижении адиабатической нормальной волной т. н. *критической глубины*, т. е. при исчезновении соответствующего собственного значения «поперечного» оператора. В этих работах на эвристическом уровне было показано, что при достижении критической глубины энергия адиабатической нормальной волны излучается из воды в дно в виде «луча прожектора». Этот результат был получен и численно, см., например, [30]. В работе А. Д. Пирса [24, Section V] было нестрого получено описание акустического поля после преодоления волной критической глубины. Это было проделано с помощью приближённого решения приближённого уравнения — уравнения Шрёдингера вида (1.3). Полученные Пирсом формулы описывают поверхностную волну, распространяющуюся в дне вдоль границы раздела сред, но не её периодическое просачивание из дна в воду<sup>5</sup>. Подчеркнём, что математически строгое обоснование описанных результатов в перечисленных работах отсутствует. Математически строгое изучение акустической задачи было начато А. А. Федотовым в [3] и продолжено автором в [S5]. Новыми результатами являются математически строгие описания «прожектора» и поверхностной волны, а также обнаружение и строгое описание периодического просачивания поверхностной волны в водный клин.

## 1.2.2 Актуальность темы исследования, теоретическая и практическая значимость работы

Квантово-механическая задача, конечно, представляет интерес сама по себе — структура спектра оператора Шрёдингера в рассматриваемой модели не позволяет применить существующие адиабатические теоремы, и исследование модельной задачи является разумным первым шагом на пути к изучению адиабатической эволюции для класса операторов с аналогичной структурой спектра. Как упоминалось выше, эффекты, обнаруженные для модельной задачи, будучи сформулированы в достаточно общих терминах, должны сохраняться для широкого класса задач. Вместе с тем квантово-механическая задача важна и в силу своего родства с задачей акустической, которая считается сложной нерешённой задачей в теории распространения волн. Следует отметить, что рассматриваемый нами случай узкого водного клина  $W_a$  соответствует реально возникающим в акустике океана задачам — медианное по миру значение тангенса угла наклона океанического дна вблизи берега составляет 0,007, см. [35, Section 3.2].

Акустическая задача гораздо сложнее, чем квантово-механическая, поскольку акустическая задача является задачей рассеяния, а квантово-механическая — задачей Коши. В дальнейшем мы планируем построить глобальное решение акустической задачи во всей полуплоскости  $P_a$ , содержащей узкий водный клин  $W_a$ , поэтому можно сказать, что исследование акустической задачи

<sup>4</sup>В частности, А. Д. Пирс использовал в работе [21] вариационные методы.

<sup>5</sup>В работе Пирса дан лишь краткий словесный комментарий о возбуждении в водном слое и непосредственно под ним мод меньшего порядка при достижении соответствующих критических глубин.

нами только начато. Если бы водный слой имел вид не узкого сектора, а полосы постоянной ширины, то переменные в уравнении Гельмгольца (1.6) делились бы, и решение акустической задачи можно было бы разложить по собственным функциям и обобщённым собственным функциям непрерывного спектра «поперечного» оператора. В случае узкого водного клина  $W_a$ , который мы рассматриваем, исследованная в диссертации адиабатическая нормальная волна  $U_n$  падает слева направо в «левом» квадранте  $Q_L = \{(x, y) \in P_a \mid x \leq 0\}$ , содержащем водный клин. Мы надеемся, что при малых  $\varepsilon > 0$  нам удастся в дальнейшем разложить в  $Q_L$  акустическое поле, отражённое назад, налево, по адиабатическим нормальным волнам, идущим справа налево, и по их аналогам для непрерывного спектра «поперечного» оператора (т. е. по решениям типа  $\Psi_{cs}$ ). Затем мы планируем сшить при малых  $\varepsilon$  решение в квадранте  $Q_L$ , представляющее собой сумму падающей адиабатической нормальной волны  $U_n$  и отражённых назад волн, с волновым полем в «правом» квадранте  $Q_R = P_a \setminus Q_L$  — с линейной комбинацией плоских волн, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (1.6) с постоянным  $k$ . Тем самым будет построено решение уравнения (1.6) во всей полуплоскости  $P_a$ . Описанные этапы решения акустической задачи представляют собой наши планы на будущее, заделом для которых являются результаты настоящей диссертации.

### 1.3 Цели и задачи работы, положения, выносимые на защиту

Сформулируем здесь в виде списка основные **цели и задачи работы**:

1. Получение при  $x \geq 1 - \tau$  (т. е. вне потенциальной ямы) асимптотических формул при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для адиабатических нормальных волн  $\Psi_n$  — решений квантово-механической задачи, близких в некоторые моменты времени к собственным функциям оператора  $H(\tau)$  с соответствующими номерами — как вблизи моментов  $\tau_n$  исчезновения соответствующих собственных значений  $H(\tau)$ , так и после этих моментов.
2. Построение решения  $\Psi_{cs}$  квантово-механической задачи, являющегося аналогом адиабатических нормальных волн  $\Psi_n$  для непрерывного спектра оператора  $H(\tau)$ . Получение асимптотических формул для решения  $\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы и вне её.
3. Получение асимптотических формул для адиабатических нормальных волн  $U_n$  — решений акустической задачи — вблизи моментов  $\varkappa_n$  исчезновения соответствующих собственных значений оператора  $H_a(\varkappa)$  и после этих моментов (как внутри водного клина  $W_a$ , так и в дне).

Также сформулируем вторящий этому списку перечень **положений, выносимых на защиту**:

1. Получены асимптотики адиабатических нормальных волн  $\Psi_n$  — решений квантово-механической задачи — вне потенциальной ямы (вблизи и после моментов  $\tau_n$ ).
2. Построено решение  $\Psi_{cs}$  квантово-механической задачи, являющееся аналогом адиабатических нормальных волн  $\Psi_n$  для непрерывного спектра оператора  $H(\tau)$ . Получены его асимптотики внутри и вне потенциальной ямы.
3. Получены асимптотики адиабатических нормальных волн  $U_n$  — решений акустической задачи — как в водном клине  $W_a$ , так и в дне (вблизи и после моментов  $\varkappa_n$ ).

Подчеркнём, что результаты, соответствующие пунктам 1, 2 и 3 этих списков, подробно описаны, соответственно, в разделах 2.1, 2.2 и 2.3 главы 2.

## 1.4 Дополнительные сведения

### 1.4.1 Методы исследования

Кратко прокомментируем математические методы, используемые для получения результатов данной работы. Асимптотики решений  $\Psi_n$  и  $U_n$  мы получаем с помощью анализа интегральных представлений этих решений. Эти представления были получены А. А. Федотовым в работах [2] и [3] соответственно, и их можно назвать родственными к интегралам, возникающим в методе Зоммерфельда–Малюжинца, см. [36]. Будем далее говорить о решении  $\Psi_n$  — для решения  $U_n$  подход к нахождению асимптотик оказывается аналогичным, хотя и технически более трудным. В подынтегральные выражения в интегральном представлении<sup>6</sup> для  $\Psi_n$  входит новая спецфункция  $R$ , являющаяся решением разностного уравнения на комплексной плоскости и имеющая богатое семейство особенностей. Асимптотический анализ рассматриваемых интегралов нетривиален: при различных значениях переменных  $\tau$  и  $x$ , т. е. в различных областях полуплоскости  $P$ , при вычислении асимптотик интегралов возникают разные эффекты, требующие применения известных или развития новых асимптотических методов. Например, вблизи момента  $\tau_n$  исчезновения собственного значения  $E_n(\tau)$  точка перевала приближается к периодической цепочке близких друг к другу точек ветвления подынтегральной функции. В этом случае нахождение асимптотики  $\Psi_n$  удаётся после аккуратного анализа свести к применению удобного нам варианта классической теоремы К. Честера, Б. Фридмана и Ф. Урселла [37], справедливой для случая двух сближающихся точек перевала. При значениях  $\tau > \tau_n$  возникает необходимость в развитии оригинальной техники, в частности, развивающей идеи, предложенные А. А. Федотовым в [2].

Решение  $\Psi_{cs}$  — аналог адиабатической нормальной волны  $\Psi_n$  для непрерывного спектра оператора  $H(\tau)$  — мы строим в виде бесконечных рядов. По существу, построение  $\Psi_{cs}$  производится с помощью метода отражений. Оказывается удобным записать формулы для  $\Psi_{cs}$  с использованием упомянутой выше спецфункции  $R$ , входящей в формулы для  $\Psi_n$ . Использование асимптотик этой спецфункции при малых  $\varepsilon$ , применение формулы Пуассона для пересуммирования бесконечных рядов и асимптотическое исследование возникающих при пересуммировании интегралов позволяют в ряде случаев получить асимптотические формулы для  $\Psi_{cs}$ .

### 1.4.2 Публикации и личный вклад автора

Основные результаты диссертации изложены в 5 работах [S1–S5], опубликованных в ведущих научных журналах, входящих в перечень ВАК и проиндексированных в библиографических базах РИНЦ и Scopus. Издания, в которых опубликованы работы [S1–S3, S5], проиндексированы также в библиографической базе Web of Science. Результаты работ [S4, S5] получены автором

<sup>6</sup>Отметим, что внутри и вне потенциальной ямы имеют место различные интегральные формулы для  $\Psi_n$ .

самостоятельно. В работах [S1–S3] А. А. Федотову принадлежат постановки задач и частично начальные идеи, а автору — обобщение и фактическая реализация этих идей.

### 1.4.3 Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность выносимых на защиту результатов обеспечивается их математически строгими формулировками и доказательствами, а также публикациями [S1–S5] в рецензируемых изданиях. Основные результаты докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Санкт-Петербургская зимняя молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург (2020).
- Ежегодная международная конференция «Дни дифракции», ПОМИ РАН, Санкт-Петербург (2021, 2025).
- Ежегодная Санкт-Петербургская конференция по спектральной теории и математической физике, посвящённая памяти М. Ш. Бирмана, ММИ им. Эйлера, Санкт-Петербург (2021, 2023, 2025).
- Традиционная сессия МИАН-ПОМИ «Дифференциальные уравнения и динамические системы», ПОМИ РАН, Санкт-Петербург (2023).
- Всероссийская конференция с международным участием «Квазиклассический анализ и нелокальные эллиптические задачи», РУДН, Москва (2023).
- Научный семинар кафедры высшей математики и математической физики СПбГУ, СПбГУ, Санкт-Петербург (2023, 2024).
- Крымская осенняя математическая конференция Н. Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам, КФУ им. В. И. Вернадского, Севастополь (2025).
- Городской семинар по вопросам теории распространения волн, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург (2025).

## 1.5 Структура диссертации

Диссертация состоит из шести глав (включая введение), заключения, двух приложений и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 110 страниц. Список литературы содержит 45 наименований, в том числе 5 публикаций автора по теме диссертации, оформленных в виде отдельного списка.

Глава 2 посвящена подробному описанию результатов, выносимых на защиту. Как упоминалось выше, в её разделах 2.1, 2.2 и 2.3 описаны результаты, соответствующие пунктам 1, 2 и 3 списков из раздела 1.3. Доказательства результатов, сформулированных в разделе 2.1, содержатся в главах 3 и 4. В главах 5 и 6 доказаны теоремы из разделов 2.2 и 2.3 соответственно. Внутренняя структура каждой главы и каждого раздела диссертации описана в их начале.

В приложении А мы привели, во-первых, краткое описание процедуры построения решения  $\Psi_n$  уравнения (1.1) и свойства некоторых функций, входящих в формулы для  $\Psi_n$ , а во-вторых — интегральные формулы для решения  $U_n$  уравнения (1.6). Приложение В содержит выкладки, относящиеся к обсуждению результатов, сформулированных в главе 2.

## Глава 2. Основные результаты

Здесь мы подробно обсудим выносимые на защиту результаты — как опишем их качественно, так и сформулируем их в виде строгих теорем. Раздел 2.1 данной главы посвящён описанию асимптотического поведения решения  $\Psi_n$ , а раздел 2.2 — построению решения  $\Psi_{cs}$  и его асимптотикам. Наконец, в разделе 2.3 обсуждаются асимптотики решения  $U_n$  акустической задачи.

Как в данной главе, так и далее мы будем обозначать символом  $C$  положительные постоянные, не зависящие от переменных и параметра  $\varepsilon$ , а также будем обозначать записью  $f = O(g)$  неравенство  $|f| \leq C|g|$ .

### 2.1 Асимптотическое поведение решения $\Psi_n$

Фиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и будем далее считать  $0 < \varepsilon < 1$  и  $\tau \leq 1$ . Сперва, в разделе 2.1.1, мы приведём некоторые результаты, полученные для решения  $\Psi_n$  в работе А. А. Федотова [2]: мы выпишем интегральные представления для решения  $\Psi_n$ , а также качественно опишем асимптотическое поведение  $\Psi_n$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  внутри потенциальной ямы. В разделах 2.1.2 и 2.1.3 мы подробно обсудим асимптотики  $\Psi_n$  вне потенциальной ямы — соответственно, вблизи момента  $\tau_n$  исчезновения  $n$ -го собственного значения оператора  $H(\tau)$  и после этого момента.

#### 2.1.1 Формулы для $\Psi_n$ и поведение $\Psi_n$ внутри потенциальной ямы

Здесь мы следуем работе [2]. Для удобства читателя процедура построения решения  $\Psi_n$  кратко описана в приложении А. Прежде чем выписать формулы для решения  $\Psi_n$ , мы дадим несколько определений. Положим

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \geq 1\} \quad (2.1)$$

и определим аналитическую в области  $\mathbb{C}_0$  и непрерывную вплоть до её границы функцию  $Q_0$  формулами

$$Q_0(p) = \sqrt{p^2 - 1}, \quad Q_0(0) = i. \quad (2.2)$$

Далее, положим при  $p \in \mathbb{R}$

$$Q(p) = \begin{cases} Q_0(p + i0) & \text{при } p \geq 0, \\ Q_0(p - i0) & \text{при } p < 0, \end{cases} \quad \rho(p) = \frac{Q(p) - p}{Q(p) + p}. \quad (2.3)$$

Заметим, что  $Q(p) \geq 0$  при  $p \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ . Рассмотрим на вещественной оси разностное уравнение

$$R\left(p + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \rho(p) R\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (2.4)$$

и выберем быстро убывающее при  $|p| \rightarrow \infty$  непрерывное решение  $R(p)$  этого уравнения, определённое в разделе А.2 приложения А. Наконец, положим при вещественных  $p$

$$p_1(p) = -\frac{\varepsilon}{2} + Q\left(p + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad T(p) = \frac{-ipe^{i/\varepsilon}}{Q(p) + p} \Big|_{p=p+\varepsilon/2}. \quad (2.5)$$

Для решения  $\Psi_n$  имеют место формулы

$$\Psi_n(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \begin{cases} e^{\frac{i}{\varepsilon}\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon}(p^2(1-\tau)-2\pi np)} \sin(px) R(p) dp, & 0 \leq x \leq 1 - \tau, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon}(p_1^2(p)(1-\tau)-2\pi np) + ip_1(p)x} T(p) R(p) dp, & x \geq 1 - \tau. \end{cases} \quad (2.6)$$

Как уже упоминалось в разделе 1.4.1 введения, интегральные представления для решения  $\Psi_n$  можно назвать родственными к интегралам, возникающим в методе Зоммерфельда–Малюжинца. Подынтегральные функции в (2.6) могут быть аналитически продолжены с контура интегрирования

$$\gamma_{\mathbb{R}} = ((-\infty, 0] - i0) \cup ([0, +\infty) + i0) \quad (2.7)$$

в область  $\mathbb{C}_0$ , и анализ интегралов по контурам в комплексной плоскости позволяет получить асимптотические формулы для  $\Psi_n$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Замечание 2.1.** Такой анализ далеко не тривиален, поскольку аналитическое продолжение функции  $R$  имеет при  $p = \pm(1 + \varepsilon(m - 1/2))$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , точки ветвления<sup>1</sup>. При наиболее интересных значениях  $\tau$  и  $x$  к лежащей «справа» от единицы последовательности точек ветвления близко подходят точки перевала и линии наискорейшего спуска фазовых функций, возникающих при попытке применить метод перевала.

Асимптотическое поведение  $\Psi_n$  внутри потенциальной ямы схематически изображено на полуплоскости переменных  $(\tau, x)$  на рис. 2.1. Качественно это поведение можно описать следующим образом. До момента  $\tau_n$  исчезновения  $n$ -го собственного значения оператора  $H(\tau)$  решение  $\Psi_n$  имеет порядок единицы в потенциальной яме<sup>2</sup>, см. (1.5). При  $\tau \sim \tau_n$  решение  $\Psi_n$  оказывается порядка  $\varepsilon^{1/6}$ , а после момента  $\tau_n$  оно имеет порядок  $\varepsilon$  вне некоторых небольших окрестностей моментов  $\tau_m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ . Наконец, при  $\tau \sim \tau_m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ , старший член асимптотики  $\Psi_n$  имеет порядок  $\varepsilon^{2/3}$ , т. е. становится несколько бóльшим по амплитуде.

Итак, квантовая частица, описываемая волновой функцией  $\Psi_n$ , локализована в потенциальной яме при  $\tau < \tau_n$  и покидает её при  $\tau \sim \tau_n$ . Вероятность найти частицу в потенциальной яме становится после этого малой, однако существенно возрастает при  $\tau \sim \tau_m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ , т. е. вблизи моментов исчезновения собственных значений с меньшими номерами (вблизи моментов рождения резонансов). Используя акустическую терминологию, можно сказать, что при  $\tau \sim \tau_n$  энергия акустического поля излучается из «водного клина»  $W$  в «дно», а затем периодически

<sup>1</sup>Это нетрудно видеть из разностного уравнения (2.4) и из определения коэффициента  $\rho$  в (2.3), если считать функцию  $R$  аналитической между точками  $-1$  и  $1$  (а выбранное нами  $R$  этим свойством обладает).

<sup>2</sup>Отметим, что при этом вне потенциальной ямы  $\Psi_n$  экспоненциально убывает с ростом  $x$ . Можно сказать, что решение  $\Psi_n$  асимптотически локализовано в потенциальной яме.

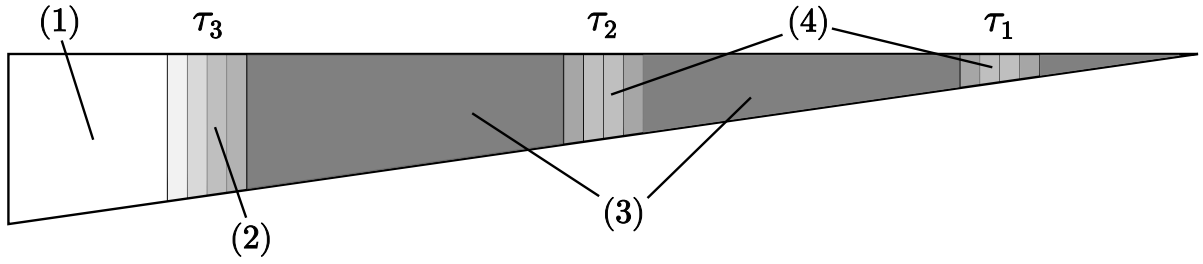


Рис. 2.1: Асимптотическое поведение решения  $\Psi_3$  внутри потенциальной ямы, изображённое на полуплоскости переменных  $(\tau, x)$ . Порядки  $\Psi_3$  по  $\varepsilon$  в отмеченных областях: (1)  $\Psi_3 \sim 1$ , (2)  $\Psi_3 \sim \varepsilon^{1/6}$ , (3)  $\Psi_3 \sim \varepsilon$ , (4)  $\Psi_3 \sim \varepsilon^{2/3}$ . Ширина полос (2) и (4) имеет порядок  $\varepsilon^{1/3}$ .

«просачивается» из «дна» обратно в  $W$ . Для того чтобы понять, как именно происходят указанные процессы, необходимо изучить асимптотическое поведение  $\Psi_n$  вне потенциальной ямы. Описанию этого поведения посвящены следующие два раздела — 2.1.2 и 2.1.3.

### 2.1.2 Поведение $\Psi_n$ вне потенциальной ямы при $\tau \sim \tau_n$

В данном разделе мы в основном следуем работе [S1]. Здесь и далее мы будем использовать обозначение

$$\xi = \varepsilon(x - (1 - \tau)).$$

В акустических терминах асимптотическое поведение решения  $\Psi_n$  вне потенциальной ямы при  $\tau \sim \tau_n$  можно кратко охарактеризовать так: энергия акустического поля излучается из водного клина  $W$  в дно  $P \setminus W$  преимущественно вдоль выделенного направления  $\xi = C\varepsilon^{1/3}(\tau - \tau_n)$ , где  $C > 0$  — некоторая константа. Мы говорим, что при  $\tau \sim \tau_n$  образуется «прожектор».

Перейдём к точным формулировкам. Пусть числа  $\delta_1, \delta_2 > 0$  достаточно малы. Мы будем здесь предполагать, что  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ , если явно не указано обратное. При указанных значениях<sup>3</sup>  $\tau$  и  $\xi$  имеет место равномерная асимптотическая формула для  $\Psi_n$ . Для того чтобы её выписать, мы дадим сперва несколько определений. Здесь и далее мы будем использовать обозначения  $\mathbb{C}_0$  и  $Q_0$ , введённые в разделе 2.1.1. Фиксируем в  $\mathbb{C}_0$  аналитическую и непрерывную вплоть до границы  $\mathbb{C}_0$  ветвь функции  $p \mapsto \arcsin p$  условием  $\arcsin 0 = 0$ . Введём обозначение для первого квадранта комплексной плоскости

$$Q_1 = \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Im} p > 0\}. \quad (2.8)$$

Уравнения

$$(1 - \tau)p_n + \arcsin p_n + \frac{\xi p_n}{2Q_0(p_n)} = \pi n, \quad (2.9)$$

$$(1 - \tau)q_n - \arcsin q_n - \frac{\xi q_n}{2Q_0(q_n)} = \pi(n - 1) \quad (2.10)$$

<sup>3</sup>Отметим, что в работе [S1] асимптотика  $\Psi_n$  получена только при  $0 \leq \xi \leq \delta_2$  и  $\tau_n - \delta_1 \leq \tau \leq \tau_n + C\varepsilon^{1/3}$ , где  $C > 0$  фиксировано. Используя некоторые идеи работы [S2], нетрудно получить асимптотическую формулу при всех  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$ , что и проделано в настоящей диссертации.

однозначно определяют функции

$$\begin{aligned} p_n &: \{ (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau < 1, 0 < \xi < \delta_2 \} \rightarrow \mathcal{Q}_1, \\ q_n &: \{ (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid |\tau - \tau_n| < \delta_1, 0 < \xi < \delta_2 \} \rightarrow \mathcal{Q}_1, \end{aligned}$$

аналитические в указанных областях<sup>4</sup> и непрерывные вплоть до их границ, причём

$$\begin{aligned} 0 < p_n(\tau, 0) < 1 \quad \text{при} \quad \tau < \tau_n, & \quad p_n(\tau, 0) = 1 \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_n, \\ q_n(\tau, 0) = 1 \quad \text{при} \quad \tau \leq \tau_n, & \quad 0 < q_n(\tau, 0) < 1 \quad \text{при} \quad \tau > \tau_n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Положим

$$E_n(\tau) = \begin{cases} p_n^2(\tau, 0) - 1 & \text{при} \quad \tau \leq \tau_n, \\ q_n^2(\tau, 0) - 1 & \text{при} \quad \tau > \tau_n. \end{cases} \quad (2.12)$$

Заметим, что при  $\tau < \tau_n$  определённое таким образом  $E_n(\tau)$  является в точности  $n$ -м собственным значением оператора  $H(\tau)$ . Когда  $\tau \rightarrow \tau_n$  слева, собственное значение  $E_n(\tau)$  стремится к краю непрерывного спектра  $H(\tau)$ . Наконец, положим

$$C_n = (-1)^{n+1} \sqrt{\pi} e^{\frac{i}{\varepsilon}(2\tau_n - 3) + \frac{i\pi}{4}}, \quad (2.13)$$

$$K_n^\pm(\tau, \xi) = p_n \sqrt{\frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau}} \pm q_n \sqrt{-\frac{\partial \ln q_n}{\partial \tau}}, \quad (2.14)$$

$$\alpha_n(\tau, \xi) = -\frac{1}{2} \int_{\tau_n}^{\tau} E_n d\tau' + \frac{1}{2} \int_0^{\xi} (Q_0(p_n) - Q_0(q_n)) d\xi', \quad (2.15)$$

$$\zeta_n(\tau, \xi) = \frac{e^{i\pi/12}}{\varepsilon^{1/6}} \left( \frac{3}{4} \left| \int_{\tau_n}^{\tau} E_n d\tau' \right| - \frac{3}{4} \int_0^{\xi} (Q_0(p_n) + Q_0(q_n)) d\xi' \right)^{1/6}. \quad (2.16)$$

Аргументы квадратных корней в формуле (2.14) и аргумент корня шестой степени в формуле (2.16) не принимают значений в  $i\mathbb{R}_+$ , и мы фиксируем в  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$  однозначные аналитические ветви этих корней условиями  $\sqrt{1} = 1$ ,  $\sqrt[6]{1} = 1$ . Справедлива

**Теорема 1.** *Фиксируем достаточно малые  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Пусть  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ , тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\Psi_n(x, \tau) = C_n e^{\frac{i}{\varepsilon}\alpha_n - \frac{i\xi}{2}} \left( K_n^- \zeta_n \text{Ai}(\zeta_n^4) - \frac{K_n^+}{\zeta_n} \text{Ai}'(\zeta_n^4) \right) + O(\Delta_1), \quad (2.17)$$

$$\Delta_1 = \left( \frac{\varepsilon^{1/3} |Q_0(p_n)|}{1 + |\zeta_n|} + \frac{\varepsilon^{2/3}}{1 + \mu_n^{1/3}} \right) e^{-\mu_n}, \quad \varepsilon \mu_n = \text{Im} \int_0^{\xi} Q_0(p_n) d\xi' \geq 0. \quad (2.18)$$

*Оценка поправки равномерна по  $\tau$  и  $\xi$ .*

<sup>4</sup>Под этим мы имеем в виду, что каждая из функций аналитична в некоторой  $\mathbb{C}^2$ -окрестности каждой точки  $(\tau, \xi)$  соответствующей области.

Обсудим формулу (2.17). Отметим, во-первых, что старший член в формуле (2.17) оказывается гладким при  $\xi > 0$ , несмотря на модуль в (2.16) и негладкое поведение  $p_n$  и  $q_n$  в точке  $(\tau, \xi) = (\tau_n, 0)$ . Во-вторых, можно показать, что старший член в (2.17) асимптотически больше поправки всегда, кроме случая  $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$  и  $(\tau - \tau_n)/\varepsilon^{1/3} \rightarrow +\infty$ . В указанном же случае первое слагаемое в (2.17) может становиться одного порядка с поправочным членом или меньше, и тогда теорема 1 даёт только оценку для  $\Psi_n$ .

**Замечание 2.2.** При  $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$  и  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_n + \delta_1$  можно, используя частично изложенные в главе 4 настоящей диссертации идеи из [2, Section 7] и [S2, Раздел 7], выписать асимптотическую формулу для второго слагаемого в правой части (2.17). С точностью до поправки  $O(\varepsilon^{7/6})$  это слагаемое представляет собой сумму нескольких функций, каждая из которых допускает оценку  $O(\varepsilon^{2/3})$ , причём с ростом  $\tau$  до  $\tau_n + \delta_1$  порядок по  $\varepsilon$  значений этих функций уменьшается до  $\varepsilon$ . Одной из упомянутых функций является функция  $\mathcal{R}_0(x, \tau)$ , определённая формулой (2.28) в следующем разделе. В настоящей диссертации мы не задаёмся настолько точными асимптотическими формулами, интересуясь в первую очередь выявлением физических эффектов.

Из равномерной асимптотической формулы (2.17) нетрудно получить более простую формулу в пограничном слое. Мы проделали это в разделе В.1 приложения В, а здесь приведём лишь готовую формулу. Фиксируем некоторые  $C_1, C_2 > 0$ . При  $|\tau - \tau_n| \leq C_1 \varepsilon^{1/3}$  и  $0 \leq \xi \leq C_2 \varepsilon^{2/3}$  формула (2.17) упрощается до

$$\Psi_n(x, \tau) = a_n (4\varepsilon)^{1/6} F_{cd}(\nu, \omega) + O(\varepsilon^{1/2}), \quad a_n = (-1)^{n+1} e^{\frac{i}{\varepsilon}(2\tau_n - 3) + \frac{i\pi}{4}}, \quad (2.19)$$

где  $\nu = \frac{\tau - \tau_n}{(4\varepsilon)^{1/3}}$  и  $\omega = \frac{2\xi}{(4\varepsilon)^{2/3}}$  — «погранслоиные» координаты, а

$$F_{cd}(\nu, \omega) = -\sqrt{\pi} e^{-\frac{i\pi}{12}} e^{\frac{2i}{3}\nu^3} e^{\nu\omega} \left\{ e^{\frac{i\pi}{6}\nu} \text{Ai}\left(e^{-\frac{i\pi}{6}(\omega + i\nu^2)}\right) + \text{Ai}'\left(e^{-\frac{i\pi}{6}(\omega + i\nu^2)}\right) \right\}. \quad (2.20)$$

Функция  $F_{cd}$  была впервые введена А. Д. Пирсом в работе [21] при эвристическом исследовании акустической задачи. Она появилась как решение задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial \nu} F_{cd} + \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} F_{cd} = 0, & \omega \geq 0, \\ \frac{\partial}{\partial \omega} F_{cd}(\nu, 0) - 2\nu F_{cd}(\nu, 0) = 0, \end{cases}$$

где импедансное граничное условие содержит импеданс, линейно зависящий от координаты  $\nu$ . Из работы [21] мы заимствовали рис. 2.2, на котором показаны линии уровня функции  $|F_{cd}|$ . При переходе от самой верхней к самой нижней из изображённых линий  $|F_{cd}|$  уменьшается, принимая значения от 1 до 0,2. Наиболее медленно  $|F_{cd}|$  убывает вдоль выделенного направления  $\omega = C\nu$  с некоторым  $C > 0$ . Из сказанного следует, что вблизи момента исчезновения  $n$ -го собственного значения волновая функция, локализованная до этого в потенциальной яме, оказывается заметной на полуплоскости переменных  $(\tau, \xi)$  в области, напоминающей луч прожектора. Аналогичный прожектор возникает и в акустической задаче, см. раздел 2.3.1. Отметим также, что похожий

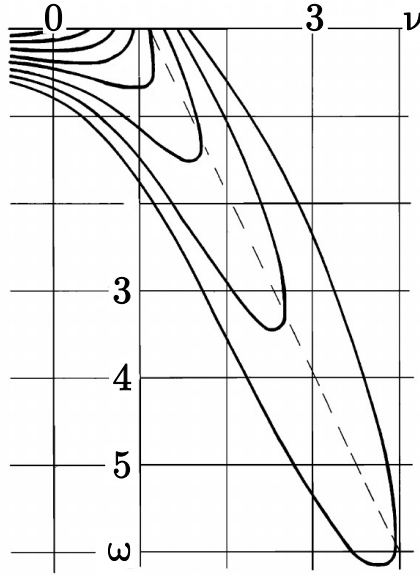


Рис. 2.2: Линии уровня функции  $|F_{cd}|$ .

прожектор возникает и в задаче о соскальзывании волн шепчущей галереи, «бегущих» вдоль кривой вблизи её точки перегиба, см., например, [38].

### 2.1.3 Поведение $\Psi_n$ вне потенциальной ямы при $\tau > \tau_n$

Здесь мы следуем работе [S2], в которой были получены асимптотики  $\Psi_n$  в  $P \setminus W$  при  $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ , где  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Оказывается, что при указанных значениях  $\tau$  и  $\xi$  волновая функция  $\Psi_n$  на полуплоскости  $P$  асимптотически локализована в слое, где  $\xi \sim \varepsilon^{1/3}$ , имеет порядок  $\varepsilon^{1/3}$  в этом слое и убывает экспоненциально быстро при  $\xi/\varepsilon^{1/3} \rightarrow +\infty$ . При  $\tau \sim \tau_m$ ,  $1 \leq m \leq n-1$ , волновая функция «заходит» из упомянутого слоя в потенциальную яму. Используя акустическую терминологию, можно сказать, что в «дне»  $P \setminus W$  вблизи «границы раздела сред» вдоль неё распространяется поверхностная волна, просачивающаяся в «водный клин»  $W$  при  $\tau \sim \tau_m$ ,  $1 \leq m \leq n-1$ . Описанные результаты соответствуют рис. 2.3, где схематически изображено асимптотическое поведение  $\Psi_n$  на плоскости переменных  $(\tau, \xi)$ , ср. с рис. 2.1.

Перейдём к формулировкам теорем. Фиксируем некоторое  $\delta_1 > 0$  и некоторое достаточно малое  $\delta_2 > 0$ . Далее, если не сказано обратное, мы будем считать, что  $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ . Определим функцию  $p_n$  как и в разделе 2.1.2, а также определим  $a_n$  как в (2.19). Справедлива

**Теорема 2.** Фиксируем некоторые  $C, \delta_1 > 0$  и достаточно малое  $\delta_2 > 0$ . Пусть  $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$  и  $C\varepsilon^{2/3} \leq \xi \leq \delta_2$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедлива асимптотическая формула

$$\Psi_n(x, \tau) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\xi Q_0(p_n) d\xi'} \left( \mathcal{T}_0(x, \tau) + O\left(\varepsilon^{1/2} \xi + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{1/3} + \xi}\right) \right), \quad (2.21)$$

$$\mathcal{T}_0(x, \tau) = a_n p_n \sqrt{\frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau}} e^{-\frac{i\xi}{2}}. \quad (2.22)$$

В последней формуле ветвь квадратного корня выбрана так же, как в формуле (2.14). Оценка поправки равномерна по  $\tau$  и  $\xi$ .

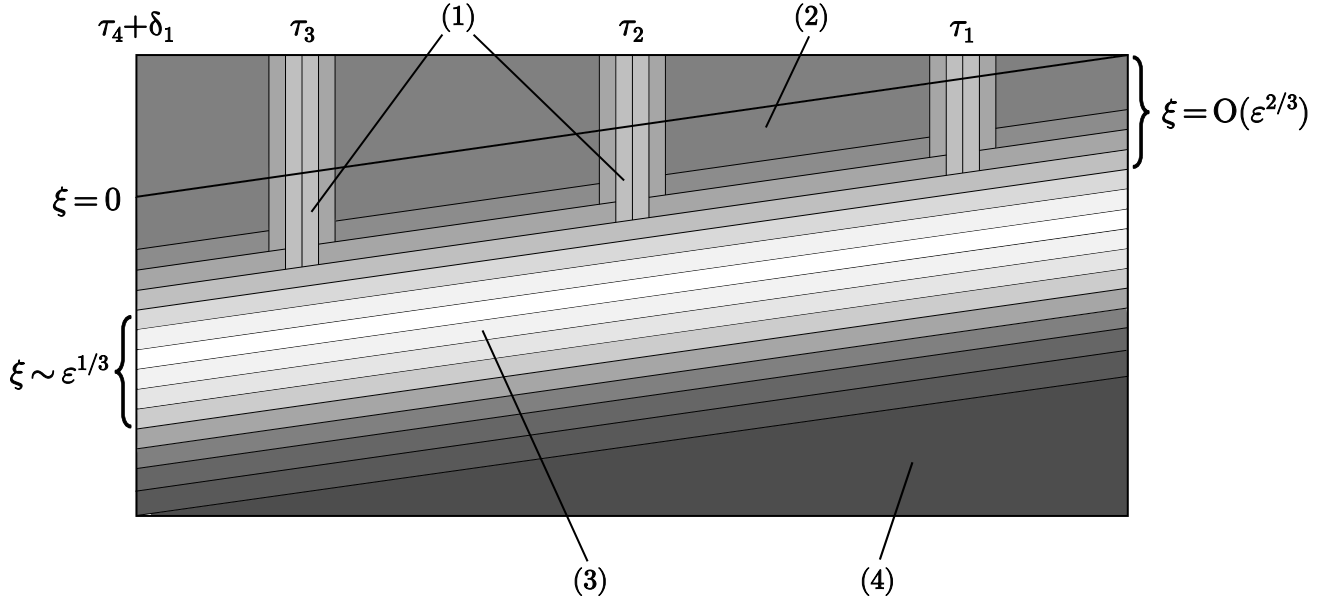


Рис. 2.3: Асимптотическое поведение решения  $\Psi_4$  на плоскости переменных  $(\tau, \xi)$  при  $\tau_4 + \delta_1 \leq \tau \leq 1$ ,  $\delta_1 > 0$ . Порядки  $\Psi_4$  по  $\varepsilon$  в отмеченных областях: (1)  $\Psi_4 \sim \varepsilon^{2/3}$ , (2)  $\Psi_4 = O(\xi + \varepsilon)$ , (3)  $\Psi_4 \sim \varepsilon^{1/3}$ , (4)  $\Psi_4 = O(e^{-C\xi^3/\varepsilon})$ .

Обсудим формулу (2.21). Заметим, что в условиях теоремы 2

$$p_n = 1 + O(\xi^2), \quad \frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau} = \frac{-\xi^2}{4(\tau - \tau_n)^3} (1 + O(\xi)), \quad (2.23)$$

$$\operatorname{Im} \int_0^\xi Q_0(p_n) d\xi' = \frac{\xi^3}{12(\tau - \tau_n)^3} (1 + O(\xi)). \quad (2.24)$$

С помощью (2.23) и (2.24) легко видеть, что при  $\xi \gg \varepsilon^{2/3}$

$$\Psi_n(x, \tau) \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\xi Q_0(p_n) d\xi'} \mathcal{T}_0(x, \tau) \sim \frac{\varepsilon^{1/3}}{(\tau - \tau_n)^{3/2}} \cdot \frac{\xi}{\varepsilon^{1/3}} \exp\left(-\frac{\xi^3}{12\varepsilon} \frac{(1 + O(\xi))}{(\tau - \tau_n)^3}\right),$$

и, таким образом,  $\Psi_n$  экспоненциально убывает с ростом  $\xi/\varepsilon^{1/3}$ .

Из (2.23) видно, что при  $\xi \sim \varepsilon^{2/3}$  в (2.21) старший член допускает такую же оценку, как и поправочный. Для того чтобы описать асимптотику  $\Psi_n$  при  $0 \leq \xi \leq C\varepsilon^{2/3}$ , распространим определение (1.4) на все  $n \in \mathbb{Z}$  и положим

$$\nu_m = \frac{\tau_m - \tau}{(4\varepsilon)^{1/3}}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \omega = \frac{2\xi}{(4\varepsilon)^{2/3}}, \quad (2.25)$$

$$h_k = \begin{cases} k^{-3/2}, & k \in \mathbb{N}, \\ i|k|^{-3/2}, & k \in -\mathbb{N}, \end{cases} \quad h_0 = - \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^k h_k, \quad (2.26)$$

$$a(v, w) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}s^3 + iws^2 + iws} s ds. \quad (2.27)$$

**Теорема 3.** Фиксируем  $\delta > 0$  и  $C > 0$ . Пусть  $\tau_n + \delta \leq \tau \leq 1$  и  $0 \leq \xi \leq C\varepsilon^{2/3}$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедлива асимптотическая формула

$$\Psi_n(x, \tau) = \mathcal{T}_0(x, \tau) + \mathcal{R}_0(x, \tau) + O(\varepsilon),$$

$$\mathcal{R}_0(x, \tau) = \frac{a_n}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2/3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k a(\nu_{n-k}, \omega), \quad (2.28)$$

причём  $\mathcal{T}_0(x, \tau)$  может быть описано упрощённой формулой

$$\mathcal{T}_0(x, \tau) = \frac{-ia_n \xi}{2(\tau - \tau_n)^{3/2}} + O(\xi^2). \quad (2.29)$$

Оценки поправок равномерны по  $\tau$  и  $\xi$ .

Функция  $a(v, w)$  родственна к функции Эйри. Метод перевала даёт для неё асимптотику

$$a(v, w) = \frac{i}{2v} + O(v^{-3/2}), \quad |w| \leq C, \quad v \rightarrow \pm\infty. \quad (2.30)$$

Ввиду (2.30) при условиях теоремы 3 легко получить, что при  $\tau$  вне фиксированной окрестности множества  $\{\tau_m\}_{1 \leq m \leq n-1}$  верна оценка  $\mathcal{R}_0(x, \tau) = O(\varepsilon)$ , а при  $|\nu_N| \leq C$ ,  $1 \leq N \leq n-1$ ,

$$\mathcal{R}_0(x, \tau) = \frac{a_n}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2/3} h_{n-N} a(\nu_N, \omega) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, слагаемое  $\mathcal{R}_0(x, \tau)$  имеет асимптотически больший порядок вблизи моментов  $\tau = \tau_m$ ,  $1 \leq m \leq n-1$ , т. е. вблизи моментов исчезновения собственных значений оператора  $H(\tau)$  (моментов рождения резонансов).

Из сказанного следует, что слагаемое  $\mathcal{T}_0$  можно интерпретировать как «поверхностную волну», а слагаемое  $\mathcal{R}_0$  отвечает за «просачивание» волновой функции в потенциальную яму. Аналогичные эффекты возникают и в акустической задаче, см. раздел 2.3.2.

## 2.2 Решение $\Psi_{cs}$ и его асимптотики

Перейдём к обсуждению решения  $\Psi_{cs}$  уравнения Шрёдингера (1.1). Это решение является аналогом адиабатической нормальной волны  $\Psi_n$  для непрерывного спектра оператора  $H(\tau)$ . Здесь мы будем следовать работам [S3, S4]. Мы начнём с описания в разделе 2.2.1 мотивировки, стоящей за конструкцией решения  $\Psi_{cs}$ . Далее, в разделе 2.2.2, мы выпишем формулы для этого решения, а в разделе 2.2.3 качественно опишем асимптотическое поведение  $\Psi_{cs}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Решение  $\Psi_{cs}$  зависит от спектрального параметра, принимающего значения на непрерывном спектре оператора  $H(\tau)$ . В зависимости от значений этого параметра выделяются два асимптотических режима: один — когда спектральный параметр принимает значения «вдали» от края непрерывного спектра, и другой — когда спектральный параметр близок к этому краю. Мы сформулируем теоремы, описывающие

эти режимы, соответственно, в разделах 2.2.4 и 2.2.5. Доказательства теорем данного раздела содержатся в главе 5.

### 2.2.1 Мотивировка конструкции решения $\Psi_{cs}$

Пусть  $\tau_* < 1$  — некоторое фиксированное число. Рассмотрим уравнение (1.1) с потенциалом  $v(x, \tau_*)$ , представляющим собой не зависящую от времени прямоугольную потенциальную яму ширины  $L = 1 - \tau_*$ . В этом случае переменные в уравнении Шрёдингера делятся, и легко написать его решение  $\Psi_*(x, \tau, E)$ , являющееся при каждом фиксированном  $\tau$  обобщённой собственной функцией непрерывного спектра для «поперечного» оператора  $H(\tau_*)$ :

$$\Psi_*(x, \tau, E) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau} \begin{cases} \sin(\sqrt{E+1} x), & 0 \leq x \leq L, \\ b(E) e^{-i\sqrt{E}x} + \overline{b(E)} e^{i\sqrt{E}x}, & x \geq L, \end{cases} \quad (2.31)$$

где  $E > 0$  — спектральный параметр, квадратные корни принимают положительные значения, а

$$2b(E) = e^{i\sqrt{E}L} \left( \sin(\sqrt{E+1} L) + i\sqrt{E+1} \cos(\sqrt{E+1} L) / \sqrt{E} \right).$$

Помимо разделения переменных в уравнении Шрёдингера, решение (2.31) можно также получить и другим способом, с помощью «геометро-оптических» соображений. На полуплоскости  $P$  переменных  $(x, \tau)$  потенциал  $v(x, \tau_*)$  равен  $-1$  в полосе  $\Pi = \{(x, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq L\}$  и равен  $0$  в остальной части полуплоскости. Вне полосы  $\Pi$ , при  $x > L$ , уравнение Шрёдингера имеет два линейно независимых решения — «плоские волны»  $e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau - i\sqrt{E}x}$  и  $e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau + i\sqrt{E}x}$ . Принимая во внимание акустическую интерпретацию рассматриваемой задачи, условимся говорить, что первая из этих волн «падает» на полосу  $\Pi$ , а вторая «уходит» от этой полосы. Решения внутри полосы  $e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau - i\sqrt{E+1}x}$  и  $e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau + i\sqrt{E+1}x}$  мы будем называть, соответственно, волной, идущей от границы  $\{x = L\}$  полосы  $\Pi$  к границе  $\{x = 0\}$  этой полосы, и волной, идущей от  $\{x = 0\}$  к  $\{x = L\}$ .

Итак, пусть плоская волна  $e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau - i\sqrt{E}x}$  падает из бесконечности на полосу  $\Pi$ , см. рис. 2.4. На

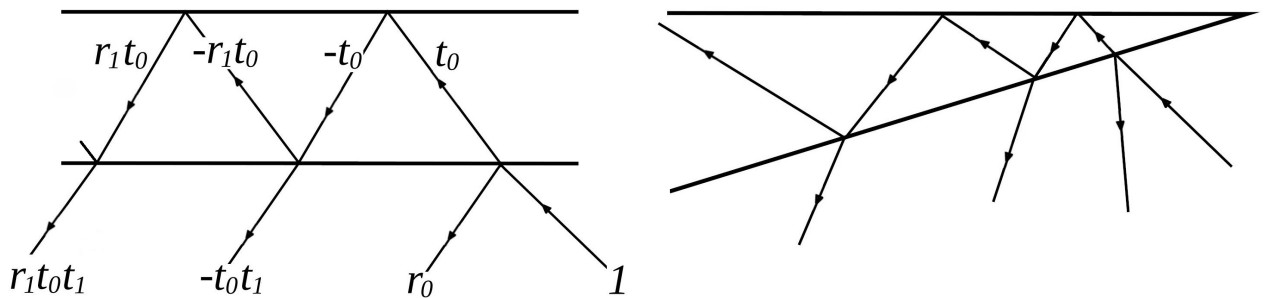


Рис. 2.4: Рисунок слева иллюстрирует рассеяние плоской волны, падающей из бесконечности на слой  $\Pi$ . Плоские волны обозначены стрелками, рядом с которыми указаны коэффициенты при соответствующих экспонентах. Рисунок справа аналогичным образом иллюстрирует рассеяние плоской волны на секторе  $W$  для случая сужающейся со временем потенциальной ямы.

границе полосы, при  $x = L$ , эта волна испытывает отражение и преломление. Отражённая волна  $r_0 e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau + i\sqrt{E}x}$  уходит на бесконечность, а преломлённая волна  $t_0 e^{-\frac{i}{\varepsilon} E \tau - i\sqrt{E+1}x}$  проходит внутрь

полосы II. Коэффициенты  $r_0$  и  $t_0$  нетрудно найти, потребовав, чтобы при  $x = L$  преломлённая волна и сумма падающей и отражённой волн переходили друг в друга непрерывно вместе со своими производными по  $x$ . Волна  $t_0 e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau - i\sqrt{E+1}x}$  испытывает при  $x = 0$  полное отражение и превращается в волну  $-t_0 e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau + i\sqrt{E+1}x}$ . Сумма  $-2it_0 e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau} \sin(\sqrt{E+1}x)$  этих двух волн удовлетворяет граничному условию Дирихле при  $x = 0$ . Волна  $-t_0 e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau + i\sqrt{E+1}x}$ , в свою очередь, отражается и преломляется при  $x = L$ , порождая, соответственно, волну  $-r_1 t_0 e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau - i\sqrt{E+1}x}$  внутри полосы II и волну  $-t_1 t_0 e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau + i\sqrt{E}x}$ , уходящую на бесконечность вне полосы II. Коэффициенты  $r_1$  и  $t_1$  вновь легко находятся из соображений непрерывности. Оставшаяся в полосе II волна испытывает далее многократное отражение от границ полосы II аналогичным описанному образом, отражаясь полностью при  $x = 0$  и разделяясь на отражённую и преломлённую волны с коэффициентами  $r_1$  и  $t_1$  при  $x = L$ .

Просуммировав теперь все описанные волны, мы получим решение  $\Psi_{GO}$  уравнения Шрёдингера. Вне потенциальной ямы, при  $x \geq L$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{GO}(x, \tau, E) &= e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau - i\sqrt{E}x} + r_0 e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau + i\sqrt{E}x} + t_0 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau + i\sqrt{E}x} (-t_1)(-r_1)^m \\ &= e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau - i\sqrt{E}x} + \left( r_0 - \frac{t_0 t_1}{1 + r_1} \right) e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau + i\sqrt{E}x}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

а внутри потенциальной ямы, при  $0 \leq x \leq L$ ,

$$\Psi_{GO}(x, \tau, E) = t_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-2i) e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau} \sin(\sqrt{E+1}x) (-r_1)^m = \frac{-2it_0}{1+r_1} e^{-\frac{i}{\varepsilon}E\tau} \sin(\sqrt{E+1}x). \quad (2.33)$$

Полученное решение  $\Psi_{GO}$  удовлетворяет граничному условию Дирихле при  $x = 0$ , непрерывно вместе со своей производной по  $x$  при  $x = L$  и совпадает с решением  $\Psi_*$  из формулы (2.31) с точностью до множителя  $-2it_0/(1+r_1)$ .

В интересующем нас случае сужающейся со временем потенциальной ямы переменные в уравнении (1.1) не делятся. При этом, однако, всё ещё возможно построить аналог  $\Psi_{cs}$  решения  $\Psi_*$  из формулы (2.31) с помощью «геометро-оптического» подхода, см. рис. 2.4. Напомним, что  $\Psi_*$  является при фиксированном  $\tau$  обобщённой собственной функцией непрерывного спектра для соответствующего «поперечного» оператора Шрёдингера. Используя акустическую терминологию, можно сказать, что решение  $\Psi_{cs}$  — результат рассеяния плоской волны на узком секторе  $W$ . Мы строим решение  $\Psi_{cs}$  при  $\tau \leq 1$  внутри и вне потенциальной ямы в виде бесконечных рядов, аналогичных рядам в (2.32) и (2.33).

## 2.2.2 Формулы для решения $\Psi_{cs}$

Здесь и далее мы предполагаем, что  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\tau \leq 1$  и  $p \geq 1 + \varepsilon/2$ , если не сказано обратное. Выпишем формулы для решения  $\Psi_{cs}$ . Сперва нам понадобится определить несколько функций. В разделе 2.1.1 формулами (2.3) и (2.5) уже были определены на вещественной оси функции  $Q$ ,  $\rho$ ,  $p_1$  и  $T$ . Через  $R$ , как и прежде, мы будем обозначать решение разностного уравнения (2.4),

определённое в разделе А.2 приложения А. Определим также функции

$$p_2(p) = \frac{\varepsilon}{2} + Q\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad p_3(p) = p_2(p) - \varepsilon, \quad (2.34)$$

$$r(p) = \left(\rho(p) e^{-2iQ(p)}\right)\Big|_{p:=p-\varepsilon/2}, \quad (2.35)$$

$$t(p) = \frac{e^{-\frac{i}{\varepsilon}p^2}}{R(p)} \left(\frac{-4iQ(p)}{Q(p) + p} e^{-i(Q(p)-p)}\right)\Big|_{p:=p-\varepsilon/2}. \quad (2.36)$$

Справедлива

**Теорема 4.** Положим при  $x \geq 1 - \tau$

$$\begin{aligned} \Psi_{cs}(x, \tau, p) = & e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_2^2(p)\tau - ip_2(p)x} + r(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_3^2(p)\tau + ip_3(p)x} \\ & + t(p) \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon}p_1^2(k_m)(1-\tau) + ip_1(k_m)x} T(k_m) R(k_m), \quad k_m = p + \varepsilon m, \end{aligned} \quad (2.37)$$

а при  $0 \leq x \leq 1 - \tau$

$$\Psi_{cs}(x, \tau, p) = t(p) e^{\frac{i}{\varepsilon}\tau} \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon}k_m^2(1-\tau)} \sin(k_m x) R(k_m), \quad k_m = p + \varepsilon m. \quad (2.38)$$

Формулы (2.37) и (2.38) описывают решение  $\Psi_{cs}$  уравнения (1.1). Это решение бесконечно дифференцируемо по  $\tau$  и  $x$  при  $0 < x < 1 - \tau$  и  $x > 1 - \tau$ , удовлетворяет граничному условию Дирихле при  $x = 0$  и непрерывно вместе со своей производной по  $x$  при  $x = 1 - \tau$ .

По аналогии с рассмотренным в разделе 2.2.1 случаем потенциальной ямы постоянной ширины, первое слагаемое в правой части формулы (2.37) можно рассматривать как плоскую волну, падающую из бесконечности на сектор  $W$ , второе — как уходящую на бесконечность волну, отражённую от границы  $\{x = 1 - \tau\}$  сектора  $W$ , а бесконечную сумму — как сумму уходящих на бесконечность волн, вышедших из сектора  $W$ , ср. (2.37) с (2.32). Формулы (2.38) и (2.33) соотносятся аналогичным образом. Формулы для функций  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $T$ ,  $r$ ,  $t$ , а также разностное уравнение для функции  $R$ , получаются из условий непрерывности  $\Psi_{cs}$  и  $\partial\Psi_{cs}/\partial x$  при  $x = 1 - \tau$  подобно тому, как могут быть найдены коэффициенты  $r_0$ ,  $t_0$ ,  $r_1$  и  $t_1$ , входящие в формулы (2.32) и (2.33). Отметим также, что, по существу, выписанные формулы для  $\Psi_{cs}$  получаются с помощью метода отражений, и функцию  $R$  здесь можно интерпретировать как регуляризованное произведение коэффициентов отражения, введённое для удобства дальнейшего анализа рядов.

Параметр  $p$ , который мы для удобства используем в формулах (2.37) и (2.38) вместо спектрального параметра  $E$ , имеет следующий смысл. Первый член ряда в формуле (2.38) является линейной комбинацией плоских волн  $e^{\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau - ipx}$  и  $e^{\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau + ipx}$  — решений стационарного уравнения Шрёдингера. Параметр  $p$  можно назвать импульсом этих плоских волн. Числа  $k_m$  в формуле (2.38), как и числа  $p_2(p)$ ,  $p_3(p)$  и  $p_1(k_m)$  в формуле (2.37), также имеют смысл импульсов соответствующих плоских волн. Параметр  $E$  связан с параметром  $p$  формулой  $E = (p_2(p) - \varepsilon/2)^2 = (p - \varepsilon/2)^2 - 1$ .

**Замечание 2.3.** Обсудим подробнее связь между импульсом  $p_2(p)$  падающей волны и импульсом  $p$  порождаемой ею внутри сектора  $W$  преломлённой волны. Как видно из второй формулы в (2.34), монотонная функция  $p_2$  отображает  $[1 + \varepsilon/2, +\infty)$  на  $[\varepsilon/2, +\infty)$ . Найти  $p$  по  $p_2$  можно с помощью обратной формулы

$$p(p_2) = \varepsilon/2 + \sqrt{(p_2 - \varepsilon/2)^2 + 1},$$

где квадратный корень принимает положительные значения для положительного аргумента.

### 2.2.3 Качественное описание асимптотического поведения $\Psi_{cs}$

Здесь мы качественно опишем асимптотики решения  $\Psi_{cs}$ . Строгие формулировки соответствующих теорем приведены в следующих двух разделах — 2.2.4 и 2.2.5.

Рассмотрим сперва поведение  $\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы. Как выясняется, при  $p - 1 \gg \varepsilon^{2/3}$  старший член асимптотики  $\Psi_{cs}$  описывается через элементарные функции. При  $p - 1 \geq b$ , где  $b > 0$  фиксировано, амплитуда старшего члена асимптотики решения  $\Psi_{cs}$  осциллирует, оставаясь везде порядка единицы и принимая наибольшие значения вблизи моментов

$$\tau = 1 - \frac{\pi(n - 1/2)}{p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Около края непрерывного спектра, при  $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll 1$ , «всплески» этой амплитуды происходят вблизи моментов  $\tau_n$  исчезновения собственных значений оператора  $H(\tau)$  — моментов рождения резонансов. В «тени» между моментами  $\tau_n$  решение  $\Psi_{cs}$  оказывается асимптотически меньше, чем вблизи них. При этом при  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll 1$  амплитуда старшего члена асимптотики  $\Psi_{cs}$  имеет порядок единицы в окрестностях порядка  $\sqrt{p - 1}$  моментов  $\tau_n$ . Поведение старшего члена асимптотики  $\Psi_{cs}$  при этих значениях параметра  $p$  (внутри и вне потенциальной ямы) схематически изображено на полуплоскости переменных<sup>5</sup>  $(\tau, \xi)$  на рис. 2.5. При  $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll \varepsilon^{2/3}$  старший

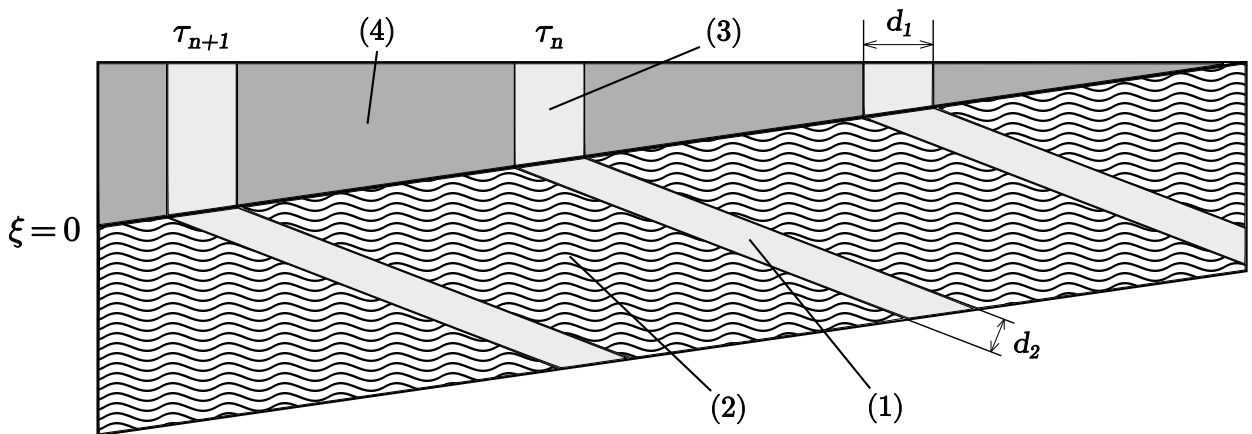


Рис. 2.5: Схематическое изображение поведения старшего члена асимптотики  $\Psi_{cs}$  на полуплоскости переменных  $(\tau, \xi)$  при  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll 1$ . Здесь  $d_1 \sim \sqrt{p - 1}$  и  $d_2 \sim (p - 1)$ . В области (1)  $\Psi_{cs} \sim \cos(Q(p - \varepsilon/2) \xi/\varepsilon)$ , в области (2)  $\Psi_{cs} \sim \sin(Q(p - \varepsilon/2) \xi/\varepsilon)$ , в области (3)  $\Psi_{cs}$  принимает значения порядка единицы, а в области (4)  $\Psi_{cs} = O(\sqrt{p - 1})$ .

член асимптотики  $\Psi_{cs}$  описывается в терминах спецфункции, родственной функции Эйри, и его

<sup>5</sup>Напомним, что  $\xi = \varepsilon(x - (1 - \tau))$ .

амплитуда имеет порядок  $\varepsilon^{-1/3} \sqrt{p-1-\varepsilon/2} \ll 1$  в окрестностях порядка  $\varepsilon^{1/3}$  моментов  $\tau_n$  (и ещё меньший порядок вне этих окрестностей). Используя акустическую терминологию, можно сказать, что при  $\varepsilon/2 \leq p-1 \ll 1$  плоская волна, падающая на сектор  $W$ , «просачивается» в него преимущественно при  $\tau \sim \tau_n$ . При  $\varepsilon/2 \leq p-1 \ll \varepsilon^{2/3}$  это просачивание становится малым, хотя и по-прежнему остаётся более заметным при  $\tau \sim \tau_n$ . Можно сказать, что при таких значениях  $p$  падающая волна отражается от сектора  $W$  почти полностью.

Теперь обсудим поведение  $\Psi_{cs}$  вне потенциальной ямы. Как и внутри потенциальной ямы, здесь имеют место два асимптотических режима в зависимости от значений параметра  $p$ : один при  $p-1 \gg \varepsilon^{2/3}$  и другой при  $\varepsilon/2 \leq p-1 \ll \varepsilon^{2/3}$ . В первом из указанных режимов старший член асимптотики  $\Psi_{cs}$  описывается везде через элементарные функции. Во втором режиме вблизи границы потенциальной ямы, в пограничном слое, где  $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$ , он описывается в терминах спецфункции, родственной функции Эйри.

Как и прежде, при  $p-1 \geq b > 0$  амплитуда старшего члена асимптотики  $\Psi_{cs}$  осциллирует, оставаясь порядка единицы. Опишем более подробно поведение  $\Psi_{cs}$  около края непрерывного спектра. Сперва рассмотрим случай  $\varepsilon^{2/3} \ll p-1 \ll 1$ , см. рис 2.5. В этом случае на полуплоскости переменных  $(\tau, \xi)$  вне окрестностей порядка  $(p-1)$  прямых

$$\xi = 2Q(p)(\tau - \tau_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.39)$$

старший член асимптотики ведёт себя как  $\sin(Q(p-\varepsilon/2)\xi/\varepsilon)$ . При этом в старшем порядке решение  $\Psi_{cs}$  представляет собой только сумму падающей и отражённой волн, а сумма преломлённых волн оказывается малой. Вблизи же указанных прямых сумма преломлённых волн имеет один порядок с падающей и отражённой волнами, и старший член асимптотики  $\Psi_{cs}$  ведёт себя как  $\cos(Q(p-\varepsilon/2)\xi/\varepsilon)$ . Вблизи границы  $\{x = 1 - \tau\}$  потенциальной ямы решение  $\Psi_{cs}$  имеет порядок единицы при  $\tau \sim \tau_n$  и асимптотически мало между этими моментами, что согласуется со «всплесками» решения  $\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы при  $\tau \sim \tau_n$ .

Во втором асимптотическом режиме, при  $\varepsilon/2 \leq p-1 \ll \varepsilon^{2/3}$ , старший член асимптотики  $\Psi_{cs}$  ведёт себя как  $\sin(Q(p-\varepsilon/2)\xi/\varepsilon)$ , если этот синус не является малым. Вблизи границы потенциальной ямы, при  $0 \leq \xi = O(\varepsilon^{2/3})$ , указанный синус уже не является настоящим старшим членом, оказываясь одного порядка или меньше по сравнению со следующим членом асимптотики, который описывается в терминах спецфункции. При этом решение  $\Psi_{cs}$  принимает значения порядка  $\varepsilon^{-1/3} \sqrt{p-1-\varepsilon/2}$  в окрестностях порядка  $\varepsilon^{1/3}$  моментов  $\tau_n$  (где и появляется спецфункция, описывающая «просачивание» в потенциальную яму) и асимптотически меньшие значения между этими моментами. Этот результат также согласуется с поведением  $\Psi_{cs}$  в потенциальной яме.

#### 2.2.4 Асимптотики $\Psi_{cs}$ при $\varepsilon^{2/3} \ll p-1 \leq C$

В данном разделе мы сформулируем и обсудим теоремы, описывающие асимптотики решения  $\Psi_{cs}$  при  $\varepsilon^{2/3} \ll p-1 \leq C$ . Приведённые ниже теоремы 5 и 6 описывают асимптотическое поведение

$\Psi_{cs}$  при указанных значениях  $p$ , соответственно, внутри и вне потенциальной ямы. Положим

$$t_1(p) = e^{\frac{i}{\varepsilon} p^2} R(p) t(p) = \left( \frac{-4iQ(p)}{Q(p) + p} e^{-i(Q(p)-p)} \right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2}. \quad (2.40)$$

**Теорема 5.** *Фиксируем некоторые  $\tau_* < 1$ ,  $c_1, c_2 > 0$  и  $0 \leq \alpha < 2/3$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  достаточно мал, и пусть*

$$1 + c_1 \varepsilon^\alpha \leq p \leq 1 + c_2, \quad \tau_* \leq \tau \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1 - \tau, \quad (2.41)$$

тогда

$$\Psi_{cs}(x, \tau, p) = t_1(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau} \left( \frac{\sin(px)}{1 - e^{2ip(1-\tau)} \rho(p)} + O\left(\frac{\varepsilon^{1/3}}{p-1}\right) \right). \quad (2.42)$$

Оценка поправки в формуле (2.42) равномерна по  $x$ ,  $\tau$  и  $p$ .

Обсудим теорему 5. Нетрудно видеть, что  $|\rho(p)| < 1$  при  $p > 1$ , поэтому старший член в формуле (2.42) представляет собой бесконечную сумму

$$t_1(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau} \sin(px) \sum_{m=0}^{\infty} e^{2ip(1-\tau)m} (\rho(p))^m$$

плоских волн, каждая из которых в старшем порядке удовлетворяет уравнению (1.1). Заметим, что  $\rho(p)$  имеет смысл коэффициента отражения, аналогичного коэффициенту  $(-r_1)$  в формуле (2.33).

Обсудим формулу (2.42) при различных значениях  $p$ . Фиксируем  $c \in (0, 1)$  и будем считать  $|\sin(px)| \geq c$ . Нетрудно видеть, что на «конечном расстоянии» от края непрерывного спектра, т. е. при  $p \geq 1 + b$  для некоторого фиксированного  $b > 0$ , амплитуда старшего члена в скобках осциллирует, оставаясь порядка единицы, а поправка есть  $O(\varepsilon^{1/3})$ . При больших значениях  $p$ , т. е. для случая «высоких энергий» (заметим, что константа  $c_2$  в условии теоремы 5 может быть взята достаточно большой), можно подставить в формулу (2.42) верные при  $p \rightarrow +\infty$  соотношения

$$Q\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) = p \left(1 + O(p^{-2})\right), \quad \rho(p) = -(Q(p) + p)^{-2} = -\frac{1}{4} p^{-2} \left(1 + O(p^{-2})\right) \quad (2.43)$$

и получить формулу

$$\Psi_{cs}(x, \tau, p) = -2i e^{-\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau} \left( \sin(px) + O(p^{-1}) \right), \quad (2.44)$$

ср. её с формулой (2.31).

Случай, когда  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , подробно рассмотрен в разделе В.2 приложения В. В упомянутом разделе показано, что в этом случае старший член в скобках в формуле (2.42) имеет порядок  $(p - 1)^{-1/2}$  при  $\tau = \tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Это означает, что при  $\tau = \tau_n$  этот старший член больше поправки  $O(\varepsilon^{1/3}/(p - 1))$  при всех  $p \geq 1 + c_1 \varepsilon^\alpha$ . При  $\tau$  вне фиксированной окрестности множества  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  старший член в скобках имеет порядок единицы, и, следовательно, больше поправки лишь при  $p - 1 \gg \varepsilon^{1/3}$ . При  $c_1 \varepsilon^\alpha \leq p - 1 \leq C \varepsilon^{1/3}$ ,  $C > 0$ , формула (2.42) даёт для таких  $\tau$  только оценку решения  $\Psi_{cs}$ . Итак, ближе к краю непрерывного спектра оператора  $H(\tau)$  амплитуда старшего члена асимптотики решения  $\Psi_{cs}$  имеет «всплески» вблизи моментов  $\tau = \tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , заметные на фоне

находящейся между моментами  $\tau_n$  «тени». Порядок этой амплитуды, с учётом множителя перед скобками в формуле (2.42), легко получить с помощью соотношения  $|t_1(p)| \sim \sqrt{p-1}$ , верного при  $c_1 \varepsilon^\alpha \leq p-1 \ll 1$ .

Перейдём к обсуждению асимптотики  $\Psi_{cs}$  вне потенциальной ямы. Положим

$$\kappa(\xi, p, \varepsilon) = \left( e^{-\frac{i\xi}{2}} e^{-iQ(p)} e^{-\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau} \right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2}. \quad (2.45)$$

**Теорема 6.** *Фиксируем некоторые  $\tau_* < 1$ ,  $c_1, c_2, c_3 > 0$ , а также  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , такие что*

$$2/3 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \alpha < 2(1-\beta), \quad 3\alpha/2 - 2/3 < \gamma < 2\beta - 1. \quad (2.46)$$

*Пусть  $\varepsilon > 0$  достаточно мал, и пусть*

$$1 + c_1 \varepsilon^\alpha \leq p \leq 1 + c_2, \quad \tau_* \leq \tau \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq c_3 \varepsilon^{-\gamma} (p-1)^{3/2}, \quad (2.47)$$

*тогда выполнено*

$$\begin{aligned} \Psi_{cs}(x, \tau, p) = \kappa(\xi, p, \varepsilon) & \left( e^{-\frac{i}{\varepsilon}Q(p-\frac{\varepsilon}{2})\xi} + \rho(p) e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p-\frac{\varepsilon}{2})\xi} \right. \\ & \left. + 4pQ\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)})}\rho(p)}{1 - e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)})}\rho(p)} e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p-\frac{\varepsilon}{2})\xi} + O(\rho(p)\Delta) \right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

*где*

$$\Delta = \varepsilon^{1/2} + \frac{\varepsilon^{2\beta-1}}{\sqrt{p-1}} + \frac{\varepsilon^{2\beta-1}\xi}{(p-1)^{3/2}} = o(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.49)$$

*Оценка поправки в формуле (2.48) равномерна по  $\xi$ ,  $\tau$  и  $p$ .*

Обсудим теорему 6. Сперва отметим, что теорема 6 описывает асимптотику решения  $\Psi_{cs}$  в том числе и на больших расстояниях от края потенциальной ямы: условие на  $\xi$  в терминах переменной  $x$  принимает вид

$$0 \leq x - (1 - \tau) \leq c_3 \varepsilon^{-(\gamma+1)} (p-1)^{3/2}. \quad (2.50)$$

Пусть параметр  $p$  принимает из всех значений, рассматриваемых в теореме 6, наиболее близкие к единице. Для этого надо считать

$$\beta = 2/3, \quad \alpha < 2/3 \text{ и близкó к } 2/3, \quad (p-1) \sim \varepsilon^\alpha.$$

В этом случае правая часть в (2.50) имеет порядок  $\varepsilon^{\frac{3}{2}\alpha-1-\gamma} \gg \varepsilon^{-1/3}$ . При  $(p-1) \sim 1$  правая часть в (2.50) имеет порядок  $\varepsilon^{-(\gamma+1)}$ , где  $\gamma$  может быть выбрано близким к 1.

Как видно из формулы (2.48), и теперь при  $p-1 \geq b > 0$  амплитуда старшего члена асимптотики  $\Psi_{cs}$  осциллирует, оставаясь порядка единицы. Опять рассмотрим подробно предельные случаи, когда  $(p-1)$  принимает большие или малые значения. При достаточно больших значениях  $p$ , которые можно рассмотреть, выбирая в условии теоремы 6 достаточно большое  $c_2$ , мы можем

подставить в формулу (2.48) соотношения (2.43) и после элементарных преобразований получить формулу<sup>6</sup>

$$\Psi_{cs}(x, \tau, p) = -2i e^{-\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau} \left( \sin \left( p(1-\tau) + \frac{\xi}{2} + Q \left( p - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\xi}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon + p^{-1}) \right), \quad (2.51)$$

в которой вклад в старший член асимптотики дают только падающая волна и сумма преломлённых волн, а вклад от отражённой волны мал. Этот факт является естественным, поскольку коэффициент  $\rho(p)$ , становящийся малым при больших значениях  $p$ , имеет смысл коэффициента отражения. Как и следовало ожидать, на границе потенциальной ямы, при  $x = 1 - \tau$  или, что то же самое, при  $\xi = 0$ , правая часть формулы (2.51) совпадает в старшем порядке с правой частью полученной ранее формулы (2.44).

Для случая, когда  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll 1$ , мы приведём здесь готовые формулы, вывод которых дан в разделе В.2 приложения В. Положим

$$\theta_n(\tau, \xi, p) = 2(\tau_n - \tau) + \frac{p\xi}{Q(p)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.52)$$

При значениях  $\tau$  и  $\xi$ , указанных в формулировке теоремы 6, на полуплоскости переменных  $(\tau, \xi)$  в окрестностях порядка  $(p - 1)$  прямых

$$\theta_n(\tau, \xi, p) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.53)$$

формула (2.48) принимает упрощённый вид

$$\Psi_{cs}(x, \tau, p) = \kappa(\xi, p, \varepsilon) \left( 2 \cos \left( Q \left( p - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\xi}{\varepsilon} \right) + O \left( \sqrt{p-1} + \frac{|\theta_n|}{\sqrt{p-1}} + \Delta \right) \right). \quad (2.54)$$

Вне окрестностей порядка  $(p - 1)$  прямых (2.53) формула (2.48) упрощается до

$$\Psi_{cs}(x, \tau, p) = \kappa(\xi, p, \varepsilon) \left( -2i \sin \left( Q \left( p - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\xi}{\varepsilon} \right) + O \left( \frac{\sqrt{p-1}}{|\theta|} + \Delta \right) \right), \quad (2.55)$$

где  $|\theta| = \min_{n \in \mathbb{N}} \{|\theta_n|\}$ . Таким образом, при  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll 1$  старший член асимптотики  $\Psi_{cs}$  осциллирует вблизи прямых (2.53) и между ними с разной фазой.

**Замечание 2.4.** В разделе 2.2.3 вместо прямых (2.53) указаны прямые (2.39), но с учётом того, что мы рассматриваем окрестности порядка  $(p - 1)$  этих прямых, указанное различие не имеет значения при условиях теоремы 6.

## 2.2.5 Асимптотики $\Psi_{cs}$ вблизи края непрерывного спектра

Здесь мы сформулируем теоремы 7 и 8, описывающие асимптотики решения  $\Psi_{cs}$  в случае, когда параметр  $p$  принимает значения, близкие к единице (вплоть до  $1 + \varepsilon/2$ ). Эти теоремы

<sup>6</sup>Мы не заменяем в аргументе синуса выражение  $Q(p - \varepsilon/2)$  на его асимптотику, поскольку множитель  $\xi/\varepsilon$  может, вообще говоря, быть большим. Конечно, если  $\xi$  не слишком велико, то формулу можно упростить далее.

описывают как упомянутый в разделе 2.2.3 второй асимптотический режим, имеющий место при  $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll \varepsilon^{2/3}$ , так и переход между двумя режимами. Нам будет удобно начать с теоремы 7, описывающей асимптотическое поведение  $\Psi_{cs}$  вне потенциальной ямы. Пусть  $\kappa = \kappa(\xi, p, \varepsilon)$  по-прежнему определено формулой (2.45), и пусть

$$q(p) = \varepsilon^{-2/3}(p - 1 - \varepsilon/2). \quad (2.56)$$

**Теорема 7.** *Фиксируем некоторые  $\tau_* < 1$ ,  $c_1, c_2 > 0$ , а также  $\alpha$  и  $\beta$ , такие что<sup>7</sup>*

$$8/15 < \beta < 2/3, \quad \beta \leq \alpha < 1. \quad (2.57)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, и пусть

$$1 + \varepsilon/2 \leq p \leq 1 + c_1\varepsilon^\alpha, \quad \tau_* \leq \tau \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq c_2\varepsilon^{-\beta/2}. \quad (2.58)$$

Тогда имеет место формула

$$\Psi_{cs}(x, \tau, p) = \kappa \left( -2i \sin \left( Q \left( p - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\xi}{\varepsilon} \right) + 4\sqrt{2} q^{1/2} \left( \phi(\xi, \tau, q) + O(\varepsilon^{2\beta-1}) \right) + O(\varepsilon) \right), \quad (2.59)$$

где для  $\phi(\xi, \tau, q)$  справедлива оценка  $\phi(\xi, \tau, q) = O(1)$ .

Фиксируем достаточно малые  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Пусть

$$0 \leq \xi \leq \delta_1 \sqrt{p-1}.$$

Если  $|\tau - \tau_n| \geq \delta_2$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$\phi(\xi, \tau, q) = O\left(\varepsilon^{1/3} + \varepsilon^{-1/6}\xi\right). \quad (2.60)$$

Если же для фиксированного  $N \in \mathbb{N}$  выполнено  $|\tau - \tau_N| \leq \delta_2$ , то

$$\phi(\xi, \tau, q) = e^{\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} \mathcal{F}\left(\frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}}, \frac{\eta_N}{\varepsilon^{1/3}}, q\right) + O\left(\varepsilon^{1/3} + \varepsilon^{-1/6}\xi\right), \quad \eta_N = 2(\tau_N - \tau), \quad (2.61)$$

$$\mathcal{F}(s, w, q) = \int_0^\infty e^{i w u - \frac{4\sqrt{2}}{3}(q+u)^{3/2} + \sqrt{2}i(q+u)^{1/2}s} du. \quad (2.62)$$

Оценки всех поправок равномерны по  $\xi$ ,  $\tau$  и  $p$ .

**Замечание 2.5.** Для  $\phi(\xi, \tau, q)$  имеет место явная формула

$$\phi(\xi, \tau, q) = \varepsilon^{1/3} e^{\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} \sum_{m=1}^\infty e^{i\eta m - \frac{4\sqrt{2}}{3}(q+\varepsilon^{1/3}m)^{3/2}} \left(1 - \frac{3i\xi}{16}\right) + \sqrt{2}i(q+\varepsilon^{1/3}m)^{1/2} \frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}}, \quad (2.63)$$

<sup>7</sup>Заметим, что ограничение  $\beta > 8/15$  в условии теоремы 7 взято для того, чтобы поправка  $O(q^{1/2}\varepsilon^{2\beta-1}) = O(\varepsilon^{\alpha/2+2\beta-4/3})$  в формуле (2.59) всегда была малой.

где  $\eta = 2(1 + \pi/2 - \tau)$ .

При обсуждении теорем 7 и 8 мы будем использовать следующие асимптотические формулы для функции  $\mathcal{F}$ : при  $q \rightarrow +0$

$$\mathcal{F}(s, w, q) = \mathcal{F}_1(s, w) + O(q(1+s)), \quad \mathcal{F}_1(s, w) = \int_0^{\infty} e^{i w u - \frac{4\sqrt{2}}{3} u^{3/2} + \sqrt{2} i u^{1/2} s} du, \quad (2.64)$$

а при  $q \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{F}(s, w, q) = e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3} q^{3/2}} e^{\sqrt{2} i q^{1/2} s} \left( \frac{1}{2\sqrt{2} q^{1/2} - i w - \frac{is}{\sqrt{2} q^{1/2}}} + O(q^{-2} + s q^{-3}) \right). \quad (2.65)$$

Доказательства этих формул приведены в разделе В.3 приложения В.

Рассмотрим формулу (2.59) при  $\varepsilon/2 \leq p-1 \ll \varepsilon^{2/3}$ , т. е. при  $q \ll 1$ . Если синус, стоящий в скобках в (2.59), принимает значения, асимптотически бóльшие, чем  $q^{1/2}$ , то в силу оценки  $\phi = O(1)$  он является старшим членом асимптотики  $\Psi_{cs}$  (с точностью до постоянного по модулю множителя). Если же этот синус мал, то мы имеем для решения  $\Psi_{cs}$  оценку  $\Psi_{cs} = O(q^{1/2})$ . Этот синус всегда мал при  $\xi$ , близких к 0, т. е. вблизи границы потенциальной ямы, и вторая часть теоремы 7 позволяет более точно описать в этом случае поведение  $\Psi_{cs}$ . При малых аргументах синус в (2.59) ведёт себя как  $\sqrt{2} q^{1/2} \xi / \varepsilon^{2/3}$ , т. е. принимает при  $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$  значения одного порядка или меньше по сравнению со вторым слагаемым в скобках в (2.59). Используемое во второй части теоремы 7 условие  $\xi \leq \delta_1 \sqrt{p-1}$  включает в себя эту область значений  $\xi$ , поскольку  $p-1 \geq \varepsilon/2$ . Формула (2.61), описывающая поведение  $\phi$  при  $\tau \sim \tau_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , упрощается при  $q \ll 1$  с помощью (2.64):

$$\phi(\xi, \tau, q) = \mathcal{F}_1\left(\frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}}, \frac{\eta_N}{\varepsilon^{1/3}}\right) + O(q(1 + \varepsilon^{-2/3}\xi) + \varepsilon^{1/3} + \varepsilon^{-1/6}\xi). \quad (2.66)$$

Таким образом, при  $q \ll 1$ ,  $0 \leq \xi \ll \varepsilon^{2/3}$  и  $|\tau - \tau_N| \leq C\varepsilon^{1/3}$  (т. е.  $|\eta_N| \leq C\varepsilon^{1/3}$ ) решение  $\Psi_{cs}$  асимптотически описывается в старшем порядке вторым членом в скобках в (2.59), где для  $\phi$  справедлива формула (2.66), и, следовательно,  $\Psi_{cs}$  принимает значения порядка  $q^{1/2}$ . Если же при тех же значениях  $q$  и  $\xi$  переменная  $\tau$  принимает значения вне фиксированной окрестности множества  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , то, как вытекает из (2.60),  $\phi = O(\varepsilon^{1/3})$  и, следовательно,  $\Psi_{cs} = o(q^{1/2})$ .

Итак, при  $\varepsilon/2 \leq p-1 \ll \varepsilon^{2/3}$  вне потенциальной ямы вблизи её границы решение  $\Psi_{cs}$  принимает асимптотически бóльшие значения вблизи моментов  $\tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , чем между этими моментами. Можно сказать, что падающая на сектор  $W$  плоская волна более заметно «просачивается» в этот сектор при  $\tau \sim \tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Более заметное при таких значениях  $\tau$  просачивание имеет место и при  $\varepsilon^{2/3} \ll p-1 \ll 1$ , как вытекает из формул (2.54) и (2.55). Более подробно об этом было сказано в разделе 2.2.3.

Перейдём к описанию асимптотик  $\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы. Положим

$$q_1(p) = q\left(p + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon^{-2/3}(p-1). \quad (2.67)$$

**Теорема 8.** *Фиксируем некоторые  $\tau_* < 1$ ,  $c > 0$ , а также  $\alpha$  и  $\beta$ , такие что*

$$8/15 < \beta < 2/3, \quad \beta \leq \alpha < 1. \quad (2.68)$$

*Пусть  $\varepsilon > 0$  достаточно малó, и пусть*

$$1 + \varepsilon/2 \leq p \leq 1 + c\varepsilon^\alpha, \quad \tau_* \leq \tau \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1 - \tau, \quad (2.69)$$

*тогда*

$$\Psi_{cs}(x, \tau, p) = -4\sqrt{2}i e^{ip(1-\tau)} \kappa(0, p, \varepsilon) q^{1/2} \left( \sin(x) \phi(0, \tau, q_1) + O(\varepsilon^{2\beta-1}) \right), \quad (2.70)$$

*где  $\phi$  — та же функция, что и в теореме 7. Оценка поправки равномерна по  $x$ ,  $\tau$  и  $p$ .*

Конечно, оценка (2.60) и асимптотическая формула (2.61) для функции  $\phi$  остаются верными при соответствующих значениях  $\tau$ , если в них положить  $\xi = 0$  и заменить  $q$  на  $q_1$ . Теорема 8 показывает, что «всплески» амплитуды решения  $\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы вблизи моментов  $\tau = \tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , происходят и при значениях параметра  $p$ , близких к единице. При этом асимптотическое поведение  $\Psi_{cs}$  при  $\varepsilon/2 \leq p - 1 \ll \varepsilon^{2/3}$ , т. е. при  $q \ll 1$ , описывается вблизи моментов  $\tau_n$  уже не через элементарные функции, а с помощью спецфункции  $\mathcal{F}_1$ , родственной функции Эйри: при  $\tau \sim \tau_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , и при  $q \ll 1$  справедлива формула (2.66) с  $\xi = 0$  и с заменой  $q$  на  $q_1$ . Как нетрудно видеть, при  $q \ll 1$  решение  $\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы асимптотически сконцентрировано вблизи моментов  $\tau = \tau_n$  в окрестностях порядка  $\varepsilon^{1/3}$ .

Наконец, поговорим о согласованности различных асимптотических формул для  $\Psi_{cs}$ . Рассмотрим случай  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll \varepsilon^{8/15}$ , т. е.  $1 \ll q \ll \varepsilon^{-2/15}$ . В этом случае имеет смысл вопрос о переходе между двумя асимптотическими режимами, описанными в разделах 2.2.4 и 2.2.5, поскольку применимы теоремы обоих этих разделов. С помощью формулы (2.65) нетрудно проверить согласованность асимптотических режимов вне потенциальной ямы вблизи её границы, при  $\xi = O(p - 1) = O(\varepsilon^{2/3}q)$ , и мы проделали это в разделе В.4 приложения В. Согласованность асимптотик  $\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы можно проверить аналогичным образом.

Согласованность асимптотик  $\Psi_{cs}$  вне и внутри ямы между собой мы уже проверили при больших  $p$ , см. формулы (2.44) и (2.51). Помимо этого мы лишь заметим, что при всех значениях  $p$  асимптотические порядки  $\Psi_{cs}$  на границе потенциальной ямы, получаемые из разных формул, согласованы между собой, и не будем останавливаться на более детальной проверке.

### 2.3 Асимптотическое поведение решения $U_n$

В данном разделе мы приведём асимптотические формулы для решения  $U_n$  уравнения Гельмгольца (1.6), см. об акустической задаче раздел 1.1.2 введения. Как уже было упомянуто в указанном разделе, поведение решения  $U_n$  на полуплоскости  $P_a$  переменных  $(x, y)$  на качественном уровне имеет точно такой же характер, как поведение решения  $\Psi_n$  уравнения Шрёдингера (1.1) на полуплоскости  $P$  переменных  $(t, x)$ . В связи с этим мы не будем здесь останавливаться на подробном качественном описании полученных для  $U_n$  результатов, а перейдём сразу к формулировкам теорем.

Отметим, что итоговые асимптотические формулы для  $\Psi_n$  и  $U_n$  аналогичны, но отличаются в деталях. Эти детали существенны, например, при использовании полученных формул для компьютерных расчётов. Описанные здесь результаты были анонсированы в заметке [S5].

Фиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и будем далее считать, что  $x \leq 0$  (и, следовательно,  $\varkappa = \varepsilon_1 x \leq 0$ ) и что  $\varepsilon > 0$  достаточно мал. В разделе А.4 приложения А мы выписали интегральные формулы (А.19) для решения  $U_n$ , полученные А. А. Федотовым в работе [3] и аналогичные формулам (2.6) для решения  $\Psi_n$ . Процедура построения решения  $U_n$  параллельна таковой для решения  $\Psi_n$ , но является более сложной. Здесь мы сформулируем только следующую теорему, утверждение которой вытекает непосредственно из работы [3]:

**Теорема 9.** *При  $x \leq 0$  и при достаточно малых значениях  $\varepsilon > 0$  существует решение  $U_n$  уравнения (1.6), определяемое формулами (А.19). Это решение бесконечно дифференцируемо по  $(x, y)$  при  $0 < y < -\varepsilon_1 x$  и  $y > -\varepsilon_1 x$ , удовлетворяет граничному условию Дирихле при  $y = 0$  и непрерывно при  $y = -\varepsilon_1 x$  вместе со своей производной по нормали.*

Далее мы опишем асимптотическое поведение решения  $U_n$  как внутри «водного клина»  $W_a$ , так и под ним, внутри «океанического дна»: в разделе 2.3.1 мы выпишем асимптотики  $U_n$  при  $\varkappa \sim \varkappa_n$ , а в разделе 2.3.2 — при  $\varkappa > \varkappa_n$ . Напомним, что число  $\varkappa_n$  определено формулой (1.7) и что при  $\varkappa = \varkappa_n$  исчезает  $n$ -е собственное значение «поперечного» оператора  $H_a(\varkappa)$ . Доказательству сформулированных ниже теорем посвящена глава 6.

### 2.3.1 Поведение $U_n$ при $\varkappa \sim \varkappa_n$

Опишем асимптотическое поведение  $U_n$  при  $\varkappa \sim \varkappa_n$ . Положим

$$\eta = \varepsilon(y + \varkappa).$$

Сперва мы рассмотрим поведение  $U_n$  в дне, при  $\eta \geq 0$ . Для того чтобы выписать асимптотическую формулу для  $U_n$ , дадим сначала несколько определений. Здесь и далее мы фиксируем аналитические в  $\mathbb{C}_-$  и непрерывные вплоть до  $\mathbb{R}$  ветви функций  $p \mapsto \sqrt{p}$ ,  $p \mapsto \sqrt{k_0^2 - p}$ ,  $p \mapsto \sqrt{p-1}$  и  $p \mapsto \arctan \sqrt{\frac{k_0^2 - p}{p-1}}$  таким образом, чтобы при  $1 \leq p \leq k_0^2$  величины  $\sqrt{p}$ ,  $\sqrt{k_0^2 - p}$  и  $\sqrt{p-1}$  были неотрицательными и чтобы были выполнены неравенства  $0 \leq \arctan \sqrt{\frac{k_0^2 - p}{p-1}} \leq \pi/2$ .

Пусть числа  $\delta_1, \delta_2 > 0$  достаточно малы. С помощью уравнений

$$-\varkappa \sqrt{k_0^2 - p_{a,n}} + \arctan \sqrt{\frac{k_0^2 - p_{a,n}}{p_{a,n} - 1}} - \frac{i\eta p_{a,n}}{4} \sqrt{\frac{k_0^2 - p_{a,n}}{p_{a,n} - 1}} = \pi m, \quad (2.71)$$

$$-\varkappa \sqrt{k_0^2 - q_{a,n}} - \arctan \sqrt{\frac{k_0^2 - q_{a,n}}{q_{a,n} - 1}} + \frac{i\eta q_{a,n}}{4} \sqrt{\frac{k_0^2 - q_{a,n}}{q_{a,n} - 1}} = \pi(m-1) \quad (2.72)$$

можно однозначно определить функции

$$p_{a,n} : \{ (\varkappa, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \varkappa < 0, 0 < \eta < \delta_2 \} \rightarrow \mathbb{C}_-,$$

$$q_{a,n} : \{ (\varkappa, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid |\varkappa - \varkappa_n| < \delta_1, 0 < \eta < \delta_2 \} \rightarrow \mathbb{C}_-,$$

аналитические в указанных областях, непрерывные вплоть до их границ и такие, что

$$\begin{aligned} 1 < p_{a,n}(\varkappa, 0) < k_0^2 & \text{ при } \varkappa < \varkappa_n, & p_{a,n}(\varkappa, 0) = 1 & \text{ при } \varkappa \geq \varkappa_n, \\ q_{a,n}(\varkappa, 0) = 1 & \text{ при } \varkappa \leq \varkappa_n, & 1 < q_{a,n}(\varkappa, 0) < k_0^2 & \text{ при } \varkappa > \varkappa_n. \end{aligned}$$

Положим

$$E_{a,n}(\varkappa) = \begin{cases} p_{a,n}(\varkappa, 0) & \text{при } \varkappa \leq \varkappa_n, \\ q_{a,n}(\varkappa, 0) & \text{при } \varkappa > \varkappa_n. \end{cases}$$

Заметим, что  $E_{a,n}(\varkappa)$  является  $n$ -м собственным значением оператора  $H_a(\varkappa)$  при  $\varkappa < \varkappa_n$ . Положим также

$$K_{a,n}^\pm(\varkappa, \eta) = \sqrt{-\frac{\partial \sqrt{p_{a,n}}}{\partial \varkappa}} e^{-\frac{i}{2}\eta\sqrt{p_{a,n}}} \pm \sqrt{\frac{\partial \sqrt{q_{a,n}}}{\partial \varkappa}} e^{-\frac{i}{2}\eta\sqrt{q_{a,n}}}, \quad (2.73)$$

$$\alpha_{a,n}(\varkappa, \eta) = \int_{\varkappa_n}^{\varkappa} (\sqrt{E_{a,n}} - 1) d\varkappa' + \frac{i}{2} \int_0^\eta (\sqrt{p_{a,n}} - 1 - \sqrt{q_{a,n}} - 1) d\eta',$$

$$\zeta_{a,n}(\varkappa, \eta) = \frac{e^{i\pi/12}}{\varepsilon^{1/6}} \left( \frac{3}{2} \left| \int_{\varkappa_n}^{\varkappa} (\sqrt{E_{a,n}} - 1) d\varkappa' \right| - \frac{3i}{4} \int_0^\eta (\sqrt{p_{a,n}} - 1 + \sqrt{q_{a,n}} - 1) d\eta' \right)^{1/6}. \quad (2.74)$$

Аргументы квадратных корней в формуле (2.73) и аргумент корня шестой степени в формуле (2.74) не принимают значений в  $i\mathbb{R}_+$ , и мы фиксируем в  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$  однозначные аналитические ветви этих корней условиями  $\sqrt{1} = 1$ ,  $\sqrt[6]{1} = 1$ . Наконец, положим

$$C_{a,n} = \frac{\sqrt{\pi} a_{a,n}}{\sqrt{k_0^2 - 1}}, \quad a_{a,n} = (-1)^{n+1} e^{i\omega_n/\varepsilon + 3i\pi/4}, \quad (2.75)$$

где  $\omega_n$  — некоторая вещественная постоянная, зависящая от  $n$  и  $k_0$ . Имеет место

**Теорема 10.** *Фиксируем достаточно малые  $\delta_1, \delta_2 > 0$  и некоторое  $C > 0$ . Пусть  $|\varkappa - \varkappa_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \eta \leq \delta_2$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$U_n(x, y) = C_{a,n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\alpha_{a,n} + \frac{2i}{\varepsilon}\varkappa} \left( K_{a,n}^- \zeta_{a,n} \text{Ai}(\zeta_{a,n}^4) - \frac{K_{a,n}^+}{\zeta_{a,n}} \text{Ai}'(\zeta_{a,n}^4) \right) + O(\Delta), \quad (2.76)$$

$$\Delta = \left( \left| \sqrt{\frac{\partial \sqrt{p_{a,n}}}{\partial \varkappa}} \right| \frac{|\zeta_{a,n}| \varepsilon^{1/2}}{1 + |\zeta_{a,n}|} + \frac{\varepsilon^{2/3}}{1 + \mu_{a,n}^{1/3}} \right) e^{-\mu_{a,n}}, \quad \varepsilon \mu_{a,n} = \text{Re} \int_0^\eta \sqrt{p_{a,n}} - 1 d\eta'.$$

Оценка поправки равномерна по  $\varkappa$  и  $\eta$ .

Теорема 10 схожа с аналогичной теоремой 1, имеющей место для решения  $\Psi_n$  квантово-механической задачи, но между асимптотическими формулами из этих теорем — формулами (2.76) и (2.17) — имеется много отличий в деталях. Отметим, что при  $\eta = O(\varepsilon^{2/3})$  и  $(\varkappa - \varkappa_n)/\varepsilon^{1/3} \rightarrow +\infty$  старший член в формуле (2.76) может становиться одного порядка с поправочным, и тогда теорема 10 даёт только оценку для  $U_n$ . При таких значениях  $\varkappa$  и  $\eta$  можно выписать более точные асимптотические формулы для  $U_n$ , но мы не задаёмся такой целью (аналогичная ситуация имела место и для решения  $\Psi_n$ , см. замечание 2.2).

В пограничном слое, где  $|\varkappa - \varkappa_n| \leq C_1 \varepsilon^{1/3}$  и  $0 \leq \eta \leq C_2 \varepsilon^{2/3}$ ,  $C_1, C_2 > 0$ , формула (2.76) упрощается аналогично формуле (2.17). Упрощённая формула имеет вид

$$U_n(x, y) = a_{a,n} (k_0^2 - 1)^{1/6} (4\varepsilon)^{1/6} e^{\frac{2i}{\varepsilon}\varkappa} F_{cd}(\lambda, \sigma) + O(\varepsilon^{1/2}),$$

где  $\lambda = \frac{(k_0^2 - 1)^{2/3}}{(4\varepsilon)^{1/3}}(\varkappa - \varkappa_n)$  и  $\sigma = 2 \frac{(k_0^2 - 1)^{1/3}}{(4\varepsilon)^{2/3}} \eta$  — «погранслоиные» координаты, а функция  $F_{cd}$  — та же функция своих аргументов, что и в формуле (2.19). Напомним, что функция  $F_{cd}$  была определена в (2.20). Как следствие, мы можем здесь говорить о «луче прожектора», который излучается в дно при  $\varkappa \sim \varkappa_n$ , аналогично описанному в разделе 2.1.2 для решения  $\Psi_n$ .

Теперь опишем поведение решения  $U_n$  в водном клине  $W_a$ . Положим

$$D_n = (-1)^{n+1} \sqrt{\pi} a_{a,n}, \quad A_n(\varkappa) = \alpha_{a,n}(\varkappa, 0), \quad Z_n(\varkappa) = \zeta_{a,n}(\varkappa, 0),$$

$$\psi_n(\varkappa, y) = \sin\left(\sqrt{k_0^2 - E_{a,n}} y\right) / \sqrt{k_0^2 - E_{a,n}}.$$

**Теорема 11.** *Фиксируем достаточно малое  $\delta > 0$  и некоторое  $C > 0$ . Пусть  $0 \leq y \leq -\varkappa$ . Если  $\varkappa_n - \delta \leq \varkappa \leq \varkappa_n$ , то при  $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$U_n(x, y) = D_n e^{\frac{i}{\varepsilon} A_n + \frac{2i}{\varepsilon} \varkappa} \sqrt{-\frac{\partial \sqrt{E_{a,n}}}{\partial \varkappa}} \psi_n\left(Z_n \operatorname{Ai}(Z_n^4) - Z_m^{-1} \operatorname{Ai}'(Z_n^4)\right) + O(\varepsilon^{2/3}(1 + |Z_m|)). \quad (2.77)$$

*Если же  $\varkappa_n \leq \varkappa \leq \varkappa_n + \delta$ , то*

$$U_n(x, y) = -D_n e^{\frac{i}{\varepsilon} A_n + \frac{2i}{\varepsilon} \varkappa} \sqrt{\frac{\partial \sqrt{E_{a,n}}}{\partial \varkappa}} \psi_n\left(Z_n \operatorname{Ai}(Z_n^4) + Z_n^{-1} \operatorname{Ai}'(Z_n^4)\right) + O(\varepsilon^{2/3}). \quad (2.78)$$

*В формулах (2.77) и (2.78) квадратные корни, содержащиеся в аргументах производные по  $\varkappa$ , принимают неотрицательные значения. Оценки поправок равномерны по  $\varkappa$  и  $y$ .*

Как и в формуле (2.76), в формуле (2.78) при  $(\varkappa - \varkappa_n)/\varepsilon^{1/3} \rightarrow +\infty$  старший член может становиться одного порядка с поправкой, и тогда формула (2.78) даёт лишь оценку для  $U_n$ . Как и прежде, мы не будем выписывать более точную асимптотическую формулу для этого случая.

### 2.3.2 Поведение $U_n$ при $\varkappa > \varkappa_n$

Как и в разделе 2.3.1, опишем сперва асимптотическое поведение  $U_n$  в дне. Пусть  $a_{a,n}$  определено второй формулой в (2.75), и пусть функция  $p_{a,n}$  определена как в разделе 2.3.1. Справедлива

**Теорема 12.** Фиксируем некоторые  $C$ ,  $\delta_1 > 0$  и достаточно малое  $\delta_2 > 0$ . Пусть  $\varkappa_n + \delta_1 \leq \varkappa \leq 0$  и  $C\varepsilon^{2/3} \leq \eta \leq \delta_2$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедлива асимптотическая формула

$$U_n(x, y) = e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta \sqrt{p_{a,n}-1} d\eta'} \left( \mathcal{T}_{a,0}(\varkappa, \eta) + O\left(\varepsilon^{1/2} \eta + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{1/3} + \eta}\right) \right), \quad (2.79)$$

$$\mathcal{T}_{a,0}(\varkappa, \eta) = \frac{a_{a,n}}{\sqrt{k_0^2 - 1}} \sqrt{-\frac{\partial \sqrt{p_{a,n}}}{\partial \varkappa}} e^{-\frac{i}{2} \eta \sqrt{p_{a,n}} + \frac{2i}{\varepsilon} \varkappa}.$$

В последней формуле ветвь квадратного корня, содержащего производную по  $\varkappa$  в аргументе, выбрана так же, как в формуле (2.73). Оценка поправки равномерна по  $\varkappa$  и  $\eta$ .

Теорема 12 аналогична теореме 2, справедливой для  $\Psi_n$ . В условиях теоремы 12 выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \sqrt{p_{a,n}} &= 1 + O(\eta^2), & \frac{\partial \sqrt{p_{a,n}}}{\partial \varkappa} &= \frac{\eta^2}{32(\varkappa - \varkappa_n)^3} (1 + O(\eta)), \\ \operatorname{Re} \int_0^\eta \sqrt{p_{a,n}-1} d\eta' &= \frac{\eta^3}{12(k_0^2 - 1)(\varkappa - \varkappa_n)^3} (1 + O(\eta)), \end{aligned} \quad (2.80)$$

из которых вытекает, что при  $\eta \gg \varepsilon^{2/3}$

$$U_n(x, y) \sim e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta \sqrt{p_{a,n}-1} d\eta'} \mathcal{T}_{a,0}(\varkappa, \eta) \sim \frac{\varepsilon^{1/3}}{(\varkappa - \varkappa_n)^3} \cdot \frac{\eta}{\varepsilon^{1/3}} \exp\left(-\frac{\eta^3 (1 + O(\eta))}{12\varepsilon (k_0^2 - 1)(\varkappa - \varkappa_n)^3}\right),$$

поэтому  $U_n$  экспоненциально убывает с ростом  $\eta/\varepsilon^{1/3}$ .

В полной аналогии с теоремой 2, старший член в (2.79) допускает при  $\eta \sim \varepsilon^{2/3}$  такую же оценку, что и поправочный — это следует из второй формулы в (2.80). Сформулируем для  $U_n$  теорему, аналогичную верной для  $\Psi_n$  теореме 3 и описывающую асимптотику  $U_n$  при  $0 \leq \eta \leq C\varepsilon^{2/3}$ . Распространим определение (1.7) на все  $n \in \mathbb{Z}$ , определим  $h_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , соотношениями (2.26), а функцию  $a$  — формулой (2.27). Положим

$$\lambda_m = (k_0^2 - 1)^{2/3} \frac{\varkappa_m - \varkappa}{(4\varepsilon)^{1/3}}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \sigma = (k_0^2 - 1)^{1/3} \frac{2\eta}{(4\varepsilon)^{2/3}}.$$

**Теорема 13.** Фиксируем  $\delta > 0$  и  $C > 0$ . Пусть  $\varkappa_n + \delta \leq \varkappa \leq 0$  и  $0 \leq \eta \leq C\varepsilon^{2/3}$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} U_n(x, y) &= \mathcal{T}_{a,0}(\varkappa, \eta) + \mathcal{R}_{a,0}(\varkappa, \eta) + O(\varepsilon), \\ \mathcal{R}_{a,0}(\varkappa, \eta) &= \frac{a_{a,n} e^{\frac{2i}{\varepsilon} \varkappa}}{\pi^{3/2} (k_0^2 - 1)^{1/12}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2/3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k a(\lambda_{n-k}, \sigma). \end{aligned}$$

причём  $\mathcal{T}_{a,0}(\varkappa, \eta)$  может быть описано упрощённой формулой

$$\mathcal{T}_{a,0}(\varkappa, \eta) = \frac{-i a_{a,n} \eta e^{\frac{2i}{\varepsilon} \varkappa}}{4\sqrt{2}\sqrt{k_0^2 - 1} (\varkappa - \varkappa_n)^{3/2}} + O(\eta^2). \quad (2.81)$$

Оценки поправок равномерны по  $\varkappa$  и  $\eta$ .

Заметим, что функция  $\mathcal{R}_{a,0}$  и старший член в (2.81) полностью аналогичны определённой в (2.28) функции  $\mathcal{R}_0$  и старшему члену в (2.29) соответственно. В силу этого обсуждение теоремы 13 параллельно обсуждению теоремы 3 и мы его опустим. Мы лишь подведём итог, сказав, что функция  $\mathcal{T}_{a,0}$  описывает поверхностную волну, бегущую в дне, в слое  $\eta \sim \varepsilon^{1/3}$ , а слагаемое  $\mathcal{R}_{a,0}$  отвечает за «просачивание» звукового поля из этой волны в водный клин  $W_a$  при  $\varkappa \sim \varkappa_m$ ,  $1 \leq m \leq n-1$ .

Наконец, асимптотическое поведение  $U_n$  в водном клине  $W_a$  описывает

**Теорема 14.** *Фиксируем  $\delta > 0$ . Пусть  $\varkappa_n + \delta \leq \varkappa \leq 0$  и  $0 \leq y \leq -\varkappa$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедлива асимптотическая формула*

$$U_n(x, y) = \mathcal{R}_{a,1}(\varkappa, y) + O(\varepsilon),$$

$$\mathcal{R}_{a,1}(\varkappa, y) = \frac{b_{a,n} e^{\frac{2i}{\varepsilon} \varkappa}}{\pi^{3/2} (k_0^2 - 1)^{1/12}} \sin\left(\sqrt{k_0^2 - 1} y\right) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2/3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k a(\lambda_{n-k}, 0).$$

Здесь  $b_{a,n} = (-1)^{n+1} a_{a,n}$  и  $f_k = (-1)^k h_k$ .

Функция  $\mathcal{R}_{a,1}$  ведёт себя схожим образом с функцией  $\mathcal{R}_{a,0}$  (поведение которой, в свою очередь, аналогично поведению функции  $\mathcal{R}_0$ ): вне фиксированной окрестности множества  $\{\varkappa_m\}_{1 \leq m \leq n-1}$  верна оценка  $\mathcal{R}_{a,1}(\varkappa, y) = O(\varepsilon)$ , а при  $\varkappa = \varkappa_m$ ,  $1 \leq m \leq n-1$ , значения функции  $\mathcal{R}_{a,1}$  имеют порядок  $\varepsilon^{2/3}$ . Таким образом, в полной аналогии с описанными в разделе 2.1.1 результатами для  $\Psi_n$ , вблизи моментов исчезновения собственных значений оператора  $H_a(\varkappa)$  — моментов рождения резонансов — внутри клина  $W_a$  происходят «всплески» амплитуды акустического поля  $U_n$ . С учётом теорем 12 и 13 мы можем заключить, что при  $\varkappa \sim \varkappa_m$  энергия попадает в  $W_a$  из распространяющейся в дне поверхностной волны.

# Глава 3. Делокализация адиабатической нормальной волны $\Psi_n$

Данная глава посвящена доказательству теоремы 1. В разделе 3.1 мы введём несколько объектов, которые понадобятся нам впоследствии, и опишем некоторые их свойства. В разделе 3.2 мы выпишем удобное для дальнейшего асимптотического анализа представление решения  $\Psi_n$  в виде суммы<sup>1</sup> функций  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{E}$  — двух интегралов по контурам в комплексной плоскости. Затем, в разделе 3.3, мы изучим точки перевала и линии наискорейшего спуска возникающей в этих интегралах фазовой функции. Как оказывается, при условиях теоремы 1 имеет место случай двух близких точек перевала, для которого существует классическая теорема Честера–Фридмана–Урселла [37]. Используя удобный для нас вариант этой теоремы, мы асимптотически исследуем в разделе 3.4 функцию  $\mathcal{T}$  и получим при этом старший член из формулы (2.17). Наконец, в разделе 3.5 мы оценим<sup>2</sup> функцию  $\mathcal{E}$  и завершим доказательство теоремы 1.

Мы фиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и будем всегда считать здесь, что  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\tau \leq 1$  и  $\xi \geq 0$ . Мы также будем предполагать, что  $\tau$  и  $\xi$  ограничены.

## 3.1 Вспомогательные объекты

Напомним, что мы определили область  $\mathbb{C}_0$  комплексной плоскости формулой (2.1). Определим аналитические в области  $\mathbb{C}_0$  и непрерывные вплоть до её границы функции  $Q_0$  и  $l_0$  формулами (2.2) и (A.4) соответственно. Заметим, что

$$l_0(p) = 2 \arcsin p, \quad l_0(0) = 0. \quad (3.1)$$

В этой формуле аналитическая в  $\mathbb{C}_0$  ветвь арксинуса — та же, что и введённая в разделе 2.1.2. Функции  $Q_0$  и  $l_0$  удовлетворяют соотношениям

$$Q_0(\bar{p}) = -\overline{Q_0(p)}, \quad Q_0(-p) = Q_0(p), \quad (3.2)$$

$$l_0(\bar{p}) = \overline{l_0(p)}, \quad l_0(-p) = -l_0(p). \quad (3.3)$$

Обозначим  $\mathbb{C}_\pm = \{p \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} p > 0\}$ . При  $p \in \mathbb{C}_+ \cup (\mathbb{R} + i0)$ ,  $|p| \rightarrow \infty$

$$Q_0(p) = p + O(1/p), \quad l_0(p) = 2i \ln(2p) + \pi + O(1/p^2), \quad (3.4)$$

где аналитическая в  $\mathbb{C}_+$  ветвь функции  $p \mapsto \ln p$  выбрана так, что  $\ln i = i\pi/2$ .

<sup>1</sup>С точностью до множителя  $(1 + O(\varepsilon^{1/2}))$ , не зависящего от  $\tau$  и  $\xi$ , см. (3.9).

<sup>2</sup>В действительности мы получим в разделе 3.5 оценку функции  $\mathcal{E}$  только при  $\tau_n - \delta_1 \leq \tau \leq \tau_n$  для некоторого  $\delta_1 > 0$ . Оценку при  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_n + \delta_1$  мы докажем позже, в разделе 4.3 главы 4.

Перейдём в достаточно малой окрестности точки  $p = 1$ , разрезанной вдоль  $[1, +\infty)$ , к переменной  $z(p) = \sqrt{1-p}$ , фиксируя при этом ветвь квадратного корня условием  $z > 0$  при  $p < 1$ . Функции  $Q_0$  и  $l_0$  аналитичны по  $z$  в окрестности точки  $z = 0$ , и при  $p \in \mathbb{C}_0$ ,  $z \rightarrow 0$  верны формулы

$$Q_0(p) = \sqrt{2}iz - \frac{iz^3}{2\sqrt{2}} + O(z^5), \quad l_0(p) = \pi - 2\sqrt{2}z + O(z^3). \quad (3.5)$$

Наконец, определим в  $\mathbb{C}_0$  аналитическую функцию  $L_0$  так, как это сделано в (A.5). Свойства этой функции обсуждаются в разделах A.2 и A.3 приложения A. Положим

$$K = \frac{(-1)^{n+1} e^{\frac{i}{\varepsilon}\tau - \frac{i\varepsilon}{4}(1-\tau) - \frac{i\xi}{2}}}{\sqrt{\pi}}, \quad \phi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 (L_0(p) - l_0(p)) dp, \quad (3.6)$$

а также, при  $p \in \mathbb{C}_0$ ,

$$A(p, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \left( \int_0^{p-\varepsilon/2} (L_0(s) - l_0(s)) ds + \int_{p-\varepsilon/2}^p (l_0(p) - l_0(s)) ds \right)}, \quad (3.7)$$

$$S(p, \tau, \xi) = S_0(p, \tau) + \xi Q_0(p),$$

$$S_0(p, \tau) = p^2(1-\tau) - 2\pi np + \int_0^p l_0(s) ds. \quad (3.8)$$

### 3.2 Удобное представление для $\Psi_n$ вне потенциальной ямы

При доказательстве результатов, изложенных в разделах 2.1.2 и 2.1.3, нам будет удобно использовать следующее представление для решения  $\Psi_n$  вне потенциальной ямы.

**Предложение 3.1.** *При  $x \geq 1 - \tau$*

$$\Psi_n(x, \tau) = e^{i\phi(\varepsilon)} (\mathcal{T}(x, \tau) + \mathcal{E}(x, \tau)), \quad \mathcal{T}(x, \tau) = \frac{K}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\gamma} p e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p, \tau, \xi)} dp, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{E}(x, \tau) = \frac{K}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\gamma} p (e^{-i\phi(\varepsilon)} A(p, \varepsilon) - 1) e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p, \tau, \xi)} dp, \quad (3.10)$$

где контур интегрирования  $\gamma$  представляет собой прямую  $e^{i\theta}\mathbb{R}$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ , пробегаемую в направлении роста  $\operatorname{Re} p$ .

Прежде чем доказать это предложение, докажем следующие леммы:

**Лемма 3.2.** *Пусть  $\varepsilon$  достаточно мало. Тогда*

$$\phi(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/2}), \quad (3.11)$$

а в области  $\mathbb{C}_0$  и вплоть до её границы справедлива равномерная формула

$$A(p, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon^{1/2}).$$

*Доказательство.* Оценка для  $\phi(\varepsilon)$  непосредственно следует из леммы А.4. Оценка для  $A(p, \varepsilon)$  вытекает из той же леммы и из гёльдеровости функции  $l_0$  с показателем  $1/2$ , дающих вместе оценку

$$\int_0^{p-\varepsilon/2} (L_0(s) - l_0(s)) ds + \int_{p-\varepsilon/2}^p (l_0(p) - l_0(s)) ds = O(\varepsilon^{3/2}), \quad (3.12)$$

равномерную в области  $\mathbb{C}_0$  и вплоть до её границы.  $\square$

**Лемма 3.3.** Представим  $p \in \mathbb{C}_0$  в виде  $p = 1 + e^{i\varphi}s$ , где  $s > 0$  и  $0 < \pm\varphi < \pi$ . При  $s \rightarrow \infty$

$$\operatorname{Im} S = (1 - \tau)s^2 \sin(2\varphi) \pm 2s(\ln(2s) - 1) \cos \varphi + 2s(\tau_n - \tau \pm (\xi/2 - \varphi)) \sin \varphi + O(\ln s), \quad (3.13)$$

где оценка равномерна по  $\varphi$ .

*Доказательство.* Утверждение леммы нетрудно получить из определения (3.8) функции  $S$ , используя свойства (3.2), (3.3) и (3.4) функций  $Q_0$  и  $l_0$ .  $\square$

Теперь мы докажем предложение 3.1.

*Доказательство предложения 3.1.* Рассмотрим при  $x \geq 1 - \tau$  интегральное представление для решения  $\Psi_n$ , выписанное в (2.6). В этой формуле можно взять в качестве контура интегрирования контур  $\gamma_{\mathbb{R}}$ , см. (2.7), заменив при этом в подынтегральном выражении функции  $R$  и  $Q^3$  на их аналитические продолжения  $R_0$  и  $Q_0$ , определённые в области  $\mathbb{C}_0$  и вплоть до её границы (о функции  $R_0$  см. раздел А.2 приложения А). С учётом определения  $R_0$  через функцию  $L_0$ , см. (А.5), требуемые формулы с контуром интегрирования  $\gamma = \gamma_{\mathbb{R}}$  получаются с помощью простых арифметических преобразований. Возможность деформации контура интегрирования к  $\gamma = e^{i\theta}\mathbb{R}$  вытекает из лемм 3.2 и 3.3.  $\square$

Доказательство теоремы 1 состоит в асимптотическом исследовании функции  $\mathcal{T}(x, \tau)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и в оценке функции  $\mathcal{E}(x, \tau)$ .

### 3.3 Точки перевала и линии наискорейшего спуска функции $S$

#### 3.3.1 Точка перевала в $\mathbb{C}_0$

Напомним, что через  $\mathcal{Q}_1$  мы обозначаем первый квадрант комплексной плоскости, см. (2.8). Точку перевала функции  $p \mapsto S(p, \tau, \xi)$  в области  $\mathbb{C}_0$  описывает

<sup>3</sup>Функция  $Q$  входит в определения функций  $p_1$  и  $T$ , см. (2.5).

**Предложение 3.4.** При  $\xi > 0$ , а также при  $\xi = 0$  и  $\tau < \tau_n$ , в  $\mathbb{C}_0$  имеется ровно одна с учётом кратности точка перевала  $p_n(\tau, \xi)$  функции  $p \mapsto S(p, \tau, \xi)$ . Она описывается уравнением (2.9) и аналитически зависит от  $\tau$  и  $\xi$ . При  $\xi > 0$  она расположена в квадранте  $\mathcal{Q}_1$ , а при  $\xi = 0$  и  $\tau < \tau_n$  — в интервале  $(0, 1)$ . Её предельные значения при  $\xi \rightarrow 0$  удовлетворяют соотношениям из (2.11).

*Доказательство.* Точки перевала функции  $S$  — это нули её производной по  $p$ . Ввиду (3.8) и (3.1) мы имеем

$$S_p(p, \tau, \xi) = 2 \left( (1 - \tau)p + \arcsin p + \frac{p\xi}{2Q_0(p)} - \pi n \right), \quad (3.14)$$

откуда вытекает, что точки перевала функции  $S$  в области  $\mathbb{C}_0$  описываются уравнением (2.9).

Пусть  $\xi > 0$ . Докажем, что в  $\mathbb{C}_0$  имеется лишь одна точка перевала, и проверим её свойства. Для этого удобно изучить конформные свойства отображения  $S_p : p \mapsto S_p(p, \tau, \xi)$ . Дальнейшее доказательство мы будем проводить для случая  $\tau < 1$ . При  $\tau = 1$  доказательство проводится аналогично, но конформные свойства отображения  $S_p$  несколько отличаются от описанных ниже, поскольку первое слагаемое в скобках в (3.14) обращается в нуль. Фиксируем достаточно малое  $r > 0$  и достаточно большое  $R > 0$ . Пусть  $D(r, R) = \{p \in \mathcal{Q}_1 \mid |p| < R, |p - 1| > r\}$ . На рис. 3.1 мы изобразили слева область  $D(r, R)$ , а справа — её образ под действием отображения  $S_p$ . На этом

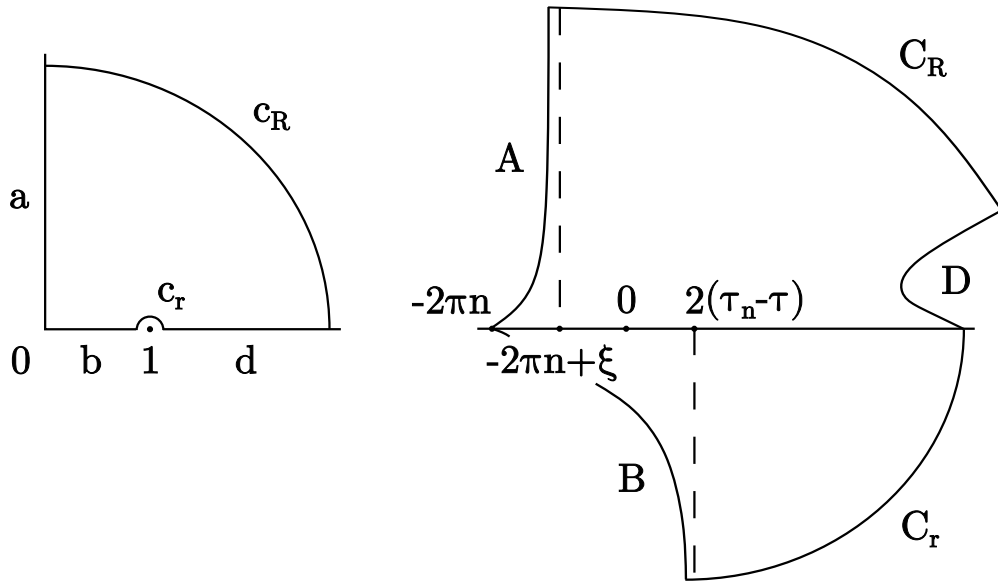


Рис. 3.1: Область  $D(r, R)$  и её образ.

рисунке мы обозначили через  $a, b, c_r, d$  и  $c_R$  участки границы области  $D(r, R)$ . Отрезок  $a$  — это отрезок  $i[0, R]$ ,  $b$  — отрезок  $[0, 1 - r]$ ,  $c_r$  — верхняя половина окружности радиуса  $r$  с центром в единице,  $d$  — отрезок  $[1 + r, R]$ , а  $c_R$  — дуга окружности радиуса  $R$  с центром в нуле, находящаяся в первом квадранте. Через  $A, B, C_r, D$  и  $C_R$  мы обозначили, соответственно, образы кривых  $a, b, c_r, d$  и  $c_R$  под действием отображения  $S_p$ .

Напрямую из (3.14) и из определения линий  $c_r$  и  $c_R$  вытекает

**Лемма 3.5.** *Имеют место следующие утверждения:*

1. Пусть  $p$  пробегает  $i[0, +\infty)$  в направлении роста  $\text{Im } p$ . Тогда  $\text{Re } S_p$  монотонно возрастает от  $-2\pi n$  до  $-2\pi n + \xi$ , а  $\text{Im } S_p$  — от  $0$  до  $+\infty$ .
2. Пусть  $p$  пробегает  $[0, 1)$  в направлении роста  $\text{Re } p$ . Тогда  $\text{Re } S_p$  монотонно возрастает от  $-2\pi n$  до  $2(\tau_n - \tau)$ , а  $\text{Im } S_p$  монотонно убывает от  $0$  до  $-\infty$ .
3. Пусть  $p$  пробегает  $c_r$  в направлении убывания  $\arg(p - 1)$ . Тогда при  $r \rightarrow 0$  выполнено  $S_p = \xi/\sqrt{2(p-1)} + 2(\tau_n - \tau) + o(1)$ , где  $\sqrt{2(p-1)} > 0$  при  $p > 1$ . При этом  $\arg S_p$  монотонно возрастает.
4. Пусть  $p$  пробегает  $(1, +\infty)$  в направлении роста  $\text{Re } p$ . Тогда  $\text{Im } S_p$  монотонно возрастает от  $0$  до  $+\infty$ , а  $\text{Re } S_p$  имеет один экстремум — минимум, причём всегда  $\text{Re } S_p > 2(\tau_n - \tau)$ .
5. Пусть  $p$  пробегает  $c_R$  в направлении роста  $\arg p$ . Тогда при  $R \rightarrow +\infty$  выполнено  $S_p = 2p(1 - \tau) + O(\ln R)$ , причём  $\arg S_p$  монотонно возрастает.

В силу леммы 3.5 образ области  $D(r, R)$  соответствует рисунку 3.1. Из этого рисунка и вытекающих из леммы 3.5 свойств границы образа  $D(r, R)$  можно видеть, что при достаточно малом  $r$  и достаточно большом  $R$  в области  $D(r, R)$  расположен нуль функции  $S_p$ . Из принципа аргумента, применённого к границе области  $D(r, R)$ , следует, что нуль  $S_p$  в  $D(r, R)$  ровно один с учётом кратности — его мы и обозначаем через  $p_n$ . Очевидно, что  $p_n$  — единственный нуль в квадранте  $\mathcal{Q}_1$ . Из простоты нуля  $p_n$  мы заключаем с помощью аналитического варианта теоремы о неявной функции, что  $p_n$  аналитически зависит от  $\xi > 0$  и  $\tau < 1$ . С помощью принципа аргумента можно также показать, что в остальных квадрантах области  $\mathbb{C}_0$  нет нулей  $S_p$ . Мы не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим предельные значения  $p_n$  при  $\xi \rightarrow 0$ . Пусть  $\tau > \tau_n$ . Фиксируем достаточно большое  $R$ . Если при фиксированном достаточно малом  $r_0$  рассмотреть достаточно малое  $\xi > 0$ , то точка  $0$  не попадёт в образ области  $D(r_0, R)$  — это следует из свойств границы образа  $D(r_0, R)$ , см., в частности, формулу для  $S_p$  в пункте 3 леммы 3.5, из которой вытекает, что  $C_{r_0}$  при достаточно малом  $\xi > 0$  лежит в малой окрестности точки  $2(\tau_n - \tau) < 0$ . Если при том же значении  $\xi > 0$  взять теперь достаточно малое  $r$ , то  $0$  вновь будет попадать в образ  $D(r, R)$ . Это значит, что при достаточно малых значениях  $\xi > 0$  выполнено  $|p_n - 1| \leq r_0$ , т. е.  $p_n \rightarrow 1$  при  $\tau > \tau_n$ ,  $\xi \rightarrow 0$ . Тот факт, что  $p_n \rightarrow 1$  также и при  $\tau = \tau_n$ ,  $\xi \rightarrow 0$ , проще всего доказать, переходя к локальной переменной  $z = \sqrt{1 - p}$ . Мы легко сделаем это чуть позже, см. замечание 3.11 в разделе 3.3.2.

Теперь пусть  $\tau < \tau_n$  и  $\xi = 0$ . Рассматривая формулу (3.14), нетрудно установить, что на отрезке  $[-1, 1]$  имеется ровно один с учётом кратности нуль  $p_n(\tau, 0) \in (0, 1)$  функции  $S_p$ , ведь  $S_{pp}(p, \tau, 0) = 2(1 - \tau) + 2/\sqrt{1 - p^2} > 0$  на  $[-1, 1]$ ,  $S_p(0, \tau, 0) = -2\pi n$  и  $S_p(1, \tau, 0) = 2(\tau_n - \tau)$ . При  $\pm \text{Im } p > 0$  мы имеем  $\pm \text{Im } S_p > 0$ , поэтому указанный нуль является единственным в  $\mathbb{C}_0$ . Из аналитического варианта теоремы о неявной функции следует аналитичность этого нуля по  $\tau$  и  $\xi$ . Конечно, указанный нуль  $p_n(\tau, 0)$  является при  $\tau < \tau_n$  и  $\xi \rightarrow 0$  предельным значением  $p_n(\tau, \xi)$  в силу единственности нуля в  $\mathbb{C}_0$  при  $\xi > 0$ .  $\square$

### 3.3.2 Точки перевала вблизи $p = 1$

Фиксируем достаточно малое  $b > 0$ . В  $b^2$ -окрестности точки  $p = 1$  введём локальную переменную  $z(p) = \sqrt{1-p}$ , фиксируя ветвь корня условием  $z > 0$  при  $p < 1$ . Функции  $l_0$  и  $Q_0$  аналитичны по  $z$  в достаточно малой окрестности нуля. Справедлива

**Лемма 3.6.** *Для  $z$  в  $b$ -окрестности нуля выполнено*

$$S(p(z), \tau, \xi) = S(1, \tau, 0) + \sqrt{2}i\xi z + 2(\tau - \tau_n)z^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{3i\xi}{16}\right)z^3 + (1 - \tau)z^4 + O(z^5), \quad (3.15)$$

где  $p(z) = 1 - z^2$ , а  $O(z^5)$  — аналитическая функция  $z$  и  $\xi$ . При этом  $S$  принимает при  $\xi = 0$  и  $z \in \mathbb{R}$  вещественные значения.

*Доказательство.* Для доказательства формулы (3.15) нужно подставить в (3.8) несколько первых членов тейлоровских разложений  $Q_0$  и  $l_0$  по степеням  $z$ , см. (3.5). Мы опустим элементарные вычисления. Вещественность  $S$  при  $z \in \mathbb{R}$  очевидна из (3.8).  $\square$

**Замечание 3.7.** Нетрудно убедиться, что

$$S(1, \tau, 0) = 2\tau_n - 3 - \tau. \quad (3.16)$$

Здесь и далее мы будем обозначать первую и вторую производные функции  $z \mapsto S(p(z), \tau, \xi)$  по переменной  $z$  через  $S_z$  и  $S_{zz}$  соответственно. Верна

**Лемма 3.8.** *Существуют такие положительные числа  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , что при  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$  функция  $S_z$  имеет ровно два нуля  $z_1$  и  $z_2$  с учётом кратности в  $b$ -окрестности точки  $z = 0$ . Для этих нулей справедливы представления*

$$z_{1,2}(\tau, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( (\tau_n - \tau) \pm \sqrt{(\tau_n - \tau)^2 - 2i\xi} \right) + O\left(\sqrt{(\tau_n - \tau)^4 + 4\xi^2}\right), \quad (3.17)$$

где  $z_1$  соответствует знак «плюс», а  $z_2$  — знак «минус», и используется ветвь квадратного корня, переводящая  $\mathbb{C}_-$  в  $-i\mathbb{Q}_1$ . Если  $(\tau, \xi) \neq (\tau_n, 0)$ , то нули  $z_1$  и  $z_2$  являются простыми и аналитически зависят от  $(\tau, \xi)$ . В точке  $(\tau, \xi) = (\tau_n, 0)$  они совпадают и непрерывны по  $(\tau, \xi)$ .

*Доказательство.* Из (3.15) вытекает, что

$$S_z(z, \tau, \xi) = \sqrt{2}i\xi + 4(\tau - \tau_n)z + 4\sqrt{2} \left(1 - \frac{3i\xi}{16}\right)z^2 + 4(1 - \tau)z^3 + O(z^4), \quad (3.18)$$

где  $O(z^4)$  — аналитическая функция  $z$  и  $\xi$ . Мы считаем  $b$  достаточно малым. В этом случае с помощью теоремы Руше нетрудно установить, что при достаточно малых  $|\tau - \tau_n|$  и  $\xi$  функция  $S_z$  имеет в  $b$ -окрестности точки  $z = 0$  столько же нулей, сколько и функция  $z \mapsto 4\sqrt{2}z^2$ , т. е. ровно два нуля с учётом кратности.

Старшие члены в (3.17) — это нули  $z_1^h$  и  $z_2^h$  полинома

$$h(z) = \sqrt{2}i\xi + 4(\tau - \tau_n)z + 4\sqrt{2}z^2 = 4\sqrt{2}(z - z_1^h)(z - z_2^h).$$

Применяя теорему Руше в  $r$ -окрестности точки  $z = z_1^h$  при  $r = C\sqrt{(\tau_n - \tau)^4 + 4\xi^2}$  с подходящим  $C > 0$ , нетрудно показать, что функции  $S_z$  и  $h$  имеют в этой окрестности одинаковое количество нулей при достаточно малых  $|\tau - \tau_n|$  и  $\xi$ , если эти величины не равны одновременно нулю. Отсюда следует формула (3.17) для  $z_1$  при  $(\tau, \xi) \neq (\tau_n, 0)$ . То, что  $z_1(\tau_n, 0) = 0$ , видно непосредственно из (3.18). Формула для  $z_2$  получается аналогично.

Из (3.17) вытекает простота нулей  $z_1$  и  $z_2$  при  $(\tau, \xi) \neq (\tau_n, 0)$ , а также их совпадение и непрерывность по  $(\tau, \xi)$  в точке  $(\tau, \xi) = (\tau_n, 0)$ . Аналитичность нулей по  $(\tau, \xi)$  при  $(\tau, \xi) \neq (\tau_n, 0)$  следует из аналитического варианта теоремы о неявной функции, поскольку тогда  $S_{zz} \neq 0$  в силу простоты нулей  $S_z$ .  $\square$

**Замечание 3.9.** Из формулы (3.17) вытекает, что при  $\xi > 0$  точка  $z_1$  расположена в квадранте  $-i\mathcal{Q}_1$ , а точка  $z_2$  — в квадранте  $i\mathcal{Q}_1$ . Теперь пусть  $\xi = 0$ . В этом случае из леммы 3.8, формулы (3.18) и вещественности  $S_z$  при  $z \in \mathbb{R}$  (см. лемму 3.6) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} z_1(\tau, 0) > 0 & \text{ при } \tau < \tau_n, & z_1(\tau, 0) = 0 & \text{ при } \tau \geq \tau_n, \\ z_2(\tau, 0) = 0 & \text{ при } \tau \leq \tau_n, & z_2(\tau, 0) < 0 & \text{ при } \tau > \tau_n. \end{aligned}$$

Пусть  $\delta_1, \delta_2 > 0$  — числа из леммы 3.8. Легко устанавливается

**Лемма 3.10.** При  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$  имеет место соотношение

$$p_n(\tau, \xi) = 1 - z_1^2(\tau, \xi). \quad (3.19)$$

*Доказательство.* Локальная замена  $p \mapsto z(p)$  отображает  $b^2$ -окрестность точки  $p = 1$ , разрезанную вдоль  $[1, +\infty)$ , в правую полуплоскость комплексной плоскости, в которой лежит точка  $z_1$ , см. замечание 3.9. Мы имеем

$$S_z(z, \tau, \xi) = -2z S_p(p(z), \tau, \xi), \quad (3.20)$$

поэтому при  $\xi > 0$  (а также при  $\xi = 0$  и  $\tau < \tau_n$ ) точка  $p(z_1) = 1 - z_1^2$  является нулём функции  $S_p$ , лежащим в  $\mathbb{C}_0$ , и совпадает с  $p_n$  в силу единственности этого нуля. При  $\xi = 0$  и  $\tau \geq \tau_n$  требуемое очевидно.  $\square$

**Замечание 3.11.** При доказательстве предложения 3.4 мы не обосновали, почему  $p_n(\tau_n, \xi) \rightarrow 1$  при  $\xi \rightarrow 0$ . Этот факт мгновенно следует из формулы (3.19), взятой с  $\tau = \tau_n$  и  $\xi > 0$ , и из свойств  $z_1$ .

Множество  $\mathbb{C}_0$  — это лист римановой поверхности  $\Gamma$  функции  $p \mapsto S(p, \tau, \xi)$ . Мы будем называть его первым листом  $\Gamma$ . Нам потребуется в дальнейшем информация о точке перевала, расположенной на листе римановой поверхности  $\Gamma$ , на который можно спуститься из  $\mathbb{C}_0$  через верхний берег разреза  $[1, +\infty)$ . Этот лист — еще один экземпляр  $\mathbb{C}_0$ , и мы будем называть его вторым листом  $\Gamma$ .

Мы положим при  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$

$$q_n(\tau, \xi) = 1 - z_2^2(\tau, \xi). \quad (3.21)$$

Справедлива

**Лемма 3.12.** Пусть  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ . При  $\xi > 0$ , а также при  $\xi = 0$  и  $\tau > \tau_n$ , точка  $q_n$  является точкой перевала функции  $p \mapsto S(p, \tau, \xi)$ , лежащей на втором листе римановой поверхности  $\Gamma$ , причём в  $b^2$ -окрестности единицы, разрезанной вдоль  $[1, +\infty)$ , она является единственной с учётом кратности. Точка  $q_n$  описывается уравнением (2.10). При  $\xi > 0$  она расположена в квадранте  $\mathcal{Q}_1$ , а при  $\xi = 0$  и  $\tau > \tau_n$  — в интервале  $(0, 1)$ , и в обоих этих случаях аналитически зависит от  $\tau$  и  $\xi$ . Её предельные значения при  $\xi \rightarrow 0$  удовлетворяют соотношениям из (2.11).

*Доказательство.* Утверждение леммы вытекает из соотношения (3.20) и из свойств  $z_2$ . Мы отметим только, что лежащие на втором листе римановой поверхности  $\Gamma$  точки перевала — это нули функции

$$S_p(p, \tau, \xi) = 2 \left( (1 - \tau)p + \pi - \arcsin p - \frac{p\xi}{2Q_0(p)} - \pi n \right), \quad (3.22)$$

откуда получается уравнение (2.10), и опустим дальнейшие детали.  $\square$

### 3.3.3 Линии наискорейшего спуска

Согласно предложению 3.4, при  $\xi > 0$  единственная в  $\mathbb{C}_0$  с учётом кратности точка перевала  $p_n$  лежит в  $\mathcal{Q}_1$ . Поскольку она единственна с учётом кратности, то  $S_{pp}|_{p=p_n} \neq 0$ , и, следовательно, из этой точки выходят две линии наискорейшего спуска, вдоль которых  $\operatorname{Re} S$  постоянна, а  $\operatorname{Im} S$  возрастает. Для того, чтобы ввести для этих линий удобные обозначения, воспользуемся следующим наблюдением: согласно предложению 3.4, при  $\tau < \tau_n$  и  $\xi = 0$  мы имеем  $p_n \in (0, 1)$ . Очевидно, что в этом случае  $S_{pp} > 0$  в точке  $p_n$ , поэтому из неё выходят две линии наискорейшего спуска под углами  $\pi/4$  и  $-3\pi/4$  к лучу  $\mathbb{R}_+$ . Мы будем обозначать их через  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  соответственно. Можно показать, что линии наискорейшего спуска непрерывно зависят от параметров  $\tau$  и  $\xi$ , пока не проходят через особые точки  $S$  или другие точки перевала<sup>4</sup>. Этот факт позволяет распространить обозначения  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  сначала на случай, когда  $\xi > 0$ , а затем и на случай, когда  $\tau \geq \tau_n$  и  $\xi = 0$ .

В работе [2] была доказана

**Лемма 3.13** ([2], Лемма 7). Пусть  $\tau < \tau_n$  и  $\xi = 0$ . Тогда  $\gamma_0, \gamma_2 \subset \mathbb{C}_0$ , причём линия  $\gamma_0$  уходит на бесконечность в  $\mathbb{C}_+$ , а линия  $\gamma_2$  — в  $\mathbb{C}_-$ . Вдоль этих линий при  $|p| \rightarrow \infty$  выполнено

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Re} p + O(\ln \operatorname{Re} p). \quad (3.23)$$

**Замечание 3.14.** Пусть  $\xi \geq 0$  и  $\tau < 1$ , и пусть линии  $\gamma_0$  и/или  $\gamma_2$  уходят на бесконечность в  $\mathbb{C}_0$ . Тогда при  $p \in (\gamma_0 \cup \gamma_2) \cap \mathbb{C}_0$  и  $|p| \rightarrow \infty$  по-прежнему справедлива формула (3.23). Этот результат вытекает из определения (3.8) функции  $S$ , из свойств (3.4), (3.2) и (3.3) функций  $l_0$  и  $Q_0$ , а также из того факта, что  $\operatorname{Re} S$  вдоль линий  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  постоянна, а  $\operatorname{Im} S$  монотонно возрастает.

Теперь мы докажем ещё несколько утверждений, описывающих поведение линий наискорейшего спуска.

<sup>4</sup>В этом случае имеется ветвь отображения  $p \mapsto w = \sqrt{S(p, \tau, \xi) - S(p_n, \tau, \xi)}$ , аналитическая в окрестности линий наискорейшего спуска и, в частности, точки  $p_n$ , и отображающая  $\gamma_0 \cup \gamma_2$  на прямую  $e^{i\pi/4}\mathbb{R}$ . При этом точка перевала отображается в точку нуль. Требуемый факт следует из аналитичности обратного отображения по  $(w, \tau, \xi)$ .

**Предложение 3.15.** Пусть  $\tau < \tau_n$  и  $\xi > 0$ . Тогда линия  $\gamma_0$  содержится в квадранте  $\mathcal{Q}_1$  и уходит в нём на бесконечность. Линия  $\gamma_2$  лежит в  $\mathbb{C}_0$ , покидает  $\mathcal{Q}_1$  через некоторую точку полуинтервала  $[0, 1)$  и уходит на бесконечность в  $\mathbb{C}_-$ .

*Доказательство.* Линии уровня функции, гармонической в некоторой области, не могут быть замкнутыми и могут заканчиваться только в точках границы этой области. Линии наискорейшего убывания  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  — это линии уровня функции  $p \mapsto \operatorname{Re} S(p, \tau, \xi)$ , поэтому они либо соединяют  $p_n$  с границей квадранта  $\mathcal{Q}_1$ , либо уходят на бесконечность внутри него.

Эти линии касательны к векторному полю<sup>5</sup>  $p \mapsto v(p) = iS_p(p, \tau, \xi)$ . Направление  $v(p)$  совпадает с направлением наискорейшего роста  $\operatorname{Im} S(\cdot, \tau, \xi)$  в точке  $p$ . Пусть  $r > 0$  достаточно малó и  $D(r) = \{p \in \mathcal{Q}_1 \mid |p - 1| > r\}$ . Из рассмотрения рис. 3.1 и из леммы 3.5 вытекает, что на границе области  $D(r)$  направления векторов  $v(p)$  соответствуют изображённым на рис. 3.2. На этом

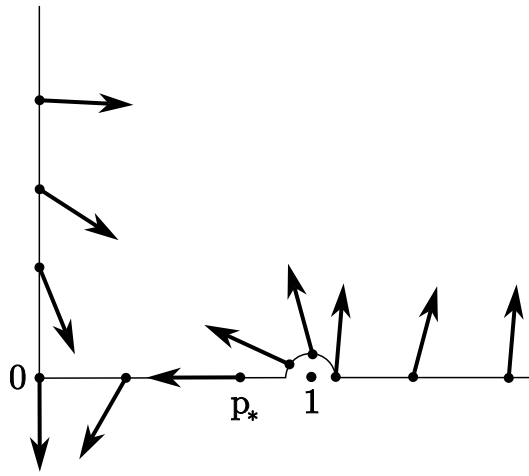


Рис. 3.2: Направления векторов  $v(p)$  на границе области  $D(r)$  в условиях предложения 3.15.

рисунке  $p_*$  — это точка интервала  $(0, 1)$ , в которой  $\operatorname{Re} S_p = 0$ . Вне отрезка  $[0, p_*] \subset \mathbb{R}$  векторы  $v(p)$  направлены внутрь  $D(r)$ . Вектор  $v(p_*)$  направлен от точки  $p_*$  к нулю, а в точках полуинтервала  $[0, p_*)$  векторы  $v(p)$  направлены наружу из  $D(r)$ . Из этих наблюдений следует, что для каждой из линий  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  может иметь место один из взаимоисключающих случаев:

1. Линия покидает область  $D(r)$  через точку отрезка  $[0, p_*]$  и попадает в  $\mathbb{C}_-$ .
2. Линия остаётся в  $D(r) \cup \{p_*\}$ , возможно, касаясь вещественной оси в точке  $p_*$ , и уходит на бесконечность в квадранте  $\mathcal{Q}_1$ .

Покажем, что для линии  $\gamma_2$  реализуется случай 1, а для линии  $\gamma_0$  — случай 2, причём касание вещественной оси в точке  $p_*$  невозможно. Для этого нам понадобится вытекающая непосредственно из (3.14)

**Лемма 3.16.** При  $\tau < \tau_n$  и  $\xi \geq 0$  в  $\mathbb{C}_0$  выполнено следующее:

1. Вдоль  $((-\infty, -1] - i0) \cup (-1, p_*]$  с ростом  $\operatorname{Re} p$  монотонно убывает  $\operatorname{Re} S$ .
2. Вдоль  $[0, 1) \cup ([1, +\infty) - i0)$  с ростом  $\operatorname{Re} p$  не возрастает  $\operatorname{Im} S$ .

<sup>5</sup>Мы отождествляем точки комплексной плоскости с их радиус-векторами стандартным образом.

Заметим, что в силу этой леммы линия наискорейшего спуска, попав в  $\mathbb{C}_-$  через некоторую точку отрезка  $[0, p_*]$ , не может соединить эту точку ни с какой точкой  $\mathbb{R} - i0$ , поскольку вдоль линии наискорейшего спуска  $\operatorname{Re} S$  не изменяется, а  $\operatorname{Im} S$  монотонно возрастает. Таким образом, попав в  $\mathbb{C}_-$ , линия наискорейшего спуска должна уходить в этой полуплоскости на бесконечность.

Как упоминалось выше, линии наискорейшего спуска непрерывно зависят от параметров  $\tau$  и  $\xi$  до тех пор, пока не пересекают других точек перевала или особенностей функции  $S$ . В связи с этим, если для линии  $\gamma_2$  имеет место один из двух описанных выше вариантов поведения, то он будет иметь место и при достаточно малом изменении значения параметра  $\xi$ . В случае 1 или при отсутствии касания в случае 2 это очевидно<sup>6</sup>. Для случая 2 с касанием покажем это, рассуждая от противного. Если при некотором  $\xi = \xi_0$  для линии  $\gamma_2$  имеет место случай 2 с касанием, а при небольшом изменении параметра  $\xi$  выполняется случай 1, то при некотором  $\xi$ , близком к  $\xi_0$ , линия  $\gamma_2$  попадает в  $\mathbb{C}_-$  через некоторую точку интервала  $(0, 1)$ , а затем возвращается обратно в  $D(r)$  через некоторую другую точку этого интервала, что невозможно в силу леммы 3.16.

Из проделанных рассуждений вытекает<sup>7</sup>, что для линии  $\gamma_2$  должен выполняться случай 1, поскольку этот случай имеет место при  $\tau < \tau_n$  и  $\xi = 0$ , как указано в лемме 3.13. Как следствие, для линии  $\gamma_0$  должен выполняться случай 2, причём без касания. Действительно, в силу первого пункта леммы 3.16 линия  $\gamma_0$  не может соединять одновременно с линией  $\gamma_2$  точку  $p_n$  с отрезком  $[0, p_*]$ , поскольку  $\operatorname{Re} S$  принимает постоянное значение на  $\gamma_0 \cup \gamma_2$ .  $\square$

**Предложение 3.17.** Пусть  $\tau_n \leq \tau \leq 1$  и  $\xi > 0$ . В этом случае поведение линии  $\gamma_2$  такое же, как в предложении 3.15. Для линии  $\gamma_0$  реализуется один из следующих сценариев:

- (1)  $\gamma_0$  содержится в замыкании  $\mathcal{Q}_1$  и уходит на бесконечность внутри  $\mathcal{Q}_1$ .
- (2)  $\gamma_0$  покидает  $\mathcal{Q}_1$  через некоторую точку  $p' > 1$  и попадает на второй лист римановой поверхности  $\Gamma$ .

При  $\tau = \tau_n$  всегда реализуется сценарий (1).

Сценарии из предложения 3.17 схематически изображены на рис. 3.3.

*Доказательство предложения 3.17.* Фиксируем  $\tau_n \leq \tau < 1$ . Пусть  $\xi > 0$  достаточно велико. Тогда при достаточно малом  $r > 0$  направления векторов  $v(p)$  на границе области  $D(r)$ , введённой при доказательстве предложения 3.15, описываются рисунком 3.2 с тем лишь изменением, что теперь векторы  $v(p)$  направлены наружу из  $D(r)$  на всём отрезке  $[0, 1 - r]$ . Это вытекает из леммы 3.5 и рис. 3.1, а также из того факта, что  $\operatorname{Re} S_p > 0$  на  $(1, +\infty)$  при достаточно больших  $\xi$ , см. формулу (3.14). Если теперь уменьшать  $\tau$  при фиксированном  $\xi$ , то, как следует из той же формулы,

<sup>6</sup>Пусть  $R > 0$  достаточно велико. Если линия наискорейшего спуска уходит в квадранте  $\mathcal{Q}_1$  на бесконечность, то она попадает в область  $U(R) = \{p \in \mathcal{Q}_1 \mid |p| > R\}$ . Как нетрудно видеть, векторы  $v(p)$  на границе  $U(R)$  направлены внутрь  $U(R)$ , поэтому, попав в эту область, линия наискорейшего спуска должна уходить в ней на бесконечность. Если линия наискорейшего спуска имеет точку в области  $U(R)$ , то и при небольшом изменении параметра  $\xi$  она будет по-прежнему иметь в ней точку, а значит, будет по-прежнему уходить на бесконечность в  $\mathcal{Q}_1$ . Мы и далее будем контролировать поведение линий наискорейшего спуска в окрестности бесконечности с помощью аналогичных соображений, не описывая этого подробно.

<sup>7</sup>Очевидно, при любом  $\xi_0 > 0$  для отрезка  $[0, \xi_0]$  найдётся конечное покрытие интервалами  $\{V_k\}_{k=1}^N$ , такими что при  $\xi \in V_k$  поведение линии  $\gamma_2$  сохраняется. Поэтому поведение  $\gamma_2$  должно быть одинаковым при всех  $\xi \in [0, \xi_0]$ .

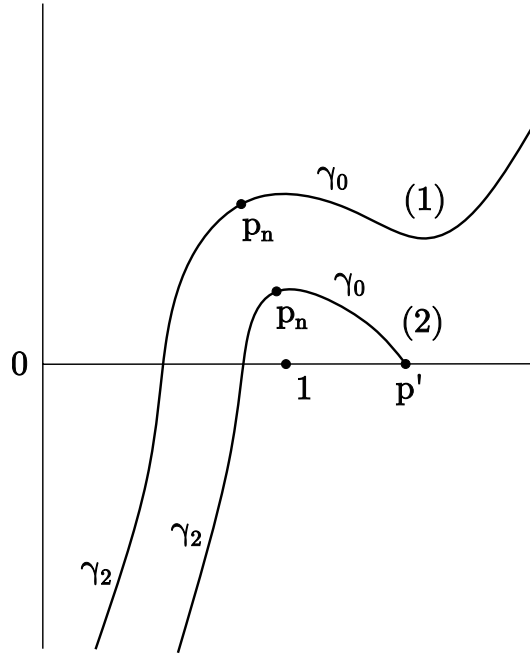


Рис. 3.3: Поведение линий наискорейшего спуска в условиях предложения 3.17. Линии (1) и (2) соответствуют сценариям (1) и (2) из этого предложения.

указанное поведение векторов  $v(p)$  на границе  $D(r)$  будет сохраняться вплоть до некоторого  $\tau = \tau' < \tau_n$ . Помимо этого, справедлива аналогичная лемме 3.16

**Лемма 3.18.** При  $\tau_n \leq \tau \leq 1$  и  $\xi \geq 0$  в  $\mathbb{C}_0$  выполнено следующее:

1. Вдоль  $((-\infty, -1] - i0) \cup (-1, 1)$  с ростом  $\operatorname{Re} p$  монотонно убывает  $\operatorname{Re} S$ .
2. Вдоль  $[0, 1) \cup ([1, +\infty) - i0)$  с ростом  $\operatorname{Re} p$  не возрастает  $\operatorname{Im} S$ .

Как следствие этой леммы, линия наискорейшего спуска и теперь, попав в  $\mathbb{C}_-$  через некоторую точку полуинтервала  $[0, 1)$ , должна оставаться в  $\mathbb{C}_-$  и уходить там на бесконечность. Используя непрерывную зависимость линий  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  от  $\tau$  и рассуждая, как при доказательстве предложения 3.15, мы заключаем, что линии  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  при достаточно больших  $\xi$  ведут себя точно так же, как в предложении 3.15. Отметим, что при  $\tau = \tau_n$ , как следует из пункта 4 леммы 3.5, описанный случай имеет место для всех  $\xi > 0$ , поскольку в этом случае всегда  $\operatorname{Re} S_p > 0$  на  $(1, +\infty)$ .

Теперь мы будем при фиксированном  $\tau_n \leq \tau < 1$  и фиксированном достаточно малом  $r > 0$  уменьшать  $\xi$  до некоторого малого положительного значения. В силу леммы 3.5 и формулы (3.14), при достаточно малых значениях  $\xi > 0$  векторы  $v(p)$  на границе области  $D(r)$  будут направлены так, как показано на рис. 3.4. При этом для некоторого «критического» значения  $\xi = \xi_*$  будет иметь место случай, изображённый на рис. 3.4 слева, при  $\xi > \xi_*$  — случай, описанный выше для достаточно больших  $\xi$ , а при  $\xi < \xi_*$  — случай, изображённый на рис. 3.4 справа. На рисунке 3.4 векторы  $v(p)$  направлены наружу из  $D(r)$  в точках отрезка  $[0, 1 - r]$  и интервала  $(p_*, p_{**})$ , где  $1 < p_* \leq p_{**}$ . В точках  $p_*$  и  $p_{**}$  векторы  $v(p)$  направлены к  $+\infty$ . В остальных точках границы области  $D(r)$  векторы  $v(p)$  направлены внутрь этой области. Как следствие этих наблюдений, линии  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  могут покидать область  $D(r)$  только через точки отрезков  $[0, 1 - r]$  и  $[p_*, p_{**}]$ .

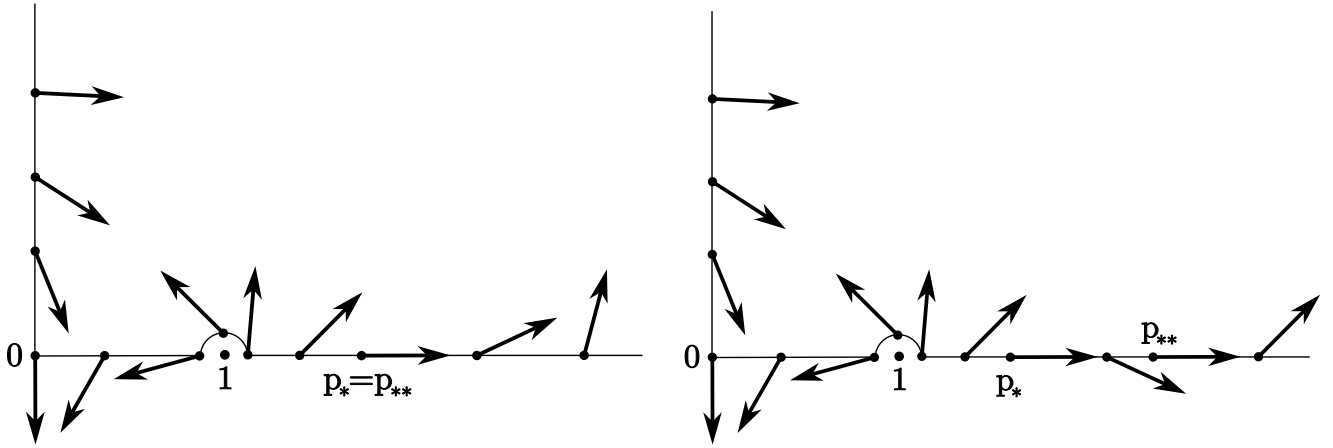


Рис. 3.4: Направления векторов  $v(p)$  на границе области  $D(r)$  в условиях предложения 3.17 при достаточно малых значениях  $\xi > 0$ .

Для линии  $\gamma_2$  возможны следующие варианты поведения, каждый из которых, как будет показано ниже, должен сохраняться при малом изменении параметра  $\xi$ :

1.  $\gamma_2$  покидает область  $D(r)$  через отрезок  $[0, 1 - r]$  и попадает в  $\mathbb{C}_-$ .
2. Этого не происходит.

Поскольку при достаточно больших  $\xi$  имеет место вариант 1, то он должен будет выполняться и теперь, т. е. линия  $\gamma_2$  ведёт себя, как и в предложении 3.15.

Покажем, что указанные варианты поведения действительно сохраняются при небольшом изменении  $\xi$ . Для первого варианта это очевидно. В рамках второго варианта для линии  $\gamma_2$  возможны следующие типы поведения:

- (a) Она может, оставаясь в  $D(r)$ , уходить там на бесконечность.
- (b) Она может покинуть  $D(r)$  через отрезок  $[p_*, p_{**}]$ , оказываясь в  $\mathbb{C}_-$  второго листа римановой поверхности  $\Gamma$ .
- (c) Она может касаться  $\mathbb{R}$  в одной из крайних точек отрезка  $[p_*, p_{**}]$ , а затем уходить в области  $D(r)$  на бесконечность.

Случай, когда  $\gamma_2$  касается  $\mathbb{R}$  в одной из крайних точек отрезка  $[p_*, p_{**}]$ , а затем возвращается в область  $D(r)$  и покидает её через отрезок  $[0, 1 - r]$ , невозможен. Покажем это от противного. В точках  $p_*$  и  $p_{**}$  вектор  $v(p)$  направлен вправо, а вдоль  $\gamma_2$  векторы  $v(p)$  направлены в сторону удаления от точки перевала  $p_n$ , поэтому в точке касания линия  $\gamma_2$  должна идти слева направо. Самопересечение линии  $\gamma_0 \cup \gamma_2$  невозможно, поэтому прийти после касания к отрезку  $[0, 1 - r]$  линия  $\gamma_2$  может, лишь обходя точку  $p_n$  сверху. Но тогда линия  $\gamma_0$  должна покинуть  $D(r)$  через отрезок  $[0, 1 - r]$  или через отрезок  $[p_*, p_{**}]$ , что невозможно, поскольку  $\operatorname{Re} S$  монотонно убывает вдоль этих отрезков, а на  $\gamma_0 \cup \gamma_2$  она должна быть постоянной.

Очевидно, что случаи (a) и (b)<sup>8</sup> сохраняются при небольшом изменении  $\xi$ . Случай (c) может сохраняться или переходить в (a) или в (b). Итак, вариант 2 поведения линии  $\gamma_2$  должен был

<sup>8</sup>В некоторой окрестности отрезка  $[p_*, p_{**}]$  на римановой поверхности функции  $S$  нет точек перевала, поскольку на нём  $S_p \neq 0$ . Таким образом,  $\gamma_2$  непрерывно зависит от  $\xi$  в этой окрестности.

бы сохраняться при малом изменении  $\xi$ , откуда, с учётом сказанного выше, вытекает требуемое утверждение о поведении  $\gamma_2$ .

Для линии  $\gamma_0$  могут выполняться варианты (а), (b) или (с), перечисленные выше. Итак, предложение 3.17 доказано при  $\tau_n \leq \tau < 1$ . Наконец, рассмотрим случай  $\tau = 1$ . Пусть  $r > 0$  достаточно мал. Из (3.14) вытекает, что векторы  $v(p)$  на границе области  $D(r)$  направлены наружу из  $D(r)$  либо только на отрезке  $[0, 1 - r]$  (это так при достаточно больших значениях  $\xi$ ), либо, вдобавок, ещё и на луче  $(p_*, +\infty)$ , где  $p_* > 1$ . Во втором случае вектор  $v(p_*)$  направлен к  $+\infty$ . Проводя рассуждения того же типа, что и выше, нетрудно показать, что предложение 3.17 верно и при  $\tau = 1$ . Мы опустим эти подробности.  $\square$

Выберем достаточно малые  $\delta_1, \delta_2 > 0$  и будем далее считать, что  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_n + \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ .

**Замечание 3.19.** При  $\xi > 0$  в  $\mathcal{Q}_1$  имеется одна точка перевала  $p_n$ , которая при  $\xi \rightarrow 0$  стремится к единице. При  $\xi = 0$  она сливается с точкой ветвления  $p = 1$  функции  $S$  и перестаёт быть точкой перевала. При этом на плоскости локальной переменной  $z = \sqrt{1 - p}$ , введённой в разделе 3.3.2, соответствующая точка  $z_1 = z(p_n)$  обращается в нуль и остаётся точкой перевала, см. леммы 3.8 и 3.10. При  $\xi > 0$  образы  $\gamma'_0$  и  $\gamma'_2$  линий наискорейшего спуска  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  при отображении  $p \mapsto z(p)$  являются линиями наискорейшего спуска на плоскости переменной  $z$ . Это позволяет и при  $\xi = 0$  обсуждать на плоскости переменной  $p$  линии  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  как образы линий  $\gamma'_0$  и  $\gamma'_2$  при обратном отображении  $z \mapsto p(z)$ .

Имеет место

**Лемма 3.20.** *Фиксируем достаточно малое  $r > 0$ . Найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_n + \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$  справедливы следующие утверждения:*

1. Пусть  $\xi > 0$ , и для линии  $\gamma_0$  реализуется случай 2 из предложения 3.17, т. е. линия  $\gamma_0$  уходит из  $\mathcal{Q}_1$  на второй лист  $\Gamma$  через некоторую точку  $p' > 1$ . Тогда участок линии  $\gamma_0$ , находящийся на втором листе  $\Gamma$ , целиком лежит в  $r$ -окрестности единицы и не проходит через другие точки перевала, и линия  $\gamma_0$  возвращается со второго листа  $\Gamma$  в квадрант  $\mathcal{Q}_1$  первого листа  $\Gamma$  через некоторую точку  $p''$ , где  $p' < p'' < 1 + r$ . После этого линия  $\gamma_0$  остаётся в  $\mathcal{Q}_1$  и уходит там на бесконечность.
2. Пусть  $\xi = 0$ . Тогда линия  $\gamma_2 \setminus \{1\}$  целиком лежит в  $\mathcal{C}_-$  и уходит там на бесконечность. При  $\tau = \tau_n$  линия  $\gamma_0 \setminus \{1\}$  содержится в  $\mathcal{Q}_1$  и уходит там на бесконечность. При  $\tau > \tau_n$  линия  $\gamma_0 \setminus \{1\}$  выходит из точки  $p_n = 1$  в четвёртый квадрант второго листа  $\Gamma$  (в этом случае можно считать  $p' = 1$ ). Поведение линии  $\gamma_0$  после прохождения ею точки  $p'$  имеет тот же характер, что и в пункте 1 леммы.

Поведение линий  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  в условиях леммы 3.20 схематически изображено на рис. 3.5.

*Доказательство леммы 3.20.* Перейдём в  $r$ -окрестности точки  $p = 1$  к переменной  $z = \sqrt{1 - p}$ , введённой в разделе 3.3.2. Линии  $\gamma'_0$  и  $\gamma'_2$ , определённые в замечании 3.19, при всех рассматриваемых значениях  $\tau$  и  $\xi$  непрерывно зависят от этих параметров в окрестности точки  $z = 0$ . Это так в том числе и при  $(\tau, \xi) = (\tau_n, 0)$ , когда с точкой перевала  $z_1$  сливается точка перевала  $z_2$  — в этом

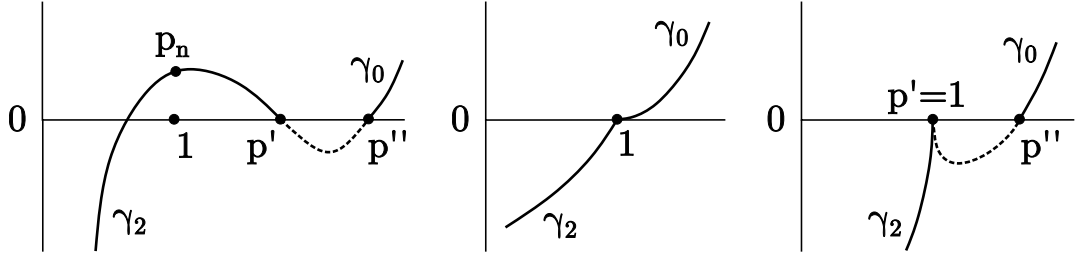


Рис. 3.5: Поведение линий наискорейшего спуска в условиях леммы 3.20. Рисунок слева соответствует пункту 1 леммы, рисунок посередине — пункту 2 в случае  $\tau = \tau_n$ , а рисунок справа — пункту 2 в случае  $\tau > \tau_n$ .

случае непрерывная зависимость линий наискорейшего спуска от параметров следует, например, из замены переменной Честера–Фридмана–Урселла  $z \mapsto u(z, \tau, \xi)$ , о которой пойдёт речь ниже, в разделе 3.4.2. Оказывается, что на плоскости переменной  $u$  соответствующие линии наискорейшего спуска зависят от параметров непрерывно, см. замечание 3.26 в разделе 3.4.3, а обратная замена  $u \mapsto z(u, \tau, \xi)$  непрерывна по  $(u, \tau, \xi)$ .

Пусть  $\xi = 0$ . Как вытекает из (3.15), при  $\tau = \tau_n$  на плоскости переменной  $z$  из точки  $z = 0$  выходят три линии наискорейшего спуска под углами  $\pi/6$ ,  $-\pi/2$  и  $5\pi/6$  к лучу  $\mathbb{R}_+$ , а при  $\tau > \tau_n$  — две линии под углами  $\pi/4$  и  $-3\pi/4$  к этому лучу. На плоскости переменной  $p$  в обоих этих случаях образ первой из перечисленных линий (и только он) выходит из точки  $p = 1$  в  $\mathbb{C}_-$ . С учётом леммы 3.13 и непрерывной зависимости этой линии от параметров  $\tau$  и  $\xi$  мы можем заключить, что эта линия —  $\gamma_2$ . Поведение  $\gamma_2$  в  $\mathbb{C}_-$  нетрудно установить с помощью леммы 3.18.

Поведение  $\gamma_0$  также легко устанавливается с помощью приведённых выше наблюдений о направлениях выхода линий наискорейшего спуска из точки  $z = 0$ , леммы 3.13 и непрерывности зависимости линий наискорейшего спуска от параметров — сперва при  $\xi = 0$  и  $\tau = \tau_n$ , затем при остальных рассматриваемых значениях  $\tau$  и  $\xi$ . То, что при этом  $\gamma_0$  не проходит через другие точки перевала, следует из единственности точки перевала  $q_n$  в  $r$ -окрестности единицы на втором листе  $\Gamma$ , из того, что эта точка лежит в замыкании  $\mathbb{C}_+$ , и из того, что на  $[0, 1) \cup ([1, +\infty) - i0)$  на втором листе  $\Gamma$  с ростом  $\operatorname{Re} p$  не убывает  $\operatorname{Im} S$ , см. (3.22). Мы опустим подробности.  $\square$

### 3.4 Асимптотика $\mathcal{T}(x, \tau)$ при $(\tau, \xi)$ , близких к $(\tau_n, 0)$

Ниже мы предполагаем, что  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ , где числа  $\delta_1, \delta_2 > 0$  достаточно малы. Для указанных значений  $\tau$  и  $\xi$  мы получим здесь равномерную асимптотическую формулу для функции  $\mathcal{T}(x, \tau)$ , определённой в (3.9). Более точно, мы докажем

**Предложение 3.21.** Пусть числа  $\delta_1, \delta_2 > 0$  достаточно малы, и пусть  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$e^{i\phi(\varepsilon)} \mathcal{T}(x, \tau) = C_n e^{\frac{i}{\varepsilon} \alpha_n - \frac{i\xi}{2}} \left( K_n^- \zeta_n \operatorname{Ai}(\zeta_n^4) - \frac{K_n^+}{\zeta_n} \operatorname{Ai}'(\zeta_n^4) \right) + O(\Delta_2), \quad (3.24)$$

$$\Delta_2 = \left( \frac{\varepsilon^{1/3} |Q_0(p_n)|}{1 + |\zeta_n|} + \frac{\varepsilon^{2/3}}{1 + |\zeta_n|^2} \right) e^{-\mu_n}, \quad (3.25)$$

где  $C_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $\zeta_n$ ,  $K_n^\pm$  и  $\mu_n$  определены так же, как и в теореме 1. Оценка поправки равномерна по  $\tau$  и  $\xi$ .

### 3.4.1 Переход к интегралу по конечному контуру

Опишем трансформацию контура интегрирования в формуле для  $\mathcal{T}(x, \tau)$  в (3.9), необходимую для дальнейшего анализа. Сперва мы деформируем контур интегрирования к контуру  $\gamma_{sd} = \gamma_2 \cup \gamma_0$ , составленному из линий наискорейшего спуска. Возможность такой деформации вытекает из поведения линий  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  при рассматриваемых значениях  $\tau$  и  $\xi$  — см. лемму 3.13, предложения 3.15 и 3.17 и лемму 3.20 — а также из леммы 3.3 и из формулы (3.23) с учётом замечания 3.14. Заметим, что в силу леммы 3.20 конечный участок линии  $\gamma_0$  может при  $\tau_n < \tau \leq \tau_n + \delta_1$  лежать на втором листе римановой поверхности  $\Gamma$  в малой окрестности единицы. Это не доставляет никаких неудобств при деформации контура интегрирования, поскольку подынтегральная функция аналитична на  $\Gamma$ .

Теперь мы фиксируем  $b > 0$  как в разделе 3.3.2 и положим  $V(b) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < b\}$ . Если  $\delta_1$  и  $\delta_2$  достаточно малы, то на плоскости локальной переменной  $z = \sqrt{1-p}$ , введённой в разделе 3.3.2, точка перевала  $z_1 = z(p_n)$  лежит в  $V(b)$ , см. леммы 3.8 и 3.10. Обозначим через  $\gamma(b)$  компоненту связности образа множества  $\gamma_{sd} \cap \{p \in \Gamma \mid |p-1| < b^2\}$  при отображении  $p \mapsto z(p)$ , содержащую точку перевала  $z_1$ . Стандартным для метода перевала образом проверяется

**Лемма 3.22.** *Существует такое  $C > 0$ , что при  $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\mathcal{T}(x, \tau) = \mathcal{T}^b(x, \tau) + O\left(e^{\frac{i}{\varepsilon} S|_{p=p_n}} e^{-C/\varepsilon}\right), \quad \mathcal{T}^b(x, \tau) = \frac{-2K}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\gamma(b)} p(z) e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p(z), \tau, \xi)} z dz, \quad (3.26)$$

где  $p(z) = 1 - z^2$ , а оценка равномерна по  $\tau$  и  $\xi$ .

*Доказательство.*  $\text{Im } S$  монотонно возрастает при удалении  $p$  от  $p_n$  вдоль  $\gamma_{sd}$ . Ввиду непрерывной зависимости контура  $\gamma_{sd}$ , функции  $S$  и точки  $p_n$  от  $\tau$  и  $\xi$  существует такое  $C > 0$ , что  $\text{Im } S - \text{Im } S|_{p=p_n} \geq C$  на концах контура  $p(\gamma(b))$  при всех рассматриваемых  $\tau$  и  $\xi$ . Поэтому

$$\left| \int_{\gamma \setminus p(\gamma(b))} p e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p, \tau, \xi)} dp \right| \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon} \text{Im } S|_{p=p_n}} e^{-C/\varepsilon} \int_{\gamma \setminus p(\gamma(b))} |p| e^{-\frac{1}{\varepsilon} (\text{Im } S(p, \tau, \xi) - \text{Im } S|_{p=p_n} - C)} |dp|.$$

Как вытекает из леммы 3.3, даже для  $\varepsilon = 1$  интеграл в правой части данного неравенства сходится равномерно по  $\tau$  и  $\xi$ . Наконец, он лишь уменьшается с уменьшением  $\varepsilon > 0$ . Отсюда и вытекает требуемое.  $\square$

### 3.4.2 Замена переменной Честера–Фридмана–Урселла

Напомним, что функция  $S(p(z), \tau, \xi)$  является в  $V(b)$  аналитической по  $z$ , и для неё справедливо представление (3.15). В  $V(b)$  имеются две невырожденные при  $(\tau, \xi) \neq (\tau_n, 0)$  точки перевала  $z_1$  и  $z_2$ , описанные в лемме 3.8. При  $\tau \rightarrow \tau_n$  и  $\xi \rightarrow 0$  эти точки сливаются в одну, и для получения асимптотик функции  $\mathcal{T}^b$  мы используем стандартный асимптотический подход, следуя [39, Chapter VII, Section

4]. Первый его шаг — замена переменных Честера–Фридмана–Урселла, превращающая фазовую функцию в кубический полином. Здесь мы опишем эту замену переменных, а в разделе 3.4.3 обсудим преобразование при ней контура интегрирования  $\gamma(b)$ .

Положим

$$G(z, \tau, \xi) = S(p(z), \tau, \xi) - S(1, \tau, 0) \quad (3.27)$$

и определим  $\alpha$  и  $\beta$  формулами

$$\alpha(\tau, \xi) = \frac{1}{2}(G|_{z=z_2} + G|_{z=z_1}), \quad \beta^{3/2}(\tau, \xi) = \frac{3}{4}(G|_{z=z_2} - G|_{z=z_1}). \quad (3.28)$$

О выборе однозначной ветви многозначной функции в формуле для  $\beta$  мы скажем чуть позднее. Сперва мы сформулируем следующий вариант теоремы [37, Theorem 1, page 604], принадлежащей К. Честеру, Б. Фридману и Ф. Урселлу:

**Предложение 3.23.** Пусть  $b > 0$  достаточно мал, и пусть коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определены формулами (3.28). Тогда при достаточно малых  $\delta_1(b) > 0$  и  $\delta_2(b) > 0$  отображение  $z \mapsto u(z, \tau, \xi)$ , заданное формулой

$$G(z, \tau, \xi) = \frac{1}{3}u^3 - \beta u + \alpha, \quad (3.29)$$

имеет ровно одну ветвь, аналитическую по  $z$  в  $V(b)$  и непрерывную при

$$(z, \tau, \xi) \in V(b) \times \{|\tau - \tau_n| \leq \delta_1\} \times \{0 \leq \xi \leq \delta_2\}.$$

Эта ветвь отображает точки  $z = z_1$  и  $z = z_2$  в точки  $u = \beta^{1/2}$  и  $u = -\beta^{1/2}$  соответственно. При этом соответствие  $z \leftrightarrow u$  взаимно однозначно, и обратное отображение аналитично по  $u$  и непрерывно по  $(u, \tau, \xi)$ .

Отметим, что исходная теорема Честера–Фридмана–Урселла из работы [37] относится к случаю одного комплексного параметра, а не двух. Вместе с тем одно из двух данных в указанной работе доказательств этой теоремы, см. [37, pages 605–606], фактически без изменений подходит и для предложения 3.23. В связи с этим мы будем считать предложение 3.23 доказанным.

Теперь докажем лемму, которая, в частности, позволит нам фиксировать ветвь кубического корня в определении  $\beta$  в (3.28). Определим  $E_n(\tau)$  формулой (2.12).

**Лемма 3.24.** Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , определённые формулами (3.28), аналитичны по  $(\tau, \xi)$  при  $(\tau, \xi) \neq (\tau_n, 0)$ , и для них справедливы соотношения

$$2\alpha(\tau, \xi) = - \int_{\tau_n}^{\tau} E_n d\tau' + \int_0^{\xi} (Q_0(p_n) - Q_0(q_n)) d\xi', \quad (3.30)$$

$$\frac{4}{3}\beta^{3/2}(\tau, \xi) = \left| \int_{\tau_n}^{\tau} E_n d\tau' \right| - \int_0^{\xi} (Q_0(p_n) + Q_0(q_n)) d\xi'. \quad (3.31)$$

*Доказательство.* Поскольку  $S(1, \tau, 0) = S(1, \tau_n, 0) + \tau_n - \tau$ , см. определение (3.8) функции  $S$ , то

$$G|_{z=z_1} = \tau - \tau_n + \int_{\tau_n}^{\tau} \frac{d}{d\tau'} S(p_n(\tau', 0), \tau', 0) d\tau' + \int_0^{\xi} \frac{d}{d\xi'} S(p_n(\tau, \xi'), \tau, \xi') d\xi',$$

где производные от  $S(p_n(\tau, \xi), \tau, \xi)$  по  $\tau$  и  $\xi$  здесь и далее понимаются как полные производные, взятые при фиксированном значении другого параметра. Используя обозначение  $S_z$ , введённое перед леммой 3.8, определение точки перевала и формулу (2.12), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} S(p_n, \tau, 0) &= \frac{d}{d\tau} S(p(z_1), \tau, 0) = S_z(z_1, \tau, 0) \frac{\partial z_1}{\partial \tau} + S_\tau(p_n, \tau, 0) \\ &= S_\tau(p_n, \tau, 0) = -p_n^2 = -1 - \theta(\tau_n - \tau) E_n(\tau), \end{aligned}$$

где  $p_n = p_n(\tau, 0)$ ,  $z_1 = z_1(\tau, 0)$ , а  $\theta$  — характеристическая функция полуоси  $[0, +\infty)$ . Аналогично получим

$$\frac{d}{d\xi} S(p_n, \tau, \xi) = S_z(z_1, \tau, \xi) \frac{\partial z_1}{\partial \xi} + S_\xi(p_n, \tau, \xi) = S_\xi(p_n, \tau, \xi) = Q_0(p_n),$$

где  $p_n = p_n(\tau, \xi)$  и  $z_1 = z_1(\tau, \xi)$ . Из выписанной формулы для  $G|_{z=z_1}$  и формул для производных вытекает, что

$$G|_{z=z_1} = -\theta(\tau_n - \tau) \int_{\tau_n}^{\tau} E_n d\tau' + \int_0^{\xi} Q_0(p_n) d\xi'. \quad (3.32)$$

Аналогичное вычисление даёт

$$G|_{z=z_2} = -\theta(\tau - \tau_n) \int_{\tau_n}^{\tau} E_n d\tau' - \int_0^{\xi} Q_0(q_n) d\xi'.$$

Из последних двух формул легко получаются формулы (3.30) и (3.31). Аналитичность  $\alpha$  и  $\beta^{3/2}$  по  $(\tau, \xi)$  при  $(\tau, \xi) \neq (\tau_n, 0)$  вытекает непосредственно из (3.28) и из леммы 3.8. Поскольку, в силу (3.31),  $\beta \neq 0$  при  $(\tau, \xi) \neq (\tau_n, 0)$ , то и для  $\beta$  требуемая аналитичность имеет место.  $\square$

**Замечание 3.25.** Из доказательства леммы 3.24 следует, что

$$\operatorname{Im} S|_{p=p_n} = \operatorname{Im} G|_{z=z_1} = \int_0^{\xi} \operatorname{Im} Q_0(p_n) d\xi'. \quad (3.33)$$

Поскольку  $p_n$  и  $q_n$  содержатся в замыкании квадранта  $\mathcal{Q}_1$ , а функция  $Q_0$  переводит это множество в себя, то из (3.31) вытекает, что  $\operatorname{Im} \beta^{3/2} \leq 0$ . Мы определяем  $\beta^{1/2}$  с помощью (3.31), фиксируя ветвь кубического корня условием  $-\pi/3 \leq \arg \beta^{1/2} \leq 0$ .

### 3.4.3 Преобразование контура интегрирования при замене переменной

Обсудим свойства кривой  $\tilde{\gamma}(b) = u(\gamma(b), \tau, \xi)$ . Положим

$$\mathcal{S}(u, \beta, \alpha) = \frac{1}{3}u^3 - \beta u + \alpha. \quad (3.34)$$

С точностью до слагаемого  $\mathcal{S}(1, \tau, 0)$  функция  $\mathcal{S}$  — это функция  $S$ , выраженная через  $u$ . Очевидно, что кривая  $\tilde{\gamma}(b)$  проходит через точку  $u = \beta^{1/2}$  — точку перевала функции  $\mathcal{S}$ . Эта кривая полностью лежит на проходящей через точку  $\beta^{1/2}$  линии наискорейшего спуска  $\tilde{\gamma}$  функции  $\mathcal{S}$ . Величина  $\text{Im } \mathcal{S}(u, \beta, \alpha)$  монотонно возрастает при удалении  $u$  от  $\beta^{1/2}$  вдоль  $\tilde{\gamma}(b)$ .

Итак, пусть  $\tilde{\gamma}$  — линия наискорейшего спуска функции  $\mathcal{S}$ , содержащая  $\tilde{\gamma}(b)$ . Она изображена на рис. 3.6.

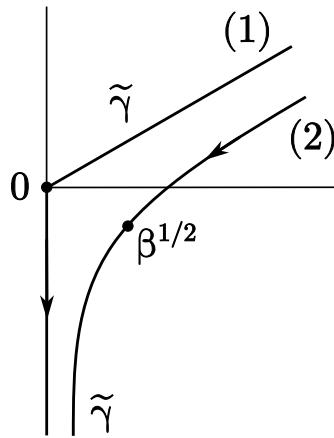


Рис. 3.6: Линия наискорейшего спуска  $\tilde{\gamma}$  при  $-\pi/3 \leq \arg \beta^{1/2} \leq 0$ . Линия (1) соответствует случаю  $\beta = 0$ , а линия (2) — случаю  $\beta \neq 0$ . Ориентация  $\tilde{\gamma}$  отмечена в соответствии с леммой 3.27.

**Замечание 3.26.** Очевидно, линия наискорейшего спуска  $\tilde{\gamma}$  кубического полинома (3.34) непрерывно зависит от параметра  $\beta$ , в том числе и при  $\beta = 0$  — это нетрудно увидеть, например, выписав для кривой  $\tilde{\gamma}$  явные формулы. Параметр  $\beta$  при этом непрерывно зависит от  $\tau$  и  $\xi$ . Мы использовали эти факты при доказательстве леммы 3.20.

Будем считать, что ориентация кривой  $\tilde{\gamma}$  задана ориентацией  $\tilde{\gamma}(b)$ . Справедлива

**Лемма 3.27.** *Кривая  $\tilde{\gamma}$  имеет асимптоты, параллельные  $e^{i\pi/6}\mathbb{R}_+$  и  $e^{-i\pi/2}\mathbb{R}_+$ , и ориентирована сверху вниз.*

*Доказательство.* Предположим, что  $\beta^{1/2} > 0$ . На остальные случаи результат распространяется по непрерывности. Нетрудно установить, что асимптоты  $\tilde{\gamma}$  таковы, как сказано в утверждении леммы. Докажем утверждение об ориентации. Кривая  $\gamma(b)$  на плоскости переменной  $z$  является отрезком линии наискорейшего спуска функции  $S(p(z), \tau, \xi)$ , идущей через точку  $z_1 > 0$  из  $\mathcal{Q}_1$  в  $\mathbb{C}_-$  и оставляющей точку  $z_2 = 0$  справа. Точка  $z = z_1$  переходит при замене переменной Честера–Фридмана–Урселла в точку  $u = \beta^{1/2}$ , а точка  $z = z_2$  — в точку  $u = -\beta^{1/2}$ . При движении  $z$  вдоль  $\gamma(b)$  точка  $u$  должна двигаться вдоль  $\tilde{\gamma}(b)$  так, чтобы точка  $u = -\beta^{1/2}$  оставалась справа от  $\tilde{\gamma}(b)$ , т. е. кривая  $\tilde{\gamma}$  ориентирована сверху вниз.  $\square$

### 3.4.4 Асимптотика функции $\mathcal{T}^b(x, \tau)$

После замены переменной  $z \mapsto u(z, \tau, \xi)$  формулу (3.26) для  $\mathcal{T}^b$  можно преобразовать к виду

$$e^{\frac{i\varepsilon}{4}(1-\tau)} \mathcal{T}^b(x, \tau) = \frac{-2K_1 e^{\frac{i}{\varepsilon} S(1, \tau, 0)}}{\sqrt{\varepsilon}} J, \quad J = \int_{\tilde{\gamma}(b)} g(u, \tau, \xi) e^{\frac{i}{\varepsilon} S(u, \beta, \alpha)} du, \quad (3.35)$$

$$K_1 = K e^{\frac{i\varepsilon}{4}(1-\tau)}, \quad g(u, \tau, \xi) = \frac{\partial z}{\partial u} (1 - z^2) z, \quad z = z(u, \tau, \xi). \quad (3.36)$$

Далее мы получим асимптотику интеграла  $J$  фактически повторяя вычисления из [39, Chapter VII, Section 4]. Представим  $g(u, \tau, \xi)$  в виде

$$g(u, \tau, \xi) = g_0(\tau, \xi) + g_1(\tau, \xi) u + r(u, \tau, \xi) (u^2 - \beta),$$

$$g_0 = \frac{1}{2} \left( g(\beta^{1/2}, \tau, \xi) + g(-\beta^{1/2}, \tau, \xi) \right), \quad (3.37)$$

$$g_1 = \frac{1}{2\beta^{1/2}} \left( g(\beta^{1/2}, \tau, \xi) - g(-\beta^{1/2}, \tau, \xi) \right). \quad (3.38)$$

В некоторой фиксированной окрестности точки  $u = 0$  функция  $r$  аналитична по  $u$ . Кроме того, при значениях  $u$  из замыкания некоторой окрестности нуля и при рассматриваемых значениях  $\tau$  и  $\xi$  функции  $r$  и  $r_u$  непрерывны по  $(u, \tau, \xi)$  и, как следствие, ограничены. Можно считать, что при всех рассматриваемых значениях  $\tau$  и  $\xi$  на контуре интегрирования  $\tilde{\gamma}(b)$  выполняются указанные свойства.

Аргументы функций  $g_0$ ,  $g_1$  и  $r$  мы далее часто будем опускать для краткости. Очевидно,  $J = I + \delta I$ , где

$$I = \int_{\tilde{\gamma}(b)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S(u, \beta, \alpha)} (g_0 + g_1 u) du, \quad \delta I = \int_{\tilde{\gamma}(b)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S(u, \beta, \alpha)} (u^2 - \beta) r du.$$

Контур интегрирования  $\tilde{\gamma}(b)$  является участком линии наискорейшего спуска  $\tilde{\gamma}$ . При этом существует такая положительная постоянная  $C = C(b)$ , что на концах  $\tilde{\gamma}(b)$  выполнено  $\text{Im } S > C$  при всех рассматриваемых  $\tau$  и  $\xi$ . Стандартные рассуждения позволяют с точностью до экспоненциально малой поправки заменить в интеграле  $I$  контур интегрирования на  $\tilde{\gamma}$ :

$$I = I_0 + O\left(e^{\frac{i}{\varepsilon} S(\beta^{1/2}, \beta, \alpha)} e^{-C/\varepsilon}\right), \quad I_0 = e^{i\alpha/\varepsilon} \int_{\tilde{\gamma}} e^{\frac{i}{\varepsilon} (\frac{1}{3}u^3 - \beta u)} (g_0 + g_1 u) du,$$

где оценка поправки равномерна по  $\tau$  и  $\xi$ . После замены переменной  $u \mapsto v = \varepsilon^{-1/3} e^{i\pi/6} u$  мы получим для  $I_0$ :

$$I_0 = \varepsilon^{2/3} e^{-i\pi/3} e^{i\alpha/\varepsilon} \int_{e^{i\pi/6} \tilde{\gamma}} e^{\frac{1}{3}v^3 - (e^{i\pi/3} \varepsilon^{-2/3} \beta) v} (e^{i\pi/6} \varepsilon^{-1/3} g_0 + g_1 v) dv$$

$$= -2\pi \varepsilon^{2/3} e^{i\pi/6} e^{i\alpha/\varepsilon} \left( e^{i\pi/6} \varepsilon^{-1/3} g_0 \text{Ai}\left(e^{i\pi/3} \varepsilon^{-2/3} \beta\right) - g_1 \text{Ai}'\left(e^{i\pi/3} \varepsilon^{-2/3} \beta\right) \right),$$

где использовано интегральное представление для функции Эйри  $\text{Ai}$ , см., например, [40, page 53].

Для получения оценки  $\delta I$  мы проинтегрируем соответствующий интеграл по частям, учитывая при этом, что  $\mathcal{S}_u(u, \beta, \alpha) = u^2 - \beta$ . Это даст нам

$$\delta I = i\varepsilon \int_{\tilde{\gamma}(b)} e^{\frac{i}{\varepsilon} \mathcal{S}(u, \beta, \alpha)} r_u(u, \tau, \xi) du + O\left(e^{\frac{i}{\varepsilon} \mathcal{S}(\beta^{1/2}, \beta, \alpha)} e^{-C/\varepsilon}\right). \quad (3.39)$$

Из этой формулы можно получить оценку

$$\delta I = O\left(\frac{\varepsilon^{3/2} e^{\frac{i}{\varepsilon} \mathcal{S}(\beta^{1/2}, \beta, \alpha)}}{\varepsilon^{1/6} + |\beta|^{1/4}}\right) \quad (3.40)$$

следующим образом. Если  $|\beta|/\varepsilon^{2/3} \leq 1$ , то для её доказательства в интеграле в (3.39) нужно сделать замену переменных  $u = \varepsilon^{1/3} v$ . Если же  $|\beta|/\varepsilon^{2/3} \geq 1$ , то в указанном интеграле нужно сделать замену переменных  $u = \beta^{1/2} v$ , при этом первое слагаемое в (3.39) примет вид

$$\varepsilon \beta^{1/2} e^{\frac{i}{\varepsilon} \mathcal{S}(\beta^{1/2}, \beta, \alpha)} \int_{\tilde{\gamma}(b)/\beta^{1/2}} e^{i \frac{\beta^{3/2}}{\varepsilon} \mathcal{S}(v, 1, 2/3)} O(1) dv,$$

где контур интегрирования целиком лежит на линии наискорейшего спуска функции  $v \mapsto \mathcal{S}(v, 1, 2/3)$  и проходит через её точку перевала  $v = 1$ . Применение стандартного метода перевала приводит к оценке (3.40).

Объединяя полученные результаты и учитывая формулу (3.16) для  $S(1, \tau, 0)$  и тот факт, что  $\text{Im } \mathcal{S}(\beta^{1/2}, \beta, \alpha) = \text{Im } S|_{p=p_n} = \varepsilon \mu_n$  — это следует непосредственно из определения функции  $\mathcal{S}$ , из формулы (3.33) и из определения  $\mu_n$  в (2.18) — получим окончательно

$$e^{\frac{i\varepsilon}{4}(1-\tau)} \mathcal{T}^b(x, \tau) = 4\pi K_1 e^{\frac{i}{\varepsilon}(2\tau_n - 3 - \tau)} \varepsilon^{1/6} e^{i\pi/6} e^{i\alpha/\varepsilon} \times \left( e^{i\pi/6} \varepsilon^{-1/3} g_0 \text{Ai}\left(e^{i\pi/3} \varepsilon^{-2/3} \beta\right) - g_1 \text{Ai}'\left(e^{i\pi/3} \varepsilon^{-2/3} \beta\right) \right) + O\left(\frac{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S|_{p=p_n}}}{\varepsilon^{1/6} + |\beta|^{1/4}}\right). \quad (3.41)$$

### 3.4.5 Коэффициенты $g_0$ и $g_1$

Здесь мы выразим коэффициенты  $g_0$  и  $g_1$  через функции  $p_n$ ,  $q_n$  и  $\beta$ . Справедлива

**Лемма 3.28.** Пусть числа  $\delta_1, \delta_2 > 0$  достаточно малы и пусть  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ . Тогда

$$g_0(\tau, \xi) = \frac{\beta^{1/4}}{4} \left( p_n \sqrt{\frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau}} - q_n \sqrt{-\frac{\partial \ln q_n}{\partial \tau}} \right),$$

$$g_1(\tau, \xi) = \frac{\beta^{-1/4}}{4} \left( p_n \sqrt{\frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau}} + q_n \sqrt{-\frac{\partial \ln q_n}{\partial \tau}} \right),$$

где  $-\pi/6 \leq \arg \beta^{1/4} \leq 0$ , а аргументы квадратных корней не принимают значений в  $i\mathbb{R}_+$ , и в  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$  фиксированы с помощью условия  $\sqrt{1} = 1$  их однозначные аналитические ветви.

*Доказательство.* Как видно из (3.37) и (3.38), требуется вычислить  $g(\pm\beta^{1/2}, \tau, \xi)$ . Вычислим  $g(\beta^{1/2}, \tau, \xi)$ . Для краткости мы будем здесь писать  $S(z, \tau, \xi)$  вместо  $S(p(z), \tau, \xi)$ . Имеем

$$S(z, \tau, \xi) - S(0, \tau, 0) = \frac{1}{3}u^3 - \beta u + \alpha.$$

Дважды продифференцировав это равенство по  $u$  и положив  $u = \beta^{1/2}$ , получим

$$S_{zz}(z_1, \tau, \xi) \left( \frac{\partial z}{\partial u}(\beta^{1/2}, \tau, \xi) \right)^2 = 2\beta^{1/2}. \quad (3.42)$$

С другой стороны, продифференцировав равенство  $S_z(z_1, \tau, \xi) = 0$  по  $\tau$  и воспользовавшись (3.8) и формулой  $p(z) = 1 - z^2$ , получим

$$S_{zz}(z_1, \tau, \xi) \frac{\partial z_1}{\partial \tau} = -S_{z\tau}(z_1, \tau, \xi) = -4p(z_1)z_1.$$

Так как  $p(z_1) = p_n$ , то отсюда следует, что

$$\frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau} = \frac{8z_1^2}{S_{zz}(z_1, \tau, \xi)}. \quad (3.43)$$

Отсюда и из (3.42) вытекает, что

$$g(\beta^{1/2}, \tau, \xi) = p(z_1) z_1 \frac{\partial z}{\partial u}(\beta^{1/2}, \tau, \xi) = \frac{\beta^{1/4}}{2} p_n \sqrt{\frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau}}. \quad (3.44)$$

Проверим, что ветвь квадратного корня в этой формуле выбирается так, как сказано в утверждении леммы. Из (3.18) и (3.17) нетрудно получить формулу

$$S_{zz}(z_1, \tau, \xi) = 4\sqrt{(\tau_n - \tau)^2 - 2i\xi} \left( 1 + O\left(\sqrt{(\tau_n - \tau)^2 - 2i\xi}\right) \right), \quad (3.45)$$

где квадратный корень принимает при  $\xi = 0$  неотрицательные значения. Отсюда, из того факта, что  $z_1 \in -i\mathcal{Q}_1$  и из формулы (3.43) вытекает, что аргумент квадратного корня в формуле (3.44) не принимает значений в  $i\mathbb{R}_+$ , и, следовательно, достаточно выбрать однозначную аналитическую ветвь этого корня в  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$ . Поскольку при  $\xi = 0$  и  $\tau < \tau_n$  в обеих частях второго равенства в (3.44) все остальные множители принимают положительные значения<sup>9</sup>, то и квадратный корень в этой формуле должен быть положительным.

Аналогично соотношению (3.44) проверяется соотношение

$$g(-\beta^{1/2}, \tau, \xi) = -\frac{\beta^{1/4}}{2} q_n \sqrt{-\frac{\partial \ln q_n}{\partial \tau}}.$$

Полученные соотношения приводят к формулам для  $g_0$  и  $g_1$ . □

<sup>9</sup>Для  $\partial z/\partial u|_{u=\beta^{1/2}}$  это нетрудно установить с помощью формул (3.29), (3.27) и (3.18).

### 3.4.6 Завершение доказательства предложения 3.21

Нетрудно показать, что старший член из (3.24) совпадает со старшим членом из формулы (3.41). Для этого нужно использовать формулы из леммы 3.28 для коэффициентов  $g_0$  и  $g_1$ , учесть связь  $\beta$  и  $\zeta_n$ , см. (3.31) и (2.16), а также использовать соотношение

$$\pi K_1 e^{\frac{i}{\varepsilon}(2\tau_n - 3 - \tau)} = C_n e^{-\frac{i\xi}{2}} e^{-i\pi/4},$$

вытекающее из определений  $K_1$  и  $C_n$ , см. (3.36), (3.6) и (2.13).

Для завершения доказательства предложения 3.21 нам остаётся только доказать следующую оценку поправки:

**Лемма 3.29.** Пусть числа  $\delta_1, \delta_2 > 0$  достаточно малы, и пусть  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ . При достаточно малых значениях  $\varepsilon > 0$  равномерно по  $\tau$  и  $\xi$  справедлива оценка

$$\left( e^{i\phi(\varepsilon)} - e^{\frac{i\varepsilon}{4}(1-\tau)} \right) \mathcal{T}^b(x, \tau) = O(\Delta_2),$$

где  $\Delta_2$  определено в (3.25).

*Доказательство.* Из оценки (3.11) и формул (3.35) вытекает оценка

$$\left( e^{i\phi(\varepsilon)} - e^{\frac{i\varepsilon}{4}(1-\tau)} \right) \mathcal{T}(x, \tau) = O(J),$$

где  $J$  — интеграл, определённый в (3.35). Докажем оценку  $J = O(\Delta_2)$ . Мы имеем  $J = J_1 + J_2$ , где

$$J_1 = z_1 \int_{\tilde{\gamma}(b)} O(1) e^{\frac{i}{\varepsilon}S(u, \beta, \alpha)} du, \quad J_2 = \int_{\tilde{\gamma}(b)} O(z - z_1) e^{\frac{i}{\varepsilon}S(u, \beta, \alpha)} du. \quad (3.46)$$

Для того чтобы оценить интегралы  $J_1$  и  $J_2$ , докажем сперва оценки

$$z - z_1 = O(u - \beta^{1/2}), \quad z_1 = O(\beta^{1/2}). \quad (3.47)$$

Очевидно, что

$$z - z_1 = \int_{\beta^{1/2}}^u \frac{\partial z}{\partial u} du = O(u - \beta^{1/2}).$$

Подставляя в эту формулу  $z = z_2$  и пользуясь тем, что  $z_1$  лежит в четвёртом квадранте комплексной плоскости, а  $z_2$  — во втором, см. замечание 3.9, легко получить оценку для  $z_1$ .

С учётом оценок (3.47) оценки интегралов  $J_1$  и  $J_2$  производятся точно так же, как и оценка интеграла в (3.39) — нужно отдельно рассмотреть случаи  $|\beta|/\varepsilon^{2/3} \leq 1$  и  $|\beta|/\varepsilon^{2/3} > 1$ , применяя во втором случае метод перевала. Мы опустим подробности. В итоге мы получим оценки

$$J_1 = O\left( \frac{z_1 \varepsilon^{1/2} e^{\frac{i}{\varepsilon}S(\beta^{1/2}, \beta, \alpha)}}{\varepsilon^{1/6} + |\beta|^{1/4}} \right), \quad J_2 = O\left( \frac{\varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon}S(\beta^{1/2}, \beta, \alpha)}}{\varepsilon^{1/3} + |\beta|^{1/2}} \right). \quad (3.48)$$

Для завершения доказательства остаётся только использовать равенство  $|\zeta_n| = |\beta|^{1/4}/\varepsilon^{1/6}$ , см. (3.31) и (2.16), очевидную оценку  $z_1 = O(Q_0(p_n))$  и формулу (3.33) для  $\text{Im } S|_{p=p_n} = \text{Im } S|_{u=\beta^{1/2}}$ .  $\square$

Теперь формулу (3.24) легко получить с помощью леммы 3.22, формулы (3.41) для  $\mathcal{T}^b$  и только что доказанной леммы 3.29. Итак, предложение 3.21 доказано.

### 3.5 Оценка $\mathcal{E}(x, \tau)$

Наконец, мы оценим определённую в (3.10) функцию  $\mathcal{E}(x, \tau)$ . Приведённая ниже лемма 3.30, предложение 3.21 и первая формула в (3.9), связывающая  $\Psi_n$ ,  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{E}$ , завершают доказательство теоремы 1.

**Лемма 3.30.** Пусть числа  $\delta_1, \delta_2 > 0$  достаточно малы, и пусть  $|\tau - \tau_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ . При достаточно малых значениях  $\varepsilon > 0$  имеют место равномерные по  $\tau$  и  $\xi$  оценки

$$\mathcal{E}(x, \tau) = O(\Delta_2), \quad \tau \leq \tau_n, \quad (3.49)$$

$$\mathcal{E}(x, \tau) = O(\Delta_1), \quad \tau \geq \tau_n, \quad (3.50)$$

где  $\Delta_2$  определено в (3.25), а  $\Delta_1$  — в (2.18).

Здесь мы докажем только оценку (3.49). Оценку (3.50) нам будет удобнее доказать в следующей главе, как часть предложения 4.7. С доказательством предложения 4.7 будут завершены доказательства и леммы 3.30, и теоремы 1.

*Доказательство леммы 3.30 при  $\tau \leq \tau_n$ .* Подынтегральная функция в определении (3.10) функции  $\mathcal{E}$  аналитична в  $\mathbb{C}_0$  и непрерывна вплоть до границы  $\mathbb{C}_0$ . При  $\tau \leq \tau_n$  линии наискорейшего спуска  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  не покидают первого листа римановой поверхности  $\Gamma$ , см. лемму 3.13, предложения 3.15 и 3.17 и лемму 3.20. Таким образом, все преобразования, проделанные с функцией  $\mathcal{T}$  для получения формулы (3.35), можно проделать и с функцией  $\mathcal{E}$ . С учётом определения  $K$  в (3.6) и леммы 3.2 мы имеем

$$\mathcal{E}(x, \tau) = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + O\left(e^{\frac{i}{\varepsilon} S|_{p=p_n}} e^{-C/\varepsilon}\right),$$

где  $\tilde{J}_1$  и  $\tilde{J}_2$  — интегралы того же типа, что и  $J_1$  и  $J_2$  в (3.46). Дальнейшее доказательство повторяет доказательство леммы 3.29.  $\square$

**Замечание 3.31.** При  $\tau > \tau_n$  деформировать контур интегрирования в (3.10) так, чтобы он целиком проходил по линии наискорейшего спуска, вообще говоря, нельзя: согласно замечанию 2.1 функция  $R$  имеет цепочку близких точек ветвления  $p = 1 + \varepsilon(m - 1/2)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , а значит и коэффициент  $A$ , входящий в подынтегральное выражение для  $\mathcal{E}$ , имеет аналогичную цепочку точек ветвления. Согласно результатам раздела 3.3.3 линия наискорейшего спуска  $\gamma_0$  может при  $\tau > \tau_n$  покидать первый лист римановой поверхности  $\Gamma$  через разрез  $[1, +\infty)$ , и тогда указанные точки ветвления препятствуют деформации контура интегрирования к линии наискорейшего спуска. Как упоминалось выше, мы рассмотрим случай  $\tau \geq \tau_n$  в следующей главе, при доказательстве предложения 4.7.

## Глава 4. Поверхностная волна и «просачивание» волновой функции в потенциальную яму

В данной главе мы докажем теоремы 2 и 3. Здесь мы вновь будем использовать представление решения  $\Psi_n$  через функции  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{E}$ , полученное в разделе 3.2 предыдущей главы. В разделе 4.1 мы докажем ещё несколько фактов о лежащей в  $\mathbb{C}_0$  точке перевала  $p_n$  и о линиях наискорейшего спуска фазовой функции  $S$ . Затем, в разделе 4.2, мы получим асимптотическую формулу для функции  $\mathcal{T}$ , справедливую после момента  $\tau_n$ , старший член в которой — это старший член из формулы (2.21). В разделе 4.3 мы оценим функцию  $\mathcal{E}$ , завершив тем самым доказательство теоремы 2. Наконец, в разделе 4.4 мы более аккуратно исследуем  $\mathcal{E}$  при  $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$  и докажем теорему 3.

Как и в главе 3, мы фиксируем  $n \in \mathbb{N}$ , будем считать, что  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\tau \leq 1$  и  $\xi \geq 0$ , и будем предполагать ограниченность  $\tau$  и  $\xi$ . Также мы предполагаем известной читателю информацию, описанную в разделах 3.1 и 3.2 главы 3.

### 4.1 Вновь о точке перевала и линиях наискорейшего спуска функции $S$

В разделе 3.3 главы 3 мы уже говорили как о точке перевала  $p_n$  определённой в (3.8) функции  $p \mapsto S(p, \tau, \xi)$ , так и о выходящих из этой точки линиях наискорейшего спуска  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$ . В данном разделе мы докажем при  $\tau \geq \tau_n$  ещё несколько утверждений об этих объектах.

#### 4.1.1 Точка перевала $p_n$

Как и в разделе 3.3.2, мы фиксируем достаточно малое  $b > 0$  и в  $b^2$ -окрестности точки  $p = 1$  в  $\mathbb{C}_0$  введём локальную переменную  $z(p) = \sqrt{1-p}$ , фиксируя ветвь корня условием  $z > 0$  при  $p < 1$ . Нам потребуется

**Лемма 4.1.** Пусть  $\delta_1 > 0$  и  $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$ . Если  $b > 0$  достаточно мало, то найдётся такое  $\delta_2 > 0$ , что при  $0 \leq \xi \leq \delta_2$  функция  $z \mapsto S(p(z), \tau, \xi)$  имеет в  $b$ -окрестности точки  $z = 0$  ровно одну с учётом кратности точку перевала  $z_1 = z(p_n)$ . При этом

$$p_n(\tau, \xi) = p(z_1(\tau, \xi)) = 1 + \frac{\xi^2}{8(\tau - \tau_n)^2} + \frac{i\xi^3}{8(\tau - \tau_n)^4} + O(\xi^4), \quad (4.1)$$

где оценка поправки равномерна по  $\tau$ .

*Доказательство.* Напомним, что мы обозначаем производные функции  $z \mapsto S(p(z), \tau, \xi)$  по  $z$  через  $S_z$ ,  $S_{zz}$  и т. д. Пусть  $\tau$  таково, как сказано в условии леммы. С помощью формулы (3.18) и теоремы Руше нетрудно установить, что при достаточно малом  $b > 0$  найдётся такое  $\delta_2 > 0$ , что при  $0 \leq \xi \leq \delta_2$  функция  $S_z$  имеет ровно один простой нуль  $z = z_1(\tau, \xi)$  в  $b$ -окрестности точки  $z = 0$ .

При этом

$$S_{zz}(z_1, \tau, \xi) = 4(\tau - \tau_n) + O(b) \neq 0. \quad (4.2)$$

Из аналитического варианта теоремы о неявной функции вытекает аналитичность  $z_1$  по  $\tau$  и  $\xi$ . Из (3.18) и из теоремы Тейлора нетрудно получить для функции  $z_1(\tau, \cdot)$  представление

$$z_1(\tau, \xi) = -\frac{i\xi}{2\sqrt{2}(\tau - \tau_n)} + \frac{\xi^2}{4\sqrt{2}(\tau - \tau_n)^3} + O(\xi^3) \quad (4.3)$$

с равномерной по  $\tau$  оценкой погрешности. Наконец, соотношение  $p_n(\tau, \xi) = 1 - z_1^2(\tau, \xi)$  получается точно так же, как при доказательстве леммы 3.10. Отсюда и из (4.3) следует утверждение леммы.  $\square$

#### 4.1.2 Линии наискорейшего спуска

Обсудим поведение линий наискорейшего спуска  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  в случае, когда  $\tau_n < \tau \leq 1$ . Напомним, что в этом случае при  $\xi = 0$  точка перевала  $p_n$  сливается с точкой ветвления  $p = 1$  функции  $S$  и перестаёт быть точкой перевала. При этом мы понимаем линии  $\gamma_0$  и  $\gamma_2$  в окрестности единицы так, как описано в замечании 3.19 — как образы при отображении  $z \mapsto p(z)$  линий наискорейшего спуска  $\gamma'_0$  и  $\gamma'_2$ , выходящих на плоскости локальной переменной  $z$  из точки перевала  $z_1 = 0$ . Имеют место следующие леммы:

**Лемма 4.2.** Пусть  $\tau_n < \tau \leq 1$  и  $\xi = 0$ . В этом случае линия  $\gamma_2 \setminus \{1\}$  целиком лежит в  $\mathbb{C}_-$  и уходит там на бесконечность, а линия  $\gamma_0 \setminus \{1\}$  выходит из точки  $p_n = 1$  в четвёртый квадрант второго листа римановой поверхности  $\Gamma$ .

*Доказательство.* По аналогии с доказательством леммы 3.20.  $\square$

Будем, как в предложении 3.17, обозначать через  $p'$  точку луча  $[1, +\infty)$ , в которой линия  $\gamma_0$  впервые его пересекает при удалении  $p$  от  $p_n$  вдоль этой линии (если такая точка существует). При  $\xi = 0$ , когда линия  $\gamma_0$  выходит из точки  $p = 1$  сразу на второй лист римановой поверхности  $\Gamma$ , мы считаем, что  $p' = 1$ .

**Лемма 4.3.** Фиксируем достаточно малое  $\delta_1 > 0$ . Найдётся такое  $\delta_2 > 0$ , что при  $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$  точка  $p'$  существует и непрерывно зависит от параметров  $\tau$  и  $\xi$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 4.2, при  $\xi = 0$  линия  $\gamma_0$  всегда выходит из  $p_n = 1$  на второй лист  $\Gamma$ . При  $\xi > 0$  же она выходит из точки  $p_n$ , лежащей в первом квадранте  $\mathcal{Q}_1$  первого листа  $\Gamma$ . Таким образом, в силу непрерывной зависимости линии  $\gamma_0$  от параметров  $\tau$  и  $\xi$ , для каждого  $\tau'$  из отрезка  $[\tau_n + \delta_1, 1]$  найдётся окрестность точки  $(\tau', 0)$  на полуплоскости параметров  $(\tau, \xi)$ , в которой утверждение леммы верно. При достаточной малости упомянутой окрестности точки  $(\tau', 0)$  непрерывная зависимость от параметров точки  $p'$  (как ближайшей к  $p_n$  вдоль  $\gamma_0$  точки пересечения  $\gamma_0$  с вещественной осью) следует из невозможности появления точки касания  $\gamma_0$  и  $[1, +\infty)$  на участке линии  $\gamma_0$ , соединяющем  $p_n$  и точку, в которой  $\gamma_0$  покидает первый лист  $\Gamma$ . Действительно, при  $\xi > 0$  такое касание возможно только при реализации сценария (1) из предложения 3.17, а мы установили, что реализуется сценарий (2). Из сказанного следует, что при достаточно малом  $\delta_2 > 0$  утверждение леммы верно для всех  $(\tau, \xi) \in [\tau_n + \delta_1, 1] \times [0, \delta_2]$ .  $\square$

Наконец, обсудим поведение линий наискорейшего спуска в окрестности бесконечности в том случае, если они уходят на бесконечность в  $\mathbb{C}_0$ .

**Замечание 4.4.** Пусть  $\xi \geq 0$ . Напомним, что в случае  $\tau < 1$  при  $p \in (\gamma_0 \cup \gamma_2) \cap \mathbb{C}_0$  и  $|p| \rightarrow \infty$  справедлива формула (3.23), см. замечание 3.14. Рассмотрим поведение  $\gamma_2$  в случае  $\tau = 1$ . Рассуждая так же, как при  $\tau < 1$ , нетрудно проверить, что  $\gamma_2$  уходит на бесконечность в третьем квадранте  $\mathbb{C}_0$ , причём при  $p \in \gamma_2$  и  $|p| \rightarrow \infty$  выполнено

$$\operatorname{Im} p = O\left(\frac{\operatorname{Re} p}{\ln \operatorname{Re} p}\right).$$

## 4.2 Асимптотика $\mathcal{T}(x, \tau)$ при $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$ и $0 \leq \xi \leq \delta_2$

Фиксируем  $\delta_1 > 0$  и достаточно малое  $\delta_2 > 0$ . В данном разделе мы будем считать, что  $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ , и докажем для определённой в (3.9) функции  $\mathcal{T}(x, \tau)$

**Предложение 4.5.** Пусть  $\tau$  и  $\xi$  таковы, как сказано выше. Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$e^{i\phi(\varepsilon)} \mathcal{T}(x, \tau) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\xi Q_0(p_n) d\xi'} \left( \mathcal{T}_0(x, \tau) + O(\varepsilon^{1/2} \xi) + O(\varepsilon) \right), \quad (4.4)$$

где  $\mathcal{T}_0$  определено в (2.22). Оценки в этой формуле равномерны по  $\tau$  и  $\xi$ .

*Доказательство.* Доказательство проводится в несколько шагов.

**1.** Деформируем контур интегрирования в формуле для  $\mathcal{T}(x, \tau)$  в (3.9). В силу леммы 4.3 линия  $\gamma_0$  при достаточно малом  $\delta_2 > 0$  всегда пересекает луч  $[1, +\infty)$  в некоторой точке  $p'$ . В качестве нового контура интегрирования  $\gamma$  мы выберем объединение компоненты связности  $(\gamma_2 \cup \gamma_0) \cap \mathbb{C}_0$ , содержащей точку перевала  $p_n$ , и луча  $[p', +\infty) + i0$ . При удалении  $p$  от  $p_n$  вдоль нового контура интегрирования  $\operatorname{Im} S$  монотонно возрастает, поскольку на  $(1, +\infty) + i0$  выполнено  $\operatorname{Im} S_p = 2 \operatorname{Im} \arcsin p > 0$ , см. формулу (3.14).

**2.** Пусть  $b > 0$  достаточно мал. Перейдём в  $b^2$ -окрестности точки  $p = 1$ , разрезанной вдоль  $[1, +\infty)$ , к введённой в разделе 3.3.2 локальной переменной  $z = \sqrt{1-p}$ , где  $z > 0$  при  $p < 1$ . Согласно лемме 4.1, существует такое  $\delta_2 > 0$ , что при  $0 \leq \xi \leq \delta_2$  в  $b$ -окрестности  $V(b)$  точки  $z = 0$  имеется единственная с учётом кратности точка перевала  $z_1$ . Она является образом точки  $p_n$  при отображении  $p \mapsto z(p)$ .

**3.** Обозначим через  $\gamma(b)$  компоненту связности  $z(\gamma) \cap V(b)$ , содержащую точку перевала  $z_1$ . Функция  $\mathcal{T}$  может быть представлена в виде

$$\mathcal{T}(x, \tau) = \frac{-2K}{\sqrt{\varepsilon}} (I + \delta I) + O\left(e^{\frac{i}{\varepsilon} S|_{p=p_n}} e^{-C/\varepsilon}\right), \quad (4.5)$$

где оценка поправки равномерна по  $\tau$  и  $\xi$ ,

$$I = z_1 p_n \int_{\gamma(b)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p(z), \tau, \xi)} dz, \quad \delta I = \int_{\gamma(b)} O(z - z_1) e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p(z), \tau, \xi)} dz.$$

Поясним оценку поправки в формуле (4.5). В силу непрерывной зависимости от параметров  $\tau$  и  $\xi$  как линий наискорейшего спуска, так и точки  $p'$ , см. лемму 4.3, контур интегрирования  $\gamma$  по построению также непрерывно зависит от параметров. Дальнейшая оценка производится стандартным образом, см. доказательство леммы 3.22.

**4.** Для получения асимптотики  $I$  и оценки  $\delta I$  мы используем вариант метода перевала, описанный в [39, Chapter 2, Section 5] — метод Перрона. Достоинство этого метода состоит в том, что нет необходимости глобально деформировать контур интегрирования к линиям наискорейшего спуска. Достаточно, чтобы проходящий через точку перевала контур находился в секторах убывания модуля экспоненты, обеспечивающей возможность применения метода перевала (а точнее, в чуть более узких подсекторах этих секторов). При этом формулы, которые даёт этот метод, совпадают со стандартными формулами метода перевала.

Ниже мы будем для удобства использовать обозначение  $S = S|_{p=p(z)}$ . Для применения теоремы метода Перрона [39, Theorem 4, page 105] необходимо деформировать контур  $\gamma(b)$  таким образом, чтобы были удовлетворены следующие условия:

- (1) На контуре интегрирования должно быть выполнено  $\delta \leq \arg(S - S|_{z=z_1}) \leq \pi - \delta$ , где  $\delta > 0$  — фиксированное число.
- (2) Для каждой точки  $z_0 \neq z_1$  контура интегрирования должно существовать такое  $\Delta = \Delta(z_0) > 0$ , что  $|S - S|_{z=z_1}| \geq \Delta$  для всех  $z$ , лежащих на не содержащем  $z_1$  участке контура между  $z_0$  и его концом.

Остальные условия упомянутой теоремы относятся к случаю, когда подынтегральная функция имеет точку ветвления, совпадающую с точкой перевала, и в нашем случае выполнены автоматически. Нетрудно деформировать контур  $\gamma(b)$  нужным образом. Существует непрерывная по  $(z, \tau, \xi)$  функция  $s(z, \tau, \xi)$ , аналитическая по  $z$  в  $V(b)$ , осуществляющая взаимно-однозначное соответствие  $z \leftrightarrow s$  и такая, что  $S - S|_{z=z_1} = s^2$ . Условие (1) можно записать в виде  $\delta < \arg s^2 < \pi - \delta$ . Поскольку на концах контура  $\gamma(b)$  выполнено  $\text{Im } s^2 = \text{Im}(S - S|_{z=z_1}) \geq C > 0$ , то на этих концах  $s^2$  лежит в нужной полуплоскости и отделено от её границы равномерно по  $\tau$  и  $\xi$ . При этом  $\text{Re } s^2$ , очевидно, ограничена равномерно по  $\tau$  и  $\xi$ . Контур  $\gamma(b)$  можно деформировать, например, таким образом, чтобы на плоскости переменной  $s$  образ каждой из «половин»  $\gamma(b)$ , соединяющих точку  $z_1$  с одним из концов  $\gamma(b)$ , представлял собой отрезок прямой, соединяющий  $s = 0$  с образом соответствующего конца. Тогда оба условия окажутся выполненными. При этом обратное отображение  $s \mapsto z(s, \tau, \xi)$  непрерывно по  $(s, \tau, \xi)$ , поэтому контур интегрирования по-прежнему непрерывно зависит от параметров  $\tau$  и  $\xi$ .

**5.** С помощью формул (3.18) и (4.3) легко получить, что

$$S_{zz}|_{z=z_1} = 4(\tau - \tau_n)(1 + O(\xi)). \quad (4.6)$$

Применяя метод Перрона, получим, как при применении стандартного метода перевала, что

$$I = -z_1 p_n e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{S_{zz}|_{z=z_1}}} e^{\frac{i}{\varepsilon} S|_{p=p_n}} (1 + O(\varepsilon)), \quad \delta I = O\left(\varepsilon^{3/2} e^{\frac{i}{\varepsilon} S|_{p=p_n}}\right), \quad (4.7)$$

где в качестве ветви квадратного корня выбрана ветвь, аналитическая в  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{R}_+)$  и принимающая положительные значения на  $\mathbb{R}_+$ . Знак в формуле (4.7) легче всего проконтролировать, сравнив полученную формулу с формулой, получаемой без замены переменной  $p \mapsto z$  с помощью обычного метода перевала в случае, когда  $\xi \geq C$ . Мы опустим дальнейшие детали.

Поскольку функция  $S$ , точка перевала  $z_1$  и контур интегрирования непрерывно зависят от  $\tau$  и  $\xi$ , а число  $\delta$  в условии (1) можно выбрать не зависящим от  $\tau$  и  $\xi$ , нетрудно видеть, что оценки в (4.7) равномерны по  $\tau$  и  $\xi$  (это следует из доказательства теоремы метода Перрона).

**6.** Далее нам потребуется

**Лемма 4.6.** Пусть  $\tau_n \leq \tau \leq 1$ . Выполнены соотношения

$$S|_{p=p_n} = S(1, \tau, 0) + \int_0^\xi Q_0(p_n) d\xi', \quad \frac{z_1^2}{S_{zz}(z_1, \tau, \xi)} = \frac{1}{8} \frac{\partial \ln p_n}{\partial \tau}. \quad (4.8)$$

При этом, если  $\tau - \tau_n \geq \delta_1 > 0$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ , где  $\delta_2 > 0$  достаточно мало, то верны формулы (2.23) и (2.24).

*Доказательство.* Первая формула в (4.8) вытекает непосредственно из формул (3.32) и (3.27). Вторая формула в (4.8) уже была получена ранее, см. (3.43). Первая формула из (2.23) следует из (4.1), вторая — из второй формулы в (4.8) и из формул (4.3) и (4.6). Наконец, (2.24) получается с помощью (4.1).  $\square$

**7.** Доказанная лемма и соотношение

$$\sqrt{\pi} e^{\frac{i\varepsilon}{4}(1-\tau)} K e^{\frac{i}{\varepsilon} S(1, \tau, 0)} = a_n e^{-\frac{i\xi}{2}} e^{-i\pi/4},$$

см. формулы (3.6) и (3.16), а также определение  $a_n$  в (2.19), позволяют вывести из (4.5) и (4.7) формулу

$$e^{\frac{i\varepsilon}{4}(1-\tau)} \mathcal{T}(x, \tau) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\xi Q_0(p_n) d\xi'} \left( \mathcal{T}_0(x, \tau) + O(\varepsilon) \right), \quad (4.9)$$

ср. её с (4.4).

**8.** Наконец, формула (4.4) вытекает из (4.9) и из оценки

$$\left( e^{i\phi(\varepsilon)} - e^{\frac{i\varepsilon}{4}(1-\tau)} \right) \mathcal{T}_0(x, \tau) = O(\varepsilon^{1/2} \xi),$$

которая следует из оценки (3.11) для  $\phi(\varepsilon)$  и из формул (2.22) и (2.23).  $\square$

### 4.3 Грубая оценка $\mathcal{E}(x, \tau)$

В этом разделе мы получим оценки для определённой в (3.10) функции  $\mathcal{E}(x, \tau)$  и завершим доказательство теоремы 2 (и теоремы 1). Выберем достаточно малое  $\delta_2 > 0$ . Здесь мы будем считать, что  $\tau_n \leq \tau \leq 1$  и  $0 \leq \xi \leq \delta_2$ . Справедливо

**Предложение 4.7.** Пусть  $\tau$  и  $\xi$  таковы, как сказано выше. Выберем достаточно малое  $\delta_1 > 0$ . При достаточно малых значениях  $\varepsilon > 0$  для  $\mathcal{E}(x, \tau)$  имеют место следующие равномерные по  $\tau$  и  $\xi$  оценки. При  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_n + \delta_1$  верна оценка (3.50) из леммы 3.30. При  $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$  выполнено

$$\mathcal{E}(x, \tau) = e^{-\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Im} S|_{p=p_n}} O\left(\varepsilon^{1/2} \xi + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{1/3} + \xi}\right). \quad (4.10)$$

Доказательство при  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_n + \delta_1$  оценки (3.50) завершит доказательство теоремы 1. Из оценок (4.10) и (3.11), формулы (4.4) и первой формулы в (3.9) вытекает утверждение теоремы 2.

*Доказательство предложения 4.7.* Пусть  $\delta_1 > 0$  достаточно мало. Обозначим для краткости рассматриваемые в предложении случаи следующим образом: (а)  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_n + \delta_1$  и (б)  $\tau_n + \delta_1 \leq \tau \leq 1$ . Вывод требуемых оценок проводится в несколько шагов.

**1.** Деформируем в (3.10) контур интегрирования  $\gamma$ . В случае (а) поведение линии наискорейшего спуска  $\gamma_0$  описывается предложением 3.17 и леммой 3.20. Линия  $\gamma_0$  может или полностью содержаться в замыкании  $\mathcal{Q}_1$ , или покинуть первый лист римановой поверхности  $\Gamma$  через точку  $p' \geq 1$ , а затем возвращаться на него через точку  $p'' > p'$  и уходить на бесконечность в квадранте  $\mathcal{Q}_1$  этого листа, см. рис. 3.5. Соответственно, в качестве нового контура интегрирования мы выбираем или  $\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_0$ , или  $\gamma = \gamma_2 \cup (\gamma_0 \cap \mathbb{C}_0) \cup [p', p'']$ . Нетрудно показать, что такой контур интегрирования непрерывно зависит от параметров  $\tau$  и  $\xi$ . В случае (б) мы выбираем контур  $\gamma$  точно так же, как при доказательстве предложения 4.5. В любом случае при удалении  $p$  от  $p_n$  вдоль  $\gamma$  монотонно возрастает  $\operatorname{Im} S$ .

Ввиду формул (3.6) и оценок из леммы (3.2) интеграл (3.10) принимает вид

$$\mathcal{E}(x, \tau) = \int_{\gamma} g(p, \varepsilon) e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p, \tau, \xi)} dp, \quad g(p, \varepsilon) = O(p).$$

**2.** Пусть  $b > 0$  достаточно малó. Как и в доказательстве предложения 4.5, перейдём в  $b^2$ -окрестности точки  $p = 1$ , разрезанной вдоль  $[1, +\infty)$ , к локальной переменной  $z = \sqrt{1-p}$ , где  $z > 0$  при  $p < 1$ , и обозначим  $b$ -окрестность точки  $z = 0$  через  $V(b)$ . Как и прежде, определим  $\gamma(b)$  как компоненту связности  $z(\gamma) \cap V(b)$ , содержащую точку перевала  $z_1 = z(p_n)$ . Имеем

$$\mathcal{E}(x, \tau) = \int_{p(\gamma(b))} g(p, \varepsilon) e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p, \tau, \xi)} dp + O(e^{-\sigma_n/\varepsilon} e^{-C/\varepsilon}),$$

где оценка поправки равномерна по  $\tau$  и  $\xi$ . Контур  $p(\gamma(b))$ , вообще говоря, состоит из двух участков: из отрезка вещественной оси  $[p', p_*] + i0$ , где  $p_* = p''$  или  $p_* = 1 + b^2$  (если такой участок имеется), и участка  $p(\gamma(b)) \setminus [p', p_*]$ , идущего вдоль линий наискорейшего спуска. Обозначим интегралы по этим участкам через  $I_1$  и  $I_2$  соответственно.

**3.** Сперва оценим  $I_1$ . Введём обозначение  $\sigma_n = \operatorname{Im} S|_{p=p_n}$ . Мы покажем, что если  $\delta_2 > 0$  достаточно малó, то

$$I_1 = O\left(e^{-\sigma_n/\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{1/3} + \sigma_n^{1/3}}\right). \quad (4.11)$$

Пусть  $p \in [1, 1 + b^2] + i0$ . Из формул (3.8) и (3.5) следует, что в  $b^2$ -окрестности единицы

$$\operatorname{Im} S = \operatorname{Im} \int_0^p l_0(s) ds = C(p-1)^{3/2}(1 + O(p-1)), \quad (4.12)$$

причём формулу (4.12) можно дифференцировать дважды. Имеет место оценка  $|I_1| \leq C e^{-\sigma_n/\varepsilon} \tilde{I}_1$ , где

$$\tilde{I}_1 = \int_{p'}^{1+b^2} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\operatorname{Im} S - \sigma_n)} dp = \int_{p'}^{1+b^2} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(C(p-1)^{3/2}(1 + O(p-1)) - \sigma_n)\right) dp.$$

Можно считать  $b$  настолько малым, что в этой формуле  $|O(p-1)| \leq 1/2$ . Если  $\sigma_n/\varepsilon \leq 1$ , то

$$\tilde{I}_1 \leq C \int_{p'}^{1+b^2} e^{-\frac{C}{\varepsilon}(p-1)^{3/2}} dp \leq C \varepsilon^{2/3} \int_0^\infty e^{-Cs^{3/2}} ds = O(\varepsilon^{2/3}).$$

Пусть  $\sigma_n/\varepsilon \geq 1$ . С учётом (4.12) мы имеем

$$\sigma_n \leq \operatorname{Im} S|_{p=p'} \leq C(p'-1)^{3/2}, \quad p' \geq 1 + C\sigma_n^{2/3}. \quad (4.13)$$

Перейдя в интеграле  $\tilde{I}_1$  к переменной  $t = \sigma_n^{-2/3}(p-1)$ , получим

$$\tilde{I}_1 = \sigma_n^{2/3} \int_{t(p')}^{\sigma_n^{-2/3} b^2} e^{-\sigma_n f(t)/\varepsilon} dt, \quad f(t) = C t^{3/2}(1 + O(t \sigma_n^{2/3})) - 1. \quad (4.14)$$

Поскольку  $\sigma_n f(t) = \operatorname{Im} S - \operatorname{Im} S|_{p=p_n}$ , то  $f(t) \geq 0$  при  $t \geq t(p')$ . Кроме того, если  $b$  достаточно мало, то, в силу возможности двукратного дифференцирования формулы (4.12),

$$f'(t) \geq C t^{1/2}, \quad f''(t) \leq C t^{-1/2} \quad \text{при } 0 < t \leq \sigma_n^{-2/3} b^2.$$

Из (4.13) следует, что  $t(p') \geq C$ . Проинтегрировав по частям в формуле (4.14), получим

$$\tilde{I}_1 = -\frac{\varepsilon}{\sigma_n^{1/3}} \left( \frac{e^{-\sigma_n f(t)/\varepsilon}}{f'(t)} \Big|_{t(p')}^{\sigma_n^{-2/3} b^2} + \int_{t(p')}^{\sigma_n^{-2/3} b^2} \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} e^{-\sigma_n f(t)/\varepsilon} dt \right) = O\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_n^{1/3}}\right).$$

Объединение двух полученных оценок для  $\tilde{I}_1$  приводит к оценке (4.11).

**4.** Теперь оценим  $I_2$ . После замены переменной  $p \mapsto z(p)$  контур интегрирования в интеграле  $I_2$  есть  $\gamma'(b) = \gamma(b) \setminus z([p', p_*])$ . Этот контур целиком лежит на линии наискорейшего спуска. Интеграл  $I_2$  может быть представлен в виде  $I_2 = J_1 + J_2$ , где

$$J_1 = z_1 \int_{\gamma'(b)} O(1) e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p(z), \tau, \xi)} dz, \quad J_2 = \int_{\gamma'(b)} O(z - z_1) e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p(z), \tau, \xi)} dz.$$

Далее следует отдельно рассмотреть случаи (а) и (б). В случае (а) оценка интегралов  $J_1$  и  $J_2$  производится в точности так же, как при доказательстве леммы 3.29, и для  $J_1$  и  $J_2$  выполнено (3.48), а  $I_2 = O(\Delta_2)$ , где  $\Delta_2$  определено в (3.25). Отсюда, из оценки (4.11) для  $I_1$  и из того, что  $|\zeta_n|^2 \geq C\mu_n^{1/3} = C\sigma_n^{1/3}/\varepsilon^{1/3}$ , см. определения  $\zeta_n$  и  $\mu_n$  в (2.16) и (2.18), вытекает оценка (3.50) из леммы 3.30.

**5.** Напомним, что в случае (б) выполнено (4.2). Оценки для  $J_1$  и  $J_2$  получаются в этом случае с помощью классического метода перевала. Легко получить оценки

$$J_1 = O(e^{-\sigma_n/\varepsilon} \varepsilon^{1/2} \xi), \quad J_2 = O(e^{-\sigma_n/\varepsilon} \varepsilon),$$

где использована вытекающая из (4.3) оценка  $z_1 = O(\xi)$ . Из этих оценок и оценки (4.11) интеграла  $I_1$ , а также из неравенства  $\sigma_n \geq C\xi^3$ , следующего в случае (б) из (3.33) и (2.24), вытекает оценка (4.10). Предложение доказано.  $\square$

#### 4.4 Асимптотическое поведение $\mathcal{E}(x, \tau)$ при $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$

Фиксируем некоторое  $C_1 > 0$ . В данном разделе мы будем всюду считать, что  $\tau_n \leq \tau \leq 1$  и  $0 \leq \xi \leq C_1\varepsilon^{2/3}$ , если не сказано обратное, и более аккуратно изучим асимптотическое поведение функции  $\mathcal{E}(x, \tau)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Полученные результаты завершат доказательство теоремы 3.

##### 4.4.1 Предварительный анализ

Введём при  $u > 0$  обозначения  $\gamma_-(u) = [1 - iu, 1]$  и  $\gamma_+(u) = [1, 1 + u]$ . Кроме того, положим при  $p \in \mathbb{C}_0$

$$\mathbf{a}(p, \varepsilon) = \int_1^{p-\varepsilon/2} (L_0(q) - l_0(q)) dq + \int_{p-\varepsilon/2}^p (l_0(p) - l_0(q)) dq. \quad (4.15)$$

В данном разделе мы докажем

**Предложение 4.8.** Пусть  $0 < \alpha < 1/6$ . Положим  $\rho = \rho(\varepsilon) = \varepsilon^{2/3-\alpha}$ . Для  $\mathcal{E}(x, \tau)$  справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, \tau) &= \mathcal{R}(x, \tau) + \mathcal{G}(x, \tau) + O(\varepsilon^{7/6}), \\ \mathcal{R}(x, \tau) &= \frac{iK}{\varepsilon^{3/2}} \int_{\gamma_+(\rho)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p+i0, \tau, \xi)} \left( \int_1^{p-\varepsilon/2} (P(q+i0) + \overline{P(q+i0)}) dq \right) p dp, \\ \mathcal{G}(x, \tau) &= \frac{iK}{\varepsilon^{3/2}} \left( \int_{\gamma_-(\rho)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p, \tau, \xi)} \mathbf{a}(p, \varepsilon) p dp - \int_{\gamma_+(\rho)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p+i0, \tau, \xi)} \mathbf{a}(p-i0, \varepsilon) p dp \right). \end{aligned}$$

Здесь  $P$  — аналитическая в  $\mathbb{C}_+$   $\varepsilon$ -периодическая функция, представление которой в виде ряда Фурье дано формулами (А.9).

*Доказательство.* Положим  $\gamma(u) = \gamma_-(u) \cup (\gamma_+(u) + i0)$  для  $u > 0$ . Сначала проверим, что

$$\mathcal{E}(x, \tau) = \frac{iK}{\varepsilon^{3/2}} \int_{\gamma(\rho)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p, \tau, \xi)} \mathbf{a}(p, \varepsilon) p \, dp + O(\varepsilon^{7/6}). \quad (4.16)$$

В силу леммы 3.3 при  $\tau \geq \tau_n$  контур интегрирования в (3.10) можно деформировать к контуру  $\gamma' = (1 - i\mathbb{R}_+) \cup (1 + \mathbb{R}_+ + i0)$ . Нам понадобится

**Лемма 4.9.** *Верны утверждения:*

1.  $\operatorname{Im} S(p, \tau, \xi)$  монотонно возрастает, если  $p$  удаляется от  $p = 1$  вдоль  $\gamma'$ .
2. Фиксируем достаточно малое  $r > 0$ . При  $p \in \gamma(r)$  выполняется оценка  $\operatorname{Im} S \geq C |p - 1|^{3/2}$ .

*Доказательство.* Утверждение леммы с заменой  $S$  на  $S_0 = S|_{\xi=0}$  доказано в [2, Lemma 7.2]. Остаётся заметить, что при  $p \in \mathbb{C}_0$  выполнены соотношения:

- (a)  $\operatorname{Im} Q_0(p) = 0$  при  $p \in 1 + \mathbb{R}_+ + i0$ ;
- (b)  $\operatorname{Re} Q'_0(p) < 0$  при  $p \in (1 - i\mathbb{R}_+) \setminus \{1\}$ .

Соотношение (a) мгновенно следует из определения  $Q_0$ . Для того чтобы проверить (b), представим  $p$  в виде  $p = 1 - is$ ,  $s > 0$ . Тогда

$$\operatorname{Re} Q'_0(p) = \operatorname{Re} \frac{p}{Q_0(p)} = \operatorname{Im} \frac{(1 - is) e^{-i\pi/4} \sqrt{2 + is}}{\sqrt{s} \sqrt{4 + s^2}},$$

где  $\arg \sqrt{2 + is} = 0$  при  $s = 0$ . Теперь из включений

$$\arg(1 - is) \in (-\pi/2, 0], \quad \arg \sqrt{2 + is} \in [0, \pi/4)$$

сразу следует (b). □

Из (3.13) вытекает, что при  $|p| \rightarrow \infty$  вдоль  $\gamma'$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S &= 2s (\ln(2s) - 1) + O(\ln s), & p &= 1 + s + i0, \\ \operatorname{Im} S &= 2s (\tau - \tau_n + \pi/2 + \xi/2) + O(\ln s), & p &= 1 - is, \end{aligned}$$

где  $s > 0$ . Пусть  $r > 0$ . Из этих формул и из первого пункта леммы 4.9 следует, что с точностью до поправки  $O(e^{-C/\varepsilon})$  функция  $\mathcal{E}(x, \tau)$  равна правой части (3.10) с заменой контура интегрирования на  $\gamma(r)$ . Теперь, выбирая  $r > 0$  достаточно малым и используя второй пункт леммы 4.9, нетрудно показать, что  $\mathcal{E}(x, \tau)$  равна правой части (3.10) с заменой контура на  $\gamma(\rho)$  с точностью до поправки  $O(e^{-C\varepsilon^{-3\alpha/2}})$ .

Из определений  $\phi(\varepsilon)$  и  $A$ , см. (3.6) и (3.7), и из оценок (3.12) и (A.8) следует формула

$$e^{-i\phi(\varepsilon)} A(p, \varepsilon) - 1 = \frac{i}{\varepsilon} \int_1^{p-\varepsilon/2} (L_0(q) - l_0(q)) \, dq + \frac{i}{\varepsilon} \int_{p-\varepsilon/2}^p (l_0(p) - l_0(q)) \, dq + O(\varepsilon),$$

а из второго пункта леммы 4.9 вытекает оценка

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\gamma(\rho)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p, \tau, \xi)} O(\varepsilon) p \, dp = O(\varepsilon^{7/6}).$$

Формула (4.16) доказана.

Для завершения доказательства предложения воспользуемся результатами, описанными в разделе А.3 приложения А:

1. В  $\mathbb{C}_+ \cup (\mathbb{R} + i0)$  выполнено  $L_0 = L_1 + P$ , где функция  $L_1$  аналитична в  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1 - \varepsilon/2]$ , а функция  $P$  аналитична в  $\mathbb{C}_+$  и описывается формулами (А.9).
2. При  $p \in \mathbb{C}_- \cup (\mathbb{R} - i0)$  выполнено  $L_1(p) = 2\pi - L_0(p) + \overline{P(\bar{p})}$ , см. лемму А.6.
3. Как вытекает из (3.1), при  $p \geq 1$  выполнено  $l_0(p + i0) + l_0(p - i0) = 2\pi$ .

Из этих результатов следует, что при  $p \geq 1$

$$\mathbf{a}(p + i0, \varepsilon) + \mathbf{a}(p - i0, \varepsilon) = \int_1^{p-\varepsilon/2} \left( P(q + i0) + \overline{P(q + i0)} \right) dq. \quad (4.17)$$

Утверждение предложения вытекает непосредственно из (4.16) и (4.17). □

#### 4.4.2 Асимптотическое представление для $\mathcal{R}(x, \tau)$

Здесь мы докажем следующую лемму:

**Лемма 4.10.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедлива равномерная по  $\xi$  и  $\tau$  формула

$$\mathcal{R}(x, \tau) = \mathcal{R}_0(x, \tau) + O(\varepsilon), \quad (4.18)$$

где  $\mathcal{R}_0$  определено формулой (2.28).

*Доказательство.* Положим

$$W(p) = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \int_1^p \left( P(q + i0) + \overline{P(q + i0)} \right) dq, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Из (А.9) следует, что для  $p \in \mathbb{R}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$W(p) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi} f\left(\frac{p-1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon), \quad f(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h_k e^{2\pi i k p}, \quad (4.19)$$

где коэффициенты  $h_k$  определены в (2.26). Используя (4.19) и лемму 4.9, получим

$$\mathcal{R}(x, \tau) = \frac{K e^{i\pi/4}}{\pi} \int_{\gamma_+(\rho)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S(p, \tau, \xi)} f\left(\frac{p-1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) dp + O(\varepsilon^{5/3}).$$

С учётом формулы (3.15) для  $S$  и оценки  $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$  первое слагаемое в правой части этой формулы принимает вид

$$\frac{c_n K e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tau}}{\pi} \int_0^\rho e^{\frac{i}{\varepsilon} (\sqrt{2} \xi t^{1/2} - 2(\tau - \tau_n)t + \frac{4\sqrt{2}}{3} i (1 + O(\varepsilon^{2/3})) t^{3/2} + O(t^2))} f\left(\frac{t}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) dt,$$

где  $c_n = e^{\frac{i}{\varepsilon} (2\tau_n - 3) + \frac{i\pi}{4}}$ , а  $t^{1/2} \geq 0$ . Поскольку  $\rho(\varepsilon) = \varepsilon^{2/3 - \alpha}$ , где  $0 < \alpha < 1/6$ , то интеграл в последней формуле может быть представлен в виде

$$\int_0^\rho e^{\frac{i}{\varepsilon} (\sqrt{2} \xi t^{1/2} - 2(\tau - \tau_n)t + \frac{4\sqrt{2}}{3} i t^{3/2})} \left(1 + O\left(\frac{t^{3/2}}{\varepsilon^{1/3}}\right) + O\left(\frac{t^2}{\varepsilon}\right)\right) f\left(\frac{t}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) dt.$$

При  $c > 0$  верны оценки интегралов

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c}{\varepsilon} t^{3/2} \frac{t^{3/2}}{\varepsilon^{1/3}}} dt = O(\varepsilon^{4/3}), \quad \int_0^\infty e^{-\frac{c}{\varepsilon} t^{3/2} \frac{t^2}{\varepsilon}} dt = O(\varepsilon), \quad \int_\rho^\infty e^{-\frac{c}{\varepsilon} t^{3/2}} dt = O\left(e^{-c\varepsilon^{-3\alpha/2}}\right),$$

поэтому

$$\mathcal{R}(x, \tau) = \frac{c_n K e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tau}}{\pi} \int_0^\infty e^{\frac{i}{\varepsilon} (\sqrt{2} \xi t^{1/2} - 2(\tau - \tau_n)t + \frac{4\sqrt{2}}{3} i t^{3/2})} f\left(\frac{t}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) dt + O(\varepsilon).$$

Используя разложение (4.19) функции  $f$  в ряд Фурье и распространяя данное для  $n \in \mathbb{N}$  определение (1.4) на случай всех целочисленных индексов, из последней формулы легко получить

$$\mathcal{R}(x, \tau) = \frac{c_n K e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tau}}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2/3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k a(\nu_{n-k}, \omega) + O(\varepsilon), \quad (4.20)$$

где  $\nu_m$  и  $\omega$  определены в (2.25), а функция  $a$  определена формулой (2.27). Так как  $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$ , а  $\tau = O(1)$ , то легко проверить, что  $c_n K e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tau} / \pi = a_n / \pi^{3/2} + O(\varepsilon^{2/3})$ , где  $a_n$  определено в (2.19). Отсюда и из (4.20) вытекает (4.18).  $\square$

#### 4.4.3 Оценка $\mathcal{G}(x, \tau)$

Выберем некоторое  $\delta > 0$ . Здесь мы будем по-прежнему считать  $\xi$  таким, как указано в начале раздела 4.4, но будем рассматривать только  $\tau_n + \delta \leq \tau \leq 1$ . При таких значениях  $\tau$  и  $\xi$  мы докажем оценку для  $\mathcal{G}(x, \tau)$ , завершив тем самым доказательство теоремы 3.

**Лемма 4.11.** Пусть  $\tau$  и  $\xi$  таковы, как сказано выше, тогда при достаточно малых значениях  $\varepsilon > 0$  справедлива равномерная по  $\tau$  и  $\xi$  оценка  $\mathcal{G}(x, \tau) = O(\varepsilon)$ .

Теорема 3 следует из лемм 4.11 и 4.10, предложений 4.8 и 4.5, первой формулы в (3.9) и, наконец, из оценки (3.11) для  $\phi(\varepsilon)$ .

*Доказательство леммы 4.11.* Доказательство проводится в несколько шагов.

**1.** Функция  $\mathbf{a}(\cdot, \varepsilon)$  аналитична в  $\mathbb{C}_0$  и, согласно (3.12),  $\mathbf{a}(p, \varepsilon) = O(\varepsilon^{3/2})$  при  $p \in \mathbb{C}_0$  и вплоть до

границы  $\mathbb{C}_0$ . Как следствие, функция  $\mathcal{G}$  может быть представлена в виде

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_- + \mathcal{G}_+, \quad \mathcal{G}_\pm = \int_{\gamma_\pm(\rho) - i0} e^{\frac{i}{\varepsilon} S_\pm(p, \tau, \xi)} g_\pm(p, \varepsilon) dp,$$

где контуры интегрирования лежат в замыкании полуплоскости  $\mathbb{C}_-$ . Мы считаем, что  $S_- = S$  в  $\mathbb{C}_-$ , а под  $S_+$  понимаем аналитическое продолжение  $S$  из  $\mathbb{C}_+$  в  $\mathbb{C}_-$  через луч  $1 + \mathbb{R}_+$ . Функции  $g_\pm$  аналитичны в  $\mathbb{C}_-$ , непрерывны вплоть до  $\mathbb{R}$  и допускают в замыкании  $\mathbb{C}_-$  оценки  $g_\pm = O(1)$ .

**2.** Фиксируем  $\theta \in (-\pi/3, 0)$ . Напомним, что  $0 < \alpha < 1/6$ . Покажем, что при достаточно малом  $\varepsilon$

$$\mathcal{G}_+ = \int_1^{1+e^{i\theta}\rho} e^{\frac{i}{\varepsilon} S_+(p, \tau, \xi)} g_+ dp + O\left(e^{-C\varepsilon^{-3\alpha/2}}\right). \quad (4.21)$$

В формуле (3.15) положим  $z = -i\sqrt{s} e^{i\varphi/2}$ , где  $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$ , а  $s > 0$  достаточно мал. Отметим, что при этом  $p(z) = 1 - z^2 = 1 + se^{i\varphi}$  при  $\varphi < 0$  находится в  $\mathbb{C}_-$  второго листа римановой поверхности  $\Gamma$ . Для  $\text{Im } S_+$  нетрудно получить формулу

$$\text{Im } S_+ = \xi\sqrt{2s} \sin(\varphi/2) - 2s(\tau - \tau_n) \sin \varphi + \frac{4\sqrt{2}}{3} s^{3/2} \cos(3\varphi/2) + O(\xi s^{3/2} + s^2). \quad (4.22)$$

Полагая здесь  $s = \rho(\varepsilon) = \varepsilon^{2/3-\alpha}$  и учитывая оценку  $\xi = O(\varepsilon^{2/3})$ , получим

$$\text{Im } S_+ = -2(\tau - \tau_n) \varepsilon^{2/3-\alpha} \sin \varphi + \frac{4\sqrt{2}}{3} \varepsilon^{1-3\alpha/2} \cos(3\varphi/2) + O(\varepsilon^{1-\alpha/2}).$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы неотрицательно. Пусть  $\theta \leq \varphi \leq 0$ , тогда третье слагаемое при достаточно малых  $\varepsilon$  асимптотически меньше второго. Таким образом, для  $\text{Im } S_+$  справедлива оценка снизу  $\text{Im } S_+ \geq C\varepsilon^{1-3\alpha/2}$ , из которой следует формула (4.21).

**3.** Докажем оценку  $\mathcal{G}_+ = O(\varepsilon)$ . Пусть  $\varphi = \theta$ . При  $0 \leq s \leq \rho$  из (4.22) легко получить оценку  $\text{Im } S_+ \geq Cs - \sqrt{2s}\xi$ . При этом при  $0 \leq s \leq \varepsilon^{2/3}$  мы имеем  $\xi\sqrt{s} = O(\varepsilon)$ , а при  $\varepsilon^{2/3} \leq s \leq \rho$  имеем  $\xi/\sqrt{s} = o(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и  $\text{Im } S_+ \geq Cs = C|p-1|$  при достаточно малых  $\varepsilon$ . Отсюда вытекает оценка

$$\int_1^{1+e^{i\theta}\rho} e^{\frac{i}{\varepsilon} S_+(p, \tau, \xi)} g_+ dp = O(\varepsilon),$$

откуда с учётом (4.21) следует оценка  $\mathcal{G}_+ = O(\varepsilon)$ .

**4.** Получить оценку  $\mathcal{G}_-$  проще: при  $p = 1 - is \in \gamma_-(\rho)$  правая часть (4.22) с  $\varphi = 3\pi/2$  даёт  $\text{Im } S_-$ . При этом первые три слагаемых в правой части неотрицательны и их сумма оценивается снизу вторым из них, равным  $2(\tau - \tau_n)s$ , а поправочный член есть  $O(\varepsilon)$ , откуда вытекает оценка  $\mathcal{G}_- = O(\varepsilon)$ . Отсюда и из предыдущего пункта следует утверждение леммы.  $\square$

## Глава 5. Решение $\Psi_{cs}$ и его асимптотики

В данной главе мы докажем теоремы, относящиеся к решению  $\Psi_{cs}$  уравнения (1.1). Эти теоремы были сформулированы в разделе 2.2 главы 2. Сперва мы докажем в разделе 5.1 теорему 4 и обоснуем формулы (2.37) и (2.38) для решения  $\Psi_{cs}$ . После этого мы докажем в разделе 5.2 теоремы 5 и 6 и получим асимптотические формулы для  $\Psi_{cs}$  при  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \leq C$ . Наконец, в разделе 5.2 мы докажем теоремы 7 и 8, получив асимптотики  $\Psi_{cs}$  при  $p$ , близких к единице.

Далее мы считаем, что  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\tau \geq 1$  и  $p \geq 1 + \varepsilon/2$ , если не указано обратное, а также предполагаем ограниченность  $\tau$ .

### 5.1 Построение решения $\Psi_{cs}$

*Доказательство теоремы 4.* Пусть функции  $p_1, p_2, p_3, T, r, t$  и  $R$  определены так, как сказано в разделе 2.2.2. В силу леммы А.3 ряды в формулах (2.37) и (2.38) сходятся достаточно быстро, и функция  $\Psi_{cs}$  бесконечно дифференцируема по  $\tau$  и  $x$  при  $0 < x < 1 - \tau$  и  $x > 1 - \tau$ . Каждое слагаемое рядов (2.37) и (2.38) удовлетворяет уравнению Шрёдингера (1.1), поэтому и  $\Psi_{cs}$  удовлетворяет этому уравнению при  $0 < x < 1 - \tau$  и  $x > 1 - \tau$ . Условие Дирихле при  $x = 0$  для  $\Psi_{cs}$ , очевидно, выполнено. Для завершения доказательства теоремы остаётся доказать только непрерывность  $\Psi_{cs}$  и  $\partial\Psi_{cs}/\partial x$  при  $x = 1 - \tau$ .

Очевидно, каждый член ряда в (2.38) можно представить в виде суммы двух слагаемых, в одно из которых войдёт множитель  $e^{-ik_mx}$ , а в другое — множитель  $e^{ik_mx}$ . Условимся называть эти слагаемые, соответственно, волной, уходящей внутри сектора  $W$  от его границы  $\{x = 1 - \tau\}$ , и волной, идущей к  $\{x = 1 - \tau\}$ . Волны, соответствующие различным  $k_m$ , будем нумеровать тем же номером  $m$ , что и члены ряда. Уходящая от  $\{x = 1 - \tau\}$  волна с номером  $m = 0$  и сумма первых двух слагаемых в формуле (2.37) будут при  $x = 1 - \tau$  переходить друг в друга непрерывно вместе с производными по  $x$ , если при всех  $p \in \mathbb{R}$  и  $x \in \mathbb{R}$  выполнены равенства

$$-t(p) e^{\frac{i}{\varepsilon}(1-x) + \frac{i}{\varepsilon}p^2x - ipx} R(p)/(2i) = e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_2^2(p)(1-x) - ip_2(p)x} + r(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_3^2(p)(1-x) + ip_3(p)x},$$

$$pt(p) e^{\frac{i}{\varepsilon}(1-x) + \frac{i}{\varepsilon}p^2x - ipx} R(p)/(2i) = -p_2(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_2^2(p)(1-x) - ip_2(p)x} + p_3(p) r(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_3^2(p)(1-x) + ip_3(p)x},$$

что эквивалентно набору соотношений

$$p^2 - 1 - \varepsilon p = p_2^2(p) - \varepsilon p_2(p) = p_3^2(p) + \varepsilon p_3(p), \quad (5.1)$$

$$-t(p) e^{\frac{i}{\varepsilon}} R(p)/(2i) = e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_2^2(p)} + r(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_3^2(p)}, \quad (5.2)$$

$$pt(p) e^{\frac{i}{\varepsilon}} R(p)/(2i) = -p_2(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_2^2(p)} + p_3(p) r(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon}p_3^2(p)}. \quad (5.3)$$

Равенства (5.1) выполняются для  $p_2$  и  $p_3$ , определённых в (2.34). Решение (5.2) и (5.3) как системы линейных уравнений относительно  $r(p)$  и  $t(p)$  приводит, с учётом определений  $p_2$  и  $p_3$ , к формулам (2.35) и (2.36) для  $r$  и  $t$ .

Наконец, рассмотрим, с одной стороны, сумму идущей внутри  $W$  к  $\{x = 1 - \tau\}$  волны с номером  $m$  и уходящей от  $\{x = 1 - \tau\}$  волны с номером  $m + 1$ , а с другой — член бесконечного ряда в (2.37) с номером  $m$ . При  $x = 1 - \tau$  они будут переходить друг в друга непрерывно вместе с производными по  $x$  для каждого  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , если при всех  $k \in \mathbb{R}$  и  $x \in \mathbb{R}$  выполнено

$$e^{\frac{i}{\varepsilon}(1-x)} \left( e^{\frac{i}{\varepsilon}k^2x+ikx} R(k) - e^{\frac{i}{\varepsilon}(k+\varepsilon)^2x-i(k+\varepsilon)x} R(k+\varepsilon) \right) = 2i T(k) R(k) e^{\frac{i}{\varepsilon}p_1^2(k)x+ip_1(k)x}, \quad (5.4)$$

$$e^{\frac{i}{\varepsilon}(1-x)} \left( k e^{\frac{i}{\varepsilon}k^2x+ikx} R(k) + (k+\varepsilon) e^{\frac{i}{\varepsilon}(k+\varepsilon)^2x-i(k+\varepsilon)x} R(k+\varepsilon) \right) = 2i p_1(k) T(k) R(k) e^{\frac{i}{\varepsilon}p_1^2(k)x+ip_1(k)x}. \quad (5.5)$$

В результате рассуждений, аналогичных приведённым выше, нетрудно убедиться, что эти соотношения выполняются для функций  $p_1$  и  $T$ , определённых в (2.5), и для функции  $R$ , решающей разностное уравнение (2.4). Формула для  $p_1$  получается из сравнения показателей экспонент в левой и правой частях равенства (5.4). Подстановка формулы для  $p_1$  в (5.4) и (5.5) и решение полученной системы линейных уравнений относительно  $T(k)$  и  $R(k+\varepsilon)/R(k)$  ведут к формуле для  $T$  и разностному уравнению для  $R$ .  $\square$

## 5.2 Асимптотики $\Psi_{cs}$ вдали от края непрерывного спектра

Здесь мы докажем теоремы 5 и 6, описывающие асимптотическое поведение  $\Psi_{cs}$  при  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \leq C$  внутри и вне потенциальной ямы соответственно. Прежде чем перейти к доказательствам этих теорем, мы сформулируем в разделе 5.2.1 две леммы, которые понадобятся нам далее. Затем, в разделе 5.2.2, мы докажем теорему 6 — чуть более сложную из двух. Теорема 5 доказывается аналогично и более просто, и мы кратко опишем её доказательство в разделе 5.2.3.

### 5.2.1 Две леммы

Положим при  $p \geq 1$

$$l(p) = l_0(p + i0),$$

где функция  $l_0$  определена в  $\mathbb{C}_0$  формулами (A.4) и удовлетворяет соотношениям (3.1), которые также можно принять за её определение. Очевидно, для  $l$  выполнено

$$l(p) = -i \ln \rho(p), \quad l(1) = \pi, \quad (5.6)$$

где функция  $\rho$  определена в (2.3). В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы:

**Лемма 5.1.** При  $k \geq 1$  и  $p \geq 1$  справедлива формула

$$R(k) = R(p) \left(1 + O(\varepsilon^{1/2})\right) e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_p^k l(s) ds}, \quad (5.7)$$

оценка погрешности в которой равномерна.

*Доказательство.* Формула (5.7) вытекает из определения (A.7) функции  $R$ , из первой формулы в (A.5) и из леммы A.4.  $\square$

**Лемма 5.2.** Пусть  $b > 0$ . При  $1 \leq p \leq 1 + b$  имеют место соотношения

$$l(p) = \pi + 2\sqrt{2}i\sqrt{p-1} + O((p-1)^{3/2}), \quad \text{Im } l(p) \geq C\sqrt{p-1}, \quad (5.8)$$

где  $C > 0$ , а квадратный корень принимает неотрицательные значения. При всех  $k \geq p \geq 1$  выполнена оценка

$$\text{Im} \int_p^k l(s) ds \geq \text{Im } l(p) (k - p), \quad (5.9)$$

причём при  $p > 1$ ,  $k \rightarrow p$  верна формула

$$\int_p^k l(s) ds = l(p) (k - p) + O\left((k - p)^2 / \sqrt{p^2 - 1}\right). \quad (5.10)$$

*Доказательство.* Из соотношений (3.1) и из определения функции  $l$  следует, что  $l(p) = \pi + 2i \operatorname{arcosh} p$ ,  $p \geq 1$ . Утверждение леммы очевидным образом следует отсюда и из свойств обратного гиперболического косинуса.  $\square$

## 5.2.2 Доказательство теоремы 6

Здесь мы будем рассматривать решение  $\Psi_{cs}$  вне потенциальной ямы, при  $x \geq 1 - \tau$ , где оно описывается формулой (2.37). При этом как здесь, так и далее мы будем, не оговаривая это каждый раз отдельно, использовать обозначение  $k_m = p + \varepsilon m$ , как в формуле (2.37).

Асимптотическое поведение первых двух слагаемых в формуле (2.37) находится тривиально, и сложность при доказательстве теоремы 6 представляет только изучение бесконечной суммы

$$\Sigma_1(x, \tau, p) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon} p_1^2(k_m)(1-\tau) + i p_1(k_m)x} T(k_m) R(k_m). \quad (5.11)$$

Идея доказательства теоремы 6 состоит в замене функции  $R$  в некотором количестве начальных членов ряда  $\Sigma_1$  на асимптотику (5.7) с последующей линейризацией функции, стоящей в показателе экспоненты, с помощью формулы (5.10). Сумма оставшихся членов ряда при этом оказывается малой.

Асимптотические формулы для первых двух слагаемых в (2.37) даёт

**Лемма 5.3.** Фиксируем  $\tau_* < 1$  и определим  $\kappa = \kappa(\xi, p, \varepsilon)$  формулой (2.45). При  $\tau_* \leq \tau \leq 1$  верны формулы

$$e^{-\frac{i}{\varepsilon} p_2^2(p)\tau - ip_2(p)x} = \kappa e^{-\frac{i}{\varepsilon} Q(p - \frac{\varepsilon}{2})\xi} (1 + O(\varepsilon)), \quad (5.12)$$

$$r(p) e^{-\frac{i}{\varepsilon} p_3^2(p)\tau + ip_3(p)x} = \rho\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) \kappa e^{\frac{i}{\varepsilon} Q(p - \frac{\varepsilon}{2})\xi} (1 + O(\varepsilon)). \quad (5.13)$$

*Доказательство.* Докажем формулу (5.13), формула (5.12) доказывается аналогично. Используя определение  $p_3$ , см. (2.34), получаем

$$\begin{aligned} -ip_3^2\tau/\varepsilon + ip_3x &= -ip_3^2\tau/\varepsilon + ip_3(1 - \tau) + ip_3\xi/\varepsilon \\ &= -i(p_3^2 + \varepsilon p_3)\tau/\varepsilon + ip_3 + ip_3\xi/\varepsilon = -i(p_3 + \varepsilon/2)^2\tau/\varepsilon + ip_3 + ip_3\xi/\varepsilon + O(\varepsilon) \\ &= -i((p - \varepsilon/2)^2 - 1)\tau/\varepsilon + iQ(p - \varepsilon/2) - i\xi/2 + iQ(p - \varepsilon/2)\xi/\varepsilon + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Отсюда и из определения (2.35) функции  $r(p)$  вытекает формула (5.13).  $\square$

Перейдём к изучению суммы  $\Sigma_1$ . Фиксируем некоторые  $\tau_* < 1$  и  $c_1, c_2, c_3 > 0$ , а также такие  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , что выполнено (2.46). Будем считать, что условия (2.47) теоремы 6 выполнены. С учётом оценки в (5.8) и ограниченности  $p$  легко получить оценку

$$\sum_{m=M}^{\infty} e^{-\operatorname{Im} l(p)m} = \frac{e^{-\operatorname{Im} l(p)M}}{1 - e^{-\operatorname{Im} l(p)}} = O\left((p-1)^{-1/2} e^{-C\sqrt{p-1}M}\right), \quad M \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (5.15)$$

Будем обозначать через  $[a]$  целую часть числа  $a \in \mathbb{R}$  и положим  $m_\beta = [\varepsilon^{\beta-1}]$ . Поскольку при  $k \geq 1$  выполнено  $p_1(k) \in \mathbb{R}$  и  $|T(k)| \leq 1$ , то

$$\left| \frac{1}{R(p)} \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon} p_1^2(k_m)(1-\tau) + ip_1(k_m)x} T(k_m) R(k_m) \right| \leq \frac{1}{|R(p)|} \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} |R(k_m)|. \quad (5.16)$$

Для выражения в правой части (5.16) имеет место оценка, вытекающая из формул (5.7), (5.9) и (5.15), а также из неравенства  $p-1 \geq c_2\varepsilon^\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|R(p)|} \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} |R(k_m)| &\leq C \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Im} \int_p^{k_m} l(s) ds} \leq C \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Im} l(p)(k_m-p)} \\ &= C \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} e^{-\operatorname{Im} l(p)m} = O\left(\varepsilon^{-\alpha/2} e^{-C\varepsilon^{\alpha/2+\beta-1}}\right) = O\left(e^{-C\varepsilon^{\alpha/2+\beta-1}}\right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Заметим, что оценённый выше хвост ряда экспоненциально мал, поскольку предполагаемое нами условие  $\alpha < 2(1 - \beta)$  равносильно условию  $\alpha/2 + \beta - 1 < 0$ . Из формулы (5.7) и из оценок (5.16)

и (5.17) мы получаем

$$\Sigma_1 = R(p) \sum_{m=0}^{m_\beta} e^{\frac{i}{\varepsilon} p_1^2(k_m)(1-\tau) + ip_1(k_m)x} T(k_m) (1 + O(\varepsilon^{1/2})) e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_p^k l(s) ds} + O\left(R(p) e^{-C\varepsilon^{\alpha/2+\beta-1}}\right). \quad (5.18)$$

Преобразовать эту формулу далее нам позволит

**Лемма 5.4.** Пусть  $p$  принимает значения, указанные в (2.47). Тогда при  $0 \leq m \leq m_\beta = \lfloor \varepsilon^{\beta-1} \rfloor$  верны формулы

$$T(k_m) = T(p - \varepsilon) \left(1 + O\left(\frac{\varepsilon^\beta}{\sqrt{p-1}}\right)\right), \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\varepsilon} p_1^2(k_m)(1-\tau) + ip_1(k_m)x &= \left(\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)(1-\tau) - \frac{i\xi}{2} + \frac{i}{\varepsilon} Q(p)\xi\right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2} \\ &+ i \left(2p(1-\tau) + \frac{p\xi}{Q(p)}\right) (m+1) + O\left(\varepsilon^{2\beta-1} \left(1 + \frac{\xi}{(p-1)^{3/2}}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

*Доказательство.* Докажем сперва формулу (5.20). Рассуждая аналогично (5.14), получим, с учётом определения  $p_1$  в (2.5),

$$\begin{aligned} ip_1^2(k_m)(1-\tau)/\varepsilon + ip_1(k_m)x &= i(p_1(k_m) + \varepsilon/2)^2(1-\tau)/\varepsilon + ip_1(k_m)\xi/\varepsilon + O(\varepsilon) \\ &= i((k_m + \varepsilon/2)^2 - 1)(1-\tau)/\varepsilon - i\xi/2 + iQ(k_m + \varepsilon/2)\xi/\varepsilon + O(\varepsilon) \\ &= i((p - \varepsilon/2)^2 - 1)(1-\tau)/\varepsilon + 2ip(1-\tau)(m+1) - i\xi/2 + iQ(k_m + \varepsilon/2)\xi/\varepsilon + O(\varepsilon(m+1)^2). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Из определения  $Q$  в (2.3) легко получить формулу

$$Q\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) = Q(p) + O\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{p-1}}\right), \quad (5.22)$$

из которой, в свою очередь, следует соотношение

$$Q\left(k_m + \frac{\varepsilon}{2}\right) = Q\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{p}{Q(p)}\varepsilon(m+1) + O\left(\frac{\varepsilon^2(m+1)^2}{(p-1)^{3/2}}\right). \quad (5.23)$$

С помощью (5.23) нетрудно получить (5.20) из формулы (5.21). Формула (5.19) следует из определения  $T$  в (2.5) и из формулы (5.23):

$$T(k_m) = \frac{-i(k_m + \varepsilon/2)e^{i/\varepsilon}}{Q(k_m + \varepsilon/2) + (k_m + \varepsilon/2)} = \frac{-i(p - \varepsilon/2)e^{i/\varepsilon}}{Q(p - \varepsilon/2) + (p - \varepsilon/2)} \left(1 + O\left(\frac{\varepsilon(m+1)}{\sqrt{p-1}}\right)\right).$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.4 и формула (5.10) с  $k = k_m$  позволяют получить из (5.18) формулу

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = R(p) \left( e^{-\frac{i\xi}{2}} e^{\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)(1-\tau)} e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p)\xi} \right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2} T(p-\varepsilon) e^{-il(p)} \\ \times \sum_{m=0}^{m_\beta} e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)}+l(p))(m+1)} (1 + O(\Delta)) + O\left(R(p) e^{-C\varepsilon^{\alpha/2+\beta-1}}\right), \end{aligned}$$

где  $\Delta$  определено формулой (2.49). Как следует из оценки (5.15) и из неравенства  $p-1 \geq c_2\varepsilon^\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=0}^{m_\beta} e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)}+l(p))(m+1)} O(\Delta) \right| = O\left(\frac{e^{il(p)}\Delta}{\sqrt{p-1}}\right), \\ \sum_{m=0}^{m_\beta} e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)}+l(p))(m+1)} = \frac{e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)}+l(p))}}{1 - e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)}+l(p))}} + O\left(e^{il(p)} e^{-C\varepsilon^{\alpha/2+\beta-1}}\right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

поэтому, с учётом соотношения  $e^{il(p)} = \rho(p)$ , см. (5.6),

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = R(p) \left( e^{-\frac{i\xi}{2}} e^{\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)(1-\tau)} e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p)\xi} \right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2} T(p-\varepsilon) \\ \times \left( \frac{e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)})}}{1 - e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)})}} \rho(p) + O\left(\frac{\Delta}{\sqrt{p-1}}\right) \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Нетрудно получить из определений  $T$ ,  $t$  и  $\kappa$ , см. (2.5), (2.36) и (2.45), что

$$\begin{aligned} t(p) R(p) \left( e^{-\frac{i\xi}{2}} e^{\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)(1-\tau)} e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p)\xi} \right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2} T(p-\varepsilon) \\ = e^{-\frac{i}{\varepsilon}p^2} \left( \frac{-4iQ(p)}{Q(p)+p} e^{-i(Q(p)-p)} e^{-\frac{i\xi}{2}} e^{\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)(1-\tau)} e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p)\xi} \frac{-ipe^{i/\varepsilon}}{Q(p)+p} \right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2} \\ = \kappa \left( \frac{-4pQ(p)}{(Q(p)+p)^2} \right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2} e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p-\frac{\varepsilon}{2})\xi} (1 + O(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Формула (5.22) и элементарное соотношение  $\rho(p) = -(Q(p)+p)^{-2}$  позволяют написать

$$\rho\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \rho(p) \left( 1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{p-1}}\right) \right), \quad (5.27)$$

$$\left( \frac{-4pQ(p)}{(Q(p)+p)^2} \right) \Big|_{p:=p-\varepsilon/2} = 4pQ\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) \rho(p) \left( 1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{p-1}}\right) \right). \quad (5.28)$$

Теперь формулы (5.25), (5.26), (5.28) и вытекающая из (5.15) и (5.24) оценка

$$\frac{e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)})}}{1 - e^{i(2p(1-\tau)+\frac{p\xi}{Q(p)})}} = O((p-1)^{-1/2})$$

дают нам

$$t(p) \Sigma_1 = 4p Q\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) \kappa e^{\frac{i}{\varepsilon} Q\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) \xi} \left( \frac{e^{i\left(2p(1-\tau) + \frac{p\xi}{Q(p)}\right)} \rho(p)}{1 - e^{i\left(2p(1-\tau) + \frac{p\xi}{Q(p)}\right)} \rho(p)} + O\left(\frac{\rho(p) \Delta}{\sqrt{p-1}}\right) \right). \quad (5.29)$$

Наконец, остаётся сопоставить формулу (2.37) для решения  $\Psi_{cs}$  вне потенциальной ямы, определение (5.11) суммы  $\Sigma_1$  и асимптотические формулы (5.12), (5.13) (с учётом формулы (5.27) для  $\rho$ ) и (5.29). Теорема 6 доказана.

### 5.2.3 Доказательство теоремы 5

Теперь мы рассмотрим решение  $\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы, при  $0 \leq x \leq 1 - \tau$ , и кратко опишем доказательство теоремы 5. Решение  $\Psi_{cs}$  в этом случае описывается формулой (2.38). Нам будет удобно рассматривать в доказательстве только сумму

$$\tilde{\Sigma}_1(x, \tau, p) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tau} \Psi_{cs}(x, \tau, p) / t(p) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon} k_m^2 (1-\tau)} \sin(k_m x) R(k_m). \quad (5.30)$$

Изучение суммы  $\tilde{\Sigma}_1$  производится в полной аналогии с проделанным в разделе 5.2.2 изучением суммы  $\Sigma_1$ . Будем считать, что условия теоремы 5 выполнены: пусть при некоторых  $\tau_* < 1$ ,  $c_1, c_2 > 0$  и  $0 \leq \alpha < 2/3$  имеют место неравенства (2.41).

С помощью оценки (5.17) с  $\beta = 2/3$  легко получается оценка

$$\left| \frac{1}{R(p)} \sum_{m=\lfloor \varepsilon^{-1/3} \rfloor + 1}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon} k_m^2 (1-\tau)} \sin(k_m x) R(k_m) \right| \leq \frac{1}{|R(p)|} \sum_{m=\lfloor \varepsilon^{-1/3} \rfloor + 1}^{\infty} |R(k_m)| = O\left(e^{-C\varepsilon^{\alpha/2-1/3}}\right). \quad (5.31)$$

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sin(kx) &= \sin(px) + O(k-p), \\ e^{\frac{i}{\varepsilon} k^2 (1-\tau)} &= e^{\frac{i}{\varepsilon} p^2 (1-\tau)} e^{2i(1-\tau)p \frac{k-p}{\varepsilon}} \left(1 + O\left(\frac{(k-p)^2}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (5.32)$$

второе из которых следует из равенства  $k^2 = p^2 + 2p(k-p) + (k-p)^2$ . Из формулы (5.7), оценки (5.31), соотношений (5.32) и из формулы (5.10) вытекает формула

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_1 &= R(p) \sum_{m=0}^{\lfloor \varepsilon^{-1/3} \rfloor} e^{\frac{i}{\varepsilon} p^2 (1-\tau)} e^{2i(1-\tau)pm} \left(\sin(px) + O(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon m^2)\right) e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_p^{km} l(s) ds} + O\left(R(p) e^{-C\varepsilon^{\alpha/2-1/3}}\right) \\ &= R(p) e^{\frac{i}{\varepsilon} p^2 (1-\tau)} \left( \sum_{m=0}^{\lfloor \varepsilon^{-1/3} \rfloor} e^{i(2p(1-\tau) + l(p))m} \left(\sin(px) + O\left(\frac{\varepsilon^{1/3}}{\sqrt{p-1}}\right)\right) + O\left(e^{-C\varepsilon^{\alpha/2-1/3}}\right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку, как следует из (5.15) и из неравенства  $p - 1 \geq c_1 \varepsilon^\alpha$ ,

$$\left| \sum_{m=0}^{\lfloor \varepsilon^{-1/3} \rfloor} e^{i(2p(1-\tau)+l(p))m} O\left(\frac{\varepsilon^{1/3}}{\sqrt{p-1}}\right) \right| = O\left(\frac{\varepsilon^{1/3}}{p-1}\right),$$

$$\sum_{m=0}^{\lfloor \varepsilon^{-1/3} \rfloor} e^{i(2p(1-\tau)+l(p))m} = \frac{1}{1 - e^{i(2p(1-\tau)+l(p))}} + O\left(e^{-C\varepsilon^\alpha/2-1/3}\right),$$

то, с учётом соотношения  $e^{il(p)} = \rho(p)$ , см. (5.6),

$$\tilde{\Sigma}_1 = R(p) e^{\frac{i}{\varepsilon} p^2 (1-\tau)} \left( \frac{\sin(px)}{1 - e^{2ip(1-\tau)} \rho(p)} + O\left(\frac{\varepsilon^{1/3}}{p-1}\right) \right). \quad (5.33)$$

Из (5.30) и из первого равенства в (2.40) вытекает, что

$$\Psi_{cs} = t(p) e^{\frac{i}{\varepsilon} \tau} \tilde{\Sigma}_1 = e^{-\frac{i}{\varepsilon} p^2} \frac{t_1(p)}{R(p)} e^{\frac{i}{\varepsilon} \tau} \tilde{\Sigma}_1.$$

Отсюда и из формулы (5.33) непосредственно вытекает утверждение теоремы 5.

### 5.3 Асимптотики $\Psi_{cs}$ около края непрерывного спектра

Наконец, мы докажем теоремы 7 и 8, описывающие асимптотики  $\Psi_{cs}$  при значениях  $p$ , близких к единице. Мы начнём с доказательства в разделе 5.3.1 теоремы 7, описывающей асимптотическое поведение  $\Psi_{cs}$  вне потенциальной ямы. После этого мы кратко опишем в разделе 5.3.2 аналогичное и более простое доказательство теоремы 8, дающей асимптотики  $\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы.

#### 5.3.1 Доказательство теоремы 7

Здесь, как и в разделе 5.2.2, мы изучим определённую в (5.11) бесконечную сумму  $\Sigma_1$  с помощью асимптотики (5.7) функции  $R$ . Теперь, однако, мы будем аппроксимировать начальные члены ряда  $\Sigma_1$  не в окрестности точки  $p$ , а в окрестности единицы. В результате мы получим формулу (2.59) с функцией  $\phi$ , определённой в (2.63). Наконец, мы завершим доказательство теоремы 7, преобразовав входящий в определение  $\phi$  бесконечный ряд с использованием формулы суммирования Пуассона.

Пусть выполнены условия теоремы 7: фиксируем некоторые  $\tau_* < 1$  и  $c_1, c_2 > 0$ , а также  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющие (2.57), и будем считать, что имеют место неравенства (2.58). Как и в разделе 5.2.2, мы будем использовать обозначение  $m_\beta = \lfloor \varepsilon^{\beta-1} \rfloor$ . Пользуясь оценкой (5.16) и первым неравенством в (5.17), напишем

$$\left| \frac{1}{R(p)} \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon} p_1^2 (k_m)(1-\tau) + ip_1(k_m)x} T(k_m) R(k_m) \right| \leq C \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Im} \int_p^{k_m} l(s) ds}. \quad (5.34)$$

Следующая оценка получается последовательным применением к правой части (5.34) оценки в (5.8), оценки (5.9), неравенства

$$(a + b)^{3/2} \geq a^{3/2} + b^{3/2}, \quad a, b \geq 0, \quad (5.35)$$

оценки (5.15) с заменой  $p$  на  $k_{m_\beta}$  и, наконец, оценки  $k_{m_\beta} - 1 \geq C\varepsilon^\beta$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Im} \int_p^{k_m} l(s) ds} &= e^{-\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Im} \int_p^{k_{m_\beta}} l(s) ds} \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Im} \int_{k_{m_\beta}}^{k_m} l(s) ds} \\ &\leq e^{-\frac{C}{\varepsilon} ((k_{m_\beta}-1)^{3/2} - (p-1)^{3/2})} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\operatorname{Im} l(k_{m_\beta}) m} \leq C e^{-\frac{C}{\varepsilon} (k_{m_\beta}-p)^{3/2}} (k_{m_\beta} - 1)^{-1/2} \\ &\leq C e^{-C\varepsilon^{1/2} m_\beta^{3/2}} \varepsilon^{-\beta/2} = O\left(e^{-C\varepsilon^{3\beta/2-1}}\right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Оценки (5.34) и (5.36) вместе с формулой (5.7) позволяют написать для  $\Sigma_1$

$$\Sigma_1 = R(p) \sum_{m=0}^{m_\beta} e^{\frac{i}{\varepsilon} p_1^2(k_m)(1-\tau) + ip_1(k_m)x} T(k_m) \left(1 + O(\varepsilon^{1/2})\right) e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_p^{k_m} l(s) ds} + O\left(R(p) e^{-C\varepsilon^{3\beta/2-1}}\right). \quad (5.37)$$

Положим  $q = \varepsilon^{-2/3}(p - 1 - \varepsilon/2)$ , как в (2.56). Далее нам понадобится

**Лемма 5.5.** Пусть  $p$  принимает значения, указанные в (2.58). Тогда при  $0 \leq m \leq m_\beta = \lfloor \varepsilon^{\beta-1} \rfloor$  верны формулы

$$\frac{i}{\varepsilon} \int_p^{k_m} l(s) ds = i\pi m - \frac{4\sqrt{2}}{3} (q + \varepsilon^{1/3}(m+1))^{3/2} + \frac{4\sqrt{2}}{3} q^{3/2} + O(\varepsilon^{\beta/2}), \quad (5.38)$$

$$T(k_m) = -ie^{i/\varepsilon} (1 + O(\varepsilon^{\beta/2})), \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\varepsilon} p_1^2(k_m)(1-\tau) + ip_1(k_m)x &= \frac{i}{\varepsilon} \left( \left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - 1 \right) (1-\tau) + 2i(1-\tau)(m+1) \\ &- \frac{i\xi}{2} + \sqrt{2}i (q + \varepsilon^{1/3}(m+1))^{1/2} \frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}} + \frac{i\xi}{2\sqrt{2}} (q + \varepsilon^{1/3}(m+1))^{3/2} + O(\varepsilon^{2\beta-1}(1 + \varepsilon^{\beta/2}\xi)). \end{aligned} \quad (5.40)$$

*Доказательство.* Докажем сперва формулу (5.38). В силу первой формулы в (5.8) и верной при условиях леммы оценки  $k_m - 1 = O(\varepsilon^\beta)$  мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{i}{\varepsilon} \int_p^{k_m} l(s) ds &= \frac{i}{\varepsilon} \pi(k_m - p) - \frac{4\sqrt{2}}{3\varepsilon} (k_m - 1)^{3/2} + \frac{4\sqrt{2}}{3\varepsilon} (p - 1)^{3/2} + O\left(\frac{(k_m - 1)^{5/2}}{\varepsilon}\right) \\ &= i\pi m - \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(q + \varepsilon^{1/3}m + \frac{\varepsilon^{1/3}}{2}\right)^{3/2} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(q + \frac{\varepsilon^{1/3}}{2}\right)^{3/2} + O(\varepsilon^{5\beta/2-1}). \end{aligned}$$

Формула (5.38) следует отсюда и из верной при  $0 \leq X \leq C\varepsilon^{\beta-2/3}$  оценки

$$\left(X + \frac{\varepsilon^{1/3}}{2}\right)^{3/2} - X^{3/2} = O(\varepsilon^{\beta/2}), \quad (5.41)$$

в которую можно подставить  $X = q + \varepsilon^{1/3}m + \frac{\varepsilon^{1/3}}{2}$  и  $X = q$ . Оценку (5.41) можно получить следующим образом: если  $0 \leq X \leq C\varepsilon^{1/3}$ , то левая часть в (5.41) есть, очевидно,  $O(\varepsilon^{1/2}) = O(\varepsilon^{\beta/2})$ . Если же для достаточно большого  $C > 0$  выполнено  $C\varepsilon^{1/3} \leq X \leq C\varepsilon^{\beta-2/3}$ , то

$$\left(X + \frac{\varepsilon^{1/3}}{2}\right)^{3/2} - X^{3/2} = X^{3/2} \left(1 + O\left(\frac{\varepsilon^{1/3}}{X}\right)\right) - X^{3/2} = O(X^{1/2}\varepsilon^{1/3}) = O(\varepsilon^{\beta/2}).$$

Для доказательства формул (5.39) и (5.40) нам понадобится очевидное соотношение

$$Q(k) = \sqrt{2}\sqrt{k-1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(k-1)^{3/2} + O((k-1)^{5/2}), \quad k \rightarrow 1+0, \quad (5.42)$$

см. первую формулу в (3.5). Формула (5.39) получается с помощью определения  $T$  в (2.5), формулы (5.42) с  $k = k_m + \varepsilon/2$  и оценки  $k_m - 1 = O(\varepsilon^\beta)$ . Формулу (5.40) нетрудно получить, подставляя (5.42) с  $k = k_m + \varepsilon/2$  в формулу (5.21) и учитывая соотношения

$$k_m + \frac{\varepsilon}{2} - 1 = \varepsilon^{2/3}q + \varepsilon(m+1), \quad p-1 \leq k_m - 1 = O(\varepsilon^\beta).$$

Лемма доказана. □

Заметим также, что при условиях теоремы 7 верна вытекающая из определения (2.36) функции  $t(p)$  и из (5.42) формула

$$t(p) = -4\sqrt{2}i\varepsilon^{1/3}q^{1/2} \frac{e^{-\frac{i}{\varepsilon}p^2}}{R(p)} e^{-iQ(p-\frac{\varepsilon}{2})} e^{ip} (1 + O(\varepsilon^{\beta/2})). \quad (5.43)$$

Введём обозначение  $\eta = 2(1 + \pi/2 - \tau)$ , как в замечании 2.5. С помощью леммы 5.5 и формулы (5.43) из формулы (5.37) получается формула

$$\begin{aligned} t(p) \Sigma_1 &= 4\sqrt{2}\varepsilon^{1/3}q^{1/2}\kappa \\ &\times \left( e^{\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} \sum_{m=1}^{m_\beta+1} e^{i\eta m - \frac{4\sqrt{2}}{3}(q+\varepsilon^{1/3}m)^{3/2}} \left(1 - \frac{3i\xi}{16}\right) + \sqrt{2}i(q+\varepsilon^{1/3}m)^{1/2} \frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}} (1 + O(\varepsilon^{2\beta-1})) + O\left(e^{-C\varepsilon^{3\beta/2-1}}\right) \right), \end{aligned} \quad (5.44)$$

где  $\kappa$  определено в (2.45). С помощью неравенства (5.35) при  $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  легко получается оценка

$$\begin{aligned} e^{\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} \sum_{m=M}^{\infty} e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}(q+\varepsilon^{1/3}m)^{3/2}} &\leq e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}\varepsilon^{1/2}M^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}\varepsilon^{1/2}m^{3/2}} \\ &\leq e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}\varepsilon^{1/2}M^{3/2}} \left( 1 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}\varepsilon^{1/2}s^{3/2}} ds \right) = e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}\varepsilon^{1/2}M^{3/2}} O(\varepsilon^{-1/3}). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Пользуясь этой оценкой с  $M = 1$  и с  $M = m_\beta + 2 \asymp \varepsilon^{\beta-1}$ , получим из (5.44)

$$t(p) \Sigma_1 = 4\sqrt{2} q^{1/2} \kappa (\phi(\xi, \tau, q) + O(\varepsilon^{2\beta-1})), \quad \phi(\xi, \tau, q) = \varepsilon^{1/3} e^{\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} \Sigma_2, \quad (5.46)$$

$$\Sigma_2(\xi, \tau, q) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\eta m - \frac{4\sqrt{2}}{3}(q+\varepsilon^{1/3}m)^{3/2}} (1 - \frac{3i\xi}{16}) + \sqrt{2}i(q+\varepsilon^{1/3}m)^{1/2} \frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}}.$$

Формула для  $\phi$  уже была выписана ранее, см. (2.63). Из (5.45) следует оценка  $\phi = O(1)$ . Сопоставление формулы (2.37) с формулами (5.12) и (5.13) (с учётом формулы (B.1) для функции  $\rho$ ), определением (5.11) суммы  $\Sigma_1$  и формулами (5.46) завершает доказательство первой части теоремы 7 — формулы (2.59).

При доказательстве оставшейся части теоремы 7 мы будем считать, что  $0 \leq \xi \leq \delta_1 \sqrt{p-1}$  для некоторого достаточно малого  $\delta_1 > 0$ . В этом предположении

$$\phi(\xi, \tau, q) = \varepsilon^{1/3} e^{\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} \Sigma_3 + O(\varepsilon^{2\beta-1}), \quad \Sigma_3 = \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\eta m - \frac{4\sqrt{2}}{3}(q+\varepsilon^{1/3}m)^{3/2}} + \sqrt{2}i(q+\varepsilon^{1/3}m)^{1/2} \frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}}. \quad (5.47)$$

Эти формулы легко получить с помощью рассуждений, аналогичных проделанным выше: необходимо перейти от  $\Sigma_2$  к сумме по  $1 \leq m \leq m_\beta$  с помощью оценки хвоста ряда (5.45) с  $M = m_\beta + 1$ , использовать верную при таких  $m$  и при рассматриваемых условиях на  $q$  и  $\xi$  оценку  $(q + \varepsilon^{1/3}m)^{3/2} \xi = O(\varepsilon^{2\beta-1})$ , а затем повторно воспользоваться оценкой (5.45) с  $M = 1$  и с  $M = m_\beta + 1$  для перехода к сумме  $\Sigma_3$ .

Для завершения доказательства теоремы 7 мы исследуем сумму  $\Sigma_3$ , применяя формулу суммирования Пуассона. Выберем «срезающую» функцию  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ , такую что  $\chi(s) = 0$  при  $s < 1/2$  и  $\chi(s) = 1$  при  $s > 3/4$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\eta m - \frac{4\sqrt{2}}{3}(q+\varepsilon^{1/3}m)^{3/2}} + \sqrt{2}i(q+\varepsilon^{1/3}m)^{1/2} \frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}} \chi(m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta s - \frac{4\sqrt{2}}{3}(q+\varepsilon^{1/3}s)^{3/2}} + \sqrt{2}i(q+\varepsilon^{1/3}s)^{1/2} \frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}} \chi(s) ds = \varepsilon^{-1/3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n, \end{aligned}$$

где

$$\eta_n = \eta - 2\pi n, \quad I_n = \int_0^{\infty} e^{h(u)} \chi(\varepsilon^{-1/3}u) du,$$

$$h(u) = i \frac{\eta_n}{\varepsilon^{1/3}} u + \sqrt{2} i (q+u)^{1/2} \frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}} - \frac{4\sqrt{2}}{3} (q+u)^{3/2}.$$

Далее мы рассмотрим два взаимоисключающих случая: либо при каждом  $n \in \mathbb{Z}$  выполнено  $|\eta_n| \geq C > 0$ , либо есть единственное число  $N \in \mathbb{Z}$ , для которого  $\eta_N$  может быть близко к нулю. В первом случае оценку суммы  $\Sigma_3$  позволяет получить

**Лемма 5.6.** Пусть  $0 \leq \xi \leq \delta_1 \sqrt{p-1}$ , где  $\delta_1 > 0$  достаточно мало, и пусть  $|\eta_n| \geq C > 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тогда

$$I_n = e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3} q^{3/2}} O\left(\frac{\varepsilon^{1/3} + \varepsilon^{-1/6} \xi}{\eta_n^2}\right),$$

где зависимость оценки от  $n$  указана явно.

*Доказательство.* Мы докажем данную лемму, интегрируя  $I_n$  по частям. Производные показателя  $h(u)$  экспоненты в подынтегральном выражении есть

$$h'(u) = i \left( \frac{\eta_n}{\varepsilon^{1/3}} + \frac{\xi}{\sqrt{2} \varepsilon^{2/3} \sqrt{q+u}} \right) - 2\sqrt{2} \sqrt{q+u},$$

$$h''(u) = \frac{-i\xi}{2\sqrt{2} \varepsilon^{2/3} (q+u)^{3/2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{q+u}}.$$

С учётом того, что  $\chi(s) = 0$  при  $s < 1/2$ , мы имеем

$$I_n = - \int_{\varepsilon^{1/3}/2}^{\infty} e^{h(u)} \left( \frac{\chi(\varepsilon^{-1/3} u)}{h'(u)} \right)'_u du = I_n^{(1)} + I_n^{(2)},$$

$$I_n^{(1)} = \int_{\varepsilon^{1/3}/2}^{\infty} e^{h(u)} \frac{\chi(\varepsilon^{-1/3} u) h''(u)}{(h'(u))^2} du, \quad I_n^{(2)} = - \int_{\varepsilon^{1/3}/2}^{\varepsilon^{1/3}} e^{h(u)} \frac{\varepsilon^{-1/3} \chi'(\varepsilon^{-1/3} u)}{h'(u)} du.$$

При  $0 \leq \xi \leq \delta_1 \sqrt{p-1}$  и  $u \geq \varepsilon^{1/3}/2$  справедлива оценка

$$0 \leq \frac{\xi}{\sqrt{2} \varepsilon^{2/3} \sqrt{q+u}} \leq \frac{\delta_1 \sqrt{p-1}}{\sqrt{2} \varepsilon^{1/3} \sqrt{\varepsilon^{2/3} q + \varepsilon/2}} = \frac{\delta_1}{\sqrt{2} \varepsilon^{1/3}} \leq \frac{\delta_1}{\sqrt{2} C} \frac{|\eta_n|}{\varepsilon^{1/3}}.$$

В силу малости  $\delta_1$  мы можем написать

$$|h'(u)| \geq \left| \frac{\eta_n}{\varepsilon^{1/3}} + \frac{\xi}{\sqrt{2} \varepsilon^{2/3} \sqrt{q+u}} \right| \geq \left| \frac{|\eta_n|}{\varepsilon^{1/3}} - \frac{\xi}{\sqrt{2} \varepsilon^{2/3} \sqrt{q+u}} \right| \geq \left( 1 - \frac{\delta_1}{\sqrt{2} C} \right) \frac{|\eta_n|}{\varepsilon^{1/3}} \geq \frac{|\eta_n|}{2\varepsilon^{1/3}}.$$

Используя эту оценку, а также элементарную оценку

$$|h''(u)| \leq \frac{C \xi}{\varepsilon^{2/3} u^{3/2}} + \frac{C}{\sqrt{u}}$$

и неравенство (5.35), получим для  $I_n^{(1)}$

$$|I_n^{(1)}| \leq C e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} \frac{\varepsilon^{2/3}}{\eta_n^2} \int_{\varepsilon^{1/3/2}}^{\infty} e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}u^{3/2}} \left( \frac{\xi}{\varepsilon^{2/3}u^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du = e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} O\left( \frac{\varepsilon^{-1/6}\xi + \varepsilon^{2/3}}{\eta_n^2} \right).$$

Интегрирование  $I_n^{(2)}$  по частям даёт  $I_n^{(2)} = I_n^{(3)} + I_n^{(4)}$ , где

$$I_n^{(3)} = -2 \int_{\varepsilon^{1/3/2}}^{\varepsilon^{1/3}} e^{h(u)} \frac{\varepsilon^{-1/3} \chi'(\varepsilon^{-1/3}u) h''(u)}{(h'(u))^3} du, \quad I_n^{(4)} = \int_{\varepsilon^{1/3/2}}^{\varepsilon^{1/3}} e^{h(u)} \frac{\varepsilon^{-2/3} \chi''(\varepsilon^{-1/3}u)}{(h'(u))^2} du.$$

Оценивая  $I_n^{(3)}$  и  $I_n^{(4)}$  аналогично оценке  $I_n^{(1)}$ , получим

$$I_n^{(3)} = e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} O\left( \frac{\varepsilon^{-1/6}\xi + \varepsilon^{5/6}}{\eta_n^3} \right), \quad I_n^{(4)} = e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} O\left( \frac{\varepsilon^{1/3}}{\eta_n^2} \right).$$

Полученные оценки завершают доказательство леммы. □

Если  $|\eta_n| \geq C > 0$  при каждом  $n \in \mathbb{Z}$ , то, как следует из леммы 5.6,

$$|\Sigma_3| \leq C (1 + \varepsilon^{-1/2}\xi) e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}}.$$

Распространяя определение (1.4) на все  $n \in \mathbb{Z}$ , мы можем написать

$$\eta_n = \eta - 2\pi n = 2(1 - \pi(n - 1/2) - \tau) = 2(\tau_n - \tau),$$

поэтому рассмотренный случай имеет место, когда  $|\tau - \tau_n| \geq C > 0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  (при  $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$  всегда  $|\tau - \tau_n| \geq \pi/2$ ).

Наконец, рассмотрим второй случай. Пусть для некоторого  $N \in \mathbb{N}$  и для достаточно малого  $\delta_1 > 0$  выполнено  $|\eta_N| \leq 2\delta_1$ , или, что то же самое,  $|\tau - \tau_N| \leq \delta_1$ . Определив спецфункцию  $\mathcal{F}$  формулой (2.62), мы можем написать

$$I_N = \mathcal{F}\left( \frac{\xi}{\varepsilon^{1/3}}, \frac{\eta_N}{\varepsilon^{1/3}}, q \right) + \Delta I_N, \quad \Delta I_N = \int_0^{\varepsilon^{1/3}} e^{h(u)} (\chi(\varepsilon^{-1/3}u) - 1) du = e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} O(\varepsilon^{1/3}),$$

где оценка  $\Delta I_N$  получается с использованием неравенства (5.35) аналогично оценкам интегралов в доказательстве леммы 5.6. Поскольку при всех  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{N\}$  для  $I_n$  верна оценка из леммы 5.6, то для суммы  $\Sigma_3$  мы теперь имеем

$$\Sigma_3 = \varepsilon^{-1/3} \mathcal{F}\left( \frac{\xi}{\varepsilon^{1/3}}, \frac{\eta_N}{\varepsilon^{1/3}}, q \right) + e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} O(1 + \varepsilon^{-1/2}\xi).$$

С учётом формул (2.59) и (5.47) полученные для  $\Sigma_3$  результаты завершают доказательство теоремы 7.

### 5.3.2 Доказательство теоремы 8

Доказательство теоремы 8 производится аналогично доказательству теоремы 7. Кратко опишем его. Пусть выполнены условия теоремы 8, т. е. для некоторых фиксированных  $\tau_* < 1$ ,  $c > 0$ , а также для фиксированных  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющих (2.68), выполнены неравенства (2.69). Мы будем преобразовывать определённую в (5.30) сумму  $\tilde{\Sigma}_1$ . Как и прежде,  $m_\beta = \lfloor \varepsilon^{\beta-1} \rfloor$ . Пользуясь первым неравенством в (5.17) и оценкой (5.36), получим

$$\left| \frac{1}{R(p)} \sum_{m=m_\beta+1}^{\infty} e^{\frac{i}{\varepsilon} k_m^2 (1-\tau)} \sin(k_m x) R(k_m) \right| = O\left(e^{-C\varepsilon^{3\beta/2-1}}\right).$$

С помощью этой оценки и формулы (5.7) нетрудно получить для  $\tilde{\Sigma}_1$  формулу

$$\tilde{\Sigma}_1 = R(p) \sum_{m=0}^{m_\beta} e^{\frac{i}{\varepsilon} k_m^2 (1-\tau)} \sin(k_m x) \left(1 + O(\varepsilon^{1/2})\right) e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_p^{k_m} l(s) ds} + O\left(R(p) e^{-C\varepsilon^{3\beta/2-1}}\right). \quad (5.48)$$

Введём обозначение  $q_1 = (p-1)/\varepsilon^{2/3}$ , как в (2.67). В силу первой формулы в (5.8) и верной при  $0 \leq m \leq m_\beta$  оценки  $k_m - 1 = O(\varepsilon^\beta)$ , мы имеем при таких  $m$

$$\begin{aligned} \int_p^{k_m} l(s) ds &= \pi(k_m - p) + \frac{4\sqrt{2}}{3} i (k_m - 1)^{3/2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} i (p-1)^{3/2} + O((k_m - 1)^{5/2}) \\ &= \pi \varepsilon m + \frac{4\sqrt{2}}{3} i \varepsilon (q_1 + \varepsilon^{1/3} m)^{3/2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} i \varepsilon q_1^{3/2} + O(\varepsilon^{5\beta/2}). \end{aligned}$$

Эта формула и взятые с  $k = k_m$  и  $p = 1$  соотношения (5.32) позволяют записать сумму в правой части формулы (5.48) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m_\beta} e^{\frac{i}{\varepsilon} (1-\tau)} e^{2\frac{i}{\varepsilon} (1-\tau)(k_m-1)} \left( \sin(x) + O(\varepsilon^{2\beta-1}) \right) e^{i\pi m - \frac{4\sqrt{2}}{3} (q_1 + \varepsilon^{1/3} m)^{3/2} + \frac{4\sqrt{2}}{3} q_1^{3/2}} \\ = e^{\frac{i}{\varepsilon} (1-\tau)} e^{2\frac{i}{\varepsilon} (1-\tau)(p-1)} e^{\frac{4\sqrt{2}}{3} q_1^{3/2}} \sum_{m=0}^{m_\beta} \left( \sin(x) + O(\varepsilon^{2\beta-1}) \right) e^{i\eta m - \frac{4\sqrt{2}}{3} (q_1 + \varepsilon^{1/3} m)^{3/2}}, \end{aligned}$$

где  $\eta = 2(1 + \pi/2 - \tau)$ , как в замечании 2.5. Таким образом,

$$\tilde{\Sigma}_1 = R(p) e^{\frac{i}{\varepsilon} (1-\tau)(2p-1)} e^{\frac{4\sqrt{2}}{3} q_1^{3/2}} \sum_{m=0}^{m_\beta} \left( \sin(x) + O(\varepsilon^{2\beta-1}) \right) e^{i\eta m - \frac{4\sqrt{2}}{3} (q_1 + \varepsilon^{1/3} m)^{3/2}} + O\left(R(p) e^{-C\varepsilon^{3\beta/2-1}}\right). \quad (5.49)$$

Используя оценку (5.45) с  $M = 0$  и с  $M = m_\beta + 1 \asymp \varepsilon^{\beta-1}$ , мы получим из формулы (5.49)

$$\tilde{\Sigma}_1 = R(p) e^{\frac{i}{\varepsilon} (1-\tau)(2p-1)} \varepsilon^{-1/3} \left( \sin(x) \phi(0, \tau, q_1) + O(\varepsilon^{2\beta-1}) \right),$$

где функция  $\phi$  определена формулой (2.63).

Наконец, используя формулу (5.30), связывающую  $\tilde{\Sigma}_1$  и  $\Psi_{cs}$ , формулу (5.43) для  $t(p)$ , а также оценку  $\phi = O(1)$  из теоремы 7, получим

$$\begin{aligned}\Psi_{cs} &= -4\sqrt{2}i \kappa_1 q^{1/2} \left( \sin(x) \phi(0, \tau, q_1) + O(\varepsilon^{2\beta-1}) \right), \\ \kappa_1 &= e^{-\frac{i}{\varepsilon} p^2} e^{-iQ(p-\frac{\varepsilon}{2})} e^{ip} e^{\frac{i}{\varepsilon} \tau} e^{\frac{i}{\varepsilon} (1-\tau)(2p-1)}.\end{aligned}\tag{5.50}$$

С учётом оценки  $p-1 = O(\varepsilon^\beta)$  мы имеем

$$\begin{aligned}e^{-ip(1-\tau)} \kappa_1 &= e^{-\frac{i}{\varepsilon} (p^2 - \tau + (1-\tau)(-2p+1) - p\varepsilon\tau)} e^{-iQ(p-\frac{\varepsilon}{2})} \\ &= e^{-\frac{i}{\varepsilon} ((p-1)^2(1-\tau) + \tau((p-\frac{\varepsilon}{2})^2 - 1) + O(\varepsilon^2))} e^{-iQ(p-\frac{\varepsilon}{2})} = \kappa(0, p, \varepsilon) \left( 1 + O(\varepsilon^{2\beta-1}) \right),\end{aligned}$$

где  $\kappa$  определено в (2.45). Используя эту формулу и оценку  $\phi = O(1)$ , мы получим из формулы (5.50) формулу (2.70). Теорема 8 доказана.

## Глава 6. Асимптотики решения $U_n$

Данная глава посвящена доказательствам теорем, сформулированных в разделе 2.3 и описывающих асимптотическое поведение адиабатической нормальной волны  $U_n$  — решения уравнения Гельмгольца (1.6) — вблизи и после момента  $\varkappa_n$  исчезновения  $n$ -го собственного значения оператора  $H_a(\varkappa)$ . В данной главе мы ограничимся кратким описанием доказательств теорем 10, 12 и 13. После проделанного в разделе 6.1 перехода от интегралов в (A.19) к интегралам по конечным контурам, доказательства этих теорем близко повторяют, соответственно, доказательства теорем 1, 2 и 3, изложенные в главах 3 и 4. В связи с этим мы будем опускать многие подробности. Доказательства теорем 11 и 14 полностью аналогичны доказательствам теорем 10 и 13, поэтому мы их опустим. В разделе 6.2 мы обсудим точки перевала и линии наискорейшего спуска фазовой функции  $S_a$ , аналогичной функции  $S$ , определённой в (3.8). Наконец, в разделе 6.3 мы завершим доказательства теорем 10, 12 и 13, не вдаваясь в детали.

Фиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и будем считать, что  $\varepsilon > 0$  достаточно мал, а  $\varkappa \leq 0$  ограничено. Когда мы будем рассматривать решение  $U_n$  вне сектора  $W_a$ , мы будем считать, что  $\eta \geq 0$  и ограничено.

### 6.1 Переход к интегралам по конечным контурам

Здесь мы перейдём от выписанных в разделе A.4 приложения A формул (A.19) для решения  $U_n$  к интегралам, более удобным для асимптотического анализа. Определение точки  $\alpha_0 \in (0, \pi/2)$  дано в упомянутом разделе после формулы (A.14). Определим область  $\mathbb{C}_{a,0}$  формулой (A.15), т. е. как комплексную плоскость с разрезами  $(-\infty, -\alpha_0]$  и  $[\alpha_0, +\infty)$ , и определим в  $\mathbb{C}_{a,0}$  аналитические функции  $\gamma_0$ ,  $l_{a,0}$  и  $L_{a,0}$  так, как это сделано в разделе A.4, см. формулы (A.13) и (A.16), а также замечание A.7. Положим при  $\alpha \in \mathbb{C}_{a,0}$

$$A_a(\alpha, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\alpha - \varepsilon/2}^{\alpha} (l_{a,0}(\alpha) - l_{a,0}(s)) ds} A_{a,0}(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon), \quad A_{a,0}(\alpha, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\alpha} (L_{a,0}(s) - l_{a,0}(s)) ds},$$

$$S_a(\alpha, \varkappa, \eta) = S_{a,0}(\alpha, \varkappa) + 2\eta \sin \gamma_0(\alpha), \quad S_{a,0}(\alpha, \varkappa) = 2k_0 \varkappa \cos \alpha - 2\pi n \alpha + \int_0^{\alpha} l_{a,0}(s) ds, \quad (6.1)$$

ср. эти формулы с (3.7) и (3.8). Отметим, что область  $\mathbb{C}_{a,0}$  является листом римановой поверхности  $\Gamma_a$  функции  $\alpha \mapsto S_a(\alpha, \varkappa, \eta)$ . В [3, Раздел 3.4] не было сформулировано в виде отдельного утверждения, но, по существу, было доказано

**Предложение 6.1.** *Фиксируем  $d > 0$ . Пусть  $c$  — кусочно-гладкая кривая, соединяющая некоторую точку отрезка*

$$[-\pi/2 - id, \pi/2 - id] \quad (6.2)$$

с некоторой точкой ломаной

$$[id, \pi/2 + id] \cup [\pi/2 + id, \pi/2 + i0]. \quad (6.3)$$

Пусть при этом кривая  $s$  полностью лежит на листе  $\mathbb{C}_{a,0}$  римановой поверхности  $\Gamma_a$  (в том числе  $s$  может иметь точки на берегах разрезом). Пусть, наконец, на кривой  $s$  имеется точка  $\alpha_n$ , не совпадающая с концами  $s$  и такая, что  $\text{Im } S_{a,0}(\alpha, \varkappa) > \text{Im } S_{a,0}(\alpha_n, \varkappa)$  при  $\alpha \in s \setminus \{\alpha_n\}$ . Будем считать, что  $\varkappa \leq 0$  ограничено и что  $0 \leq y \leq -\varkappa$ , тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$U_n(x, y) = U_n^{(0)}(x, y) + O\left(e^{\frac{i}{\varepsilon} S_{a,0}(\alpha_n, \varkappa)} e^{-C/\varepsilon}\right), \quad (6.4)$$

$$U_n^{(0)}(x, y) = \frac{i}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_c \sin(k_0 y \sin \alpha) A_{a,0}(\alpha, \varepsilon) (1 + O(\varepsilon)) e^{\frac{i}{\varepsilon} S_{a,0}(\alpha, \varkappa)} d\alpha. \quad (6.5)$$

Если кривая  $s$  и точка  $\alpha_n$  непрерывно зависят от параметров  $\varkappa$  и  $y$ , то оценка поправки в формуле (6.4) равномерна по  $\varkappa$  и  $y$ , а в формуле (6.5) — по  $\varkappa$ ,  $y$  и  $\alpha$ .

Это предложение позволяет перейти к интегралу по конечному контуру при исследовании решения  $U_n$  внутри водного клина  $W_a$ . При доказательстве предложения 6.1 используется тот факт, что в  $\{\alpha \in \mathbb{C}_{a,0} \mid |\text{Re } \alpha| < \pi - \alpha_0\}$  совпадают функции  $R_a$  и  $R_{a,0}$ , определённые в замечании А.7, а также быстрое убывание  $R_a(\alpha)$  вдоль вещественной оси с ростом  $|\alpha|$ . Подробности см. в работе [3].

Вне сектора  $W_a$  для  $U_n$  справедливо

**Предложение 6.2.** Фиксируем  $d > 0$ . Пусть кривая  $s$  имеет свойства, указанные в формулировке предложения 6.1, с тем лишь изменением, что  $\text{Im } S_a(\alpha, \varkappa, \eta) > \text{Im } S_a(\alpha_n, \varkappa, \eta)$  при  $\alpha \in s \setminus \{\alpha_n\}$ . Фиксируем достаточно малое  $\delta > 0$  и будем считать, что  $\varkappa \leq 0$  ограничено и что  $0 \leq \eta \leq \delta$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$U_n(x, y) = U_n^{(1)}(x, y) + O\left(e^{\frac{i}{\varepsilon} S_a(\alpha_n, \varkappa, \eta)} e^{-C/\varepsilon}\right), \quad (6.6)$$

$$U_n^{(1)}(x, y) = \frac{K_a}{\sqrt{\varepsilon}} \int_c g(\alpha, \eta) A_a(\alpha, \varepsilon) (1 + O(\varepsilon)) e^{\frac{i}{\varepsilon} S_a(\alpha, \varkappa, \eta)} d\alpha, \quad (6.7)$$

$$g(\alpha, \eta) = e^{-i\eta k_0 \cos \alpha} \sin \alpha, \quad K_a = \frac{(-1)^{n+1} i k_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{k_0^2 - 1}}.$$

Если кривая  $s$  и точка  $\alpha_n$  непрерывно зависят от параметров  $\varkappa$  и  $\eta$ , то оценка поправки в формуле (6.6) равномерна по  $\varkappa$  и  $\eta$ , а в формуле (6.7) — по  $\varkappa$ ,  $\eta$  и  $\alpha$ .

Доказательство предложения 6.2 включает в себя чуть более сложные арифметические преобразования соответствующего подынтегрального выражения, чем доказательство предложения 6.1, но в остальном его повторяет, и мы его опустим. Формулу (6.7) можно легко привести к виду, аналогичному формулам (3.9) и (3.10) из предложения 3.1:

$$U_n^{(1)}(x, y) = e^{i\phi_a(\varepsilon)} (\mathcal{T}_a(x, y) + \mathcal{E}_a(x, y)), \quad \phi_a(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\alpha_0} (L_{a,0}(\alpha) - l_{a,0}(\alpha)) d\alpha, \quad (6.8)$$

$$\mathcal{T}_a(x, y) = \frac{K_a}{\sqrt{\varepsilon}} \int_c g(\alpha, \eta) e^{\frac{i}{\varepsilon} S_a(\alpha, \varkappa, \eta)} d\alpha, \quad (6.9)$$

$$\mathcal{E}_a(x, y) = \frac{K_a}{\sqrt{\varepsilon}} \int_c g(\alpha, \eta) (e^{-i\phi_a(\varepsilon)} A_a(\alpha, \varepsilon) (1 + O(\varepsilon)) - 1) e^{\frac{i}{\varepsilon} S_a(\alpha, \varkappa, \eta)} d\alpha. \quad (6.10)$$

Конечно, формула (6.5) также легко приводится к похожему виду. В оставшейся части данной главы мы будем рассматривать решение  $U_n$  только вне клина  $W_a$ , и, опираясь на формулы (6.8), (6.9) и (6.10), кратко опишем доказательства теорем 10, 12 и 13. Доказательства теорем 11 и 14, описывающих асимптотическое поведение  $U_n$  внутри  $W_a$ , полностью аналогичны доказательствам теорем 10 и 13 соответственно, и мы их опустим.

Для оценки поправок нам понадобится аналогичная лемме А.4

**Лемма 6.3.** *Для достаточно малых значений  $\varepsilon$*

$$\int_0^\alpha (L_{a,0}(s) - l_{a,0}(s)) ds = O(\varepsilon^{3/2}), \quad \alpha \in \mathbb{C}_{a,0}. \quad (6.11)$$

*Формула (6.11) верна вплоть до границы  $\mathbb{C}_{a,0}$ , и оценка поправки в ней равномерна.*

Доказательство этой леммы повторяет доказательство леммы А.4, см. [2, Lemma 10], поэтому мы его также опустим. Из леммы 6.3 и из гёльдеровости функции  $l_{a,0}$  с показателем  $1/2$  следуют оценки

$$\phi_a(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/2}), \quad A_a(\alpha, \varepsilon) - 1 = O(\varepsilon^{1/2}),$$

вторая из которых равномерна по  $\alpha$  в области  $\mathbb{C}_{a,0}$  и вплоть до её границы.

## 6.2 Точки перевала и линии наискорейшего спуска функции $S_a$

Здесь мы опишем те свойства точек перевала и линий наискорейшего спуска функции  $\alpha \mapsto S_a(\alpha, \varkappa, \eta)$ , которые понадобятся нам далее. Данный раздел во многом параллелен разделам 3.3 и 4.1, посвящённым фазовой функции  $S$ , возникающей при анализе решения  $\Psi_n$  квантово-механической задачи.

### 6.2.1 Точка перевала в $\mathbb{C}_{a,0}$

Для числа  $R > 0$  положим

$$\Pi_R = \{ \alpha \in \mathbb{C}_{a,0} \mid |\operatorname{Re} \alpha| < \pi/2, |\operatorname{Im} \alpha| < R \}.$$

Как и прежде, мы будем обозначать через  $\mathcal{Q}_1$  первый квадрант комплексной плоскости. Справедливо аналогичное предложению 3.4

**Предложение 6.4.** *Фиксируем некоторое  $R > 0$  и выберем достаточно малое  $\delta > 0$ . При  $0 < \eta \leq \delta$ , а также при  $\eta = 0$  и  $\varkappa < \varkappa_n$ , в  $\Pi_R$  имеется ровно одна с учётом кратности точка*

перевала  $\alpha_n(\varkappa, \eta)$  функции  $\alpha \mapsto S_a(\alpha, \varkappa, \eta)$ . Она описывается уравнением

$$-2\varkappa k_0 \sin \alpha - 2\pi\eta + l_{a,0}(\alpha) + \frac{k_0^2 \sin(2\alpha)}{\sin \gamma_0(\alpha)} \eta = 0 \quad (6.12)$$

и аналитически зависит от  $\varkappa$  и  $\eta$ . При  $\eta > 0$  она расположена в квадранте  $\mathcal{Q}_1$ , а при  $\eta = 0$  и  $\varkappa < \varkappa_n$  — в интервале  $(0, \alpha_0)$ . При  $\varkappa \geq \varkappa_n$  выполнено  $\alpha_n(\varkappa, \eta) \rightarrow \alpha_0$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Левая часть формулы (6.12) — это  $(S_a)_\alpha(\alpha, \varkappa, \eta)$ , поэтому точки перевала функции  $S_a$  действительно описываются уравнением (6.12). Далее для доказательства предложения 6.4 необходимо рассмотреть при достаточно малых значениях  $r > 0$  область  $D_a(r, R) = \Pi_R \cap \mathcal{Q}_1 \setminus \{ \alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha - \alpha_0| \leq r \}$  и изучить в  $D_a(r, R)$  конформные свойства отображения  $\alpha \mapsto (S_a)_\alpha$  подобно тому, как это было сделано для области  $D(r, R)$  и отображения  $p \mapsto S_p$  при доказательстве предложения 3.4. Мы не будем вдаваться в дальнейшие детали.  $\square$

### 6.2.2 Точки перевала вблизи $\alpha = \alpha_0$

Фиксируем достаточно малое  $b > 0$  и введём в  $b^2$ -окрестности точки  $\alpha = \alpha_0$  локальную переменную  $z(\alpha) = \sqrt{\alpha_0 - \alpha}$ , где  $z > 0$  при  $\alpha < \alpha_0$ . Функции  $l_{a,0}$  и  $\gamma_0$  аналитичны по  $z$  в  $b$ -окрестности нуля, и справедлива

**Лемма 6.5.** Для  $z$  в  $b$ -окрестности нуля выполнено

$$S_a(\alpha(z), \varkappa, \eta) = S_a(\alpha_0, \varkappa, 0) + 2\sqrt{2}i(k_0^2 - 1)^{1/4}\eta z + 2(k_0^2 - 1)^{1/2}(\varkappa - \varkappa_n)z^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3(k_0^2 - 1)^{1/4}} \left(1 + \frac{3i(k_0^2 - 2)}{8}\eta\right) z^3 - \varkappa z^4 + O(z^5), \quad (6.13)$$

где  $\alpha(z) = \alpha_0 - z^2$ , а  $O(z^5)$  — аналитическая функция  $z$ ,  $\varkappa$  и  $\eta$ .

*Доказательство.* Необходимо подставить в (6.1) формулы

$$l_{a,0}(\alpha) = \pi - \frac{2\sqrt{2}}{(k_0^2 - 1)^{1/4}} z + O(z^3), \quad \sin \gamma_0(\alpha) = \sqrt{2}i(k_0^2 - 1)^{1/4} z + \frac{i(k_0^2 - 2)}{2\sqrt{2}(k_0^2 - 1)^{1/4}} z^3 + O(z^5).$$

Мы опустим детали.  $\square$

Сравнивая формулу (6.13) с формулой (3.15), мы заключаем, что функции  $S_a$  и  $S$  ведут себя в окрестностях соответствующих точек ветвления аналогичным образом. Приведённые ниже леммы 6.6, 6.8, 6.9 и 6.10 доказываются в точности так же, как леммы 3.8, 3.10, 3.12 и 4.1 соответственно, и мы опустим их доказательства.

**Лемма 6.6.** Существуют такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $|\varkappa - \varkappa_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \eta \leq \delta_2$  функция  $S_a$  имеет ровно две с учётом кратности точки перевала  $z_1$  и  $z_2$  в  $b$ -окрестности точки  $z = 0$ . Для этих точек имеют место формулы

$$z_{1,2}(\varkappa, \eta) = \frac{(k_0^2 - 1)^{3/4}}{2\sqrt{2}} \left( (\varkappa_n - \varkappa) \pm \sqrt{(\varkappa_n - \varkappa)^2 - \frac{4i\eta}{k_0^2 - 1}} \right) + O\left( \sqrt{(\varkappa_n - \varkappa)^4 + \frac{16\eta^2}{(k_0^2 - 1)^2}} \right),$$

где  $z_1$  соответствует знак «плюс», а  $z_2$  — знак «минус», и используется ветвь квадратного корня, переводящая  $\mathbb{C}_-$  в  $-i\mathcal{Q}_1$ . Если  $(\varkappa, \eta) \neq (\varkappa_n, 0)$ , то точки перевала  $z_1$  и  $z_2$  являются простыми и аналитически зависят от  $(\varkappa, \eta)$ . В точке  $(\varkappa, \eta) = (\varkappa_n, 0)$  они совпадают и непрерывны по  $(\varkappa, \eta)$ .

**Замечание 6.7.** Точно так же, как и в замечании 3.9, можно показать, что при  $\eta > 0$  выполнено  $z_1 \in -i\mathcal{Q}_1$  и  $z_2 \in i\mathcal{Q}_1$ , а при  $\eta = 0$

$$\begin{aligned} z_1(\varkappa, 0) > 0 & \text{ при } \varkappa < \varkappa_n, & z_1(\varkappa, 0) = 0 & \text{ при } \varkappa \geq \varkappa_n, \\ z_2(\varkappa, 0) = 0 & \text{ при } \varkappa \leq \varkappa_n, & z_2(\varkappa, 0) < 0 & \text{ при } \varkappa > \varkappa_n. \end{aligned}$$

**Лемма 6.8.** Пусть  $\delta_1, \delta_2 > 0$  — числа из леммы 6.6. При  $|\varkappa - \varkappa_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \eta \leq \delta_2$  выполнено

$$\alpha_n(\varkappa, \eta) = \alpha_0 - z_1^2(\varkappa, \eta).$$

Как упоминалось выше, множество  $\mathbb{C}_{a,0}$  является листом римановой поверхности  $\Gamma_a$  функции  $\alpha \mapsto S_a(\alpha, \varkappa, \eta)$ . Мы будем называть этот лист первым листом  $\Gamma_a$ , а лист, на который можно спуститься из  $\mathbb{C}_{a,0}$  через верхний берег разреза  $[\alpha_0, \pi - \alpha_0]$  — ещё один экземпляр  $\mathbb{C}_{a,0}$  — вторым листом  $\Gamma_a$ .

**Лемма 6.9.** Пусть  $\delta_1, \delta_2 > 0$  — числа из леммы 6.6. При  $|\varkappa - \varkappa_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \eta \leq \delta_2$  для

$$\tilde{\alpha}_n(\varkappa, \eta) = \alpha_0 - z_2^2(\varkappa, \eta)$$

верно следующее. При  $\eta > 0$ , а также при  $\eta = 0$  и  $\varkappa > \varkappa_n$ , точка  $\tilde{\alpha}_n$  является точкой перевала функции  $\alpha \mapsto S_a(\alpha, \varkappa, \eta)$ , лежащей на втором листе римановой поверхности  $\Gamma_a$ , причём в  $b^2$ -окрестности точки  $\alpha_0$ , разрезанной вдоль  $[\alpha_0, +\infty)$ , она является единственной с учётом кратности. Точка  $\tilde{\alpha}_n$  описывается уравнением

$$-2\varkappa k_0 \sin \alpha - 2\pi(n-1) - l_{a,0}(\alpha) - \frac{k_0^2 \sin(2\alpha)}{\sin \gamma_0(\alpha)} \eta = 0. \quad (6.14)$$

При  $\eta > 0$  она расположена в квадранте  $\mathcal{Q}_1$ , а при  $\eta = 0$  и  $\varkappa > \varkappa_n$  — в интервале  $(0, \alpha_0)$ , и в обоих этих случаях аналитически зависит от  $\varkappa$  и  $\eta$ . При  $\varkappa \leq \varkappa_n$  выполнено  $\tilde{\alpha}_n(\varkappa, \eta) \rightarrow \alpha_0$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

**Лемма 6.10.** Пусть  $\delta_1 > 0$  и  $\varkappa_n + \delta_1 \leq \varkappa \leq 0$ . Если  $b > 0$  достаточно мало, то найдётся такое  $\delta_2 > 0$ , что при  $0 \leq \eta \leq \delta_2$  функция  $S_a$  имеет в  $b$ -окрестности точки  $z = 0$  ровно одну с учётом кратности точку перевала  $z_1 = z(\alpha_n)$ . При этом

$$z_1(\varkappa, \eta) = \frac{-i\eta}{\sqrt{2}(k_0^2 - 1)^{1/4}(\varkappa - \varkappa_n)} + \frac{\eta^2}{\sqrt{2}(k_0^2 - 1)^{5/4}(\varkappa - \varkappa_n)^3} + O(\eta^3),$$

где оценка поправки равномерна по  $\varkappa$ .

### 6.2.3 Линии наискорейшего спуска

Фиксируем некоторое  $R > 0$  и обозначим  $\Pi_R^{(1)} = \Pi_R \cap \mathcal{Q}_1$ . При  $0 < \eta \leq \delta$ , где  $\delta > 0$  достаточно мало, в  $\Pi_R$  имеется единственная с учётом кратности точка перевала  $\alpha_n \in \Pi_R^{(1)}$ , см. предложение 6.4. Очевидно,  $(S_a)_{\alpha\alpha}|_{\alpha=\alpha_n} \neq 0$ , поэтому из  $\alpha_n$  выходят две линии наискорейшего спуска, вдоль которых  $\operatorname{Re} S_a$  постоянна, а  $\operatorname{Im} S_a$  возрастает. Обозначения для этих линий мы введём аналогично тому, как были введены обозначения для линий наискорейшего спуска функции  $S$  в разделе 3.3.3. При  $\varkappa < \varkappa_n$  и  $\eta = 0$  выполнено  $\alpha_n \in (0, \alpha_0)$  и  $(S_a)_{\alpha\alpha} > 0$ , поэтому из  $\alpha_n$  выходят две линии наискорейшего спуска под углами  $\pi/4$  и  $-3\pi/4$  к  $\mathbb{R}_+$ . Мы будем обозначать эти линии через  $c_0$  и  $c_2$  соответственно, и распространим эти обозначения на все остальные рассматриваемые значения параметров  $\varkappa$  и  $\eta$ , используя непрерывную зависимость этих линий от  $\varkappa$  и  $\eta$ . При  $\eta = 0$  и  $\varkappa \geq \varkappa_n$ , когда  $\alpha_n = \alpha_0$ , мы будем понимать под  $c_0$  и  $c_2$  образы при отображении  $z \mapsto \alpha(z)$  линий наискорейшего спуска на плоскости локальной переменной  $z = \sqrt{\alpha_0 - \alpha}$ , подобно тому, как это было сделано в замечании 3.19. Справедливы

**Предложение 6.11.** *Фиксируем достаточно малые  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Пусть  $\varkappa_n - \delta_1 \leq \varkappa \leq 0$  и  $0 \leq \eta \leq \delta_2$ . Линия наискорейшего спуска  $c_2$  покидает замыкание области  $\Pi_R^{(1)}$  через некоторую точку полуинтервала  $[0, \alpha_0)$  и попадает в  $\mathbb{C}_-$ . При  $\varkappa \leq \varkappa_n$  линия  $c_0$  покидает замыкание  $\Pi_R^{(1)}$  через некоторую точку множества*

$$(iR, iR + \pi/2] \cup [iR + \pi/2, \pi/2), \quad (6.15)$$

*а при  $\varkappa > \varkappa_n$  — через некоторую точку множества*

$$(iR, iR + \pi/2] \cup [iR + \pi/2, \pi/2] \cup [\alpha_*, \pi/2],$$

где  $\alpha_0 \leq \alpha_* \leq \pi/2$ .

**Лемма 6.12.** *Фиксируем достаточно малое  $r > 0$ . Пусть  $\delta_1, \delta_2 > 0$  достаточно малы, и пусть  $\varkappa_n \leq \varkappa \leq \varkappa_n + \delta_1$  и  $0 \leq \eta \leq \delta_2$ . Если в этом случае линия  $c_0$  покидает замыкание области  $\Pi_R^{(1)}$  через некоторую точку  $\alpha' \in [\alpha_*, \pi/2)$  и попадает на второй лист римановой поверхности  $\Gamma_a$ , то участок линии  $c_0$ , находящийся на втором листе  $\Gamma_a$ , целиком лежит в  $r$ -окрестности точки  $\alpha_0$  и не проходит через другие точки перевала. Линия  $c_0$  возвращается со второго листа  $\Gamma_a$  в область  $\Pi_R^{(1)}$  первого листа  $\Gamma_a$  через некоторую точку  $\alpha'' \in (\alpha', \alpha_0 + r)$ , а затем покидает  $\Pi_R^{(1)}$  через некоторую точку множества (6.15).*

Предложение 6.11 можно доказать с помощью идей, аналогичных использованным в доказательствах предложений 3.15 и 3.17. Лемма 6.12 доказывается аналогично первому пункту леммы 3.20. Мы опустим эти доказательства.

## 6.3 Завершение доказательств асимптотик $U_n$ в дне

Здесь мы завершим доказательства теорем 10, 12 и 13, выбирая подходящим образом контур интегрирования  $s$  в предложении 6.2 и сводя асимптотический анализ  $U_n$  к анализу функций  $\mathcal{T}_a$  и

$\mathcal{E}_a$ , аналогичных функциям  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{E}$ , введённым в разделе 3.2. Дальнейшие шаги вывода итоговых асимптотических формул для  $U_n$  почти дословно повторяют проделанное в главах 3 и 4, и мы их опустим.

### 6.3.1 Доказательство теоремы 10

Пусть  $\delta_1, \delta_2 > 0$  достаточно малы, и пусть  $|\varkappa - \varkappa_n| \leq \delta_1$  и  $0 \leq \eta \leq \delta_2$ . Для доказательства теоремы 10 мы выберем кривую  $c$  в предложении 6.2 — и, соответственно, в формулах (6.9) и (6.10) — следующим образом. Из предложения 6.11 и из непрерывной зависимости линий наискорейшего спуска  $c_0$  и  $c_2$  от параметров  $\varkappa$  и  $\eta$  вытекает, что для достаточно малого  $d > 0$  линия  $c_2$  пересекает отрезок (6.2) при всех рассматриваемых значениях параметров  $\varkappa$  и  $\eta$ . Линия  $c_0$  же, как следует из предложения 6.11 и леммы 6.12, пересекает ломаную (6.3), причём при  $\varkappa > \varkappa_n$  может случиться так, что перед этим линия  $c_0$  уходит на второй лист римановой поверхности  $\Gamma_a$  через некоторую точку  $\alpha'$  и затем возвращается обратно на первый лист  $\Gamma_a$  через некоторую точку  $\alpha''$ , где  $\alpha_0 \leq \alpha' < \alpha'' < \pi/2$ . Если линия  $c_0$  остаётся на первом листе  $\Gamma_a$ , то мы выберем в качестве кривой  $c$  участок  $c_2 \cup c_0$ , идущий от отрезка (6.2) до ломаной (6.3). Если же  $c_0$  уходит на второй лист  $\Gamma_a$ , то мы ещё заменим лежащий на нём участок линии  $c_0$  отрезком  $[\alpha', \alpha''] + i0$ .

Выбранная указанным образом кривая  $c$  непрерывно зависит от параметров  $\varkappa$  и  $\eta$ . Кроме того, если  $\alpha$  удаляется вдоль  $c$  от точки перевала  $\alpha_n$ , то  $\text{Im } S_a$  монотонно возрастает — это так в силу свойств линий наискорейшего спуска  $c_0$  и  $c_2$ , а также в силу того, что

$$\text{Im}(S_a)_\alpha(\alpha + i0, \varkappa, \eta) = \text{Im } l_{a,0}(\alpha + i0) > 0 \quad \text{при } \alpha \in (\alpha_0, \pi/2], \quad (6.16)$$

см. свойства функций  $\gamma_0$  и  $l_{a,0}$  в [3, Разделы 2.2.2 и 2.2.6]. Таким образом, все условия предложения 6.2 выполнены, и мы можем перейти к анализу функций  $\mathcal{T}_a$  и  $\mathcal{E}_a$ , определённых в (6.9) и (6.10). Заметим, что в формуле для  $\mathcal{T}_a$  контур интегрирования можно теперь целиком продеформировать к участку кривой  $c_2 \cup c_0$  даже в том случае, если  $c_0$  покидает первый лист  $\Gamma_a$ . В формуле для  $\mathcal{E}_a$  этого сделать нельзя из-за особенностей подынтегральной функции, аналогичных описанным в замечании 3.31.

Оставшаяся часть доказательства полностью повторяет доказательство теоремы 1: с функциями  $\mathcal{T}_a$  и  $\mathcal{E}_a$  необходимо проделать в точности то же, что было проделано с функциями  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{E}$  в главе 3 (и в доказательстве предложения 4.7 главы 4, в котором мы завершили оценку функции  $\mathcal{E}$ ). Мы не будем повторять здесь эти подробности. Отметим ещё только, что функции  $p_{a,n}$  и  $q_{a,n}$ , определённые в разделе 2.3.1 и входящие в асимптотическую формулу из теоремы 10, связаны с точками перевала  $\alpha_n$  и  $\tilde{\alpha}_n$  соотношениями

$$p_{a,n}(\varkappa, \eta) = k_0^2 \cos^2(\alpha_n(\varkappa, \eta)), \quad q_{a,n}(\varkappa, \eta) = k_0^2 \cos^2(\tilde{\alpha}_n(\varkappa, \eta)).$$

Свойства функций  $p_{a,n}$  и  $q_{a,n}$  вытекают непосредственно из свойств точек перевала. В частности, уравнения (2.71) и (2.72) нетрудно получить из уравнений (6.12) и (6.14) соответственно.

### 6.3.2 Доказательства теорем 12 и 13

Перейдём к доказательству теоремы 12. Фиксируем некоторое  $\delta_1 > 0$  и достаточно малое  $\delta_2 > 0$ , и будем считать, что  $\varkappa_n + \delta_1 \leq \varkappa \leq 0$  и  $0 \leq \eta \leq \delta_2$ . Теперь мы выберем в предложении 6.2 контур интегрирования  $c$ , соединяющий отрезок (6.2) и ломаную (6.3), таким же образом, как и выше, с одним лишь изменением: если линия  $c_0$  уходит на второй лист  $\Gamma_a$  через точку  $\alpha'$ , то от точки  $\alpha'$  кривая  $c$  идёт к ломаной (6.3) вдоль отрезка  $[\alpha', \pi/2] + i0$ . После этого асимптотическое исследование функций  $\mathcal{T}_a$  и  $\mathcal{E}_a$  проводится точно так же, как исследование  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{E}$ , проделанное в главе 4 при доказательстве теоремы 2, и мы не будем повторяться.

Наконец, мы завершим доказательство теоремы 13. Фиксируем некоторое  $C > 0$  и будем рассматривать  $\varkappa_n + \delta_1 \leq \varkappa \leq 0$  и  $0 \leq \eta \leq C\varepsilon^{2/3}$ . В этом случае нам необходимо более аккуратно исследовать функцию  $\mathcal{E}_a$  аналогично тому, как в разделе 4.4 была исследована функция  $\mathcal{E}$ . При  $u > 0$  мы положим  $c_-(u) = [\alpha_0 - iu, \alpha_0]$  и  $c_+(u) = [\alpha_0, \alpha_0 + u]$ . Также мы определим при  $\alpha \in \mathbb{C}_{a,0}$  функцию  $\mathbf{a}_a$ , аналогичную определённой в (4.15) функции  $\mathbf{a}$ , следующим образом:

$$\mathbf{a}_a(\alpha, \varepsilon) = \int_{\alpha_0}^{\alpha - \varepsilon/2} (L_{a,0}(q) - l_{a,0}(q)) dq + \int_{\alpha - \varepsilon/2}^{\alpha} (l_{a,0}(\alpha) - l_{a,0}(q)) dq.$$

Справедливо аналогичное предложению 4.8

**Предложение 6.13.** Пусть  $0 < \theta < 1/6$ . Положим  $\rho = \rho(\varepsilon) = \varepsilon^{2/3-\theta}$ . Для  $\mathcal{E}_a(x, y)$  справедливо представление

$$\mathcal{E}_a(x, y) = \mathcal{R}_a(x, y) + \mathcal{G}_a(x, y) + O(\varepsilon^{7/6}),$$

$$\mathcal{R}_a(x, y) = \frac{iK_a}{\varepsilon^{3/2}} \int_{c_+(\rho)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S_a(\alpha+i0, \varkappa, \eta)} \left( \int_{\alpha_0}^{\alpha - \varepsilon/2} (P_a(q+i0) + \overline{P_a(q+i0)}) dq \right) g(\alpha, \eta) d\alpha,$$

$$\mathcal{G}_a(x, y) = \frac{iK_a}{\varepsilon^{3/2}} \left( \int_{c_-(\rho)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S_a(\alpha, \varkappa, \eta)} \mathbf{a}_a(\alpha, \varepsilon) g(\alpha, \eta) d\alpha - \int_{c_+(\rho)} e^{\frac{i}{\varepsilon} S_a(\alpha+i0, \varkappa, \eta)} \mathbf{a}_a(\alpha - i0, \varepsilon) g(\alpha, \eta) d\alpha \right).$$

Здесь  $P_a$  — аналитическая в  $\mathbb{C}_+$   $\varepsilon$ -периодическая функция, представление которой в виде ряда Фурье дано формулами

$$P_a(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k(\alpha - \alpha_0 - \varepsilon/2)/\varepsilon} (P_a)_k, \quad (P_a)_k = \frac{2e^{i\pi/4}}{(k_0^2 - 1)^{1/4}} \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/2} + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{3/2}\right). \quad (6.17)$$

*Доказательство.* Деформируем в (6.10) выбранный выше при доказательстве теоремы 12 контур интегрирования  $c$  к участку ломаной

$$[-\pi/2 - id, \alpha_0 - id] \cup [\alpha_0 - id, \alpha_0] \cup ([\alpha_0, \pi/2] + i0).$$

При удалении  $\alpha$  от точки  $\alpha_0$  вдоль этой ломаной  $\operatorname{Im} S_a$  монотонно возрастает. На отрезке  $[\alpha_0, \pi/2] + i0$  это вытекает из (6.16). На  $[-\pi/2 - id, \alpha_0 - id]$  выполнено

$$\operatorname{Im} (S_a)_\alpha(\alpha, \varkappa, \eta) = 2\varkappa k_0 \cos(\operatorname{Re} \alpha) \operatorname{sh} d + \operatorname{Im} l_{a,0}(\alpha) + \eta \operatorname{Im} \frac{k_0^2 \sin(2\alpha)}{\sin \gamma_0(\alpha)}.$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы неположительно, второе отрицательно, см. свойства функции  $l_{a,0}$  в [3, Раздел 2.2.6], а третье есть  $O(\eta) = O(\varepsilon^{2/3})$  и малó при достаточно малых  $\varepsilon$ , поэтому  $\operatorname{Im} (S_a)_\alpha < 0$  на  $[-\pi/2 - id, \alpha_0 - id]$ . Наконец, на отрезке  $[\alpha_0 - id, \alpha_0]$  с достаточно малым  $d > 0$  можно воспользоваться формулой (6.13). Положив в ней  $z = e^{i\pi/4}s$ ,  $s > 0$ , и продифференцировав её по  $s$ , получим при достаточно малых  $s$  и  $\eta$

$$\operatorname{Im} (S_a)_s = 4(k_0^2 - 1)^{1/2}(\varkappa - \varkappa_n) s + O(\eta + s^2) > 0,$$

т. е.  $\operatorname{Im} S_a$  возрастает с ростом  $s$ , а значит  $\operatorname{Im} S_a$  убывает на отрезке  $[\alpha_0 - id, \alpha_0]$  с ростом  $\operatorname{Im} \alpha$ .

Пусть  $r > 0$  достаточно малó. В силу сказанного выше,  $\mathcal{E}_a$  с точностью до поправки  $O(e^{-C/\varepsilon})$  равно правой части (6.10) с заменой контура интегрирования на  $c_-(r) \cup (c_+(r) + i0)$ . Оставшаяся часть доказательства предложения 6.13 аналогична доказательству предложения 4.8. В частности, следует использовать верное в  $\mathbb{C}_+ \cup (\mathbb{R} + i0)$  равенство  $L_{a,0} = L_{a,1} + P_a$ , где  $L_{a,1}$  — аналитическая в

$$\mathbb{C} \setminus ((-\infty, \alpha_0 - \varepsilon/2] \cup [\pi - \alpha_0 + \varepsilon/2, +\infty))$$

функция, связанная с  $L_{a,0}$  аналогично тому, как функция  $L_1$  связана с функцией  $L_0$ , см. об  $L_0$  и  $L_1$  раздел А.3 приложения А. Функция  $P_a$  аналитична в  $\mathbb{C}_+$ , периодична с периодом  $\varepsilon$  и описывается формулами (6.17), которые доказываются аналогично формулам (А.9) для функции  $P$ , см. [2, Лемма 4.3]. Мы не будем вдаваться в подробности.  $\square$

Дальнейшие шаги доказательства теоремы 13 — получение асимптотического представления для  $\mathcal{R}_a$  и оценки для  $\mathcal{G}_a$  — почти дословно повторяют проделанное для  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{G}$  в разделах 4.4.2 и 4.4.3 соответственно, и мы опустим эти детали. На этом доказательство теоремы 13 можно считать завершённым.

## Заключение

В заключение мы перечислим ещё раз итоги выполненного исследования. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Во-первых, мы исследовали при  $\varepsilon \rightarrow 0$  адиабатическую нормальную волну  $\Psi_n$  — решение уравнения Шрёдингера (1.1), имеющее в потенциальной яме асимптотику вида (1.5), пока существует  $n$ -е собственное значение  $E_n(\tau)$  стационарного оператора Шрёдингера  $H(\tau)$ , см. раздел 1.1.1 введения. Нами были получены асимптотические формулы для  $\Psi_n$  вне потенциальной ямы вблизи и после момента  $\tau_n$  исчезновения  $n$ -го собственного значения. При этом были обнаружены представляющие интерес физические эффекты, подробно описанные в разделе 2.1 главы 2: «луч прожектора», который на полуплоскости  $P$  переменных  $(\tau, x)$  излучается при  $\tau \sim \tau_n$  из сектора  $W$ , соответствующего потенциальной яме, в сектор  $P \setminus W$ , а также поверхностная волна, распространяющаяся при  $\tau > \tau_n$  в секторе  $P \setminus W$  вдоль границы  $x = 1 - \tau$  потенциальной ямы и периодически «просачивающаяся» в сектор  $W$  вблизи моментов  $\tau_m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ .

Во-вторых, мы построили решение  $\Psi_{cs}$  уравнения (1.1), являющееся аналогом адиабатической нормальной волны  $\Psi_n$  для непрерывного спектра оператора  $H(\tau)$ . В разделе 2.1 главы 2 были приведены и подробно обсуждались формулы для решения  $\Psi_{cs}$  и его асимптотики при  $\varepsilon \rightarrow 0$  внутри и вне потенциальной ямы. Решение  $\Psi_{cs}$  зависит от спектрального параметра и в зависимости от значений этого параметра на непрерывном спектре оператора  $H(\tau)$  имеет различное асимптотическое поведение. В частности, если спектральный параметр близок к краю непрерывного спектра, то вне потенциальной ямы вблизи её границы и внутри потенциальной ямы решение  $\Psi_{cs}$  «более заметно» при  $\tau \sim \tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а между этими моментами принимает асимптотически меньшие значения. Вдали же от потенциальной ямы  $\Psi_{cs}$  «заметно» при всех  $\tau$ . Таким образом, и здесь наблюдается эффект периодического «просачивания» волновой функции внутрь потенциальной ямы.

В-третьих, мы исследовали адиабатическую нормальную волну  $U_n$  — решение уравнения Гельмгольца (1.6), имеющее в водном клине  $W_a$  асимптотику вида (1.5) до достижения этой волной «критической глубины», см. раздел 1.1.2 введения. Мы получили асимптотические формулы для  $U_n$  вблизи критической глубины и после её преодоления, как внутри водного слоя  $W_a$ , так и под ним, см. раздел 2.3 главы 2. Как оказалось, поведение  $U_n$  на полуплоскости переменных  $(x, y)$  качественно повторяет поведение  $\Psi_n$  на полуплоскости переменных  $(t, x)$ , где  $t = \tau/\varepsilon$ , хотя формулы и отличаются в деталях.

Наконец, отметим, что в разделе 1.2.2 введения подробно обсуждались планы дальнейшей разработки темы исследования, и не будем повторять их здесь.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность научному руководителю, Александру Александровичу Федотову, за постановку интересных задач, плодотворную совместную работу и подробное обсуждение полученных результатов. Также автор благодарит кафедру высшей математики и математической физики физического факультета СПбГУ за поддержание благоприятной учебной и рабочей атмосферы.

## Приложение А. Об интегральных представлениях для решений $\Psi_n$ и $U_n$

Следуя [2], мы кратко опишем в разделах А.1 и А.2 данного приложения процедуру построения решений  $\Psi_n$  уравнения (1.1). В частности, в разделе А.2 мы определим решение  $R$  разностного уравнения (2.4), входящее в интегральные представления (2.6) решений  $\Psi_n$ . Далее, в разделе А.3, мы обсудим некоторые свойства функции  $L_0$ , входящей в определение функции  $R$ . Наконец, в разделе А.4 мы выпишем полученные в [3] интегральные формулы для решений  $U_n$  уравнения Гельмгольца (1.6).

### А.1 Производящее решение $\Psi$

Для построения решений  $\Psi_n$  мы построим сперва т. н. *производящее решение* уравнения (1.1). Введём обозначение  $k_m = p + \varepsilon m$  и будем далее считать  $0 < \varepsilon < 1$  и  $\tau \leq 1$ . Производящее решение строится в виде

$$\Psi(x, \tau, p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} e^{\frac{i}{\varepsilon}\tau} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\frac{i}{\varepsilon}k_m^2(1-\tau)} \sin(k_m x) R(k_m), & 0 \leq x \leq 1 - \tau, \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\frac{i}{\varepsilon}p_1^2(k_m)(1-\tau) + ip_1(k_m)x} T(k_m) R(k_m), & x \geq 1 - \tau, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

где  $p$  — вещественный параметр, а  $p_1$ ,  $T$  и  $R$  — функции, подлежащие определению. Можно сказать, что внутри сектора  $W$  производящее решение представляет собой линейную комбинацию плоской волны  $e^{-\frac{i}{\varepsilon}(p^2-1)\tau + ipx}$  и всех волн, полученных из неё отражениями от границ  $W$ . Вне сектора  $W$  производящее решение равно сумме «преломлённых» волн, уходящих от  $W$ .

Если ряды в (А.1) сходятся достаточно быстро, то определённая этими формулами функция  $\Psi$  удовлетворяет уравнению (1.1) при  $0 < x < 1 - \tau$  и при  $x > 1 - \tau$ , а также удовлетворяет граничному условию Дирихле при  $x = 0$ . Функции  $p_1$ ,  $T$  и  $R$  определяются<sup>1</sup> из условий непрерывности функции  $\Psi$  и её производной по  $x$  при  $x = 1 - \tau$ . Для функций  $p_1$  и  $T$  получаются явные формулы (2.5), а функция  $R$ , как выясняется, должна удовлетворять разностному уравнению (2.4). Оказывается, что при  $0 < \varepsilon < 1$  уравнение (2.4) имеет решение  $R(p)$ , убывающее при  $|p| \rightarrow \infty$  быстрее любой отрицательной степени  $p$ . Выбор такого решения в качестве входящей в (А.1) функции  $R$  и обеспечивает требуемую сходимость рядов. Мы опишем выбираемое нами решение  $R$  ниже, в разделе А.2.

<sup>1</sup>Это делается в точности так же, как при построении решения  $\Psi_{cs}$ , см. раздел 5.1 главы 5.

Из формул (A.1) вытекает, что производящее решение  $\Psi$  является  $\varepsilon$ -периодической функцией параметра  $p$  и, следовательно, может быть представлено в виде ряда Фурье:

$$\Psi(x, \tau, p) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i n p}{\varepsilon}} \Psi_n(x, \tau).$$

Именно коэффициенты Фурье  $\Psi_n$  с номерами  $n \in \mathbb{N}$  и являются интересующими нас решениями уравнения (1.1). Интегральные представления (2.6) для коэффициентов Фурье  $\Psi_n$  функции  $\Psi$  мгновенно получаются из (A.1).

## A.2 Определение функции $R$

В качестве решения разностного уравнения (2.4) мы выбираем функцию  $R$ , построенную и изученную в работе [2]. Такой выбор обеспечивает сходимость рядов в (A.1). Здесь мы опишем эту функцию.

Пусть область  $\mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}$  и аналитическая в этой области и непрерывная вплоть до её границы функция  $Q_0$  определены формулами (2.1) и (2.2) соответственно. Обозначим через  $\rho_0$  аналитическую в  $\mathbb{C}_0$  и непрерывную вплоть до границы  $\mathbb{C}_0$  функцию, определённую формулой для  $\rho$  в (2.3) с заменой  $Q$  на  $Q_0$ . Нетрудно видеть, что

$$\rho_0(0) = 1, \quad \rho_0(-p) = \frac{1}{\rho_0(p)} \quad \text{при } p \in \mathbb{C}_0, \quad (\text{A.2})$$

$$\rho_0(p + i0) \asymp \frac{1}{p^2} \quad \text{при } p \in \mathbb{R}, \quad p \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.3})$$

Определим аналитическую в  $\mathbb{C}_0$  и непрерывную вплоть до границы  $\mathbb{C}_0$  функцию  $l_0$  формулами

$$l_0(p) = -i \ln \rho_0(p), \quad l_0(0) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Легко видеть, что  $l_0/2$  — это аналитическая в  $\mathbb{C}_0$  ветвь арксинуса, введённая в разделе 2.1.2.

Будем называть кривую  $\gamma \subset \mathbb{C}$  вертикальной, если  $p$  является вдоль этой кривой кусочно непрерывно дифференцируемой функцией переменной  $\text{Im } p \in \mathbb{R}$ , причём производная  $dp/d(\text{Im } p)$  равномерно ограничена. Для точки  $p_0 \in \mathbb{C}$  мы будем обозначать через  $\gamma(p_0)$  вертикальную кривую, проходящую через  $p_0$ . Справедливо

**Предложение A.1** ([2], предложение 3.1). *При  $p \in \mathbb{C}_0$  положим*

$$R_0(p) = \exp \left( \frac{i}{\varepsilon} \int_0^p L_0(s) ds \right), \quad L_0(p) = \frac{\pi}{2i\varepsilon} \int_{\gamma(p)} \frac{l_0(s) ds}{\cos^2 \left( \frac{\pi(p-s)}{\varepsilon} \right)}, \quad (\text{A.5})$$

где контур интегрирования  $\gamma(p) \subset \mathbb{C}_0$  ориентирован так, что  $\text{Im } p$  вдоль него возрастает. Функции  $L_0$  и  $R_0$  аналитичны в  $\mathbb{C}_0$ , причём  $R_0$  непрерывна вплоть до границы  $\mathbb{C}_0$ . Функция  $R_0$  решает в  $\mathbb{C}_0$  разностное уравнение (2.4) с коэффициентом  $\rho = \rho_0$ , а  $L_0$  удовлетворяет

соотношению

$$L_0(p + \varepsilon/2) - L_0(p - \varepsilon/2) = \varepsilon l'_0(p), \quad p \pm \varepsilon/2 \in \mathbb{C}_0. \quad (\text{A.6})$$

**Замечание А.2.** Соотношение (А.6) нетрудно проверить с помощью теоремы о вычетах, а из него следует, что функция  $R_0$  является решением уравнения (2.4).

Мы определим функцию  $R$  при  $p \in \mathbb{R}$  формулами

$$R(p) = \begin{cases} R_0(p + i0) & \text{при } p \geq 0, \\ R_0(p - i0) & \text{при } p < 0. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Определённая таким образом функция  $R$  является решением разностного уравнения (2.4) на вещественной оси с коэффициентом  $\rho$ , заданным в (2.3). Сходимость рядов в (А.1) обеспечивает

**Лемма А.3.** При  $p \in \mathbb{R}$  и  $|p| \rightarrow \infty$  значения функции  $R$  стремятся к нулю быстрее любой отрицательной степени  $p$ .

*Доказательство.* Очевидно, что для заданного в (2.3) коэффициента  $\rho$  выполнено

$$\rho(p) = \begin{cases} \rho_0(p + i0) & \text{при } p \geq 0, \\ \rho_0(p - i0) & \text{при } p < 0. \end{cases}$$

Утверждение леммы вытекает отсюда, из свойств (А.3) и (А.2) функции  $\rho_0$  и из разностного уравнения (2.4) для функции  $R$ .  $\square$

### А.3 О функции $L_0$

Здесь мы опишем некоторые свойства функции  $L_0$ . Во-первых, при доказательстве теорем данной работы мы многократно используем следующую лемму:

**Лемма А.4** ([2], Lemma 10). Для достаточно малых значений  $\varepsilon$

$$\int_0^p (L_0(s) - l_0(s)) ds = O(\varepsilon^{3/2}), \quad p \in \mathbb{C}_0. \quad (\text{A.8})$$

Эта формула верна вплоть до границы  $\mathbb{C}_0$ , и оценка поправки в ней равномерна.

Далее мы обсудим особенности функции  $L_0$ . Находящаяся в правой части уравнения (А.6) производная ветви арксинуса аналитична в  $\mathbb{C}_0$  и имеет в точках  $p = \pm 1$  особенности типа  $(p \mp 1)^{-1/2}$ . Отсюда и из (А.6) следует, что  $L_0$  аналитична в области  $\mathbb{C}_0 \cup (-1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)$  и имеет особенности в точках  $\pm(1 + \varepsilon(m - 1/2))$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . В частности, особенности типа  $(p \mp (1 + \varepsilon/2))^{-1/2}$  расположены в точках  $\pm(1 + \varepsilon/2)$ .

Обсудим аналитическую структуру функции  $L_0$  справа от точки  $p = 1$ . Пусть  $l_1$  — аналитическое продолжение функции  $l_0$  из  $\mathbb{C}_+$  в  $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$  через луч  $(1, +\infty)$ . Разностное уравнение

$$L_1(p + \varepsilon/2) - L_1(p - \varepsilon/2) = \varepsilon l'_1(p), \quad p \pm \varepsilon/2 \in \mathbb{C}_1,$$

имеет аналитическое в  $\mathbb{C}_1$  решение  $L_1$ , описываемое второй формулой в (A.5) с заменой  $l_0$  на  $l_1$  и с контуром интегрирования  $\gamma(p) \subset \mathbb{C}_1$ . В  $\mathbb{C}_+$  обе функции  $L_0$  и  $L_1$  аналитичны и удовлетворяют одному и тому же разностному уравнению, поэтому их разность  $P = L_0 - L_1$  является аналитической в  $\mathbb{C}_+$   $\varepsilon$ -периодической функцией. Имеет место

**Лемма A.5** ([2], Lemma 4.3). При  $p \in \mathbb{C}_+$

$$P(p) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k(p-1-\varepsilon/2)/\varepsilon} P_k, \quad P_k = 2e^{i\pi/4} \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/2} + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{3/2}\right). \quad (\text{A.9})$$

Наконец, обсудим связь  $L_0$  и  $L_1$  в нижней полуплоскости. Обе эти функции определены и аналитичны в  $\mathbb{C}_-$ . При доказательстве предложения 4.8 нам потребуется

**Лемма A.6.** При  $p \in \mathbb{C}_-$

$$L_1(p) = 2\pi - L_0(p) + \overline{P(\bar{p})}. \quad (\text{A.10})$$

*Доказательство.* Заметим, что  $l_0(p) = 2 \arcsin p$  при  $p \in \mathbb{C}_0$ , поэтому

$$\overline{l_0(p)} = l_0(p), \quad p \in (-1, 1), \quad \overline{l_0(p)} + l_0(p) = 2\pi, \quad p \in (1, +\infty),$$

откуда

$$\overline{l_0(\bar{p})} = l_0(p), \quad p \in \mathbb{C}_0, \quad \overline{l_1(\bar{p})} + l_1(p) = 2\pi, \quad p \in \mathbb{C}_1. \quad (\text{A.11})$$

Из (A.11) легко получить, что

$$\overline{L_0(\bar{p})} = L_0(p), \quad p \in \mathbb{C}_0, \quad \overline{L_1(\bar{p})} + L_1(p) = 2\pi, \quad p \in \mathbb{C}_1. \quad (\text{A.12})$$

Действительно, докажем, например, формулу для  $L_0$ . При  $-1 < \operatorname{Re} p < 1$  функцию  $L_0$  можно определить формулой в (A.5) с контуром интегрирования  $p + i\mathbb{R}$ . Отсюда и из первой формулы в (A.11) вытекает первая формула в (A.12). Вторая формула в (A.12) доказывается аналогично.

Соотношение (A.10) вытекает из (A.12) и из равенства  $L_0 - L_1 = P$ .  $\square$

#### A.4 Формулы для решений $U_n$

Здесь мы выпишем интегральные представления для  $U_n$ . Процедура построения решений  $U_n$  подробно описана в работе [3], и мы не будем повторять её в настоящей диссертации, а приведём лишь результат. Отметим, что упомянутая процедура схожа с процедурой построения решений  $\Psi_n$ , описанной выше, но является более сложной, поскольку множество точек ветвления входящих в формулы для  $U_n$  многозначных аналитических функций имеет более сложную структуру.

Дадим сперва несколько определений. Соотношение

$$k_0 \cos \alpha = \cos \gamma(\alpha) \quad (\text{A.13})$$

определяет многозначную аналитическую функцию  $\gamma(\alpha)$ , точки ветвления которой описываются уравнениями

$$\pm 1 = k_0 \cos \alpha. \quad (\text{A.14})$$

Поскольку  $k_0 > 1$ , на отрезке  $(0, \pi/2)$  имеется ровно одна точка ветвления, которую мы обозначим через  $\alpha_0$ . Остальные точки ветвления  $\gamma$  имеют вид  $\pm\alpha_0 + \pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Область

$$\mathbb{C}_{a,0} = \mathbb{C} \setminus \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid |\alpha| \geq \alpha_0 \} \quad (\text{A.15})$$

не содержит точек ветвления функции  $\gamma$ , и мы фиксируем в ней однозначную аналитическую и непрерывную вплоть до её границы ветвь  $\gamma_0$  функции  $\gamma$  условием

$$\gamma_0(\alpha) \in i\mathbb{R}_+ \quad \text{при} \quad 0 \leq \alpha < \alpha_0. \quad (\text{A.16})$$

Определим вдоль вещественной оси ветвь  $\gamma_{\mathbb{R}}$  функции  $\gamma$ , аналитически продолжая  $\gamma_0$  с интервала  $(0, \alpha_0)$  вдоль кривой  $c_{\mathbb{R}}$ , инфинитезимально близкой к вещественной оси и изображённой в верхней части рисунка А.1, который мы позаимствовали из работы [3]. Кривая  $c_{\mathbb{R}}$  симметрична относительно точки  $\alpha = 0$  и периодична с периодом  $2\pi$  справа от нуля. Подчеркнём, что функцию  $\gamma_{\mathbb{R}}$  можно считать определённой на  $\mathbb{R}$  — кривая  $c_{\mathbb{R}}$  лишь задаёт направления обхода точек ветвления. Функция  $\gamma_{\mathbb{R}}$  биективно отображает половину кривой  $c_{\mathbb{R}}$ , лежащую в правой полуплоскости, на кривую, изображённую в нижней части рис. А.1, причём  $\gamma_{\mathbb{R}}(2\pi + \alpha) = 2\pi + \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha)$  при  $\alpha \geq 0$ . Половину  $c_{\mathbb{R}}$ , лежащую в левой полуплоскости, функция  $\gamma_{\mathbb{R}}$  отображает на ту же кривую, поскольку имеет место соотношение  $\gamma_{\mathbb{R}}(-\alpha) = \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha)$ . Подробности см. в [3, Раздел 2.2.4].

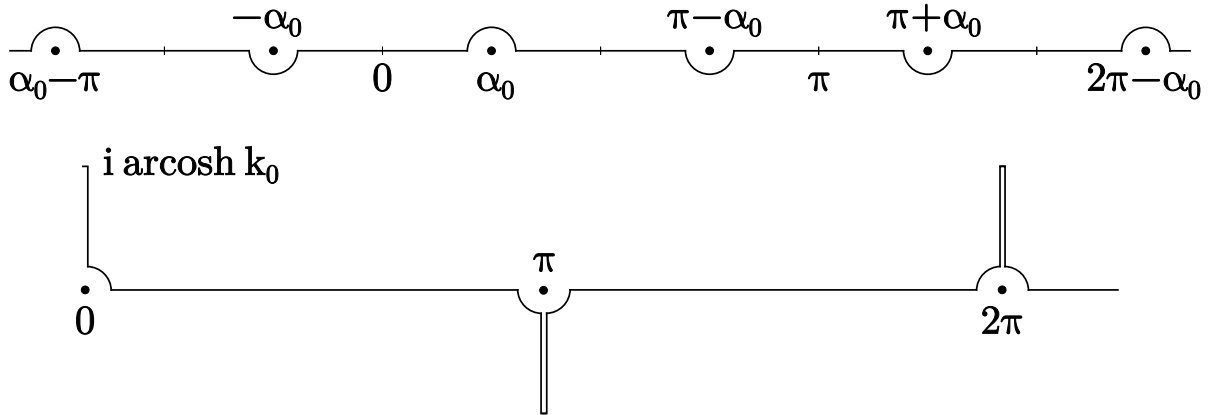


Рис. А.1: Кривая  $c_{\mathbb{R}}$  и её образ при отображении  $\gamma_{\mathbb{R}}$ .

Положим при  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\beta(\alpha) = -\frac{\varepsilon}{2} + \gamma_{\mathbb{R}}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad T_a(\alpha) = \frac{2k_0 \sin \alpha}{\sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) + k_0 \sin \alpha},$$

$$\rho_a(\alpha) = \frac{\sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) - k_0 \sin \alpha}{\sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) + k_0 \sin \alpha}. \quad (\text{A.17})$$

Наконец, рассмотрим на вещественной оси разностное уравнение

$$R_a\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \rho_a(\alpha) R_a\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (\text{A.18})$$

и выберем его непрерывное и быстро убывающее при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  решение  $R_a(\alpha)$ , определённое в [3, Разделы 2.3 и 2.4].

**Замечание А.7.** Кратко опишем, как определяется функция  $R_a$ . Определим в  $\mathbb{C}_{a,0}$  функцию  $\rho_{a,0}$  формулой (А.17) с заменой  $\gamma_{\mathbb{R}}$  на  $\gamma_0$  и положим

$$l_{a,0}(\alpha) = -i \ln \rho_{a,0}(\alpha), \quad l_{a,0}(0) = 0,$$

ср. эту формулу с (А.4). Определим в  $\mathbb{C}_{a,0}$  функцию  $L_{a,0}$  второй формулой в (А.5) с заменой  $l_0$  на  $l_{a,0}$  и с контуром интегрирования, лежащим в  $\mathbb{C}_{a,0}$ . Определим в  $\mathbb{C}_{a,0}$  функцию  $R_{a,0}$  первой формулой в (А.5) с заменой  $L_0$  на  $L_{a,0}$ . Функция  $R_{a,0}$  решает в  $\mathbb{C}_{a,0}$  разностное уравнение (А.18) с заменой  $\rho_a$  на  $\rho_{a,0}$ . Положим  $R_a(\alpha) = R_{a,0}(\alpha)$  при  $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$  и заметим, что  $\rho_a = \rho_{a,0}$  на интервале  $(-\alpha_0, \alpha_0)$ . Наконец, продолжим  $R_a$  с интервала  $(-\alpha_0, \alpha_0)$  на вещественную ось с помощью разностного уравнения (А.18) — это можно сделать при достаточно малых  $\varepsilon > 0$ .

Для решения  $U_n$  справедливы формулы

$$U_n(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \begin{cases} 2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0x \cos \alpha - \frac{2\pi i n \alpha}{\varepsilon}} \sin(k_0y \sin \alpha) R_a(\alpha) d\alpha, & 0 \leq y \leq -\varepsilon_1 x, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \cos \beta(\alpha) + iy \sin \beta(\alpha) - \frac{2\pi i n \alpha}{\varepsilon}} T_a(\alpha) R_a(\alpha) d\alpha, & y \geq -\varepsilon_1 x, \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

ср. их с (2.6). Отметим, что в подынтегральном выражении в (А.19) множители  $e^{ix \cos \beta(\alpha) + iy \sin \beta(\alpha)}$  и  $T_a(\alpha)$  ограничены, см. [3, Замечание 2.1 и Раздел 2.2.5], а  $R_a(\alpha)$  экспоненциально убывает при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , см. [3, доказательство Теоремы 2.1]. Отметим также, что при  $\varepsilon_1 x = \varkappa < \varkappa_n - \delta$ , где  $\delta > 0$  фиксировано, решение  $U_n$  принимает значения порядка единицы при  $0 \leq y \leq -\varkappa$ , см. (1.8), и экспоненциально убывает с ростом  $y$  при  $y \geq -\varkappa$ .

## Приложение В. К обсуждению результатов

Здесь мы приведём выкладки, связанные с обсуждением описанных в главе 2 результатов.

### В.1 Получение формулы для $\Psi_n$ в пограничном слое

Кратко опишем получение асимптотической формулы (2.19). Фиксируем некоторые  $C_1, C_2 > 0$  и будем считать, что  $|\tau - \tau_n| \leq C_1 \varepsilon^{1/3}$  и  $0 \leq \xi \leq C_2 \varepsilon^{2/3}$ , тогда величины

$$\nu = \frac{\tau - \tau_n}{(4\varepsilon)^{1/3}}, \quad 0 \leq \eta = \frac{2\xi}{(4\varepsilon)^{2/3}}$$

ограничены. Ниже мы будем считать, что значения корней  $\sqrt{\nu^2 - i\eta}$  и  $(\nu^2 - i\eta)^{1/4}$  лежат в замыкании четвёртого квадранта  $\mathbb{C}$ . Из (3.17) следует формула

$$z_{1,2} = \frac{\varepsilon^{1/3}}{2^{5/6}} \left( -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - i\eta} \right) (1 + O(\varepsilon^{1/3})).$$

Поскольку  $p(z) = 1 - z^2$ , то

$$p(z_{1,2}) = 1 - \frac{\varepsilon^{2/3}}{2^{2/3}} \left( \nu^2 - \frac{i\eta}{2} \mp \nu \sqrt{\nu^2 - i\eta} \right) (1 + O(\varepsilon^{1/3})).$$

Поскольку  $p_n = p(z_1)$  и  $q_n = p(z_2)$ , см. (3.19) и (3.21), нетрудно получить, с учётом определений (2.12), (2.15), (2.16) и (2.18), что

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -i\varepsilon \left( \frac{2i}{3}\nu^3 + \nu\eta \right) (1 + O(\varepsilon^{1/3})), & \zeta_n &= e^{i\pi/12} (\nu^2 - i\eta)^{1/4} (1 + O(\varepsilon^{1/3})), \\ \mu_n &= O(1), & \Delta_1 &= O(\varepsilon^{2/3}). \end{aligned}$$

С помощью формулы (3.43) для  $\partial \ln p_n / \partial \tau$ , точно такой же формулы, связывающей  $\partial \ln q_n / \partial \tau$  и  $z_2$ , а также формулы (3.45) для  $S_{zz}(z_1, \tau, \xi)$ , правая часть которой также даёт выражение и для  $-S_{zz}(z_2, \tau, \xi)$ , мы находим

$$K_n^- = -\frac{(4\varepsilon)^{1/6} \nu}{(\nu^2 - i\eta)^{1/4}} (1 + O(\varepsilon^{1/3})), \quad K_n^+ = (4\varepsilon)^{1/6} (\nu^2 - i\eta)^{1/4} (1 + O(\varepsilon^{1/3})).$$

Подставляя найденные выражения для  $\alpha_n, \zeta_n, K_n^\pm$  и  $\Delta_1$  в (2.17), получим формулу (2.19).

### В.2 К обсуждению теорем 5 и 6 при $p - 1 \ll 1$

Рассмотрим здесь подробно случай, когда  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Сперва мы рассмотрим при таких значениях  $p$  формулу (2.42) из теоремы 5, описывающую асимптотическое поведение

$\Psi_{cs}$  внутри потенциальной ямы. Для близких к единице значений  $p$  имеет место верное для любого  $n \in \mathbb{N}$  соотношение

$$1 - e^{2ip(1-\tau)} \rho(p) = 1 + (1 + O(p-1)) e^{2i(\tau_n-\tau)} \rho(p),$$

где  $\tau_n$  определено формулой (1.4). Легко видеть, что  $\rho(p)$  близок к  $-1$  при  $p \rightarrow 1+0$ , и, как следствие, старший член в скобках в формуле (2.42) принимает наибольшие по модулю значения при  $\tau = \tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Более точно,

$$\rho(p) = -1 + 2\sqrt{2}\sqrt{p-1} + O(p-1), \quad p \rightarrow 1+0, \quad (\text{B.1})$$

откуда

$$1 - e^{2ip(1-\tau)} \rho(p) = (1 - e^{2i(\tau_n-\tau)}) + 2\sqrt{2} e^{2i(\tau_n-\tau)} \sqrt{p-1} + O(p-1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, как и было сказано в разделе 2.2.4 при обсуждении теоремы 5, старший член в скобках в формуле (2.42) имеет порядок  $(p-1)^{-1/2}$  при  $\tau = \tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и, как следствие, при таких значениях  $\tau$  он будет больше поправки  $O(\varepsilon^{1/3}/(p-1))$  при всех  $p \geq 1 + c_1 \varepsilon^\alpha$ . С другой стороны, если  $\tau$  принимает значения вне фиксированной окрестности множества  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , то рассматриваемый старший член имеет порядок единицы и будет больше поправки только при  $p-1 \gg \varepsilon^{1/3}$ .

Теперь мы рассмотрим при  $\varepsilon^{2/3} \ll p-1 \ll 1$  формулу (2.48) из теоремы 6, справедливую вне потенциальной ямы, и докажем формулы (2.54) и (2.55). Пусть  $\theta_n$  определено формулой (2.52). Знаменатель в формуле (2.48) может при каждом  $n \in \mathbb{N}$  быть записан в виде

$$1 - e^{i(2p(1-\tau) + \frac{p\varepsilon}{Q(p)})} \rho(p) = 1 + (1 + O(p-1)) e^{i\theta_n} \rho(p). \quad (\text{B.2})$$

При  $c_2 \varepsilon^{\alpha_1} \leq p-1 \ll 1$  мы имеем

$$\sqrt{p-1 - \frac{\varepsilon}{2}} = \sqrt{p-1} + O\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{p-1}}\right), \quad (\text{B.3})$$

$$Q\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sqrt{2}\sqrt{p-1 - \frac{\varepsilon}{2}} (1 + O(p-1)) = \sqrt{2}\sqrt{p-1} \left(1 + O(\varepsilon^{1-\alpha_1} + (p-1))\right). \quad (\text{B.4})$$

Из (B.2) и (B.1) видно, что знаменатель в (2.48) принимает наименьшие значения, когда  $\theta_n$  близок к нулю. Пусть  $\theta_n$  мал, тогда

$$1 - e^{i(2p(1-\tau) + \frac{p\varepsilon}{Q(p)})} \rho(p) = 2\sqrt{2}\sqrt{p-1} \left(1 + O\left(\sqrt{p-1} + \frac{|\theta_n|}{\sqrt{p-1}}\right)\right),$$

$$4p Q\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{e^{i(2p(1-\tau) + \frac{p\varepsilon}{Q(p)})} \rho(p)}{1 - e^{i(2p(1-\tau) + \frac{p\varepsilon}{Q(p)})} \rho(p)} = 2 \left(1 + O\left(\sqrt{p-1} + \frac{|\theta_n|}{\sqrt{p-1}}\right)\right).$$

Таким образом, при  $p - 1 \ll 1$  и  $|\theta_n| \leq \delta_1 \sqrt{p-1}$ , где  $\delta_1 > 0$  малое, формула (2.48) принимает упрощённый вид (2.54). Условие  $|\theta_n| \leq \delta_1 \sqrt{p-1}$  для некоторого малого  $\delta_1 > 0$  равносильно условию

$$\left| \xi - 2 \frac{Q(p)}{p} (\tau - \tau_n) \right| \leq \delta_2 (p-1)$$

для некоторого малого  $\delta_2 > 0$ , откуда видно, что формула (2.54) имеет место в окрестностях порядка  $(p-1)$  прямых (2.53). Если же, напротив, для некоторого достаточно большого  $C_1 > 0$  выполнено  $|\theta_n| \geq C_1 \sqrt{p-1}$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ , или, что то же самое, для некоторого достаточно большого  $C_2 > 0$  выполнено

$$\left| \xi - 2 \frac{Q(p)}{p} (\tau - \tau_n) \right| \geq C_2 (p-1), \quad n \in \mathbb{N},$$

то знаменатель в (2.48) можно оценить снизу по модулю как

$$\left| 1 - e^{i(2p(1-\tau) + \frac{p\xi}{Q(p)})} \rho(p) \right| = \left| 1 - e^{i\theta_n} + O(\sqrt{p-1}) \right| \geq C |\theta_n| \geq C |\theta|,$$

где  $C > 0$  и  $|\theta| = \min_{n \in \mathbb{N}} \{|\theta_n|\}$ . Как следствие, с учетом (B.4) и (B.1) формула (2.48) принимает вид (2.55).

### В.3 Асимптотики функции $\mathcal{F}$

Докажем формулы (2.64) и (2.65). В приведённых ниже выкладках при получении оценок «хвостов» интегралов мы пользуемся неравенством (5.35). Мы имеем при  $q \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s, w, q) &= \int_0^\infty e^{i w u - \frac{4\sqrt{2}}{3}(q+u)^{3/2} + \sqrt{2}i(q+u)^{1/2}s} du = \int_{\frac{1}{2q}}^{1/q} e^{i w u - \frac{4\sqrt{2}}{3}u^{3/2} + \sqrt{2}i u^{1/2}s + O(qu^{1/2} + qu^{-1/2}s)} du \\ &\quad + O\left(q + e^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{-3/2}}\right) = \int_{\frac{1}{2q}}^{1/q} e^{i w u - \frac{4\sqrt{2}}{3}u^{3/2} + \sqrt{2}i u^{1/2}s} du \\ &+ q \int_{\frac{1}{2q}}^{1/q} e^{i w u - \frac{4\sqrt{2}}{3}u^{3/2} + \sqrt{2}i u^{1/2}s} O(u^{1/2} + u^{-1/2}s) du + O(q) = \int_0^\infty e^{i w u - \frac{4\sqrt{2}}{3}u^{3/2} + \sqrt{2}i u^{1/2}s} du + O(q(1+s)). \end{aligned}$$

Итак, формула (2.64) доказана. Пусть теперь  $q \rightarrow +\infty$ , тогда

$$\begin{aligned}
e^{\frac{4\sqrt{2}}{3}q^{3/2}} e^{-\sqrt{2}iq^{1/2}s} \mathcal{F}(s, w, q) &= \int_0^{q^{1/6}} e^{\left(iw - 2\sqrt{2}q^{1/2} + \frac{is}{\sqrt{2}q^{1/2}}\right)u + O\left(\left(1 + \frac{s}{q}\right)\frac{u^2}{q^{1/2}}\right)} du + O\left(e^{-Cq^{1/4}}\right) \\
&= \int_0^{q^{1/6}} e^{\left(iw - 2\sqrt{2}q^{1/2} + \frac{is}{\sqrt{2}q^{1/2}}\right)u} du + \frac{1}{q^{1/2}} \left(1 + \frac{s}{q}\right) \int_0^{q^{1/6}} O\left(e^{-2\sqrt{2}q^{1/2}u} u^2\right) du + O\left(e^{-Cq^{1/4}}\right) \\
&= \int_0^{\infty} e^{\left(iw - 2\sqrt{2}q^{1/2} + \frac{i}{\sqrt{2}}q^{-1/2}s\right)u} du + O\left(q^{-2} + sq^{-3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}q^{1/2} - iw - \frac{is}{\sqrt{2}q^{1/2}}} + O\left(q^{-2} + sq^{-3}\right).
\end{aligned}$$

Формула (2.65) также доказана.

#### В.4 О согласованности асимптотик $\Psi_{cs}$

Проверим согласованность асимптотик  $\Psi_{cs}$  вне потенциальной ямы. Легко видеть, что слагаемые в асимптотических формулах из теорем 6 и 7, соответствующие падающей и отражённой волнам, согласованы, поскольку в обоих случаях они получены непосредственно из леммы 5.3. Достаточно проверить слагаемые, соответствующие сумме преломлённых волн. Сделаем это вблизи границы потенциальной ямы, при  $\xi = O(p - 1) = O(\varepsilon^{2/3}q)$ . Фиксируем  $N \in \mathbb{N}$ . Пусть  $|\tau - \tau_N| < \delta$  для некоторого малого  $\delta > 0$ . Используя формулу (2.65), а также формулу (В.3) и первую часть формулы (В.4), нетрудно при  $1 \ll q \ll \varepsilon^{-2/15}$ , т. е. при  $\varepsilon^{2/3} \ll p - 1 \ll \varepsilon^{8/15}$ , упростить слагаемое в скобках в (2.59), описывающее асимптотику суммы преломлённых волн, следующим образом:

$$4\sqrt{2}q^{1/2}\phi(\xi, \tau, q) = 4pQ\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p - \frac{\varepsilon}{2})\xi} \left( \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{p-1} - i\theta_N} + O(\varepsilon^{-1/3}q^{-2}) \right),$$

где  $\theta_N = 2(\tau_N - \tau) - \frac{p\xi}{Q(p)}$ . Соответствующее слагаемое из (2.48) же, с учётом формул (В.2) и (В.1), принимает при рассматриваемых значениях  $\tau$  и  $\xi$  вид

$$\begin{aligned}
4pQ\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{e^{i\left(2p(1-\tau) + \frac{p\xi}{Q(p)}\right)}\rho(p)}{1 - e^{i\left(2p(1-\tau) + \frac{p\xi}{Q(p)}\right)}\rho(p)} e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p - \frac{\varepsilon}{2})\xi} \\
= \frac{4pQ\left(p - \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{\frac{i}{\varepsilon}Q(p - \frac{\varepsilon}{2})\xi}}{2\sqrt{2}\sqrt{p-1} - i\theta_N} \left(1 + O(\sqrt{p-1} + |\theta_N|)\right).
\end{aligned}$$

Видно, что при малых  $|\theta_N|$  эти асимптотические формулы совпадают в старшем порядке. Если же при некотором  $C > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполнено  $|\theta_n| \geq C$ , то, как нетрудно установить, в обеих теоремах рассматриваемые слагаемые есть  $o(1)$  и являются малыми по сравнению с отражённой волной. Внутри потенциальной ямы согласованность асимптотик  $\Psi_{cs}$  проверяется аналогично.

## Список литературы

1. *Fock V. A.* Electromagnetic diffraction and propagation problems. — Pergamon Press, 1965. — P. 414.
2. *Fedotov A. A.* Adiabatic evolution generated by a one-dimensional Schrödinger operator with decreasing number of eigenvalues // *Math. Notes.* — 2024. — Vol. 116, no. 4. — P. 804–830.
3. *Федотов А. А.* Об адиабатических нормальных волнах в прибрежном клине // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2018. — Т. 471. — С. 261–285.
4. *Avron J., Elgart A.* Adiabatic theorem without a gap condition // *Commun. Math. Phys.* — 1999. — Vol. 203. — P. 445–463.
5. *Born M., Fock V.* Beweis des Adiabatenatzes // *Z. Physik.* — 1928. — Vol. 51. — P. 165–180.
6. *Kato T.* On the adiabatic theorem of quantum mechanics // *J. Phys. Soc. Japan.* — 1950. — Vol. 5. — P. 435–439.
7. *Garrido L. M.* Generalized adiabatic invariance // *J. Math. Phys.* — 1964. — Vol. 5, no. 3. — P. 355–362.
8. *Narnhofer H., Thirring W.* Adiabatic theorem in quantum statistical mechanics // *Phys. Rev. A.* — 1982. — Vol. 26, no. 6. — P. 3646–3652.
9. *Avron J. E., Seiler R., Yaffe L. G.* Adiabatic theorems and applications to the quantum Hall effect // *Commun. Math. Phys.* — 1987. — Vol. 110. — P. 33–49. — Erratum: Adiabatic theorems and applications to the quantum Hall effect // *Commun. Math. Phys.* — 1993. — Vol. 156. — P. 649–650.
10. *Hagedorn G. A.* Adiabatic expansions near eigenvalue crossings // *Ann. Phys.* — 1989. — Vol. 196, no. 2. — P. 278–295.
11. *Avron J. E., Howland J. S., Simon B.* Adiabatic theorems for dense point spectra // *Commun. Math. Phys.* — 1990. — Vol. 128. — P. 497–507.
12. *Berry M. V.* Histories of adiabatic quantum transitions // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1990. — Vol. 429. — P. 61–72.
13. *Jakšić V., Segert J.* On the Landau–Zener formula for two-level systems // *J. Math. Phys.* — 1993. — Vol. 34, no. 7. — P. 2807–2820.
14. *Nenciu G.* Linear adiabatic theory. Exponential estimates // *Commun. Math. Phys.* — 1993. — Vol. 152. — P. 479–496.
15. *Martinez A.* Precise exponential estimates in adiabatic theory // *J. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 35. — P. 3889–3915.

16. *Смирнов А. Б., Федотов А. А.* Адиабатическая эволюция, порожденная оператором Шрёдингера с дискретным и непрерывным спектрами // Функци. анализ и его прил. — 2016. — Т. 50, № 1. — С. 90–93.
17. *Суханов В. В.* Асимптотическое поведение решений нестационарного уравнения Дирака с медленно зависящим от времени потенциалом // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2019. — Т. 483. — С. 189–198.
18. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. — М.: Наука, 2007. — С. 369.
19. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Асимптотические методы в задачах распространения звука в океанических волноводах и их численная реализация // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1981. — Т. 117. — С. 39–77.
20. *Pierce A. D.* Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium // J. Acoust. Soc. Am. — 1965. — Vol. 37, no. 1. — P. 19–27.
21. *Pierce A. D.* Guided mode disappearance during upslope propagation in variable depth shallow water overlying a fluid bottom // J. Acoust. Soc. Am. — 1982. — Vol. 72, no. 2. — P. 523–531.
22. *Arnold J. M., Felsen L. B.* Rays and local modes in a wedge-shaped ocean // J. Acoust. Soc. Am. — 1983. — Vol. 73, no. 4. — P. 1105–1119.
23. *Kamel A., Felsen L. B.* Spectral theory of sound propagation in an ocean channel with weakly sloping bottom // J. Acoust. Soc. Am. — 1983. — Vol. 73, no. 4. — P. 1120–1130.
24. *Pierce A. D.* Augmented adiabatic mode theory for upslope propagation from a point source in variable-depth shallow water overlying a fluid bottom // J. Acoust. Soc. Am. — 1983. — Vol. 74, no. 6. — P. 1837–1847.
25. *Arnold J. M., Felsen L. B.* Intrinsic modes in a nonseparable ocean waveguide // J. Acoust. Soc. Am. — 1984. — Vol. 76, no. 3. — P. 850–860.
26. *Arnold J. M., Felsen L. B.* Coupled mode theory of intrinsic modes in a wedge // J. Acoust. Soc. Am. — 1986. — Vol. 79, no. 1. — P. 31–40.
27. *Pierce A. D.* The relation of the parabolic equation method to the adiabatic mode approximation // Numerical Mathematics and Applications. — North-Holland, Amsterdam, 1986. — P. 249–255.
28. *Pierce A. D.* Analytical solution of the parabolic equation for guided mode disappearance at a critical depth // Progress in Underwater Acoustics. — Springer, Boston, MA, 1987. — P. 565–571.
29. *Westwood E. K.* Ray methods for flat and sloping shallow-water waveguides // J. Acoust. Soc. Am. — 1989. — Vol. 85, no. 5. — P. 1885–1894.
30. *Jensen F. B., Kuperman W. A.* Sound propagation in a wedge-shaped ocean with a penetrable bottom // J. Acoust. Soc. Am. — 1980. — Vol. 67, no. 5. — P. 1564–1566.
31. *Coppens A. B., Sanders J. V.* Propagation of sound from a fluid wedge into a fast fluid bottom // Bottom-Interacting Ocean Acoustics. — Springer, Boston, MA, 1980. — P. 439–450.

32. *Coppens A. B., Humphries M., Sanders J. V.* Propagation of sound out of a fluid wedge into an underlying fluid substrate of greater sound speed // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1984. — Vol. 76, no. 5. — P. 1456–1465.
33. *Miller J. F., Nagl A., Überall H.* Upslope sound propagation through the bottom of a wedge-shaped ocean beyond cutoff // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1986. — Vol. 79, no. 2. — P. 562–565.
34. *Jensen F. B., Tindle C. T.* Numerical modeling results for mode propagation in a wedge // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1987. — Vol. 82, no. 1. — P. 211–216.
35. Global distribution of nearshore slopes with implications for coastal retreat / P. Athanasiou [et al.] // *Earth Syst. Sci. Data.* — 2019. — Vol. 11. — P. 1515–1529.
36. *Babich V. M., Lyalinov M. A., Grikurov V. E.* Diffraction theory: the Sommerfeld–Malyuzhinets technique. — Alpha Science International, 2008. — P. 215.
37. *Chester C., Friedman B., Ursell F.* An extension of the method of steepest descents // *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* — 1957. — Vol. 53, no. 3. — P. 599–611.
38. *Smyshlyaev V. P., Kamotski I. V.* Searchlight asymptotics for high-frequency scattering by boundary inflection // *St. Petersburg Math. J.* — 2022. — Vol. 33, no. 2. — P. 387–403.
39. *Wong R.* Asymptotic approximations of integrals. — SIAM, 2001. — P. 560.
40. *Olver F. W. J.* Asymptotics and special functions. — A K Peters/CRC Press, 1997. — P. 592.

## Публикации автора по теме диссертации

- S1. *Сергеев В. А., Федотов А. А.* О делокализации квантовой частицы при адиабатической эволюции, порожденной одномерным оператором Шрёдингера // *Матем. заметки.* — 2022. — Т. 112, № 5. — С. 752–769.
- S2. *Сергеев В. А., Федотов А. А.* О поверхностной волне, возникающей после делокализации квантовой частицы при адиабатической эволюции // *Алгебра и анализ.* — 2024. — Т. 36, № 1. — С. 204–233.
- S3. *Fedotov A. A., Sergeev V. A.* Adiabatic evolution generated by a Schrödinger operator with a continuous spectrum // *Math. Notes.* — 2025. — Vol. 118, no. 2. — P. 382–397.
- S4. *Сергеев В. А.* Адиабатическая эволюция, порожденная оператором Шрёдингера с непрерывным спектром. II // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2025. — Т. 541. — С. 145–173.
- S5. *Sergeev V. A.* On the upslope propagation of an adiabatic normal mode in a wedge-shaped sea // *Russ. J. Math. Phys.* — 2024. — Vol. 31, no. 2. — P. 308–314.