

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
имени В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

МИНАБУТДИНОВ Алексей Рафаилович

**Пределные кривые для класса самоподобных  
адических автоморфизмов**

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доц.

Лодкин Андрей Александрович

Санкт-Петербург – 2017

# Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Индивидуальные непрерывные мосты и кохомологич- ные константе функции . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1. Основные определения и обозначения . . . . .	13
1.2. Необходимое условие существования предельных функций . . .	17
<b>Глава 2. Существование предельных кривых для полиномиаль- ных адических систем. . . . .</b>	<b>20</b>
2.1. Полиномиальные адические системы . . . . .	20
2.2. Некоторые тождества для обобщенных биномиальных коэффи- циентов. . . . .	25
2.3. Комбинаторика конечных путей полиномиальных адических систем . . . . .	27
2.4. Обобщенная $r$ - $q$ -адическая система счисления на интервале $[0, 1]$ .	31
2.5. Сходимость при $n \rightarrow \infty$ отношений $\dim(n - l, k_n) / \dim(n, k_n)$ размерностей вершин. . . . .	35
2.6. Теорема существования непрерывных предельных кривых для полиномиальных систем. . . . .	37
2.7. Примеры предельных кривых для полиномиальных систем. . .	45
2.8. Вид предельных кривых в симметричном случае при $d \rightarrow \infty$ . .	52
<b>Глава 3. Предельные кривые для автоморфизма Паскаля. . .</b>	<b>55</b>
3.1. Система базисных функций Уолша . . . . .	56
3.2. Полиномы Кравчука как эргодические суммы для цилиндри- ческих функций . . . . .	60
3.3. Вид предельных кривых в транзитных режимах. . . . .	70

3.4.	Свойства самоподобия функций $\mathcal{T}_q^k$ , $k \geq 1$ . . . . .	73
3.5.	Некоторые приложения полученных результатов к теории бу- левых функций, комбинаторике и теории чисел. . . . .	76
	Заключение . . . . .	80
<b>Приложение А. Список основных обозначений.</b> . . . . .		81
	Список публикаций . . . . .	81
	Цитированная литература . . . . .	82

## Введение

Основная цель данной работы — исследование уточнений к индивидуальной эргодической теореме Биркгофа для специального класса адических автоморфизмов.

Индивидуальная эргодическая теорема является центральным результатом в эргодической теории. Рассмотрим автоморфизм  $T$ , заданный на пространстве  $X$  с инвариантной мерой  $\mu$ . Пусть  $g$  — суммируемая функция,  $x \in X$ ,  $(f_i)_{i=0}^{\infty}$  — числовая последовательность, элементы которой определены значениями функции  $g$  вдоль траектории точки  $x$ ,  $f_i = g(T^i x)$ . Тогда для  $\mu$ -п.в.  $x$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i.$$

Естественной задачей является задача об уточнении к эргодической теореме. Существуют различные подходы к этой задаче. Обычно последовательность  $(f_i)$  рассматривают как стационарную (в узком смысле) последовательность случайных величин и для последовательности частичных сумм  $S(n) = S_x^g(n) : S(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x)$ ,  $1 \leq n < +\infty$ , исследуют вопрос о существовании нормирующей последовательности коэффициентов  $r_n$  такой, чтобы распределения величин  $\frac{S(n)}{r_n}$  слабо сходились бы к некоторому распределению. Частным случаем этого подхода является изучение с точки зрения центральной предельной теоремы регулярных процессов, таких как автоморфизм Бернулли. В общем случае предельное распределение может и не существовать. Тогда иногда рассматривают вопрос о существовании последовательности натуральных чисел  $n_j$  и нормирующих коэффициентов  $r_j$ , таких, чтобы существовал предел распределений  $\frac{S(n_j)}{r_j}$ .

Анализируя автоморфизм Паскаля, введенный в эргодическую теорию А. М. Вершиком в работе [7] и активно изучавшийся впоследствии многими

авторами (см. [8–11] и др.), К. Мела, Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Веленик нашли замечательную новую сторону этой проблемы. Она заключается в возможности стабилизации поведения специальным образом нормированных конечных последовательностей растущей длины частичных сумм суммируемых функций вдоль индивидуальных (односторонних) траекторий автоморфизма. Такой взгляд на эту проблему позволил на примере автоморфизма Паскаля проиллюстрировать новый подход, который отличается от рассматриваемых ранее тем, что возникающий предельный объект, получивший название *предельной функции*, имеет не стохастическую, а детерминистическую природу.

Предложенный Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Веленик в работе [12] объект может быть определен, вообще говоря, для произвольной числовой последовательности  $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ . Для этого рассмотрим последовательность ее частичных сумм  $S(n)$  и, полагая  $S(0) = 0$ , доопределим ее с помощью линейной интерполяции на нецелые неотрицательные значения аргумента. Доопределенную таким образом непрерывную функцию обозначим через  $F$ . Рассмотрим последовательность непрерывных функций  $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ , получаемых следующей перенормировкой функции  $F$ :

$$\varphi_n(t) = \frac{F(t \cdot n) - t \cdot F(n)}{R_n},$$

где нормирующие коэффициенты  $R_n$  канонически выбраны равными  $\max_{t \in [0,1]} |F(t \cdot n) - t \cdot F(n)|$  (при условии, что  $F(t \cdot n) - t \cdot F(n) \not\equiv 0$ , иначе  $R_n = 1$ ). По определению,  $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$ , поэтому функцию  $\varphi_n$  естественно назвать *мостом*. Нас интересует множество предельных точек последовательности  $\varphi_n$  в равномерной метрике на  $[0, 1]$ .

Вернемся к последовательности  $f_i$ , заданной равенством  $f_i = g(T^i x)$  при фиксированной точке  $x$ . Соответствующую последовательность мостов будем обозначать через  $\varphi_{x,n}^g$ .

**Определение 1.** Если для выбранных функции  $g$  и точки  $x \in X$  суще-

ествует такая последовательность  $l_n^g(x) \in \mathbb{N}$ , что последовательность непрерывных функций  $\varphi_{x, l_n^g(x)}^g$  сходится к (непрерывной) функции  $\varphi_x^g$  в равномерной метрике на  $[0, 1]$ , то функцию  $\varphi = \varphi_x^g$  называют *предельной функцией*, ее график *предельной кривой*, последовательность «моментов времени»  $l_n = l_n^g(x)$  — *стабилизирующей последовательностью*, а последовательность  $R_n = R_{x, l_n^g(x)}^g$  — *нормирующей последовательностью*. *Непрерывным предельным мостом* автоморфизма  $(X, T)$  для функции  $g$  в точке  $x$  называется четверка  $(x, (l_n)_{n=1}^\infty, (R_n)_{n=1}^\infty, \varphi)$ .

Отметим, что сходимость по Чезаро последовательности  $(f_n)_n$  влечет для нормирующего коэффициента  $R_n$  соотношение  $R_n = o(l_n)$ .

**Определение 2.** Непрерывный предельный мост  $(x, (l_n)_{n=1}^\infty, (R_n)_{n=1}^\infty, \varphi)$  для функции  $g$  в точке  $x$  назовем *существенным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено соотношение  $(l_n)^{1-\varepsilon} = o(R_n)$ .

Для некоторых функций  $g$  и точек  $x$  авторы работы [12] наблюдали сходимость мостов к предельной функции типа знаменитой функции Такаги. Функция Такаги, определенная в [13], является одним из ранних примеров нигде не дифференцируемых функций и строится на основе последовательности аппроксимаций. В работе [12] авторы выдвинули гипотезу, что их результат справедлив для более широкого класса функций, и предложили проверить ряд предположений, основанных на компьютерных экспериментах, для других динамических систем.

В этой работе мы будем предполагать, что динамика задана некоторым *адическим автоморфизмом*. Адические автоморфизмы (см. определение ниже) введены в эргодическую теорию А. М. Вершиком в работе [14], их рассмотрение не является ограничивающим предположением в силу следующей важной теоремы:

**Теорема.** (А. М. Вершик [7]). *Всякий эргодический автоморфизм, заданный на пространстве Лебега-Рохлина, изоморфен некоторому адическому автоморфизму. Более того, изоморфизм может быть построен таким образом, что всякая счетная плотная инвариантная подалгебра измеримых множеств перейдет в алгебру цилиндрических множеств.*

Пространством, на котором задано адическое преобразование, является (под)множество путей (последовательностей ребер) бесконечного градуированного графа – диаграммы Браттели. На классах кофинитных путей (т.е. путей, лежащих в одном классе хвостового разбиения) можно задать естественный (ко)лексикографический порядок, который определяет адический автоморфизм. Понятие адического преобразования (и связанное с ним символическое представление) является одним из наиболее удобных способов задания динамики (в иностранной литературе адическое преобразование часто называют преобразованием Вершика).

В работах [7, 15–18] началось исследование комбинаторики марковских компактов (множеств путей на диаграммах Браттели). В этой работе мы изучим комбинаторную динамику конечных путей и определяемых ими цилиндров.

Чтобы получить интересные результаты, необходимо ограничиться некоторым классом адических автоморфизмов. Мы опишем диаграммы Браттели специального вида и зададим адический порядок на путях. Рассматриваемые нами диаграммы могут быть заданы производящим полиномом  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$  степени  $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  с натуральными коэффициентами  $a_i, 0 \leq i \leq d$ , которые задают число ребер, соединяющих произвольную вершину  $(n, k)$  с  $(n + 1, k + i)$ -ой вершиной следующего уровня. Данные диаграммы являются самоподобными, т.е. изоморфны (как упорядоченные градуированные графы, определение дано ниже) диаграммам, получаемым при

сдвиге корневой вершины в любую из нижележащих. Множество путей в графе Браттели  $B$  обозначим через  $X_p$ . На классах кофинитных путей можно задать естественный (ко)лексикографический порядок  $\preceq$ , который определяет адический автоморфизм  $T_p$ . При  $p(x) = a_0, a_0 > 1$ , получаемый таким образом автоморфизм  $T_p$  является реализацией стационарного одометра. При  $d = \deg p \geq 1$  получаемые автоморфизмы являются нестационарными, они получили название *полиномиальных адических автоморфизмов* и изучались в работах К. Мела [19] и С. Бейли [20]. Наш подход к определению полиномиальных адических автоморфизмов является менее ограничительным: мы не ограничиваемся рассмотрением единственного «канонического» порядка, рассматривавшегося в работах [19] и [20]. Класс полиномиальных адических автоморфизмов включает в себя (при  $p(x) = 1 + x$ ) знаменитый автоморфизм Паскаля  $(I, P), I = \{0, 1\}^\infty$ . Из теоремы де Финетти следует, что множеством инвариантных эргодических мер автоморфизма является семейство мер Бернулли  $\mu_q = \prod_1^\infty (q, 1 - q)$ . Важно отметить, что попытки исследовать и обобщить свойства автоморфизма Паскаля являлись мотивацией для определения понятия полиномиальных систем. Класс тех самоподобных адических систем, которые рассматриваются в данной работе, включает в себя класс полиномиальных адических автоморфизмов и стационарных одометров.

Сформулируем основные результаты из работы [12].

**Теорема.** ([12], теорема 2.4.) Пусть  $(I, P, \mu_q), q \in (0, 1)$ , – автоморфизм Паскаля, а  $g$  – цилиндрическая функция. Тогда для  $\mu_q$ -п.в.  $x$  предельная функция  $\varphi_x^g \in C[0, 1]$  существует тогда и только тогда, когда функция  $g$  не когомологична константе.

Также для функций, коррелирующих с простейшими цилиндрическими функциями  $r_i(x) = \mathbb{1}_{\{x_i=0\}}$ , где  $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in I$ , авторы [12] показали, что почти всюду предельной кривой является обобщенная кривая Такаги  $\mathcal{T}_q^1$ .



(Определенная в работе [13] функция Такаги совпадает с функцией  $\frac{1}{2}\mathcal{T}_{1/2}^1$ .)

**Теорема.** ([12], теорема 2.5.) *Для цилиндрических функций  $g$ , удовлетворяющих условию  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{cov}_{\mu_q}(g, r_i) > 0$ , среди предельных функций содержится функция  $\mathcal{T}_q^1$ .*

Для автоморфизма Паскаля авторы работы [12] поставили задачу изучить предельные кривые для произвольных цилиндрических функций, а также обобщить полученные результаты на более широкий класс автоморфизмов.

Изучение предельных кривых является нетривиальной задачей и представляет интерес в том числе из-за возникновения так называемых *транзитных режимов* – наборов катастроф, которые происходят с (до)предельной функцией при вариации пути  $x$ . Некоторые примеры цилиндрических функций  $g$  и точек  $x \in I$ , приводящих к таким режимам, были описаны в работе [12].

Изучаемая в данной работе задача нахождения класса адических автоморфизмов, для которых микрофлуктуации частичных сумм цилиндрических функций приводят к предельным кривым, является первым шагом на пути создания общей теории данного типа флуктуаций.

**Основная цель данной** диссертации — изучить индивидуальные непрерывные мосты для цилиндрических функций в полиномиальных адических системах.

**Структура диссертации по главам.** Первая глава диссертации посвящена нахождению необходимых условий существования предельных кривых. В разделе 1.1 введены основные понятия – диаграмма Браттели, цилиндрическая функция, адический автоморфизм и т. д., а также получено полезное для дальнейшего анализа выражение для частичных сумм, построенных по цилиндрической функции. В разделе 1.2 получено необходимое условие су-

существования непрерывного предельного моста (предельной кривой) для суммируемой функции  $g$ , которым является неограниченность роста последовательности нормирующих коэффициентов  $R_n$ . Условие ограниченности роста  $R_n$  для п.в.  $x$  эквивалентно тому, что функция  $g$  когомологична константе. Для одометров цилиндрические функции являются когомологичными константе и, следовательно, не приводят к предельным кривым.

Во второй главе исследуются непрерывные предельные мосты для полиномиальных автоморфизмов. В разделе 2.1 приводится конструкция таких автоморфизмов, структура инвариантных эргодических мер, а также основные свойства этих автоморфизмов. Семейство инвариантных эргодических мер, как и в случае автоморфизма Паскаля, представляет собой однопараметрическое семейство бернуллиевских мер. Важную роль в комбинаторной динамике полиномиальных автоморфизмов играют обобщенные биномиальные коэффициенты – размерности вершин соответствующих диаграмм Браттели. В разделе 2.2 исследуются некоторые свойства обобщенных биномиальных коэффициентов, на основе которых в разделе 2.3 строится явная формула для номера конечного пути в лексикографическом порядке, определяющем данный автоморфизм. В разделе 2.4 вводится в рассмотрение обобщенная  $r$ - $q$ -адическая система счисления на интервале  $[0, 1]$ . При  $r = 2, q = 1/2$  она сводится к стандартному диадическому представлению числа. Самоподобная структура диаграммы Браттели полиномиального автоморфизма обеспечивает сходимость отношений размерностей пар вершин, разности соответствующих координат которых фиксированы, к точкам отрезка, имеющим стационарное (т.е. стабилизирующееся, начиная с некоторого номера) разложение в  $r$ - $q$ -адической системе. В разделе 2.6 доказана теорема существования непрерывных предельных кривых – основной результат данной главы. Она устанавливает, что условие некогомологичности цилиндрической функции константе является необходимым и достаточным условием существования непре-

рывного предельного моста для полиномиальных адических автоморфизмов. В разделе 2.7 исследуются примеры предельных кривых полиномиальных автоморфизмов для «канонического» лексикографического порядка. Все построенные примеры предельных кривых можно рассматривать как обобщенные ( $r$ - $q$ -адические) кривые Такаги. При этом соответствующие непрерывные предельные мосты оказываются существенными. Также в этой части исследованы свойства самоподобия и непрерывности данных кривых. Результаты этой части позволяют в разделе 2.8 получить аналитические доказательства некоторых предположений, сделанных в работе [12] на основе ряда компьютерных экспериментов.

Третья глава диссертации посвящена доказательству гипотезы Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Веленик о том, что для всякой (некогомологичной константе) цилиндрической функции  $g$  можно построить такую стабилизирующую последовательность  $l_n$ , что графиком предельной функции будет являться обобщенная кривая Такаги. Эту задачу можно свести к описанию транзитных режимов (в которых могут возникнуть другие функции) и доказательству того, что множество путей, для которых они возникают, имеет меру ноль. Технически, изучение транзитных режимов требует глубокого анализа асимптотик частичных сумм цилиндрических функций. Частичные суммы для автоморфизма Паскаля могут быть выражены через полиномы Кравчука, а исследование предельных кривых в транзитных режимах можно свести к рассмотрению специальных асимптотик (разностей) полиномов Кравчука.

Доказательство теоремы проводится в несколько этапов. На первом этапе, в разделе 3.1, построен ортогональный базис  $\{w_t^q\}_{t=0}^{\infty}$  пространства цилиндрических функций. В терминах ряда (суммы) Фурье по этой системе дано полное описание когомологичных константе цилиндрических функций для автоморфизма Паскаля. На втором этапе, в разделе 3.2, найдены формулы

для частичных сумм базисных функций  $w_t^q, t \geq 0$ , представляющие собой (с точностью до нормировки) ортогональные полиномы Кравчука. На третьем этапе исследованы асимптотики полиномов Кравчука, на основе которых в разделе 3.3 проведен анализ транзитных режимов.

Упорядоченные в лексикографическом порядке множества вершин  $\pi_{n,k}$  единичного куба  $\{0, 1\}^n$ , сумма координат которых равна  $k$ , составляют башни (см. ниже), участвующие в аппроксимации автоморфизма Паскаля, и являются замечательными комбинаторными объектами. Они связаны с теоремами Маколея и Крускала-Катоны, линиями уровня функции  $s_2(n)$  (число единиц в двоичном представлении целого неотрицательного числа  $n$ ), а также теорией булевых функций. В разделе 3.5 устанавливается эта связь и приводятся приложения полученных результатов к некоторым задачам теории булевых функций, комбинаторики и теории чисел. Показано, что каждому транзитному режиму соответствует корень некоторого полинома Эрмита, а также аналитически описаны предельные кривые, наблюдаемые в транзитных режимах.

В заключении кратко изложены основные результаты диссертации. В приложении приведен список основных обозначений.

Основные результаты, представленные в диссертации, изложены в работах [1–6] и докладывались на Санкт-Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам, на международной конференции «Dynamics, Combinatorics, Representations» в Санкт-Петербурге в 2015 году и на конференции «New Advances in Symbolic Dynamics» в Марселе (Люмини) в 2017 году.

## Глава 1

# Индивидуальные непрерывные мосты и когомологичные константе функции

В этой главе показано, что необходимым условием существования предельной кривой (непрерывного индивидуального предельного моста) является неограниченный рост последовательности нормирующих коэффициентов. Доказано, что ограниченность нормирующих коэффициентов эквивалентна тому, что функция является когомологичной константе. С помощью этого условия показано, что в случае классического одометра рассмотрение цилиндрических функций не приводит к предельным кривым.

## 1.1. Основные определения и обозначения

**Определение 3.** Диаграммой Браттели  $B = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  называется бесконечный градуированный неотрицательными целыми числами граф, множества вершин  $\mathcal{V}$  и ребер  $\mathcal{E}$  которого обладают следующими свойствами:

1. Множества вершин  $\mathcal{V}$  и ребер  $\mathcal{E}$  являются градуированными множествами, т.е. являются счетным объединением попарно непересекающихся конечных множеств:  $\mathcal{V} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$ ,  $\mathcal{E} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n$ , а множества  $\mathcal{V}_n$  и  $\mathcal{E}_n$  конечны для всех уровней  $n$ .
2. Множество  $\mathcal{V}_0$  состоит из единственной вершины с непустым множеством исходящих ребер, называемой корневой вершиной.
3. Ребра являются ориентированными и всегда исходят из вершины в вершины следующего уровня; всякая некорневая вершина имеет непустое

множество входящих и исходящих ребер. При этом две вершины могут быть связаны более чем одним ребром.

Для удобства обозначений, мы считаем, что на каждом уровне  $n$  множество  $\mathcal{V}_n$  состоит из  $L(n) + 1$  вершины, которые занумерованы слева направо индексами от нуля до  $L(n)$ . Определим отображение  $\varrho : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$  задающее по ребру его конец, а также отображение  $\varsigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ , задающее его начало. Последовательности ребер  $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ , такие, что конец  $n$ -го ребра является началом  $(n+1)$ -го, составляют пространство  $X = X(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  путей диаграммы  $B$ . Пусть  $r_{n,k} \geq 0$  – такие числа, что  $r_{n,k} + 1$  равно входящей степени вершины  $(n, k)$ . Мы будем считать, что ребра, входящие в вершину  $(n, k)$ , помечены индексами  $0, 1, \dots, r_{n,k}$ .

Согласно классическому определению А. М. Вершика, введенному в основополагающей работе [15], мы предполагаем, что на множестве ребер  $\varrho^{-1}(v)$ , входящих в вершину  $v \in \mathcal{V}$  с координатами  $(n, k)$ ,  $0 \leq k \leq L(n)$ ,  $n \geq 1$ , определен линейный порядок  $\leq_{n,k}$ . Данные линейные порядки  $\leq_{n,k}$  задают частичный порядок  $\preceq$  на множестве ребер  $\mathcal{V}$ . Порядок  $\preceq$  индуцирует (ко)лексикографический порядок на классах кофинитных путей (т.е. путей, лежащих в одном классе хвостового разбиения) и, тем самым, частичный порядок на всем пространстве путей  $X$ . Несколько перегружая обозначения, полученный частичный порядок на  $X$  мы также обозначаем через  $\preceq$ . Упорядоченной диаграммой называется пара  $(B, \preceq)$ .

**Определение 4.** Адический автоморфизм  $T$  на пространстве  $X \setminus (X_{\max} \cup X_{\min})$  задан переходом от точки этого пространства (пути в графе) к следующему пути относительно порядка  $\preceq$ .

*Замечание 1.* Преобразование  $T$  определено всюду кроме (не более чем) счетного множества максимальных путей  $X_{\max}$ , а обратное преобразование  $T^{-1}$  определено всюду кроме (не более чем) счетного множества минимальных

путей  $X_{\min}$ . Адический автоморфизм  $T : X \setminus X_{\max} \rightarrow X \setminus X_{\min}$  является гомеоморфизмом в естественной канторовской топологии. Мы будем считать, что адический автоморфизм задан на множестве  $X \setminus (X_{\max} \cup X_{\min})$ .

В силу своего определения, адический автоморфизм изменяет лишь начальные координаты бесконечного пути  $x$  из пространства  $X$ . Поэтому естественно изучать динамику путей конечной длины (конечных путей).

Для пути  $\omega$  обозначим через  $k_n(\omega)$  номер вершины уровня  $n$ , через которую проходит данный путь. Для конечного пути  $c = (c_1, \dots, c_n)$ , ведущего из начальной вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(n, k)$ , число  $k_n(c)$  будем коротко обозначать через  $k(c)$ . Цилиндрическое множество ранга  $n$  вида  $C = [c_1 c_2 \dots c_n] = \{\omega \in X \mid \omega_1 = c_1, \omega_2 = c_2, \dots, \omega_n = c_n\}$  определяется *конечным* путем  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , ведущим из вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(n, k) = (n, k(c))$ . Число таких путей (размерность вершины)  $(n, k)$  мы будем обозначать через  $\dim(n, k)$  или, короче,  $H_{n,k}$ . Множеству  $\pi_{n,k}$  конечных путей  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $k(c) = n$ , упорядоченных в лексикографическом порядке, соответствует упорядоченное множество цилиндров  $\tau_{n,k}$ , составленное из соответствующих цилиндров, которые удобно обозначать через  $\tau_{n,k}(j)$ ,  $1 \leq j \leq \dim(n, k)$ . Множество  $\tau_{n,k}$  образует башню автоморфизма, множество башен  $\{\tau_{n,k}\}_{k=0}^{L(n)}$  фиксированного уровня  $n$  определяет аппроксимацию автоморфизма  $T$ , см. [14], [16], [21]. Номера этажей башни — это номера путей в лексикографическом порядке. Номер пути  $\omega \in \pi_{n,k}$  обозначим через  $\text{Num}(\omega)$ . Очевидно, что номер  $\text{Num}(\omega)$  пути  $\omega \in \pi_{n,k}$  лежит в пределах от единицы до  $\dim(n, k)$ .

Пусть  $C \subset X$  — цилиндрическое множество,  $x \in X$  и  $n \in \mathbb{N}$ . *Размерностью*  $\dim(C, (n, k_n(x)))$  цилиндра  $C$  при фиксированной вершине  $(n, k_n(x))$  называется число путей, принадлежащих  $C$ , которые совпадают с путем  $x$  начиная с уровня  $n$ . Для всякой (неатомической) эргодической инвариантной

меры  $\mu$  выполнено соотношение  $\mu(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim(C, (n, k_n(x)))}{\dim((n, k_n(x)))}$  для  $\mu$ -п.в.  $x \in X$ .

Зафиксируем вершину  $(n, k)$  диаграммы Браттели  $B$ . Ее можно рассматривать как исходную в новой диаграмме  $B'_{n,k} = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ . Множество вершин  $\mathcal{V}'$ , ребер  $\mathcal{E}'$  и путей  $X(B'_{n,k})$  определяются естественным образом. Как и выше, частичный порядок  $\preceq'$  на путях диаграммы  $B'$  индуцируется с линейных порядков  $\leq_{n',k'}, n' > n$ , на множествах входящих ребер.

Диаграммы Браттели  $B = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  и  $B' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$  назовем *изоморфными*, если найдутся такие биекции  $\theta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  и  $\kappa : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ , что  $\theta \circ \rho = \rho' \circ \kappa$  и  $\theta \circ \varsigma = \varsigma' \circ \kappa$ . Упорядоченные диаграммы  $(B, \preceq)$  и  $(B', \preceq')$  изоморфны, если при изоморфизме диаграмм  $B$  и  $B'$  порядок  $\preceq$  переходит в порядок  $\preceq'$ .

**Определение 5.** Упорядоченная диаграмма Браттели  $(B, \preceq)$  называется *самopodobной*, если упорядоченные диаграммы  $(B, \preceq)$  и  $(B'_{n,k}, \preceq'_{n,k})$  изоморфны для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq L(n)$ .

Пусть  $\mathcal{F}$  — множество всех функций  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Пространство цилиндрических функций ранга  $N$  (т.е. функций, постоянных на элементах разбиения на цилиндры ранга  $N$ ) обозначим через  $\mathcal{F}_N$ .

Линейно-интерполированные частичные суммы  $S_x^g, x \in \tau_n^k(1)$ , цилиндрической функции  $g$  из пространства  $\mathcal{F}_N$ ,  $N < n$ , будем кратко обозначать через  $F_{n,k}^g$ . Пусть на этаже  $N \leq n$  диаграммы Браттели находится  $L + 1$  вершина. Пусть  $\omega \in \pi_{n,k}, 0 \leq k \leq L(n)$ , — путь конечной длины, такой, что его начальный отрезок  $\omega' = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$  является максимальным, т.е.  $\text{Num}(\omega') = \dim(N, k(\omega'))$ . Разобьем множество путей, ведущих из начальной вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(n, k)$  и не превосходящих пути  $\omega$ , на классы  $E_{n,k}^{N,l}(\omega)$ , в зависимости от того, через какую из вершин  $(N, l), 0 \leq l \leq L$ , уровня  $N$  проходят данные пути (некоторые из множеств  $E_{n,k}^{N,l}(\omega)$  могут оказаться пустыми). Так как путь  $\omega'$  является максимальным, размерность  $\dim(N, l)$  делит число путей  $e_{n,k}^{N,l}(\omega)$ , лежащих в классе  $E_{n,k}^{N,l}(\omega)$ , для всякого  $0 \leq l \leq L(N)$ .



Обозначим через  $\partial_{n,k}^{N,l}(\omega)$  отношение  $e_{n,k}^{N,l}(\omega)$  к  $\dim(N, l)$ , а через  $h_{N,l}^g$  сумму  $F_{N,l}^g(H_{N,l})$ ,  $0 \leq l \leq L(n)$ . Сумма значений функции  $g$  по путям, лежащим в классе  $E_{n,k}^{N,l}(\omega)$ , равна  $h_{N,l}^g \partial_{n,k}^{N,l}(\omega)$ . Группируя слагаемые, для частичной суммы  $F_{n,k}^g$  в точке  $j = \text{Num}(\omega)$  приходим к следующему выражению:

$$F_{n,k}^g(j) = \sum_{l=0}^L h_{N,l}^g \partial_{n,k}^{N,l}(\omega). \quad (1.1)$$

## 1.2. Необходимое условие существования предельных функций

Покажем, что необходимым условием существования предельной кривой является неограниченный рост нормирующих коэффициентов.

Пусть  $(X, T, \mu)$  – эргодический автоморфизм. Пусть для суммируемой функции  $g$ , точки  $x \in X$  и последовательности  $(l_n) = (l_n(x))$  функции  $\varphi_{x,l_n}^g$  заданы соотношением

$$\varphi_{x,l_n}^g(t) = \frac{F_x^g(t \cdot l_n) - t \cdot F_x^g(l_n)}{R_{x,l_n}^g},$$

где  $R_{x,l_n}$  выбраны равными максимуму модуля числителя (функция в числителе предполагается не равной нулевой функции на  $[0, 1]$ ). Не теряя общности, будем считать, что предел  $g^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_x^g$  в точке  $x$  существует. Следующее утверждение обобщает лемму 2.1 работы [12] на случай произвольной суммируемой функции.

**Теорема 1.** *Если непрерывные предельные кривые  $\varphi_x^g = \lim_n \varphi_{x,l_n}^g$ , существуют для п.в.  $x$ , то соответствующие нормирующие коэффициенты  $R_{x,l_n}^g$  неограничены по  $n$ .*

*Доказательство.* Пусть, напротив,  $|R_{x,l_n}^g| \leq K$ . Положим, для краткости,  $F = F_x^g$ ,  $\varphi_n = \varphi_{x,l_n}^g$ ,  $R_n = R_{x,l_n}^g$  и  $\varphi = \varphi_x$ . Так как  $\varphi \neq 0$ , найдется  $j \in \mathbb{N}$ ,

для которого  $\frac{1}{j}F(j) \neq g^*$ . Тогда  $\liminf_n |\varphi_n(\frac{j}{l_n})| = \liminf_n \frac{1}{R_n} |F(j) - \frac{jF(l_n)}{l_n}| \geq \frac{1}{K} |F(j) - jg^*| = \frac{j}{K} |\frac{1}{j}F(j) - g^*| > 0$ , что противоречит непрерывности функции  $\varphi$  в нуле.  $\square$

**Определение 6.** Функция  $g \in L^\infty(X, \mu)$ , удовлетворяющая тождеству  $g = c + h \circ T - h$  для некоторой постоянной  $c$  и функции  $h \in L^\infty(X, \mu)$ , называется *когомологичной константе*.

**Теорема 2.** *Последовательность нормирующих коэффициентов  $R_{x, l_n}^g$   $\mu$ -п.в. ограничена тогда и только тогда, когда функция  $g$  когомологична константе.*

*Доказательство.* Суммы  $\sum_{j=0}^{n-1} (g - g^*) \circ T^j$  когомологичной константе функции ограничены, следовательно  $\mu$ -п.в. ограничены нормирующие коэффициенты  $R_{x, l_n}^g$ .

Доказательство обратного утверждения использует результат А. Г. Качуровского из работы [22]. Пусть нормирующие коэффициенты  $R_{x, l_n}^g$  п.в. ограничены. Тогда для п.в.  $x \in X$  для всякого  $j \in \mathbb{N}$  выполнено неравенство  $|F_x^g(j) - \frac{j}{l_n} F_x^g(l_n)| \leq C$ . Переходя к пределу по  $n$ , получаем, что  $|\sum_{i=1}^j f \circ T^i(x)| \leq C$ , где  $f = g - g^*$ . Согласно теореме 19 работы [22], неравенство  $|F_x^f| \leq C$ , эквивалентно существованию функции  $h \in L^\infty$ , такой, что  $f = h \circ T - h$ . Следовательно,  $g = h \circ T - h + g^*$ .  $\square$

*Замечание 2.* В силу эргодичности, когомологичность константе функции  $g$  следует уже из ограниченности нормирующей последовательности на множестве положительной меры.

В силу теорем 1 и 2 во всех теоремах существования предельной кривой предполагается некомологичность константе рассматриваемой функции.

**Определение 7.** Пусть диаграмма Браттели  $V$  имеет на каждом уровне единственную вершину, а порядок входящих ребер возрастает слева направо.

во. Будем также считать, что автоморфизм отображает (единственный) максимальный путь в (единственный) минимальный. Такой адический автоморфизм называется *классическим одометром*. Классический одометр называется *стационарным*, если число ребер, соединяющих вершины соседних уровней, постоянно.



Рис. 1.1. Пример диаграммы Браттели классического одометра.

**Теорема 3.** Пусть  $(X, T, \mu)$  – классический одометр. Тогда всякая цилиндрическая функция  $g \in \mathcal{F}_N$  кохомологична константе. Следовательно, предельной кривой для такой функции не существует.

*Доказательство.* На каждом уровне  $n > N$  диаграммы Браттели находится единственная вершина  $(n, 0)$ , поэтому сумма  $F_{n,0}^g(i)$ , заданная выражением (1.1), определяется единственным коэффициентом  $h_{N,0}^g$ , а значит, пропорциональна размерности  $H_N = \dim(N, 0)$  вершины  $(N, 0)$ . Можно вычесть из функции  $g$  такую константу  $C$ , чтобы выполнялось равенство  $h_{N,0}^{g-C} = 0$ . Это эквивалентно тому, что функция  $g - C$  принадлежит линейному пространству, натянутому на функции  $f_j - f_j \circ T$ ,  $1 \leq j \leq H_N$ , где  $f_j$  – индикатор  $j$ -ого этажа башни  $\tau_{N,0}$ .  $\square$

## Глава 2

## Существование предельных кривых для полиномиальных адических систем.

В этой главе доказано существование непрерывных предельных мостов (предельных кривых) для класса полиномиальных адических систем.

### 2.1. Полиномиальные адические системы

В данном разделе приводится конструкция класса полиномиальных адических систем, определенного в работе С. Бейли [20] и (в частном случае) рассматривавшегося в работе К. Мела [19]. Также приводятся основные известные свойства динамических систем этого класса и устройство эргодических инвариантных мер.

Рассмотрим полином  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$  степени  $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  с натуральными коэффициентами  $\{a_i\}_{i=0}^d$ . Диаграмму Браттели  $B_p = (\mathcal{V}, \mathcal{E})_p$ , заданную полиномом  $p(x)$ , определим следующим образом:

1. Число вершин на уровне  $n \geq 0$  задается равенством

$$|\mathcal{V}_n| = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ |\mathcal{V}_{n-1}| + d = nd + 1, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. При  $0 \leq j \leq d$  вершины  $(n, k)$  и  $(n + 1, k + j)$  соединены  $a_j$  ребрами.

Полином  $p(x)$  называется *производящим полиномом* диаграммы Браттели  $B_p$ , см. [20].

Так как число исходящих из каждой вершины ребер равно  $r = p(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_d$ , для индексации ребер естественно использовать алфавит

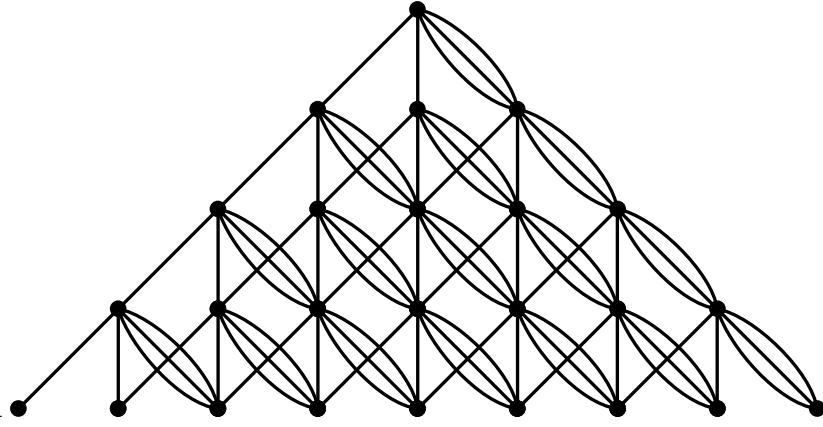


Рис. 2.1. Диаграмма Брателли, заданная производящим полиномом  $1 + x + 3x^2$ .

$\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, r - 1\}$ . Пространство путей в графе Браттели обозначим через  $X_p$ . Пути в графе однозначно определяются данной индексацией и могут рассматриваться как бесконечные односторонние последовательности в  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ .

Лексикографический порядок на пространстве  $X_p$ , введенный в работе С. Бэйли [20], мы будем называть *каноническим порядком*. Он определен следующим образом: ребра, соединяющие вершины  $(0, 0)$  и  $(1, d)$ , занумерованы (слева направо) индексами от 0 до  $a_d - 1$ ; ребра соединяющие вершины  $(0, 0)$  и  $(1, d - 1)$  занумерованы индексами от  $a_d$  до  $a_d + a_{d-1} - 1$  и так далее. Ребра, соединяющие вершины  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ , занумерованы индексами от  $a_0 + a_1 + \dots + a_{d-1}$  до  $a_0 + a_1 + \dots + a_d$ . Таким же образом нумеруем вершины, исходящие из произвольной вершины  $(n, k), 0 \leq k \leq L(n)$ . Приведенная индексация естественным образом определяет частичный порядок  $\preceq$  на  $X_p$  (лексикографический на кофинитных путях), называемый каноническим. Всякий другой инвариантный относительно выбора вершины порядок  $\preceq_\sigma$ , может быть получен с помощью некоторой подстановки  $\sigma$  на алфавите  $\mathcal{A}$ . Каноническому порядку соответствует тождественная подстановка.

**Предложение 1.** *Упорядоченная диаграмма  $(B, \preceq')$  является самоподобной.*

При  $d = 0$  диаграмма Браттели  $B_p$  является диаграммой стационарного

одометра. Если не оговорено противное, ниже мы будем считать, что  $d \geq 1$ .

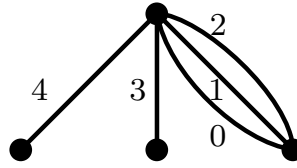


Рис. 2.2. Индексация ребер, соответствующая каноническому порядку, на диаграмме, заданной производящим полиномом  $1 + x + 3x^2$ .

Пусть  $\sigma$  – некоторая (возможно тождественная) подстановка на  $\mathcal{A}$  и выбран частичный порядок  $\preceq_\sigma$ . Обозначим через  $m_r$  индекс максимального ребра, ведущего в вершину  $(1, d)$ , через  $m_l$  – индекс максимального ребра, ведущего в вершину  $(1, 0)$ , а через  $m_{n,k}$  – максимальный конечный путь, ведущий в вершину  $(n, k)$ ,  $0 < k < nd$ .

Максимальные пути  $X_p^{\max, \sigma}$  могут быть описаны следующим образом:

$$X_p^{\max, \sigma} = \{m_r^\infty, m_l^\infty, m_{n,k} r^\infty\}.$$

Аналогично, обозначим через  $s_r$  индекс минимального ребра, ведущего в вершину  $(1, d)$ , через  $s_l$  – индекс минимального ребра, ведущего в вершину  $(1, 0)$ , а через  $s_{n,k}$  – минимальный конечный путь, ведущий в вершину  $(n, k)$ ,  $0 < k < nd$ . Тогда минимальные пути  $X_p^{\min, \sigma}$  заданы следующим образом:

$$X_p^{\min, \sigma} = \{s_r^\infty, s_l^\infty, s_{n,k} 0^\infty\}.$$

Автоморфизм  $T_{p, \sigma}$  определим на множестве немаксимальных путей переходом к следующему относительно  $\preceq_\sigma$  пути, см. определение 4 выше. Если выбран канонический порядок, то соответствующий автоморфизм мы будем обозначать просто через  $T_p$ .

Размерность вершины  $(n, k)$  диаграммы Браттели  $B_p$  равна  $C_p(n, k)$ , где  $C_p(n, k)$  – коэффициент при  $k$ -ом члене многочлена  $(p(x))^n$ , называемый *обобщенным биномиальным коэффициентом*. Коэффициенты  $C_p(n, k)$  при

$n > 1$  можно вычислить по следующей рекуррентной формуле:  $C_p(n, k) = \sum_{j=0}^d a_j C_d(n-1, k-j)$ . Ниже в таблице 2.1 приведены основные свойства обобщенных биномиальных коэффициентов.

Пусть полином  $P(x)$  задается выражением

$$P(x) = x^d p(x^{-1}) = b_0 + b_1 x + \dots + b_d x^d, \quad (2.1)$$

где  $b_i = a_{d-i}$ ,  $0 \leq i \leq d$ . В работах [19] и [20] К. Мела и С. Бейли доказано, что невырожденные (т.е. с носителем, равным  $X_p$ ) инвариантные эргодические меры системы  $(X_p, T_p)$  образуют однопараметрическое семейство бернуллиевских мер:

**Теорема 4.** (С. Бейли, [20], К. Мела, [19]) 1. Пусть  $q \in (0, \frac{1}{b_0})$  – параметр, а  $t_q$  – единственное на  $[0, 1]$  решение уравнения

$$b_0 q^d + b_1 q^{d-1} t + \dots + b_d t^d - q^{d-1} = 0,$$

тогда множество инвариантных невырожденных эргодических мер автоморфизма  $T_p$  является однопараметрическим семейством  $\mu_q$ ,  $q \in (0, \frac{1}{b_0})$ , бернуллиевских мер вида

$$\prod_0^\infty \left( \underbrace{q, \dots, q}_{b_0}, \underbrace{t_q, \dots, t_q}_{b_1}, \underbrace{\frac{t_q^2}{q}, \dots, \frac{t_q^2}{q}}_{b_2}, \dots, \underbrace{\frac{t_q^d}{q^{d-1}}, \dots, \frac{t_q^d}{q^{d-1}}}_{b_d} \right),$$

где веса соответствуют ребрам с индексами  $(0, 1, \dots, r-2, r-1)$ .

2. Вырожденными мерами являются только бернуллиевские меры

$$\prod_0^\infty \left( \underbrace{\frac{1}{b_0}, \dots, \frac{1}{b_0}}_{b_0}, 0, \dots, 0 \right) \quad \text{и} \quad \prod_0^\infty \left( 0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{b_d}, \dots, \frac{1}{b_d}}_{b_d} \right).$$

**Следствие 1.** Инвариантные эргодические меры системы  $(X_p, T_{p,\sigma})$  также образуют однопараметрическое семейство бернуллиевских мер

$\mu_q, q \in (0, \frac{1}{a_d})$ , вида

$$\prod_0^\infty \sigma \left( \underbrace{q, \dots, q}_{b_0}, \underbrace{t_q, \dots, t_q}_{b_1}, \underbrace{\frac{t_q^2}{q}, \dots, \frac{t_q^2}{q}}_{b_2}, \dots, \underbrace{\frac{t_q^d}{q^{d-1}}, \dots, \frac{t_q^d}{q^{d-1}}}_{b_d} \right),$$

где число  $t_q \in [0, 1)$  задано, как в теореме 4, и веса соответствуют ребрам с индексами  $(0, 1, \dots, r-2, r-1)$ .

*Доказательство.* Меняется порядок ребер, входящих в вершину  $(n, k)$ , условия на инвариантность мер являются такими же, как в теореме 4 (но необходимо учесть новую индексацию ребер). Как и в частном случае, эргодичность мер следует из закона 0 или 1 Хьюитта–Сэвиджа.  $\square$

**Определение 8.** *Полиномиальной эргодической адической системой, заданной полиномом  $p(x)$ , называется тройка  $(X_p, T_{p,\sigma}, \mu_q)$ ,  $q \in (0, \frac{1}{a_d})$ .*

В частном случае  $p(x) = 1 + x$  система  $(X_p, T_p, \mu_q)$ ,  $q \in (0, 1)$ , является замечательным *автоморфизмом Паскаля*. Он был независимо определен А. М. Вершиком в работе [7] и Какутани в работе [23] и изучался в ряде работ, см., например, [8–11], более полный список см. в последних двух работах. Для автоморфизма Паскаля мы выберем специальное обозначение:  $(I, P, \mu_q)$ ,  $q \in (0, 1)$ . Пространство  $I$  является бесконечномерным (дискретным) единичным кубом  $\{0, 1\}^\infty$ , меры  $\mu_q$  являются классическими мерами Бернулли  $\prod_1^\infty (q, 1 - q)$ ,  $0 < q < 1$ , а автоморфизм  $P$  может быть задан соотношением (см. работу [7]):

$$x \mapsto Px; \quad P(0^{m-l}1^l\mathbf{10}\dots) = 1^l0^{m-l}\mathbf{01}\dots, \quad (2.2)$$

$l \geq 0$ , а запись подразумевает, что координаты  $x_i$  с номерами  $i \geq m + 3$  остаются неизменными.



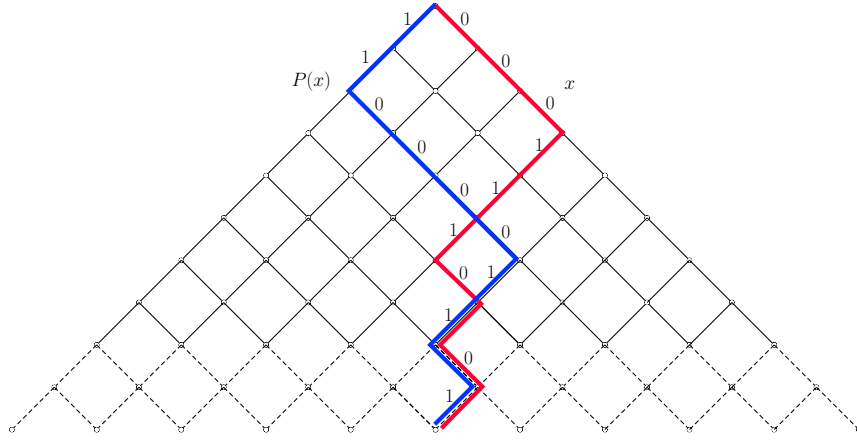


Рис. 2.3. Автоморфизм Паскаля отображает  $x = 0001110\dots$  в  $Px = 1100001\dots$

## 2.2. Некоторые тождества для обобщенных биномиальных коэффициентов.

Пусть полином  $p(x)$  с натуральными коэффициентами задан выражением  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ , а полином  $P(x)$ , как и выше, задается выражением  $P(x) = x^d p(x^{-1})$ . Обозначим через  $C_p(n, k)$ ,  $0 \leq k \leq nd$ , коэффициент при  $x^k$  в полиноме  $(p(x))^n$ ; при  $k \notin [0, nd]$  удобно доопределить коэффициенты нулем, а коэффициент  $C_p(0, 0)$  – единицей.

Таблица 2.1. Некоторые тождества для обобщенных биномиальных коэффициентов.

	Бином. коэф.	Обобщ. бином. коэф.	Условия
1.	$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$	$C_p(n, k) = \sum_{j=0}^d a_j C_p(n-1, k-j)$	$n \in \mathbb{Z}_+$
2.	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\sum_{(n-k_1)!(k_1-k_2)! \dots (k_{d-1}-k_d)! k_d!} a_0^{n-k_1} \dots a_d^{k_d}$ , где $\sum_{i=1}^d k_i = k, k_{i+1} \leq k_i$	$n \in \mathbb{Z}_+$
3.	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$C_p(n, k) = C_p(n, dn-k)$	$P(x) = x^d p(x^{-1})$
4.	$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$	$\sum_{i=1}^d C_p(n-1, k-i) a_i i = \frac{k}{n} C_p(n, k)$	$n \in \mathbb{Z}_+, k \neq 0$
5.	$\binom{r+s}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{r}{i} \binom{s}{j}$	$C_p(r+s, k) = \sum_{i+j=k} C_p(r, i) C_p(s, j)$	$r, s \in \mathbb{Z}_+$
6.	$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n-1-j}{k-j}$	$C_p(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^d \tilde{a}_i C_p(n-1-j, k-(d-l)j-i) + C_p(1, k-(d-l)(n-1))$	$\tilde{a}_i = \begin{cases} a_i, & i \neq l \\ a_i - 1, & i = l \end{cases}$

Приведем краткий вывод каждого из шести тождеств из таблицы 2.1:

1. *Рекуррентная формула.* В обеих частях тождества  $p^n(x) = p(x)p^{n-1}(x)$  нужно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ .
2. *Явное выражение.* Пользуясь мультиномиальной теоремой, легко получить явную формулу:

$$C_p(n, k) = \sum \binom{n}{n_0, \dots, n_d} a_0^{n_0} \dots a_d^{n_d},$$

где суммирование берется по всем наборам  $(n_0, \dots, n_d)$ , таким что  $n_0 + \dots + n_d = n$ ,  $n_1 + 2n_2 + \dots + dn_d = k$ . Искомое выражение получается если ввести новые обозначения:

$$k_1 = n_1 + n_2 + \dots + n_d,$$

$$k_2 = n_2 + n_3 + \dots + n_d,$$

$$\vdots$$

$$k_d = n_d.$$

3. *Симметрия.* Следует напрямую из определения полинома  $P(x) = x^d p(x^{-1}) = a_0 x^d + \dots + a_{d-1} x + a_d$ .
4. *Формула вынесения.* Нужно продифференцировать тождество  $p^n(x) = \sum_{k \geq 0} C_p(n, k) x^k$ , что приводит к тождеству  $n p^{n-1}(x) p'(x) = \sum_{k \geq 0} k C_p(n, k) x^{k-1}$ ,  $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + da_d x^{d-1}$ , после чего приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ .
5. *Свертка Вандермонда.* Выводится аналогично тождеству 1 из таблицы 2.1 на основе тождества  $p^{r+s}(x) = p^r(x)p^s(x)$ .
6. *Суммирование.* Получается с помощью  $k$ -кратного применения тождества 1 таблицы 2.1. При этом, если на последнем шаге возникает необходимость разложить элемент с первой строки (это происходит, если

$k - (n - 1)(d - L) \in [0, d]$ , то на этом шаге коэффициенты  $\tilde{a}_i$  необходимо заменить на  $a_i$  или (эквивалентно) прибавить  $C_p(1, k - (n - 1)(d - L))$ .

### 2.3. Комбинаторика конечных путей полиномиальных адических систем

В этой части мы опишем комбинаторную структуру линейно упорядоченных множеств  $\pi_{n,k}$  конечных путей (и, как следствие, башен  $\tau_{n,k}$ ) динамической системы  $(X_p, T_{p,\sigma})$  и получим явную формулу для номера конечного пути в лексикографическом порядке. На основе этих результатов строится последовательность аппроксимаций  $F_{n,k}^{g,M}$  ( $M$  – параметр, регулирующий число узлов и точность аппроксимации) для частичных сумм  $F_{n,k}^g$  цилиндрической функции  $g$ . Всюду ниже (для экономии места) производящий полином  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , будем считать заданным.

Для всякой адической динамической системы конечный путь  $\omega \in \pi_{n,k}$  может быть представлен в виде конкатенации  $(\omega', e)$  некоторого пути  $\omega'$  из множества  $\pi_{n-1,k(\omega')}$  и индекса  $e$  некоторого ребра, входящего в вершину  $(n, k)$ . В случае динамической системы  $(X_p, T_{p,\sigma})$  свойства самоподобия позволяют получить удобное рекуррентное выражение для данной конкатенационной процедуры.

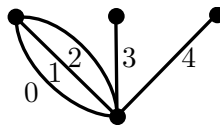


Рис. 2.4. Канонический порядок входящих ребер в вершину  $(n, k)$ ,  $d \leq k \leq (n - 1)d$  диаграммы, заданной производящим полиномом  $1 + x + 3x^2$ .

Обозначим через  $(\pi_{n,k}, e)$ ,  $0 \leq k \leq nd$ , линейно упорядоченное множество конечных путей вида  $((\omega, e), \omega \in \pi_{n,k})$  (порядок полностью определяется линейным порядком на множестве  $\pi_{n,k}$ ). Элементы множества  $\pi_{n,k}$  имеют



**Предложение 2.** Номер  $\text{Num}(\omega)$  конечного пути  $\omega = (\omega_j)_{j=1}^n$  в лексикографическом порядке на множестве  $\pi_{n,k(\omega)}$  задается выражением:

$$\text{Num}(\omega) = \sum_{j=2}^u \sum_{i=0}^{\omega_{c_j}-1} C_P(c_j - 1; k^1(\omega) - m_j - k^1(i)) + \text{Num}(\omega_1), \quad (2.4)$$

где  $m_j = \sum_{t=j}^{u-1} k^1(\omega_{c_t})$ ,  $2 \leq j \leq u-1$ ,  $m_u = 0$ , а полином  $P(x)$  задан равенством  $P(x) = x^d p(x^{-1})$ .

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . База индукции при  $n = 1$  очевидна. Для пути  $\omega' = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) \in \pi_{n-1,k'}$  формула (2.4) справедлива по предположению. Путь  $\omega$  может быть получен с помощью конкатенации  $\omega = (\omega', e)$ , где  $e \in \mathcal{A}$ ,  $\omega' \in \pi_{n-1,k'}$ . Индекс  $e$  указывает положение множества  $(\pi_{n-1,k'}, e)$  в упорядоченном множестве  $\pi_{n,k}$ , а (быть может, нулевая) сумма<sup>1</sup>  $\sum_{i=0}^{\omega_{c_u}-1} C_P(c_u - 1; k^1(\omega) - k^1(i))$ , где  $c_u = n$ , если  $e > 0$ , — сумма мощностей  $|\pi_{n-1,k''}| = H_{n-1,k''}$  предшествующих множеств.  $\square$

*Замечание 3.* Если путь  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ , составленный из первых  $N$  координат пути  $\omega$ , является максимальным путем, идущим в некоторую вершину  $(N, l)$  уровня  $N$ , тогда, пользуясь формулой суммирования (см. формулу 6 таблицы 2.1), выражение (2.4) можно упростить, записав его следующим образом:

$$\text{Num}(\omega) = \sum_{j=N+1}^u \sum_{i=0}^{\omega_{c_j}-1} C_P(c_j - 1; k^1(\omega) - k^1(i) - m_j) + C_P(c_N; k^1(\omega) - m_l). \quad (2.5)$$

Для заданных натуральных чисел  $N$  и  $l$ ,  $0 \leq l \leq Nd$ , на конечном пути  $\omega \in \pi_{n,k}$  определим функцию  $\partial_{k^1}^{N,l}(\cdot)$ ,  $k^1 = nd - k$ , следующим образом:

<sup>1</sup> Переход к полиному  $P$  позволяет получить более короткое выражение для суммы, задающей номер  $\text{Num}(\omega)$ . Для первого слагаемого  $C_P(n-1; k^1(\omega) - k^1(i)) = C_P(n-1; (n-1)d - k(\omega) + k(i)) = C_P(n-1; k(\omega) - k(i))$ .

$$\partial_{k^1}^{N,l} \omega = \sum_{j=N+1}^r \sum_{i=0}^{\omega_{c_j}-1} C_P(c_j - 1 - N; k^1 - k^1(i) - m_j - l), \quad (2.6)$$

где все натуральные числа  $c_j, k^1(i), m_j$ , определены так же, как в формуле (2.5). Параметры  $N$  и  $l$  отвечают за перенос корневой вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(N, l)$ . В соответствии с выражением 1.1 произведение  $C_P(N, l) \partial_{k^1}^{N,l} \omega, k^1 = k^1(\omega)$ , задает число путей, идущих из вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(n, k), k = nd - k^1$ , проходящих через вершину  $(N, l)$  и не превосходящих пути  $\omega$ .

Обозначим через  $K_{M,n,k}, 1 \leq M \leq n$ , вектор состоящий из (упорядоченных по возрастанию) номеров путей  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \pi_{n,k}$ , таких, что их начала  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M)$  являются максимальными.

Для функции  $g \in \mathcal{F}_N$  определим семейство (индексированное натуральными числами  $M, N \leq M \leq n$ ) функций  $F_{n,k}^{g,M}$ , каждая из которых определена на элементах вектора  $K_{M,n,k}$  следующим равенством:

$$F_{n,k}^{g,M}(j) = \sum_{l=0}^{Nd} h_{M,l}^g \partial_{nd-k}^{M,l} \omega, \quad (2.7)$$

где  $\omega$  —  $j$ -ый путь,  $j \in K_{M,n,k}$ , в наборе  $\pi_{n,k}$ . На всем интервале  $[1, \dim(n, k)]$  доопределим функцию  $F_{n,k}^{g,M}$  с помощью линейной интерполяции. Для натуральных аргументов  $j \in K_{M,n,k}$  в силу представления (1.1) выполнено точное равенство  $F_{n,k}^{g,M}(j) = F_{n,k}^g(j)$ . При росте параметра  $M > N$  функции  $F_{n,k}^{g,M}$  являются все «более грубой» кусочно-линейной аппроксимацией функции  $F_{n,k}^g$  с узлами в точках из множества  $K_{M,n,k}$ .

**Лемма 1.** Для  $j \in K_{N,n,k}$  и некоторой константы  $C$ , зависящей только от функции  $g$ , справедлива оценка  $|F_{n,k}^{g,N}(j) - F_{n,k}^g(j)| \leq C$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $c_1$  число, равное  $\max_{0 \leq l \leq N} H_{N,l} \equiv \max_l C_P(N, l)$ , а через  $c_2$  число, равное  $\max_{0 \leq l \leq N} h_{N,l}^g$ . Элементы множества  $K_{N,n,k}$

разбивают интервал  $[1, C_P(n, k_1)]$  на  $\mathcal{A}^{n-N}$  подинтервалов  $([a_i, b_i])_{i=1}^{\mathcal{A}^{n-N}}$ , длины которых не превосходят  $c_1$ . Для интервала  $[1, j]$  обозначим через  $j_{\max}$  наибольшее натуральное число, не превосходящее  $j$  и совпадающее с верхней границей некоторого интервала из набора  $([a_i, b_i])_{i=1}^{\mathcal{A}^{n-N}}$ . Представим частичную сумму  $F_{n,k}^g(j)$  в виде суммы  $F_{n,k}^g(j_{\max}) + r_{n,k}^g(j)$ , где  $r_{n,k}^g(j)$  – некоторый остаток, очевидно, не превосходящий произведения  $c_1 c_2$ . Аналогично поступим с функцией  $F_{n,k}^{g,N}(j)$ . Тогда искомая разность оценивается следующим образом:  $|F_{n,k}^{g,M}(j) - F_{n,k}^g(j)| \leq 2c_1 c_2$ .

□

*Замечание 4.* В случае, если функция  $g$  является тождественной единицей и  $\text{Num}(\omega) = \dim(n, k) \equiv C_P(n, k_1(\omega))$ , формула (2.7) (как и более общая формула (1.1)) сводится к тождеству:

$$C_P(n, k) = \sum_{l=0}^N C_P(N, l) C_P(n - N, k - l),$$

которое является обобщением тождества Вандермонда.

## 2.4. Обобщенная $r$ - $q$ -адическая система счисления на интервале $[0, 1]$ .

В этой части определена  $r$ - $q$ -адическая система счисления на интервале  $[0, 1]$  заданная полиномом  $p(x)$  и подстановкой  $\sigma$ . С помощью данной системы счисления явно задано отображение, позволяющее, по предложению А. М. Вершика, получить реализацию автоморфизма на подмножестве интервала  $[0, 1]$  полной меры Лебега.

Как и выше,  $r$  обозначает натуральное число, равное  $|\mathcal{A}| = p(1)$ . Будем рассматривать пути  $\omega = (\omega_i) \in X_p, x_i \in \mathcal{A}$ , как пути в бесконечном  $r$ -арном (совершенно сбалансированном) дереве  $\mathcal{M}_r$  (т.е. исходящий индекс всякой

вершины равен  $r$ ). Обозначим через  $\bar{p} = (p_i)_{i=0}^{r-1}$   $r$ -мерный вектор, состоящий из положительных вещественных чисел, удовлетворяющих следующему соотношению:  $\sum_{i=0}^{r-1} p_i = 1$ . Обозначим через  $I$  функцию, заданную на  $\mathcal{A}$  следующим образом:

$$I(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{\sum_{j=0}^{k-1} p_j}{p_k}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Для заданного  $x \in [0, 1]$  рассмотрим алгоритм, кодирующий число  $x$  некоторым (конечным или бесконечным) путем  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$  на дереве  $\mathcal{M}_r$ . На первом шаге разбиваем интервал  $[0, 1]$  на  $r$  последовательных дизъюнктивных интервалов длин  $p_0, p_1, \dots, p_{r-1}$ , объединение которых содержит  $[0, 1]$ , и полагаем  $\omega_1$  равным индексу того интервала, который содержит  $x$ . На втором шаге, разбивая аналогичным образом  $\omega_1$ -ый интервал на  $r$  последовательных интервалов длин  $p_{\omega_1} p_i, 0 \leq i \leq r-1$ , находим  $\omega_2$ . Продолжая указанную процедуру с  $\omega_n$ -ым интервалом, на  $n+1$  шаге находим  $\omega_{n+1}$ . Данный алгоритм определен для всякого  $x \in [0, 1]$ . Точки из  $[0, 1]$ , координаты которых постоянны с некоторого места, назовем  $\bar{p}$ -стационарными. Для пути  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$  через  $\bar{s}_n = (s_n^0, \dots, s_n^{r-1})^T$  обозначим  $r$ -мерный вектор с  $j$ -ой компонентой,  $0 \leq j \leq r-1$ , равной количеству букв  $j$  среди  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ . Согласно приведенному алгоритму, всякий  $x \in [0, 1]$  можно записать в виде суммы:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} I(\omega_j) \prod_{i=0}^{r-1} p_i^{s_j^i}. \quad (2.8)$$

В силу оценки  $|x - \sum_{j=1}^m I(\omega_j) \prod_{i=0}^{r-1} p_i^{s_j^i}| \leq \left( \max_{0 \leq i \leq r-1} p_i \right)^m$ , ряд (2.8) сходится равномерно по  $x$ . Данное представление числа  $x \in [0, 1]$  единственно для всех, кроме  $\bar{p}$ -стационарных, точек. Для  $\bar{p}$ -стационарных точек, типично, будут существовать два представления: конечное и бесконечное; мы выбираем конеч-



ное представление вида:

$$x = \sum_{j=1}^m I(\omega_j) \prod_{i=0}^{r-1} p_i^{s_j^i},$$

где число  $m$  будем называть рангом.

Представление (2.8) числа  $x \in [0, 1]$  будем называть *обобщенным  $r$ -адическим  $\bar{p}$ -представлением* (или, короче,  *$\bar{p}$ -представлением*), а в случае, если компоненты вектора  $\bar{p}$  имеют вид  $p_i = \frac{1}{r}, 1 \leq i \leq r$  — *симметричным  $r$ -представлением*. Для симметричного  $r$ -представления функция  $I(k) \equiv k, 0 \leq k \leq r$ . В частном случае  $r = 2$ , *симметричное  $r$ -представление* является обычным *диадическим представлением* числа на отрезке  $[0, 1]$ .

Как отмечено выше, точки из пространства  $X = X_{p,\sigma}$  можно рассматривать также как пути в дереве  $\mathcal{M}_r$ . Обозначим через  $X_0$  объединение  $X_{\max,\sigma} \cup X_{\min,\sigma}$  множеств максимальных и минимальных путей, а через  $G$  — множество всех  $r$ -стационарных точек на интервале  $[0, 1]$  в симметричном представлении. Формула (2.8) задает каноническую биекцию  $\phi : X \setminus X_0 \rightarrow [0, 1] \setminus G$ , переводящую путь  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \dots) \in X$  в точку интервала  $[0, 1]$ . Отображение  $\phi$  переносит меру  $\mu_q, q \in (0, 1)$ , заданную на пространстве  $X$ , в меру  $\tilde{\mu}_q$  на  $[0, 1]$ , семейство башен  $\{\tau_{n,k}\}_{k=0}^{nd}$  переводит в набор  $\{\tilde{\tau}_{n,k}\}_{k=0}^{nd}$  семейств дизъюнктивных интервалов, концы которых являются стационарными точками ранга  $n$  в симметричном  $r$ -разложении. Это позволяет задать (изоморфную) реализацию  $\tilde{T}_{p,\sigma}$  полиномиального автоморфизма  $T_{p,\sigma}$  на множестве  $[0, 1] \setminus G$ . Отметим, что интервалы, составляющие башни  $\tilde{\tau}_{n,k}$ , кодируются конечными путями из множеств  $\pi_{n,k}$ .

Подобное представление может быть получено для любого адического автоморфизма (хотя возможность получения явного регулярного выражения, аналогичного выражению (2.8), является, конечно, следствием самоподобия диаграммы Браттели полиномиальной системы). В англоязычной литературе такое представление автоморфизма часто называют «*cutting and stacking*»

конструкцией.

Положим в определении выше вектор  $\bar{p} = (p_j(q))_{j=0}^{r-1}$  равным вектору  $\sigma\left(\underbrace{q, \dots, q}_{b_0}, \underbrace{t_q, \dots, t_q}_{b_1}, \underbrace{\frac{t_q^2}{q}, \dots, \frac{t_q^2}{q}}_{b_2}, \dots, \underbrace{\frac{t_q^d}{q^{d-1}}, \dots, \frac{t_q^d}{q^{d-1}}}_{b_d}\right)$ , заданному согласно следствию 1 теоремы 4 производящим полиномом  $p(x) = a_0 + a_1x \cdots + a_dx^d$ ,  $b_i = a_{d-i}$ ,  $0 \leq i \leq d$ . Данную запись числа  $x \in [0, 1]$  назовем обобщенной  $q$ - $r$ -адической записью, заданной полиномом  $p(x)$  и подстановкой  $\sigma$  (или же, короче,  $q$ - $r$ -адической записью). Обозначим через  $G_q$  множество стационарных чисел в такой записи.

Приведем пример  $q$ - $r$ -адической записи для случая канонического порядка (т.е. тождественной подстановки  $\sigma = id$ ). Через  $\bar{b}_i$ ,  $0 \leq i \leq r-1$ , обозначим  $r$ -мерный вектор  $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\sum_{j=0}^{i-1} b_j}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{b_i}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\sum_{j=i+1}^d b_j})$ , а через  $e_i$ ,  $0 \leq i \leq r-1$ , обозначим  $r$ -мерный стандартный орт. Через  $u \cdot v$  обозначим скалярное произведение векторов. Для данного выбора  $\bar{p} = (p_j(q))_{j=0}^{r-1}$  представление (2.8) запишется следующим образом:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} I_q(\omega_j) q^j \left(\frac{t_q}{q}\right)^{\bar{b}_1 \cdot \bar{s}_j + 2\bar{b}_2 \cdot \bar{s}_j + \dots + d\bar{b}_d \cdot \bar{s}_j}, \quad (2.9)$$

где  $I_q(w) = b_0 \frac{q^{h+1}}{t_q^{h+1}} + b_1 \frac{t_q q^h}{t_q^{h+1}} + \dots + b_h \frac{q}{t_q} + s$  при  $w = \sum_{i=0}^h b_i + s$ ,  $0 \leq s < b_{h+1}$ ,  $0 \leq h < d$

*Замечание 5.* Множество  $G_q$  можно получить и несколько иным способом: напрямую из множества стационарных чисел  $G_{1/r}$  в симметричной системе счисления. Пусть  $F_{\tilde{\mu}_q}$  — функция распределения меры  $\tilde{\mu}_q$  на интервале  $[0, 1]$ . Тогда  $G_q = \{y \mid y = F_{\tilde{\mu}_q}(x), x \in G_{1/r}\}$ .

## 2.5. Сходимость при $n \rightarrow \infty$ отношений

$\dim(n-l, k_n) / \dim(n, k_n)$  размерностей вершин.

В этой части будет показано, что при фиксированном  $l \in \mathbb{N}$  точки  $r^l$ -элементного вектора  $K_{n-l, n, k_n}$  после нормировки делением на размерность  $H_{n, k_n} = C_p(n, k_n)$  вершины сходятся при  $n \rightarrow \infty$  к компонентам вектора  $G_q^l$ , содержащего  $q$ - $r$ -рациональные числа ранга  $l$  интервала  $[0, 1]$ .

Пусть  $x \in X$  — некоторый случайный бесконечный путь, выбираемый согласно мере  $\mu_q$ ,  $q \in (0, 1/a_d)$ . Всюду ниже, для краткости, последовательно вершин  $(n, k_n(x))$ , выбираемые согласно пути  $x$ , мы записываем просто как  $(n, k_n)$  или даже  $(n, k)$ . Не умаляя общности, мы можем считать, что  $\delta n \leq k_n \leq (d - \delta)n$  для некоторого  $\delta > 0$ .

Если полином  $p(x) = 1 + x$ , т.е. в случае автоморфизма Паскаля, это несложно показать явным вычислением. Согласно равенству (2.5), множество  $K_{n-l, n, k_n}$  состоит из натуральных чисел вида  $\sum_{j=0}^{\tilde{l}-1} \binom{n-i_j}{n-k-j}$ , заданных векторами  $(i_0, i_1, \dots, i_{\tilde{l}-1})$ , такими, что  $i_j \in \mathbb{N}$  и  $i_j - j > 0$  при  $1 \leq i_j \leq l$  и  $\tilde{l} \leq l$ . Натуральные числа вида  $\sum_{j=0}^{\tilde{l}-1} \binom{n-i_j}{n-k-j}$  после нормировки делением на  $\binom{n}{k}$  стремятся при  $n \rightarrow \infty, k/n \rightarrow q$ , к диадическим  $q$ -рациональным точкам интервала  $[0, 1]$ . Действительно, пользуясь прямым вычислением, легко проверить, что  $\lim_{n \rightarrow \infty, k/n \rightarrow q} \frac{\binom{n-i_j}{n-k-j}}{\binom{n}{k}} = q^{i_j-j} (1-q)^j$ , поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty, k/n \rightarrow q} \frac{\sum_{j=0}^{\tilde{l}-1} \binom{n-i_j}{n-k-j}}{\binom{n}{k}} = \frac{q}{1-q} \sum_{r=1}^{\tilde{l}-1} w_r q^{r-s_r} (1-q)^{s_r}$ , где двоичный вектор  $(w_1, w_2, \dots, w_{\tilde{l}-1})$  имеет единицы на координатах  $i_j$ ,  $0 \leq j \leq \tilde{l}-1$ , и нули на остальных, а число  $s_r$  задает число единиц среди  $(w_1, \dots, w_r)$ .

В общем случае  $p(x) \neq 1 + x$  явное вычисление пределов вида  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim(n-l, k_n-j)}{\dim(n, k_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_p(n-l, k_n-j)}{C_p(n, k_n)}$ ,  $l, j \in \mathbb{N}$ , представляется громоздким, поэтому лучше воспользоваться эргодической теоремой. Множество  $K_{n-l, n, k_n}$

состоит из натуральных чисел вида

$$\sum_{j=0}^{\tilde{l}-1} \sum_{i=0}^{\omega_{n-i_j}-1} C_P(n - i_j; k^1(\omega) - k^1(i) - m_j),$$

где  $m_j = \sum_{\nu=0}^{j-1} k^1(i_\nu)$ ,  $\tilde{l} \leq l$ ,  $1 \leq i_j \leq l$ , каждое из которых представляет собой номер некоторого пути  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-l}, v_l, v_{l-1}, \dots, v_1)$  длины  $n$  с фиксированным окончанием, имеющим вид  $(v_1, v_2, \dots, v_l)$  в обратной индексации, см. рис 2.5, и началом  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-l})$ , выбираемым максимальным. В силу формулы симметрии, справедливо равенство

$$C_P(n - i_j; k^1(\omega) - k^1(i) - m_j) = C_P(n - i_j; k(\omega) - di_j - k^1(i) - m_j).$$

Рассмотрим цилиндр  $C$ , заданный путем  $[v_1 v_2 \dots v_l]$ , ведущим в вершину  $(i_j; di_j + k^1(i) + m_j)$  на «обратной диаграмме», см. рис. 2.5, и путь  $w = (w_t)_{t=1}^\infty$ , принадлежащий цилиндру  $C$ . Согласно эргодической теореме, для п.в. пути  $w$  имеет место сходимость:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_P(n - i_j; k(\omega) - di_j - k^1(i) - m_j)}{C_P(n, k_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim(C, n, k_n(w))}{\dim(n, k_n(w))} = \mu(C), \quad (2.10)$$

Несложно видеть, что  $\mu(C) = \frac{p_i}{p_{i_j}} \prod_{\nu=0}^{r-1} p_\nu^{s_{i_j}^\nu}$ , где  $j$ -ая компонента вектора  $\bar{s}_m = (s_m^0, \dots, s_m^{r-1})^T$  равна количеству букв  $j$  среди  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ , а компоненты вектора  $(p_j)_{j=0}^{r-1}$ ,  $p_j = p_j(q)$ , заданы согласно теореме 4.

В итоге приходим к выражению для предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Num}(\omega^n)}{C_P(n, k_n)} = \sum_{m=1}^{i_{\tilde{l}-1}} I(v_m) \prod_{\nu=0}^{r-1} p_\nu^{s_m^\nu} \in G_q^l.$$

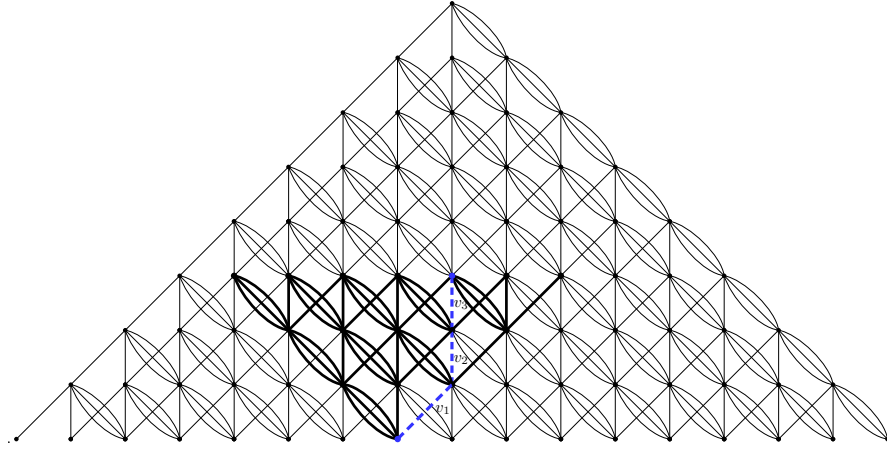


Рис. 2.5. Пример пути на «обратном графе».

## 2.6. Теорема существования непрерывных предельных кривых для полиномиальных систем.

В этой части мы докажем теорему существования предельных кривых для некогомологичных константе функций  $g$  полиномиальной (самоподобной) адической системы  $(X_p, T_{p,\sigma})$ . Доказательство основывается на той же технике, которая использовалась в работе [12] для автоморфизма Паскаля. Доказательство удобно разбить на два этапа: комбинаторную часть утверждения и стохастическую.

Докажем сначала комбинаторную версию утверждения. Пусть  $x \in X_p$  — некоторый бесконечный путь в диаграмме Браттели  $X_p$ , а  $(n, k_n(x))$  — последовательность вершин, выбираемая согласно пути  $x$ . Мы записываем последовательность  $(n, k_n(x))$  просто как  $(n, k_n)$  или даже  $(n, k)$ . Размерности вершин  $\dim(n, k) = C_p(n, k)$  мы кратко обозначаем через  $H_{n,k}$ . Функция  $\varphi_{n,k}^g$  на интервале  $[0, 1]$  задана равенством

$$\varphi_{n,k}^g(t) = \frac{F_{n,k}^g(tH_{n,k}) - tF_{n,k}^g(H_{n,k})}{R_{n,k}^g}.$$

*Замечание 6.* Предупредим читателя, что имеет место некоторая перегрузка обозначений. Функция  $\varphi_{x,l}^g$  из определения 1 параметризуется точкой про-

странства  $x \in X_p$  и элементом стабилизирующей последовательности  $(l_n)_n$ . Функция  $\varphi_{n,k}^g$  параметризована координатами  $(n, k)$  вершины в диаграмме Браттели и имеет смысл моста для частичных сумм функции  $g$  вдоль всей башни  $\tau_{n,k}$ , таким образом  $\varphi_{n,k}^g(t) = \varphi_{x, H_{n,k}}^g, x \in \tau_{n,k}(1)$ . Данный выбор обозначений оправдан леммой 2 ниже, из которой следует, что (путем выбора подпоследовательности  $(l_{n_j})_j$ ) можно считать, что  $x$  лежит сколь угодно близко к основаниям башен  $(n_j, k_{n_j}(x))$ .

Для заданной на интервале  $[1, H_{n,k}]$  функции  $F$  обозначим через  $\psi_{F,n,k}$  функцию на интервале  $[0, 1]$ , заданную равенством

$$\psi_F(t) = \frac{F(tH_{n,k}) - tF(H_{n,k})}{R_{n,k}},$$

где нормирующий коэффициент  $R_{n,k}$  канонически выбран равным максимуму модуля числителя. Справедливо тождество  $\psi_{n,k,F_{n,k}^g} = \varphi_{n,k}^g$ .

Пусть некогомологичная константе цилиндрическая функция  $g$  принадлежит пространству  $\mathcal{F}_N$ . В силу теоремы 2, можно считать, что последовательность  $(R_{n,k_n}^g)_{n \geq 1}$  монотонно возрастает, откуда по лемме 1 имеет место сходимость:

$$\|\psi_{F_{n,k}^g} - \psi_{F_{n,k}^{g,N}}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Это означает, что можно забыть о различиях между функциями  $F_{n,k}^g$  и  $F_{n,k}^{g,N}$  и считать, что частичные суммы заданы функцией  $F_{n,k}^{g,N}$ .)

Мы хотим показать, что найдутся такие подпоследовательность  $(n_j)_{j \geq 1}$  и непрерывная функция  $\varphi(t), t \in [0, 1]$ , что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\psi_{F_{n_j, k_{n_j}}^{g,N}} - \varphi\|_\infty = 0.$$

Следуя работе [12], для этого рассмотрим промежуточный объект: семейство полигональных функций  $\psi_n^M = \psi_{F_{n,k}^{g,n-M+N}}, N+1 \leq M \leq n$ . График каждой из функций  $\psi_n^M$  может быть задан  $r^M$ -мерным массивом вида

$(x_i^M(n), y_i^M(n))_{i=1}^{r^M}$ , причем, в силу результатов части 3.3, вектор  $(x_i^M(n))_{i=1}^{r^M}$  поэлементно сходится к вектору  $q$ - $r$ -рациональных чисел  $G_q^M$  ранга  $M$ , заданных полиномом  $p(x)$ .

Для натуральных чисел  $N+1 \leq l < M < n$  функции  $F_{n,k}^{g,n-M}$  и  $F_{n,k}^{g,n-l}$  совпадают в точках множества  $K_{n-l,n,k_n}$ , поэтому функции  $\psi_n^M$  и  $\psi_n^l$ , совпадают в точках  $(x_i^l(n))_{i=1}^{r^l}$ . Более того, предложение 3 позволяет получить оценку

$$\|\psi_{n_j}^M - \psi_{n_j}^l\|_\infty \leq C_1 e^{-C_2(M-l)},$$

$C_1, C_2 > 0$ . Для фиксированного  $M$  выберем подпоследовательность  $(n_j)$  и непрерывную полигональную кривую  $\varphi^M$ , такую, что функции  $\psi_{n_j}^M$  сходятся к функции  $\varphi^M$  в  $\text{sup}$ -метрике на  $[0, 1]$  (это возможно в силу компактности по  $n$  множеств  $(x_i^M(n), y_i^M(n))_{i=1}^{r^M} \subset \mathbb{R}^{2r^M}$ ). Стандартная диагональная процедура позволяет выбрать подпоследовательность (которую мы снова обозначим через  $(n_j)_j$ ) так, чтобы имела место сходимость для всех  $M$ :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{j \rightarrow \infty} \|\psi_{n_j}^M - \varphi\|_\infty = 0$$

к некоторой непрерывной на интервале  $[0, 1]$  функции  $\varphi$ . Функции  $\varphi^M$  являются полигональными аппроксимациями функции  $\varphi$ .

Таким образом, доказана следующая теорема:

**Теорема 5.** Пусть  $(X_p, T_{p,\sigma}, \mu_q)$ ,  $q \in (0, \frac{1}{a_d})$ , – полиномиальная система, а  $g$  – цилиндрическая некогомологичная константе функция, принадлежащая пространству  $\mathcal{F}_N$ . Тогда для  $\mu_q$ -п.в.  $x$  из последовательности функций  $(\varphi_{n,k_n(x)}^g)_{n \geq 1}$  можно выбрать сходящуюся в  $\text{sup}$ -метрике на  $[0, 1]$  подпоследовательность  $(\varphi_{n_j, k_{n_j}(x)}^g)_{j \geq 1}$ .

*Замечание 7.* В силу того, что предельная кривая  $\varphi$  является пределом по  $j$  полигональных кривых  $\psi_{n_j}^M$ ,  $M \geq 1$ , ее вид может быть явно установлен, если найти следующие пределы:  $\varphi(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_{n_j}^M \left( \frac{\text{Num}(\omega)}{H_{n_j, k_{n_j}}} \right)$ , где  $t \in G_q^M$ , причем  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{Num}(\omega)}{H_{n_j, k_{n_j}}} = t$ , где  $\text{Num}(\omega) \in K_{n_j - M, n_j, k_{n_j}}$ .

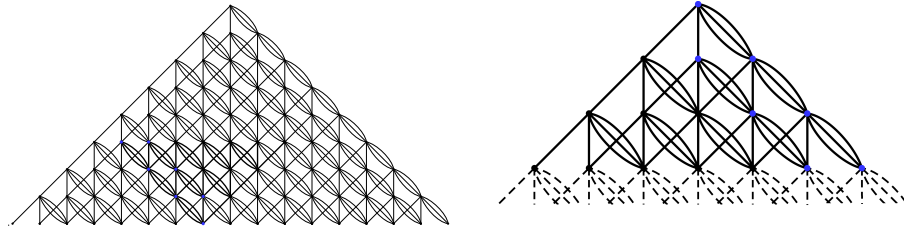


Рис. 2.6. Диаграмма Браттели входящих вершин.

Стохастический вариант теоремы 5 следует из того факта, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать подпоследовательность  $n_j(x)$ , такую, что номер  $\text{Num}(w^j)$ ,  $w^j = (x_1, \dots, x_{n_j})$ , удовлетворяет условию  $\frac{\text{Num}(w^j)}{H_{n_j, k_{n_j}}} < \varepsilon$ . Формально, справедлив даже более сильный факт, являющийся следствием теоремы о возвратности симметричного одномерного случайного блуждания. Он использовался в работах [19, 20] при доказательстве слабой бернуллиевости автоморфизма полиномиальных автоморфизмов.

**Лемма 2.** Для всякого  $\varepsilon > 0$  и для  $\mu_q \times \mu_q$ -почти всякой пары путей  $(x, y) \in X_p \times X_p$  найдется последовательность  $n_j$ , такая, что  $k_{n_j}(x) = k_{n_j}(y)$  и номера  $\text{Num}(\omega_x)$  и  $\text{Num}(\omega_y)$  путей  $\omega_x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_j})$  и  $\omega_y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_j})$  удовлетворяют неравенству  $\text{Num}(\omega_z)/H_{n_j, k_{n_j}(x)} < \varepsilon$ ,  $z \in \{x, y\}$ , при каждом  $j \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* По  $\varepsilon > 0$  выберем такое натуральное число  $l$ , что  $q^l < \varepsilon/2$ . Определим случайные величины  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  на пространстве  $X$  равенством  $\xi_i(x) = k_i(x) - k_{i-1}(x)$ . Случайные величины  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  являются независимыми величинами с одинаково распределенными значениями. Пусть процесс  $S_n : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  задан равенством  $S_n(x, y) = \sum_{i=1}^n (\xi_i(x) - \xi_i(y))$ . Процесс  $S_n$  является симметричным одномерным случайным блужданием, и, следовательно, является возвратным. Для почти всякой пары путей  $(x, y)$  найдется бесконечное число координат  $n_1(x, y) < n_2(x, y) < \dots < n_j(x, y) \dots$ , таких, что  $k_{n_j}(x) = k_{n_j}(y)$ ,  $j \geq 1$ . Определим события  $A_j^z$ ,  $j \geq 1$ ,  $z \in \{x, y\}$ , равен-



ствами

$$A_j^z = \{\xi_{n_j}(z) = e, \xi_{n_j+1}(z) = e, \dots, \xi_{n_j+l}(z) = e\},$$

где  $e = 0$  – индекс минимального ребра. Для всякого  $j \geq 1$  вероятности  $\text{Prob}(A_j) = q^{2l}$  положительны,  $A_j = A_j^x \cap A_j^y$ , а события  $A_{jl}$  независимы, (т.к.  $n_{l(j+1)} - n_{lj} \geq l$  для всякого  $j$ .) Событие  $A_j^x$  означает, что путь  $w = (x_1, x_2, \dots, x_{n_j+l}) \in \pi_{n_j+l, k+k(e)l}$ , имеет номер  $\text{Num}(w) < C_P(n_j, k_{n_j})$  из всего интервала номеров  $[1, C_P(n_j + l, k_{n_j} + k(e)l)]$ . Например, для канонического порядка  $k(e) = d$ , см. выражение (2.3). Следовательно, выполнено соотношение  $\text{Num}(w)/C_P(n_j + l, k_{n_j} + k(e)l) < C_P(n_j, k_{n_j})/C_P(n_j + l, k_{n_j} + k(e)l)$ , правая часть которого по эргодической теореме стремится при  $n_j \rightarrow \infty$  к  $q^l$ . Поэтому для почти всякой пары  $(x, y)$  мы можем выбрать подпоследовательность  $n_{l_j}(x, y)$  с требуемым свойством.

□

**Теорема 6.** (*Стохастический вариант теоремы 5.*) Пусть  $(X_p, T_{p,\sigma}, \mu_q)$ ,  $q \in (0, \frac{1}{a_d})$ ,  $-$ полиномиальная система, а  $g$  – цилиндрическая функция, принадлежащая пространству  $\mathcal{F}_N$ . Тогда для  $\mu_q$ -н.в.  $x$  из последовательности индивидуальных случайных мостов  $(\varphi_{x,l}^g)_{l \geq 1}$  можно выбрать сходящуюся в суп-метрике на  $[0, 1]$  подпоследовательность функций  $(\varphi_{x,l_j}^g)_{j \geq 1}$ ,  $l_j = l_j(x)$ , тогда и только тогда, когда функция  $g$  некогомологична константе.

*Доказательство.* Следует из леммы 2, теоремы 5 и теоремы 2. □

*Замечание 8.* Лемма 2 позволяет утверждать, что предельная функция  $\varphi_x^g$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_{x,l_j(x)}^g - \varphi_x^g\| = 0$ , может быть выбрана единой для почти всех  $x$ .

Докажем теперь использованное выше предложение 3. Оно обобщает предложение 3.1 работы [12], но доказательство требует усовершенствования из-за неунимодальности обобщенных биномиальных коэффициентов.

**Лемма 3.** Пусть задан производящий полином  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ .

Справедливы следующие утверждения:

1. Найдутся такие  $n_1 \in \mathbb{N}$  и  $C_1 > 0$ , зависящие только от набора  $\{a_0, \dots, a_d\}$ , что  $\max_k \left\{ \frac{C_d(n, k+1)}{C_d(n, k)}, \frac{C_d(n, k)}{C_d(n, k+1)} \right\} \leq C_1 n$  при  $n > n_1$ .
2.  $C_d(n-1, k-i) \leq \frac{1}{a_i} \max\left\{ \frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n} \right\} C_d(n, k)$ ,  $0 \leq i \leq d$ .

*Доказательство.* Докажем сначала первое утверждение. Рассмотрим дискретную случайную величину  $X$ , распределенную на множестве  $\{0, 1, \dots, d\}$  согласно полиному  $p(x)$ , что значит, что  $\text{Prob}(X = k) = a_k/p(1)$ ,  $0 \leq k \leq d$ . Сумма  $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  независимых случайных величин  $X_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , распределенных согласно полиному  $p(x)$ , распределена согласно полиному  $p^n(x)$ , т.е.  $\text{Prob}(Y_n = k) = C_p(n, k)/p^n(1)$ ,  $0 \leq k \leq nd$ . В известной работе Одлыжко и Ричмонда [24] доказано, что функция  $f_n(k) \equiv \text{Prob}(Y_n = k)$  является асимптотически унимодальной, т.е., начиная с некоторого  $n_1$ , коэффициенты  $C_d(n, k)$ ,  $0 \leq k \leq nd$ ,  $n \geq n_1$ , сначала возрастают (с ростом  $k$ ), а затем убывают.

Обозначим через  $C$  максимальный из всех коэффициентов  $\{C_p(n_1, k)\}_{k=0}^{n_1 d}$  полинома  $p^{n_1}(x)$ , а через  $c$  – минимальный. Через  $a_{\max}$  обозначим максимальный из коэффициентов  $\{a_0, \dots, a_d\}$  полинома  $p(x)$ . Докажем оценку  $\frac{C_d(n, k+1)}{C_d(n, k)} \leq a_{\max} \frac{C}{c} dn$ ,  $0 \leq k \leq nd - 1$ ,  $n \geq n_1$ , по индукции по  $n$  (вторая оценка  $\frac{C_d(n, k)}{C_d(n, k+1)} \leq a_{\max} \frac{C}{c} dn$  доказывается аналогично). Так как при  $n = n_1$  выполнено неравенство  $\frac{C_d(n_1, k+1)}{C_d(n_1, k)} \leq \frac{C}{c} \leq \frac{Cda_{\max}}{c}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , то утверждение базы индукции можно считать проверенным.

Предположим, что уже доказано, что  $\frac{C_d(n-1, k)}{C_d(n-1, k-1)} \leq \frac{Cda_{\max}}{c}(n-1)$ , где  $1 \leq k \leq d(n-1)$  и  $n > n_1$ . Покажем, что  $\frac{C_d(n, k)}{C_d(n, k-1)} \leq \frac{Cda_{\max}}{c}n$ ,  $1 \leq k \leq dn$ . Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}
\frac{C_d(n, k+1)}{C_d(n, k)} &= \frac{\sum_{i=0}^d a_i C_d(n-1, k+1-i)}{\sum_{i=0}^d a_i C_d(n-1, k-i)} \leq \\
&\leq \frac{C_d(n-1, k)(a_0 + a_1 + \dots + a_{d-1} + da_{\max} a_d \frac{C}{c}(n-1))}{a_d C_d(n-1, k)} \leq \\
&\leq \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{d-1} - da_{\max}}{a_d} + \frac{a_{\max} C d n}{c} \leq \frac{a_{\max} C d}{c} n. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Второе утверждение следует из формулы вынесения

$$\sum_{i=1}^d C_p(n-1, k-i) a_i i = \frac{k}{n} C_p(n, k)$$

для обобщенных биномиальных коэффициентов. □

**Предложение 3.** Пусть  $N \geq 1$  – заданное натуральное число. Пусть  $\delta \in (0, \frac{1}{4})$  и пусть на этаже  $\bar{n}$  выбрана вершина  $A = A(\bar{n}, \bar{k})$  с координатами  $(\bar{n}, \bar{k})$ , такая, что  $2\delta\bar{n} \leq k \leq (d-2\delta)\bar{n}$  (и  $2\delta\bar{n} \leq nd - k \leq (d-2\delta)\bar{n}$ ).

Пусть  $\alpha_l, 0 \leq l \leq Nd$ , – набор вещественных чисел, не равных нулю одновременно. Для уровня  $n, N \leq n \leq \bar{n}$ , рассмотрим вершину  $B(n, k) = (n, k)$ , удовлетворяющую условиям  $0 \leq k \leq \bar{k}, 0 \leq n-k \leq \bar{n}-\bar{k}, N \leq n \leq \bar{n}$ . Рассмотрим сумму

$$\gamma_{n,k} = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{Nd} \alpha_l C_d(n-N, k-l), \quad (2.12)$$

где постоянная  $R = R(A, B, \delta)$  выбрана так, чтобы величины  $|\gamma_{n,k}|$  были равномерно по  $n$  и  $k$  на множестве  $0 \leq k \leq \bar{k}, 0 \leq n-k \leq \bar{n}-\bar{k}, N \leq n \leq \bar{n}$  ограничены константой, равной двум.

Тогда найдется положительная константа  $C = C(\delta, N)$ , такая, что при достаточно больших  $\bar{n}$  выполнено неравенство

$$|\gamma_{n,k}| \leq 3e^{-C(\bar{n}-n)}.$$

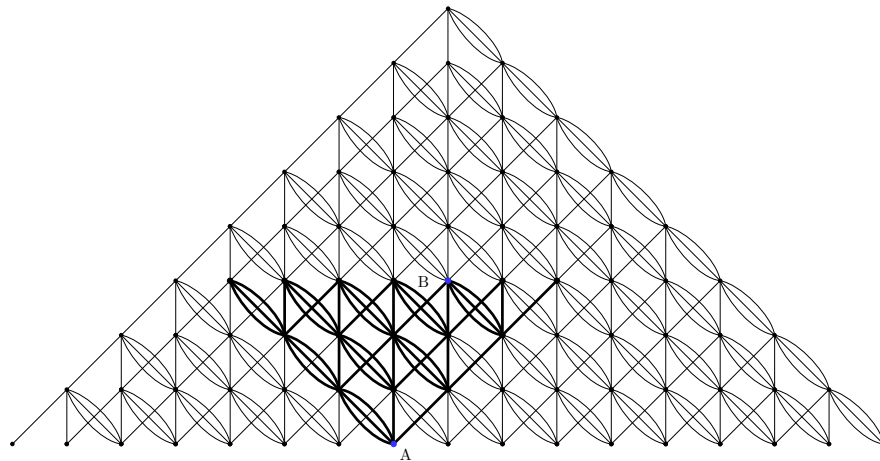


Рис. 2.7. Пример расположения вершин  $A$  и  $B$ .

Данное предложение обобщает предложение 3.1 работы [12]. Условия на координаты вершины  $A$   $\delta$ -отделяют ее от крайних вершин  $(n, 0)$  и  $(n, dn)$  уровня  $n$ . Условия на координаты вершины  $B = B(n, k)$  означают, что она является вершиной «перевернутого» графа с основанием в вершине  $A$ , см. рис 2.7.

*Доказательство.* Будем считать, что  $\bar{n} > 2n_1$ , где  $n_1 = n_1(a_0, a_1, \dots, a_d)$  определено в доказательстве леммы 3. Выберем произвольное  $l_0, 0 \leq l_0 \leq Nd$ , такое, что коэффициент  $\alpha_{l_0}$  не равен нулю. Перепишем правую часть равенства (2.12) в виде:

$$R\gamma_{n,k} = C_d(n - N, k - l_0)P(n, k, l_0), N \leq n \leq \bar{n}, 0 \leq k \leq nd,$$

где через  $P(n, k, l_0)$  обозначено выражение  $\sum_{l=0}^N \alpha_l \frac{C_d(n-N, k-l)}{C_d(n-N, k-l_0)}$ . Обозначим через  $\alpha$  максимум  $|\alpha_l|, 0 \leq l \leq Nd$ .

Покажем, что найдется такой полином  $Q(x)$ , степени не выше  $Nd$ , что

$$|P(n, k, l_0) - P(\bar{n}, \bar{k}, l_0)| \leq Q(\bar{n}). \quad (2.13)$$

Для этого достаточно показать, что найдется  $c_1 > 0$ , такое, что  $|\frac{C_d(n-N, k-l)}{C_d(n-N, k-l_0)}| \leq c_1 n^{Nd}, 0 \leq l \leq Nd, N \leq n \leq \bar{n}$ . Данная оценка легко получается  $Nd$ -кратным последовательным применением пункта 1 леммы 3.

Обозначим через  $\tilde{Q}$  разность  $P(n, k, l_0) - P(\bar{n}, \bar{k}, l_0)$ .

$$\begin{aligned} \gamma_{n,k} &= \frac{1}{R} C_d(n - N, k - l_0) P(n, k, l_0) = \\ &= \frac{C_d(n - N, k - l_0) C_d(\bar{n} - N, \bar{k} - l_0) P(n, k, l_0)}{C_d(\bar{n} - N, \bar{k} - l_0) R} = \\ &= \frac{C_d(n - N, k - l_0) C_d(\bar{n} - N, \bar{k} - l_0) (P(\bar{n}, \bar{k}, l_0) + \tilde{Q})}{C_d(\bar{n} - N, \bar{k} - l_0) R}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Согласно предположению,  $|\gamma_{\bar{n}, \bar{k}}| = |\frac{1}{R} P(\bar{n}, \bar{k}, l_0) C_d(\bar{n} - N, \bar{k} - l_0)| \leq 2$ . Так как неравенство (2.13) можно записать в виде  $|\tilde{Q}| \leq Q$ , мы получаем, что

$$|\gamma_{n,k}| \leq 3 \frac{Q(\bar{n}) C_d(n - N, k - l_0)}{C_d(\bar{n} - N, \bar{k} - l_0)}.$$

Пользуясь  $(\bar{n} - n)$ -кратным применением пункта 2 леммы 3 и условиями на вершины  $A$  и  $B$ , получаем оценку  $\frac{C_d(n - N, k - l_0)}{C_d(\bar{n} - N, \bar{k} - l_0)} \leq 3e^{-\tilde{C}(\delta)(\bar{n} - n)}$  для некоторой постоянной  $\tilde{C}(\delta) > 0$ . Это приводит к (независящей от начального выбора  $l_0$ ) оценке:

$$|\gamma_{n,k}| \leq 3 \frac{Q(\bar{n}) C_d(n - N, k - l_0)}{C_d(\bar{n} - N, \bar{k} - l_0)} \leq 3e^{-C(\delta)(\bar{n} - n)}$$

для некоторого  $C(\delta) > 0$ .

□

## 2.7. Примеры предельных кривых для полиномиальных систем.

В этой части построены примеры предельных кривых для полиномиальных систем в случае канонического порядка и некоторых цилиндрических функций. Полному исследованию этого вопроса для произвольных цилиндрических функций в случае автоморфизма Паскаля посвящена третья глава диссертации. Данная часть организована следующим образом: сначала мы укажем, какого вида пределы необходимо найти, чтобы установить предельные кривые, затем определим некоторый класс функций, после чего покажем,

что эти функции возникают в качестве предельных. Закончим данную часть исследованием вопроса о поведении построенных кривых при росте степени полинома  $d$  к бесконечности.

Замечание 7 показывает, что для нахождения предельной кривой достаточно рассматривать предельное поведение частичных сумм  $F_{n,k}^g$  для аргументов специального вида. Покажем, что достаточно рассматривать только те конечные пути  $\omega \in \pi_{n,k}$ , которые имеют номера вида  $\sum_{j=0}^m a_j C_P(n-i, k^1(\omega) - j) = \sum_{j=0}^m a_j H_{n-i, k(\omega)+j-di}$ ,  $0 \leq m \leq d$ .

**Лемма 4.** *Для определения вида предельной кривой достаточно вычислить пределы*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R_n} \left( F(L_{m,i,n,k}) - \frac{L_{m,i,n,k}}{H_{n,k}} F(H_{n,k}) \right),$$

где  $L_{m,i,n,k} = \sum_{j=0}^m a_j H_{n-i, k(\omega)+j-di}$ ,  $0 \leq m \leq d$ , а через  $F$  обозначена функция  $F_{n,k}^g$ .

*Доказательство.* Пусть выбран типичный путь  $x \in B_p$ . Можно считать, что последовательность  $(n(x), k_n)$  удовлетворяет свойствам  $\delta < \frac{k_n}{n(x)} < \delta d$  для некоторого  $\delta > 0$ . Пусть, для начала, такие  $n$  и  $k_n$  фиксированы. Также мы рассматриваем множество путей длины  $m$ , входящих в вершину  $(n, k)$ ,  $d \leq k \leq d(n-1)$ ,  $n \gg m$ , диаграммы  $B_p$ . Самоподобие диаграммы  $B_p$  позволяет рассматривать эти пути как пути, идущие из основания в вершину  $(m, j)$ ,  $0 \leq m \leq d$ , обратной диаграммы, см. рис. 2.6. Как показано в части 2.4, каждому конечному пути длины  $m$  на обратной диаграмме Браттели  $B_p$ , ведущему в вершину  $(m, j)$ , соответствует стационарное число ранга  $m$  из множества  $G_q^m$ , которому, в свою очередь, соответствует  $q$ - $r$ -адический интервал ранга  $m$ . Длину этого интервала обозначим через  $x_{m,j}$ , а приращение на этом интервале функции  $\psi_n^M$ , определенной в части 2.6, через  $y_{m,j}$ ,  $0 \leq j \leq md$ . Значения  $(x_{m,j}, y_{m,j})$  могут быть определены индуктивно: начальные значе-

ния при  $m = 0$   $x_{0,0} = 1, y_{0,0} = 0$ ; при  $m > 0$  и индексах  $j$ , таких, что,  $(m - 1)d < j \leq md$ ,  $x_{m,j} = \frac{a_j C_P(n-m, k^1-j)}{H_{n,k}}$ ,  $y_{m,j} = \psi_n^M(x_{m,j})$ , а при прочих  $j$ , определим их рекурсивно:  $x_{m-1,i} = \sum_{j=0}^d a_j x_{m,i-j}$ ,  $y_{m-1,i} = \sum_{j=0}^d a_j y_{m,i-j}$ . Таким образом, функция  $\psi_{n_j}^M$  полностью определяется в точках вида  $x_{m,j}$ ,  $1 \leq m \leq M$ ,  $(m - 1)d < j \leq md$ . Переходя к пределу, мы получаем требуемое утверждение.  $\square$

Пусть параметры  $q_1$  и  $q_2$  принадлежат интервалу  $(0, 1)$ . Определим функцию  $S_{q_1, q_2}^p : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , отображающую число  $x$ , представленное в  $q_1$ -адической записи 2.9 в виде  $x = \sum_{j=1}^{\infty} I_{q_1}(\omega_j) q_1^j \left(\frac{t_{q_1}}{q_1}\right)^{\bar{b}_1 \cdot \bar{s}_j + 2\bar{b}_2 \cdot \bar{s}_j + \dots + d\bar{b}_d \cdot \bar{s}_j}$ , в число

$$S_{q_1, q_2}^p(x) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{q_2}(\omega_j) q_2^j \left(\frac{t_{q_2}}{q_2}\right)^{\bar{b}_1 \cdot \bar{s}_j + 2\bar{b}_2 \cdot \bar{s}_j + \dots + d\bar{b}_d \cdot \bar{s}_j}. \quad (2.15)$$

Для всякой  $q_1$ -рациональной точки  $x_0 = \sum_{j=1}^m I_{q_1}(\omega_j) q_1^j \left(\frac{t_{q_1}}{q_1}\right)^{\bar{b}_1 \cdot \bar{s}_j + 2\bar{b}_2 \cdot \bar{s}_j + \dots + d\bar{b}_d \cdot \bar{s}_j}$  и произвольного  $x \in [0, 1]$ , функция  $S_{q_1, q_2}^p$  удовлетворяет следующему уравнению самоподобия:

$$S_{q_1, q_2}^p(x_0 + r_{q_1} x) = S_{q_1, q_2}^p(x_0) + r_{q_2} S_{q_1, q_2}^p(x), \quad (2.16)$$

где  $r_{q_i} = q_i^m \left(\frac{t_{q_i}}{q_i}\right)^{\bar{a}_1 \cdot \bar{s}_m + 2\bar{a}_2 \cdot \bar{s}_m + \dots + d\bar{a}_d \cdot \bar{s}_m}$ ,  $i = 1, 2$ . В частном случае  $q_1 = 1/r$  функция  $S_{1/r, q_2}^p$  является функцией распределения меры  $\tilde{\mu}_q$ .

Формула (2.16) означает, что график  $S_{q_1, q_2}^p$  на обобщенном  $q$ -адическом интервале  $[x_0, x_0 + r_{q_1}]$  является миниатюрной версией  $S_{q_1, q_2}^p$ , сжатой в  $r_{q_2}$  раз по вертикали и в  $r_{q_1}$  по горизонтали.

Семейство функций  $S_{q_1, q_2}^p(\cdot)$  позволяет определить новый класс функций

$$\mathcal{T}_{p, q_1}^k := \frac{\partial^k S_{q_1, q_2}^p}{\partial q_2^k} \Big|_{q_2=q_1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При  $k = 0$  удобно считать, что  $\mathcal{T}_{p, q}^0(x) = x$ . При  $p_2(x) = 1 + x$ ,  $q = 1/2$  и  $k = 1$  функция  $\frac{1}{2} \mathcal{T}_{p_2, 1/2}^1$  является знаменитой кривой Такаги, см. [13]. Данная связь

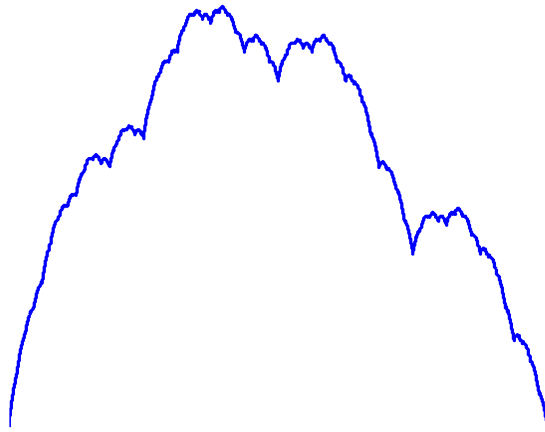


Рис. 2.8. График функции  $\mathcal{T}_{p,q}^1$ , при  $p(x) = 2 + x + x^2$  и параметре  $q$ , равном  $\frac{1}{4}$ .

впервые установлена в работе [25]. Такие функции в диадическом случае  $d = 1$  изучались в ряде работ, см, например, [26], [27] и исторический обзор в [28]. При  $d \geq 2$  также некоторые частные случаи в работе [29].

**Теорема 7.** *Функции  $\mathcal{T}_{p,q}^k$ ,  $q \in (0, 1/a_0)$ ,  $k \geq 1$ , непрерывны на интервале  $[0, 1]$ .*

*Доказательство.* Идея доказательства использует то, что для точек  $x$  и  $y$ , лежащих в одном элементе ранга  $m$   $q$ - $r$ -адического разбиения, первые  $m$  координат  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$  совпадают. Это позволяет напрямую оценить модуль разности  $|\mathcal{T}_{P_d,q}^1(x) - \mathcal{T}_{P_d,q}^1(y)|$ .

Определим  $\beta = \beta_q$  равным отношению  $t_q/q$ . Как было показано в части 2.4 выше, всякое число  $x \in [0, 1]$  может быть естественным образом закодировано путем  $\omega = (\omega_i)_{i=1}^\infty$ ,  $\omega_i \in \mathcal{A}$ , в (совершенно сбалансированном) дереве  $\mathcal{M}_r$ . Пусть, для начала,  $k = 1$ . Функция  $\mathcal{T}_{P_d,q}^1(x) = \mathcal{T}(x)$  отображает число  $x = x_q \in [0, 1]$ , кодируемое последовательностью  $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ ,  $\omega_i \in \mathcal{A}$ , следующим образом:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\omega_j-1} \beta^i \right) q^j \beta^{\bar{b}_1 \cdot \bar{s}_j + 2\bar{b}_2 \cdot \bar{s}_j + \dots + d\bar{b}_d \cdot \bar{s}_j},$$

где  $\bar{b}_l \cdot \bar{s}_j$  – число координат, равных  $l \in \mathcal{A}$ , среди  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j)$ , в  $y = \frac{\partial}{\partial q} x_q$ .



Обозначим через  $\tilde{s}_j$  сумму  $\bar{b}_1 \cdot \bar{s}_j + 2\bar{b}_2 \cdot \bar{s}_j + \dots + d\bar{b}_d \cdot \bar{s}_j$ .

Производная  $\frac{\partial}{\partial q}(q^j \beta^l)$  равна  $q^{j-1} \beta^{l-1}[(j-l)\beta + lt'_q]$ , где  $l = \tilde{s}_j - \omega_j + i$ . Пользуясь теоремой о неявной функции, производную  $t'_q$  можно выразить следующим образом:

$$t'_q = -\frac{b_0 d q^{d-1} + b_1 (d-1) q^{d-2} t_q + \dots + b_{d-1} t_q^{d-1} - (d-1) q^{d-2}}{b_1 q^{d-1} + 2b_2 q^{d-2} t_q + \dots + b_d t_q^{d-1} d}. \quad (2.17)$$

Пусть  $b_{\max}$  является максимальным из коэффициентов полинома  $p(x)$ . Ясно, что  $|t'_q| \leq b_{\max} \frac{2d^2}{q}$ . Обозначим через  $p_{\max} \in (0, 1)$  максимум из  $\{q, t_q, \frac{t_q^2}{q}, \dots, \frac{t_q^d}{q^{d-1}}\}$ .

Пусть  $y$  принадлежит границе некоторого  $q$ - $r$ -адического интервала ранга  $m$ , содержащего  $x$ . Тогда справедлива оценка

$$|\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(x)| \leq \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{i=0}^{\omega_j-1} \left| \frac{\partial}{\partial q} (q^j \beta^{\tilde{s}_j+i}) \right|.$$

Пользуясь оценкой,  $|q^j \beta^{\tilde{s}_j+i}| \leq (p_{\max})^j$ , приходим к выводу, что абсолютное значение производной  $\frac{\partial}{\partial q}(q^j \beta^l)$  при  $j > 2$  оценивается выражением вида  $P(j, q)(p_{\max})^{j-2}$ , где  $P(j, q)$  – некоторый полином. Положим  $\varepsilon$  равным 0.99. Тогда при достаточно больших  $m$  выполнено:

$$|\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(x)| \leq \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{i=0}^{\omega_j-1} P(j, q)(p_{\max})^{j-2} \leq C(p_{\max})^{m\varepsilon}, \quad (2.18)$$

где  $C$  – некоторая константа.

В общем случае, не умаляя общности, можно считать, что точки  $x$  и  $x + \delta$  принадлежат некоторому  $q$ - $r$ -адическому интервалу ранга  $m = m(\delta)$ , причем  $\lim_{\delta \rightarrow 0} m(\delta) = +\infty$ , а  $y$ , как и выше, – граничная точка этого интервала. Выполнена оценка

$$|\mathcal{T}(x + \delta) - \mathcal{T}(x)| \leq |\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(x)| + |\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(x + \delta)| \leq 2Cp_{\max}^{m\varepsilon}.$$

При  $k > 1$ , с учетом оценки  $k$ -ой производной  $|\frac{\partial^k}{\partial q^k} q^j \beta^l| \leq P_k(j, q)(p_{max})^{j-k-1}$ , где  $j > k$ , а  $P_k(j, q)$  – некоторый полином, структура доказательства и результат полностью сохраняются.  $\square$

Покажем, что для некоторых цилиндрических функций в качестве предельных кривых возникают графики функций  $\mathcal{T}_{p,q}^1$ . (В случае автоморфизма Паскаля это утверждение было доказано в работе [12], лемма 3.2.)

**Предложение 4.** *Для цилиндрических функции  $g$  вида  $-\sum_{j=0}^d j a_j \mathbb{1}_{\{k^1(x_1)=j\}} \in \mathcal{F}_1$  предельной кривой является график функции  $\mathcal{T}_{p,q}^1$ .*

*Доказательство.* Для краткости докажем теорему для многочлена  $p_3(x) = 1 + x + x^2$ . В силу леммы 4, достаточно доказать, что предельная кривая  $\varphi(x)$  совпадает с функцией  $\mathcal{T}_{p,q}^1$  в точках вида  $x = q^j$  и  $x = q^{j-1}(q + t_q)$ , где  $j \in \mathbb{N}$ .

Функция  $\mathcal{T}_{p,q_1}^1$  отображает точку  $x = q^j$  в точку  $\frac{\partial}{\partial q} q^j = j q^{j-1}$ , а точку  $x = q^{j-1}(q + t_q)$  в точку  $q^{j-2}(j q + (j-1)t_q + t'_q q)$ . В силу 2.17,  $t'_q = \frac{1-(2q+t_q)}{2t_q+q}$ .

Согласно тождеству 4 из таблицы 2.1, мы имеем:  $h_n^g = \frac{k}{n} H_{n,k}$ . Обозначим для краткости частичные суммы  $F_{n,k}^g$  через  $F$ . Нужно вычислить следующие пределы при  $i \in \mathbb{N}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , (в предположении  $\frac{k_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}_{\mu_q} k_1 = 2q + t_q$ ):

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R_n} \left( F(H_{n-i,k-2i}) - \frac{H_{n-i,k-2i}}{H_{n,k}} F(H_{n,k}) \right);$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R_n} \left( F(H_{n-i,k-2i} + H_{n-i,k-2i+1}) - \frac{H_{n-i,k-2i} + H_{n-i,k-2i+1}}{H_{n,k}} F(H_{n,k}) \right).$

Полагая  $R_n = \frac{q H_{n,k}}{n} (2 - \mathbb{E}_{\mu_q} k_1)$ , после некоторых вычислений видим, что первый предел равен  $i q^{i-1}$ , а второй предел равен  $q^{i-2}(i q + (i-1)t_q + t'_q q)$

В силу леммы 3 мы получаем, что предельная функция  $\varphi$  совпадает с функцией  $\mathcal{T}_{p,q_1}^1$  на плотном множестве  $3$ - $q$ -стационарных точек, а значит, в силу теоремы 7, и всюду.

Отметим, что построенный мост является существенным, см. определение 2. В общем случае доказательство проводится аналогично.  $\square$

Численные эксперименты показывают, что функции  $\mathcal{T}_{p,q}^k$ ,  $k \geq 1$ , и их линейные комбинации возникают в качестве предельных функций  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n,k_n}^g$  для любых некогомологичных константе функций  $g \in \mathcal{F}_N$  для автоморфизма  $T_p$ . Доказательству этого результата для случая автоморфизма Паскаля посвящена третья глава диссертации. Выражение (2.4) показывает, что для цилиндрической функции  $g \in \mathcal{F}_N$  частичные суммы  $F_{n,k}^g$  определены коэффициентами  $h_{N,k}^g$ ,  $0 \leq k \leq Nd$ . Поэтому удобно выбрать такой ортогональный базис, для которого коэффициенты  $h_{N,k}^{g_m}$  задаются производящей функцией  $h_{N,k}^{g_m} = (h_0 + h_1 v + \dots + h_d v^d)^k p(v)^{Nd-k}$ . Например, для автоморфизма Паскаля функция  $(1 - av)^k (1 + v)^{n-k}$ , где  $a = \frac{1-q}{q}$ , является производящей функцией полиномов Кравчука, а  $g_m$  – элемент базиса Уолша. Изучение предельных кривых для автоморфизма Паскаля сводится к изучению тонких асимптотик полиномов Кравчука. Однако прямой перенос этих результатов на общий случай представляется достаточно сложным и громоздким.

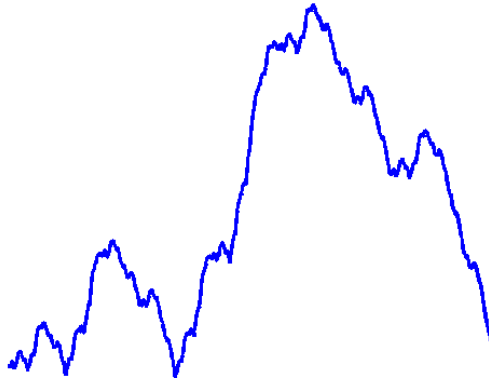


Рис. 2.9. Пример предельной кривой для автоморфизма  $T_{p,\sigma}$ ,  $\sigma = (0, 2, 1)$ .

Рассмотрение автоморфизмов  $T_{p,\sigma}$  при  $\sigma \neq id$  естественно приводит к отличной (от возникающей для случая канонического порядка)  $r$ - $q$ -адической системе счисления и, как следствие, другим предельным кривым. Любопытно, что некоторые из возникающих кривых также возникали в работе японских математиков Т. Окада, Т. Секигучи и Я. Шиота в работе [29], в которой они обобщали работу [25] на мультиномиальный случай. Пример одной из

кривых, отвечающих подстановке  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , приведен на рис. 2.9. Изучение подобных кривых может оказаться интересной задачей, однако она не рассматривалась в рамках данной диссертации.

## 2.8. Вид предельных кривых в симметричном случае при $d \rightarrow \infty$ .

В этой части мы отвечаем на вопрос И. Веленика, Т. де ла Рю и Э. Жанврес из работы [12], стр. 20, часть 4.3.1. Мы предполагаем, что полином  $p_d(x)$  имеет вид  $1 + x + x^2 + \dots + x^d$ .

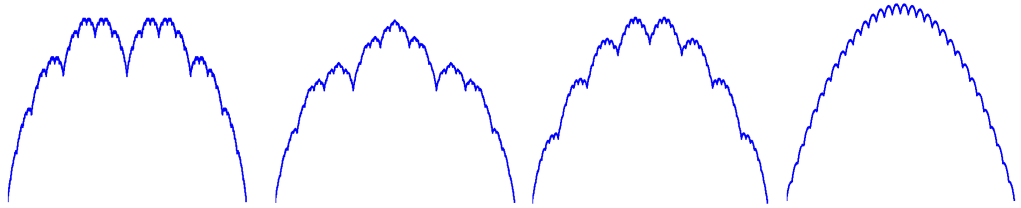


Рис. 2.10. Вид предельных кривых для полиномиальной адической системы при параметре  $d + 1 = 2, 3, 8, 32$ .

Пусть  $q \in (0, 1)$ , а  $t_q \in (0, 1)$  является (единственным) решением на  $(0, 1)$  уравнения

$$q^d + q^{d-1}t + \dots + t^d = q^{d-1}.$$

Как и выше, положим  $\beta = \beta_q$  равным отношению  $t_q/q$ . Как показано в части 2.4, всякий  $x$  из интервала  $[0, 1]$  может быть записан в  $(d+1)$ -адическом представлении в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\omega_j-1} \beta^i \right) q^j \beta^{s_j^1 + 2s_j^2 + \dots + ds_j^d - \omega_j}, \quad (2.19)$$

где  $\omega = (\omega_i)_{i=1}^{\infty}$ ,  $\omega_i \in \{0, 1, \dots, d\} = \mathcal{A}$ , является путем в  $(d+1)$ -адическом

(совершенно сбалансированном) дереве  $\mathcal{M}_{d+1}$ , а  $s_j^k$  равно числу появлений символа  $k \in \mathcal{A}$  среди  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j$ .

Обозначим через  $S_q(x)$  (аналитическую по параметру  $q$ ) функцию, определенную (равномерно суммируемым по  $x$ ) рядом (2.19). Мы положим  $q_*$  равным  $1/(d+1)$  (это соответствует симметричному случаю  $t_{q_*} = q_*$ ). Например, если  $d = 1$ , то представление (2.19) при  $q^* = 1/2$  является стандартным диадическим представлением числа  $x \in [0, 1]$ .

Авторы работы [12] провели ряд компьютерных экспериментов с целью численно проверить, переносятся ли их результаты, полученные для автоморфизма Паскаля, на системы, заданные полиномами  $p_d(x)$ ,  $d \geq 1$ . Результаты их экспериментов (но в большей общности: для полиномов с произвольными натуральными коэффициентами) были (аналитически) получены автором диссертации в работе [6] и изложены в разделе 2.6 выше. В частности, авторов [12] заинтересовало поведение предельных мостов при больших значениях параметра  $d$ : численные эксперименты показывали, что предельные кривые должны сходиться при  $d \rightarrow \infty$  к гладкой кривой.

На основе теоремы 4 вопрос авторов [12] можно сформулировать как вопрос о поведении функций

$$\tilde{T}_d : x \mapsto \frac{1}{d+1} \frac{\partial S_q(x)}{\partial q} \Big|_{q=q_*} \quad (2.20)$$

при больших значениях параметра  $d$  (мы дополнительно должны ввести вертикальную нормализацию делением на  $d+1$ ; если  $d = 1$ , то график функции  $\frac{1}{2}T_1$  является кривой Такаги). Ниже мы покажем, что при  $d \rightarrow \infty$  предельная кривая является параболой, см рис. 2.10.

**Предложение 5.** Пусть полиномы  $p_d(x)$  имеют вид  $1 + x + x^2 + \dots + x^d$ , функции  $\tilde{T}_d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  определены равенством (2.20), а функция  $\phi$  определена равенством  $\phi(t) = t(1-t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Тогда  $\tilde{T}_d$  равномерно сходятся к  $\phi$  при  $d \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Разделим единичный интервал на  $d+1$  подинтервалов  $I_i = (\frac{i}{d+1}; \frac{i+1}{d+1})$ ,  $0 \leq i \leq d$ , одинаковой длины и вычислим функцию  $\tilde{\mathcal{T}}_d$  в (левой) граничной точке каждого из интервалов. Нам также нужно показать, что приращения функций  $\tilde{\mathcal{T}}_d$  являются равномерно по  $d$  стремящимися к нулю на этих интервалах. После этого остается перейти к пределу по  $d$ .

В силу того, что мы исследуем симметричный случай  $q = t_q = q_*$ , теорема о неявной функции (см. формулу (2.17)) показывает, что производную  $t'_q$  можно выразить следующим образом:  $t'_{q_*} = -\frac{2-d}{d}$ . Отсюда  $\beta'_q = \frac{t'}{q} - \frac{\beta_q}{q} \Big|_{q=q_*} = -\frac{2(d+1)}{d}$ . Последнее позволяет заключить, что  $\frac{\partial}{\partial q}(q^j \beta^r) \Big|_{q=q_*} = jq^{j-1} \beta^r + r \beta^{r-1} q^j \beta'_q \Big|_{q=q_*} = (q_*)^{j-1} (j + r q_* (-\frac{2(d+1)}{d})) = (q_*)^{j-1} (j - \frac{2r}{d})$ .

Отметим, что левые граничные точки  $c_d$  интервалов  $I_{cd}$ ,  $c \in [0, 1]$ ,  $cd \equiv [cd]$ , ( $[\cdot]$  – целая часть числа) задаются отношением  $c_d = \frac{cd}{d+1}$  и кодируется стационарной последовательностью  $\omega = (\omega_j)_{j=1}^\infty$ , где  $\omega_1 = cd$  и  $\omega_j \equiv 0$ ,  $j \geq 2$ .

Это позволяет вычислить значения функции  $\tilde{\mathcal{T}}_d(c_d)$  явным образом:

$$\tilde{\mathcal{T}}_d(c_d) = \frac{1}{d+1} \sum_{i=0}^{dc-1} \left( j - \frac{2(dc(j-1) + i)}{d} \right) = c_d(1 - c_d) \frac{d+1}{d} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} c_d(1 - c_d).$$

Мы можем заключить, что, если предельная гладкая кривая существует, то она является параболой.

Остается проверить, что приращения функций  $\tilde{\mathcal{T}}_d$  равномерно стремятся к нулю по параметру  $d$  на интервалах  $I_{cd}$ . Аналогично оценке (2.18), мы получаем, что для  $x \in I_{cd}$  справедливо

$$|\tilde{\mathcal{T}}_d(x) - \tilde{\mathcal{T}}_d(c_d)| = \frac{1}{d+1} \sum_{j=2}^\infty q_*^{j-1} \sum_{i=0}^{\omega_j-1} \left( j - \frac{2(s_j^1 + 2s_j^2 + \dots + ds_j^d - \omega_j + i)}{d} \right) \leq \frac{100d}{d+1} \sum_{j=2}^\infty jq_*^{j-1} \leq \frac{400d}{(d+1)^2}.$$

Последнее неравенство позволяет заключить, что расстояние Хаусдорфа между графиками стремится к нулю.

□

## Глава 3

# Предельные кривые для автоморфизма Паскаля.

В этой главе предельные кривые подробно исследуются на примере конкретного автоморфизма – адического автоморфизма Паскаля  $(I, P)$ . Как и в общем случае, мы будем считать, что выбрана инвариантная эргодическая мера  $\mu_q, q \in (0, 1)$ . Целью данной главы является доказательство следующей теоремы единственности предельной кривой:

**Теорема 8.** Пусть  $P$  – автоморфизм Паскаля, заданный на пространстве с мерой  $(I, \mathcal{B}, \mu_q), q \in (0, 1), N \in \mathbb{N}$  и  $g \in \mathcal{F}_N$  – некогомологичная константе цилиндрическая функция. Тогда для  $\mu_q$ -п.в.  $x$  стабилизирующая последовательность  $l_n = l_n(x)$  может быть выбрана так, что предельной функцией является обобщенная функция Такаги  $\alpha_{g,x,l_n} \mathcal{T}_q^1$ , где  $\alpha_{g,x,l_n} \in \{-1, 1\}$ .

Задача доказать данную теорему была поставлена в работе [12] и была мотивирована численными экспериментами, демонстрирующими изменения вида предельной кривой и асимптотик нормирующих коэффициентов  $R_{x,l_n}^g$  при вариации вида  $(k_n + \delta_n, n), \delta_n = o(n)$ , пути  $(k_n, n), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = q$ , в графе Паскаля. Данные бифуркации авторы работы [12] назвали *транзитными режимами* и поставили задачу их исследовать (см. работу [12], часть 4 «Открытые вопросы»).

Наш подход будет заключаться в следующем: мы выберем в пространстве  $\mathcal{F}_N$  удобный ортогональный базис, что позволит явно описать некогомологичные константе цилиндрические функции для автоморфизма Паскаля (теорема 9), а также установить вид предельных кривых в общем случае (теорема 8) и в транзитных режимах (см. часть 3.3).

### 3.1. Система базисных функций Уолша

Систему функций Радемахера  $\{r_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$  на пространстве  $I = \{0, 1\}^{\infty}$  можно коротко определить следующим образом<sup>1</sup>:

$$r_n(y) := (-1)^{y_n}, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in I.$$

Определим систему функций Уолша  $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$  (в нумерации Пэли).

**Определение 9.** Полагаем  $w_0(y) \equiv 1$ . Число  $t \in \mathbb{N}_0$  представим в виде  $t = t_0 2^0 + t_1 2^1 + \dots + t_{N-1} 2^{N-1}$ , где  $t_i \in \{0, 1\}$ . Положим

$$w_t(y) = \prod_{i=0}^{N-1} (r_{i+1}(y))^{t_i} = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y), \quad (3.1)$$

где  $r_i$  –  $i$ -ая функция Радемахера.

Функции Уолша-Пэли образуют группу характеров диадической группы  $\mathbf{Z}_2$  и образуют ортонормированный базис в  $L^2_{\mu_{1/2}}(I)$ . Для функции  $f \in L^2_{\mu_{1/2}}(I)$  обозначим через  $S_n(f, y)$  частичные суммы ряда Фурье по системе Уолша-Пэли:  $S_n(f, y) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_k(y)$ , где  $c_k = \int_0^1 f(y) w_k(y) dy$ .

Система Уолша  $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$  является полной ортонормированной системой в  $L^2_{\mu_{1/2}}(I)$ , а значит, и полной системой в  $L^2_{\mu_q}(I)$ . В нумерации Пэли первые  $2^N$  функций Уолша образуют также базис в  $\mathcal{F}_N$ .

**Предложение 6.** Если  $f \in \mathcal{F}_N$  и  $k \geq 2^N$ , то  $S_k(f) \equiv f$ .

Определим систему функции  $w_t^q, t \geq 0$ , следующим равенством:

$$w_t^q = w_t + \sum_{j=0}^{t-1} \left[ \binom{t}{j} \bmod 2 \right] \cdot (1 - 2q)^{s_2(t-j)} w_j, \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup> Наше определение задает функции Радемахера на группе  $\mathbf{Z}_2$ , при отображении  $\theta$  оно естественно соответствует классическому определению  $r_n(y) = \text{sign}(\sin(2^n \pi y))$ ,  $y \in [0, 1)$ ,  $n \geq 1$  на  $[0, 1)$ .



где через  $\mathbf{s}_2(t)$  обозначено число единиц в двоичном разложении натурального числа  $t$  (в англоязычной литературе – «sum of binary digits function»). В случае  $q = 1/2$  имеем тождество  $w_t^{1/2} = w_t$ .

**Предложение 7.** Пусть  $N \in \mathbb{N}$ . При  $0 < s < t$  справедливы тождества:

$$\text{cov}_{\mu_q}(w_t^q, w_s) = 0, \quad \mathbb{E}_{\mu_q} w_t^q = 0,$$

что позволяет заключить, что система  $\{w_t^q\}_{t=0}^{2^N}$  образует ортогональный базис в пространстве цилиндрических функций  $(\mathcal{F}_N, \mu_q)$ , причем  $\|w_t^q\|_2^2 = 1 - (2q - 1)^{2m}$ .

*Доказательство.* Положим  $\alpha$  равным  $2q - 1$ . Среднее функции Уолша  $w_t$  по мере  $\mu_q$  может быть найдено следующим образом:

$$\mathbb{E}_{\mu_q} w_t = \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \binom{m}{l} q^l (1-q)^{m-l} = (2q-1)^m = \alpha^m, \quad \text{где } m = \mathbf{s}_2(t). \quad (3.3)$$

Определим операцию  $\oplus$  на парах натуральных чисел в двоичной записи как сложение без переноса: для  $i = \sum_{\mu=0}^{\infty} \xi_{\mu} 2^{\mu}$  и  $j = \sum_{\mu=0}^{\infty} \zeta_{\mu} 2^{\mu}$ , где  $\zeta_{\mu}, \xi_{\mu} \in \{0, 1\}$ , по определению,

$$i \oplus j = \sum_{\mu=0}^{\infty} \eta_{\mu} 2^{\mu}, \quad \eta_{\mu} = (\zeta_{\mu} + \xi_{\mu}) \bmod 2.$$

Очевидно, что  $w_t w_s = w_{t \oplus s}$ , (более того, функции Уолша-Пэли образуют группу характеров диадической группы  $\mathbf{Z}_2$ ). Поэтому можно записать:

$$\text{cov}_{\mu_q}(w_t, w_s) = \mathbb{E}_{\mu_q} w_{t \oplus s} - \mathbb{E}_{\mu_q} w_t \mathbb{E}_{\mu_q} w_s.$$

Пользуясь этим выражением, при  $0 < s < t$ , ковариацию  $\text{cov}_{\mu_q}(w_t^q, w_s)$  можно выразить следующим образом:

$$\text{cov}_{\mu_q}(w_t^q, w_s) = \sum_{j=0}^t (-1)^{\mathbf{s}_2(t-j)} \left[ \binom{t}{j} \bmod 2 \right] \alpha^{\mathbf{s}_2(t \oplus j) + \mathbf{s}_2(s \oplus j)}.$$

Для того, чтобы показать, что правая часть приведенного выше равенства равна нулю, рассмотрим матрицу  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ . Обозначим через  $B_k(x)$   $k$ -кратное кронекеровское произведение  $(A(x))^{\otimes k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Записывая  $k$ -кратное кронекеровское произведение последовательно и пользуясь свойством  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ , по индукции легко проверить, что

$$B_k(x)B_k(y) = B_k(x + y). \quad (3.4)$$

Строки и столбцы матрицы  $B_k$  нам удобно нумеровать начиная с нуля.

По индукции проверим, что при  $k \in \mathbb{N}$  и  $0 \leq i, j < 2^k$   $(i, j)$ -ый элемент матрицы  $B_k(x)$  имеет вид

$$(B_k(x))_{i,j} = \begin{cases} x^{\mathbf{s}_2(i-j)}, & \text{если } i > j \text{ и } (i-j) \oplus j = i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.5)$$

База индукции: при  $k = 1$  равенство очевидно. Пусть равенство (3.5) доказано при некотором  $k$ . Положим  $r = 2^k$ . Функция  $\mathbf{s}_2(\cdot)$  удовлетворяет уравнениям

$$\mathbf{s}_2(j + r) = \mathbf{s}_2(j) + 1, \quad j = 0, 1, \dots, r - 1, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{s}_2(j + r) = \mathbf{s}_2(j), \quad j = r, r + 1, \dots, 2r - 1. \quad (3.7)$$

Так как  $B_{k+1} = \begin{pmatrix} B_k & \mathbb{O} \\ xB_k & B_k \end{pmatrix}$ , то нужно проверить формулу (3.5) для каждого из четырех блоков матрицы  $B_{k+1}$ . Пусть, например,  $r \leq i < 2r$  и  $0 \leq j < r$ . Запишем (3.6) как  $\mathbf{s}_2(i - r - j) + 1 = \mathbf{s}_2(i - r - j + r) = \mathbf{s}_2(i - j)$ . Тогда по

индуктивному предположению получаем

$$\begin{aligned} (B_{k+1}(x))_{i,j} &= \begin{cases} x \cdot x^{s_2(i-r-j)}, & \text{если } (i-r-j) \oplus j = i, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x^{s_2(i-j)}, & \text{если } (i-j) \oplus j = i, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналогичная проверка для остальных блоков может быть проведена с использованием (3.7) вместо (3.6).

По классической теореме Куммера [30] для натуральных чисел  $t$  и  $s$  выполнено равенство  $t \oplus s = t + s$  тогда и только тогда, когда биномиальный коэффициент  $\binom{t+s}{s}$  является нечетным, откуда

$$(B_k(x))_{ij} = \begin{cases} x^{s_2(i \oplus j)}, & \text{если } \binom{i}{j} \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(в первом случае мы воспользовались тем, что  $i-j = ((i-j) \oplus j) \oplus j = i \oplus j$ ).

Это объясняет структуру «треугольника Серпинского», образуемую ненулевыми коэффициентами матрицы  $B_k(x)$ ,  $x \neq 0$ , например,

$$B_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & x & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ x^3 & x^2 & x^2 & x & x^2 & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

Из (3.4) следует, что  $B_k(x)B_k(-x) = B_k(0)$  – единичная  $(k \times k)$ -матрица.

Пусть  $t > s > 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^t (-1)^{s_2(t-j)} \left[ \binom{t}{j} \bmod 2 \right] \alpha^{s_2(t \oplus j) + s_2(s \oplus j)} &= \\ &= \sum_{j=0}^t (B_t(-\alpha))_{t,j} (B_t(\alpha))_{j,s} = (B_t(0))_{t,s} = 0 \quad (3.9) \end{aligned}$$

Равенство  $\mathbb{E}_{\mu_q} w_t^q = 0, q \neq 1/2$ , проверяется аналогично:

$$\mathbb{E}_{\mu_q} w_t^q = \sum_{j=0}^t \left[ \binom{t}{j} \bmod 2 \right] \cdot (-\alpha)^{s_2(t-j)} \mathbb{E}_{\mu_q} w_j = \sum_{j=0}^t (B_t(-\alpha))_{t,j} \alpha^{s_2(j)} = 0.$$

Вычислим 2-норму:

$$\|w_t^q\|_2^2 = \mathbb{E}_{\mu_q} (w_t^q)^2 = \text{cov}_{\mu_q}(w_t^q, w_t^q) = \text{cov}_{\mu_q}(w_t, w_t) = \mathbb{E}_{\mu_q} w_{t \oplus t} - \mathbb{E}_{\mu_q}^2 w_t = 1 - \alpha^{2m}.$$

□

## 3.2. Полиномы Кравчука как эргодические суммы для цилиндрических функций

Найдем явную формулу для частичных сумм  $F_{n,k}^{w_t^q}$  функции  $w_t^q, t \in \mathbb{N}$ .

Для пути  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \omega_i \in \{0, 1\}$ , в графе Паскаля обозначим через  $k_1$  натуральное число, равное числу  $s_2(\omega) = \sum_{j=1}^n \omega_j$  единиц в нем, а через  $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{k_1}$  координаты единиц в пути  $\omega$ . Графически, путь  $\omega$  соединяет вершины  $(0, 0)$  и  $(n, k) = (n, n - k_1)$  графа Паскаля. В части 2.3 было показано (см. формулу (2.4)), что номер в лексикографическом порядке<sup>2</sup>  $\text{num}(\omega)$  пути  $\omega$  равен  $\sum_{j=1}^{n-k} \binom{t_j-1}{j} + 1$ .

---

<sup>2</sup> т.е. номер этажа в башне  $\tau_{n,k}$

В случае графа Паскаля верно и обратное: для любого  $x \in \mathbb{N}$  существуют и единственны целые числа  $a_k > a_{k-1} > \cdots > a_{k-s} \geq 0$ , такие, что  $x = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_{k-s}}{k-s}$ . В существовании легко убедиться, используя «жадный алгоритм»: возьмем  $a_k$  максимальным натуральным, таким, что  $x \geq \binom{a}{k}$ ; на следующем шаге заменим  $x$  на  $x - \binom{a}{k}$ , а  $k$  на  $k - 1$  и будем продолжать, пока не получим ноль (в силу того, что  $\binom{a}{0} = 1$ , что, вообще говоря, неверно для обобщенных биномиальных коэффициентов). Единственность проверяется по индукции. Такое представление натурального числа  $x$  называют *биномиальным разложением*, или *k-каскадом* (см., например, [31], главу 10.4). Нам удобно записывать наименьшее слагаемое  $\binom{a_{k-s}}{k-s}$  как  $\sum_{j=0}^{k-s} \binom{a_{k-s}-1-j}{k-s-j} = \sum_{j=0}^{k-s-1} \binom{a_{k-s}-1-j}{k-s-j} + 1$ , что позволяет установить путь  $\omega = (\omega_j)_1^n$ , по его номеру  $x = \text{Num}(\omega)$ , записанному в виде  $k_1$ -каскада следующим образом: если  $x = \sum_{j=0}^{k_1-1} \binom{n-i_j}{k_1-j} + 1$ , то путь  $(\omega_l)_{l=1}^n$  имеет координаты

$$\omega_l = \begin{cases} 1, & l = n - i_j + 1, 0 \leq j \leq k_1 - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что при  $j = 0$  имеем  $\binom{n-i_0}{k_1} = \binom{n-i_0}{k-i_0} = x_{i_0, k, n}$ , что соответствует пути  $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-i}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-k=k_1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_i)$ . Отметим также, что используя биномиальное разложение сумм  $\text{num}(\omega)$  и  $\text{num}(\omega) + r$  можно задать  $r$ -ую итерацию автоморфизма Паскаля  $P^r \omega, r \in \mathbb{N}$ .

В силу существования  $k_1$ -каскада, мы можем определить функцию  $\partial_{k_1}^{N,j}$ , изначально заданную равенством (2.6) на путях  $\omega$  из  $\pi_{n,k}$ , на натуральных числах  $x = \text{Num}(\omega)$ :

$$\partial_{k_1}^{N,j}(x) = \binom{a_{k_1-N}}{k_1-j} + \binom{a_{k_1-1}-N}{k_1-1-j} + \cdots + \binom{a_{k_1-s}-N}{k_1-s-j}. \quad (3.10)$$

Пусть  $m, x, n$  – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенствам  $0 \leq m \leq n, 0 \leq x \leq n$ . Обозначим через  $K_m(x, q, n)$  ненормированные

полиномы Кравчука дискретной переменной  $x$ , определенные с помощью следующего равенства:

$$K_m(x, q, n) = {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -x, & -m \\ & -n \end{matrix}; \frac{1}{q} \right], \quad (3.11)$$

где  ${}_2F_1$  – гипергеометрическая функция Гаусса. Нормированные полиномы Кравчука  $p_m(x) = p_{m,n}(x) = \binom{n}{m} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -x, & -m \\ & -n \end{matrix}; \frac{1}{q} \right]$  могут быть заданы с помощью производящей функции

$$\Phi_n(x, v) = (1 + v)^{n-x} (1 - av)^x, \quad \text{где } a = \frac{1 - q}{q}. \quad (3.12)$$

**Предложение 8.** Для функции  $w_t^q, 0 < t < 2^N$ , сумма  $F_{n,k}^{w_t^q}(x_{i,k,n})$ , где  $x_{i,k,n} = \binom{n-i}{k-i}, 0 \leq i < k, \min\{k, n - k\} \geq N$ , выражается следующей формулой:

$$F_{n,k}^{w_t^q}(x_{i,k,n}) = (-2q)^m K_m(k - i, q, n - i) \cdot x_{i,k,n}, \quad (3.13)$$

где  $m = \mathbf{s}_2(t)$ .

*Доказательство.* Будем считать, что функция Уолша  $w_t$  является произведением  $m = \mathbf{s}_2(t), 1 \leq m \leq N$ , различных функций Радемахера  $\prod_{i=1}^m r_{n_i}$ . В силу цилиндричности, функция  $w_t : I \rightarrow \{-1, 1\}$  определена уже на конечных путях из множества  $\pi_{n,k}, n \geq N$ , путей длины  $n$  в графе Паскаля, ведущих из вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(n, k)$ . Положим  $k_1$  равным  $n - k$ . Пусть натуральное число  $x = \binom{a_{k_1}}{k_1} + \binom{a_{k_1-1}}{k_1-1} + \dots + \binom{a_{k_1-s}}{k_1-s}$  задает конечный путь  $(\omega_j)_{j=1}^n \in \pi_{n,k}$ , такой, что  $\omega_j = 0$  для  $1 \leq j \leq N$ . Тогда биномиальное разложение числа  $x$  удовлетворяет свойству  $a_{k_1-s}(x) \geq N$ . По определению, число  $F_{n,k}^{w_t}(x)$  равно сумме значений  $w_t$  на всех путях из множества  $\pi_{n,k}$ , не превосходящих в лексикографическом порядке пути  $x$ .

Разобьем все пути из множества  $\pi_{n,k}$  на два класса, в соответствии с тем, какое значение (1 или  $-1$ ) принимает на них функция  $w_t$ . Каждый путь  $\omega$ , в свою очередь, разобьем на 2 части: начало  $\omega'$  длины  $N$  и хвост  $\omega''$  длины

$\binom{n}{k} - N$ , так, что  $\omega = (\omega', \omega'')$ . Путь  $\omega'$  заканчивается в одной из вершин  $(N, j)$ ,  $0 \leq j \leq N$ , и полностью определяет значение функции  $w_t$  на всем пути  $\omega$ . Количество путей  $\omega'$  из первого класса, ведущих из вершины  $(0, 0)$  в фиксированную вершину  $(N, j)$ , дает следующая комбинаторная лемма.

**Лемма 5.** Пусть для натурального  $N$  заданы  $1 \leq m \leq N$  различных натуральных чисел  $\{n_i\}_{i=1}^m$ , таких, что  $1 \leq n_i \leq N$ . Число  $J_{N,j}^m$  векторов  $(r_1, \dots, r_N)$ , состоящих из  $N$  единиц и минус единиц, удовлетворяющих двум условиям:

1.  $\prod_{i=1}^m r_{n_i} = 1$ ,  $1 \leq n_i \leq N$ ,  $1 \leq i \leq m$ ;
2. число единиц среди  $r_i$ , при  $1 \leq i \leq N$ , равно  $j$ ,

равно

$$\sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{N-j-2l},$$

биномиальные коэффициенты доопределены нулем.

Первое условие гарантирует то, что функция  $w_t(\omega') = \prod_{i=1}^m r_{n_i}(\omega')$  равна единице (и, тем самым, путь  $\omega'$  действительно из первого класса), а второе условие — то, что путь  $\omega'$  ведет в вершину  $(N, j)$ .

Пути из второго класса, ведущие в вершину  $(N, j)$ , — это все оставшиеся пути, число которых равно  $\binom{N}{j} - J_{N,j}^m = \sum_{l: 1 \leq 2l+1 \leq m} \binom{m}{2l+1} \binom{N-m}{N-j-2l-1}$ . Количество хвостовых путей  $\omega''$  считается по приведенной выше формуле  $\partial_{k_1}^{N,j}(x) = \binom{a_{k_1}-N}{k_1-j} + \dots + \binom{a_{k_1-s}-N}{k_1-s-j}$ .

Тем самым сумма  $h_{N,j}^{w_t} \equiv F_{N,j}^{w_t}(\binom{N}{j})$  равна разности  $2J_{N,j}^m - \binom{N}{j}$  между числом путей из множества  $\pi_{n,k}$ , для которых функция  $w_t$  принимает значение, равное единице, и числом путей, для которых функция равна минус единице. Полученную разность можно записать так:

$$h_{N,j}^{w_t} = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \binom{N-m}{N-j-l} \equiv (-1)^m \binom{N}{j} K_m(j, \frac{1}{2}, N).$$

Частичная сумма  $F_{n,k}^{w_t}(x)$ , согласно формуле (1.1), задается равенством

$$F_{n,k}^{w_t}(x) = \sum_{j=0}^N h_{N,j}^{w_t} \partial_{n-k}^{N,j}(x), \quad \text{где } 0 \leq x \leq \binom{n}{k} \text{ и } a_{k_1-s}(x) \geq N, \quad (3.14)$$

в котором правая часть зависит лишь только от  $N$  и  $m$ , но не от индекса  $t$ . Очевидно, что  $w_t \in \mathcal{F}_N$  влечет, что  $w_t \in \mathcal{F}_{N'}$  при  $N' \geq N$ . Положим индекс  $t_m$  равным  $2^m - 1$ . В силу зависимости  $F_{n,k}^{w_t}(x)$  только лишь от  $m$  и  $N$ , для натуральных аргументов  $x$ , удовлетворяющих соотношению  $a_{k_1-s}(x) \geq N', k_1-s \geq N'$ , мы получим тождество  $F_{n,k}^{w_t}(x) \equiv F_{n,k}^{w_{t_m}}(x)$ . Поэтому ниже мы будем полагать, что  $t = t_m$ . Тогда

$$F_{n,k}^{w_t}(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \partial_{n-k}^{m,j}(x), \quad a_{k_1-s}(x) \geq m. \quad (3.15)$$

Для функции  $w_t^q, q \neq 1/2$ , (напомним, что, согласно равенству (3.2), эти функции линейно выражаются через функции  $w_j, 0 \leq j \leq t$  следующим образом:  $w_t^q = \sum_{\mu=0}^m d_\mu w_{t_\mu}$ , где коэффициенты  $d_\mu = \binom{m}{\mu} (1-2q)^{m-\mu}, \mu \in \mathbb{N}$ ) коэффициенты  $h_{m,j}^{w_t^q} = \sum_{\mu=0}^m d_\mu h_{\mu,j}^{w_t}$  в аналогичном выражении суммы  $F_{n,k}^{w_t^q}$  выражаются в виде

$$h_{m,j}^{w_t^q} = (-2q)^m \binom{m}{j} \left(\frac{1-q}{q}\right)^{m-j} \equiv (-2q)^m \binom{m}{j} K_m(j, q, m).$$

Первое равенство следует из элементарного тождества  $\sum_{\mu=0}^m (-1)^j d_\mu = (-2q)^m (-a)^{m-j}, a = \frac{1-q}{q}$ .

Записывая тождество  $(1+v)^{n-j} (1-av)^j = (1+v)^{N-j} (1-av)^j (1+v)^{n-N}$  и приравнивая коэффициенты при  $v^k$ , получаем следующее представление для полиномов Кравчука:

$$p_{k,n}(m) = \sum_{j=0}^N p_{j,N}(m) \binom{n-N}{k-j}.$$

Пользуясь тождеством  $K_m(j, q, N) = K_j(m, q, N)$ , запишем полученное ра-



венство следующим образом:

$$\sum_{j=0}^N K_m(j, q, N) \binom{N}{j} \binom{n-N}{k-j} = K_m(k, q, n) \binom{n}{k}.$$

Полагая  $N = m$ , мы приходим к следующему выражению для функции

$$F_{n,k}^{w_t^q}(x_{i,k,n}) = \sum_{j=0}^m h_{m,j}^{w_t^q} \partial_{n-k}^{m,j}(x):$$

$$\sum_{j=0}^m (-2q)^m \binom{m}{j} K_m(j, q, m) \binom{n'-N}{k'-j} = (-2q)^m K_m(k', q, n') \binom{n'}{k'},$$

в котором необходимо положить  $n' = n - i, k' = k - i$ .

□

*Замечание 9.* Для  $x = \sum_{j=0}^l \binom{n-i_j}{k_1-j}$ , где  $(i_0, i_1, \dots, i_{l-1})$  – возрастающая последовательность, такая, что  $i_j \in \mathbb{N}$  и  $i_j - j > 0$  при  $0 \leq j \leq l-1$ ,  $l < k_1 - N$ , сумма  $F_{n,k}^{w_t^q}(x)$  равна

$$F_{n,k}^{w_t^q}(x) = \sum_{j=0}^l (-2q)^m K_m(k - i_j - j, q, n - i_j) \cdot \binom{n - i_j}{k_1 - j}. \quad (3.16)$$

Следующий результат показывает, что для автоморфизма Паскаля ко-гомологичные константе функции  $g \in \mathcal{F}_N$  могут быть описаны в терминах проекций:

**Теорема 9.** *Цилиндрическая функция  $g$ , принадлежащая пространству  $\mathcal{F}_N$ , когомологична константе тогда и только тогда, когда для всякого  $m$ ,  $1 \leq m \leq N$ ,*

$$\text{cov}_{\mu_q}(g, \sum_{t: \mathbf{s}_2(t)=m} w_t^q) = 0,$$

где через  $\mathbf{s}_2(t)$  обозначено число единиц в двоичном разложении номера  $t$ .

*Доказательство.* Можно считать, что  $\mathbb{E}_{\mu_q} g = 0$ . Разложим функцию  $g$  в сумму Фурье  $S_{2^N}^q(g) = \sum_{t=0}^{2^N} c_t w_t^q$ . Для  $x$  удовлетворяющих условиям равенства

(3.14) имеем:

$$F_{n,k}^g(x) = \sum_{j=0}^N h_{N,j}^g \partial_{n-k}^{N,j}(x),$$

где  $h_{N,j}^g = \left( \sum_{t:\mathbf{s}_2(t)=m} c_t \right) \cdot h_{N,j}^{w_t^q} = 0, 0 \leq j \leq N$ . Из этого представления следует ограниченность частичных сумм функции  $F_{n,k}^g(x)$  на  $0 \leq x \leq \binom{n}{k}$  и, в силу теоремы 2 главы 1, когомولوجичность функции  $g$  нулю.  $\square$

Поэтому в дальнейшем предполагается, что функция  $g \in \mathcal{F}_N$  удовлетворяет свойству  $\text{cov}_{\mu_q}(g, \sum_{t:\mathbf{s}_2(t)=m} w_t^q) \neq 0$ .

Согласно лемме 4, для определения вида предельной кривой для функции  $w_t^p$  достаточно найти главный член асимптотики следующей разности:

$$F_{n,k}^{w_t^q}(x_{i,k,n}) - \frac{x_{i,k,n}}{\binom{n}{k}} F_{n,k}^{w_t^q}(x_{0,k,n}), \quad (3.17)$$

где  $x_{i,k,n} = \binom{n-i}{k-i}, i = O(1), k = k(n_j), n = n_j$ , а асимптотика ищется при  $j \rightarrow \infty$  при условии, что  $\frac{k(n_j)}{n_j} \rightarrow q$ . Для простоты, всюду ниже мы опускаем индексы, записывая последовательность вершин просто в виде  $(n, k_n)$  или даже  $(n, k)$  вместо  $(n_j, k(n_j))$ .

Используя выражение (3.13), разность (3.17) можно переписать следующим образом:

$$(-2q)^m \left( K_m(k-i, q, n-i) - K_m(k, q, n) \right) \binom{n-i}{k-i}, \quad (3.18)$$

где, как и выше, через  $m$  обозначено число  $\mathbf{s}_2(t)$  единиц в двоичном разложении натурального  $t$ .

Положим ниже число  $p$  равным  $1 - q$ . Напомним (см., например, [32]), что перенормированные полиномы Кравчука  $(-1)^m \left( \frac{2nq}{p} \right)^{m/2} K_m(k, q, n)$  равномерно по  $x = \frac{k-nq}{\sqrt{2npq}} = O(1)$  на компактах сходятся к полиномам Эрмита  $H_m(x) \equiv (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}$ . Обозначим через  $v$  разность  $k - nq$ . Для пути  $x \in I$  вместо пары координат  $(n(x), k_n(x))$  мы, где это удобно, используем

центрированную пару  $(n(x), v_n(x))$ , записывая ее кратко в виде  $(n, v_n)$  или даже  $(n, v)$ .

**Лемма 6.** Для разности (3.18) справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\tilde{R}_{n,k_n}^{w_t^q} i q^{i-1} + o(\tilde{R}_{n,k_n}^{w_t^q}), \quad (3.19)$$

где коэффициент  $\tilde{R}_{n,k}^{w_t^q}$  равен  $-2^m \binom{n}{k} \frac{2m\sqrt{p}}{\sqrt{2nq}} \left(\frac{1}{2pqn}\right)^{m/2} H_{m-1}\left(\frac{k-nq}{\sqrt{2npq}}\right)$ .

*Доказательство.* Положим полином  $k_m^{(q)}(x)$  равным  $(-q)^m \binom{n}{m} K_m(x, q, n) \equiv (-q)^m p_{m,n}(x)$ . Теорему о сходимости перенормированных полиномов Кравчука к полиномам Эрмита можно записать следующим образом:

$$k_m^{(q)}(nq + v) = \frac{1}{m!} \left(\frac{npq}{2}\right)^l H_m\left(\frac{v}{\sqrt{2pqn}}\right) + O(n^{l-1/2}), \quad (3.20)$$

где  $l$  равно  $m/2$ , и  $|v/\sqrt{n}| < A$ .

Покажем, что главный член разности  $k_m^{(q)}(k - i, n - i) - k_m^{(q)}(k, n)$  полиномов Кравчука может быть записан в виде  $\frac{1}{m!} \left(\left(\frac{(n-i)pq}{2}\right)^l H_m\left(\frac{v-i+iq}{\sqrt{2pq(n-i)}}\right) - \left(\frac{npq}{2}\right)^l H_m\left(\frac{v}{\sqrt{2pqn}}\right)\right)$ .

Полином Кравчука  $k_m^{(q)}(nq + v, n)$  может быть рассмотрен как полином  $P(v, n)$  двух переменных  $n$  и  $v$ :  $P(v, n) = k_m^{(q)}(nq + v, n) = \sum_{j,\nu} c_{j,\nu} v^j n^\nu$  (здесь и всюду ниже  $j$  и  $\nu$  – целые, неотрицательные, а коэффициенты  $c_{j,\nu}, b_{j,\nu}, d_{j,\nu}, r_{j,\nu}$  – вещественные числа). Рассмотрим также два полинома  $Q$  и  $R$ , определенные следующим образом:  $Q(v, n) = \frac{1}{m!} \left(\frac{npq}{2}\right)^l H_m\left(\frac{v}{\sqrt{2pqn}}\right) = \sum_{j=0}^{[l]} c_j v^{m-2j} n^j$ , а

$R(v, n) = k_m^{(q)}(nq + v, n) - Q(v, n)$ . Асимптотическое разложение (3.20) влечет, что  $R(v, n) = O(n^{l-1/2})$ , а значит  $R(v, n) = \sum_{j,\nu: j/2+\nu \leq l-1/2} b_{j,\nu} v^j n^\nu$ . Пусть

$i$  – целое, неотрицательное. Тогда получим, что  $R(v - i, n - i) - R(v, n) = \sum_{j,\nu: j/2+\nu \leq l-1} d_{j,\nu} v^j n^\nu$  и  $Q(v - i, n - i) - Q(v, n) = \sum_{j,\nu: j/2+\nu \leq l-1/2} r_{j,\nu} v^j n^\nu$ . Поэтому

в дополнительном предположении, что все коэффициенты  $r_{j,\nu}$  одновременно не равны нулю (что, как показано ниже, происходит, когда дробь  $\frac{v_n}{\sqrt{2pqn}}$

стремится к корню полинома Эрмита  $H_{m-1}$ ), получаем, что главный член разности  $P(v-i, n-i) - P(v, n)$  задается разностью  $Q(v-i, n-i) - Q(v, n)$  полиномов Эрмита. Тот факт, что все функции являются полиномами, показывает, что предположение  $|v/\sqrt{n}| < A$  несущественно: этот же вывод верен при  $v = o(n)$ .

Однако нам необходимо найти главный член взвешенной разности  $\binom{n-i}{m}^{-1} k_m^{(q)}(k-i, n-i) - \binom{n}{m}^{-1} k_m^{(q)}(k, n)$ .

Для этого введем следующие коэффициенты:  $A_{n,l}^q = \left(\frac{1}{2pqn}\right)^l (1 + l(2l-1)\frac{1}{n})$ ,  $B_{n,l}^q = \left(\frac{1}{2pqn}\right)^l \frac{l}{n}$ ,  $C_n^q = -\frac{2m\sqrt{p}}{\sqrt{2nq}}$ ,  $H_{m,n,v}^q = H_m\left(\frac{v}{\sqrt{2npq}}\right)$ . Используя их, мы можем записать:

$$\frac{1}{m!} \binom{n-i}{m}^{-1} \left(\frac{(n-i)pq}{2}\right)^l = A_{n,l}^q + B_{n,l}^q i + o(n^{l-1}). \quad (3.21)$$

Хорошо известное тождество  $H_m(x+y) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} H_j(x) (2y)^{m-j}$  влечет, что

$$H_m\left(\frac{v-i+iq}{\sqrt{2pq(n-i)}}\right) = H_m\left(\frac{v-i+iq}{\sqrt{2pqn}}\right) + O(n^{l-1}) = H_{m,n,v}^q + C_n^q H_{m-1,n,v}^q i + O(n^{l-1}) \quad (3.22)$$

(первое равенство следует из того, что  $\frac{v+j}{\sqrt{2pq(n-i)}} = \frac{v+j}{\sqrt{2pqn}} + o(1/n^{1/2})$  для  $j \in \mathbb{R}$  и  $v = o(n)$ ).

Используя (3.21) и (3.22), мы получаем следующее выражение для главного члена асимптотического разложения разности  $\binom{n-i}{m}^{-1} k_m^{(q)}(k-i, n-i) - \binom{n}{m}^{-1} k_m^{(q)}(k, n)$ :

$$-\frac{2m\sqrt{p}}{\sqrt{2nq}} \left(\frac{1}{2pqn}\right)^{m/2} H_{m-1}\left(\frac{k-nq}{\sqrt{2npq}}\right) i.$$

□

Закон больших чисел и локальная предельная теорема влекут, что  $\mu_q$ -п.в. последовательности случайных величин  $(n, v_n)$  удовлетворяют следующим двум условиям:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = 0$ ,

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\sqrt{2npq}} \neq y_j^{m-1}, 1 \leq j \leq m$ , где  $\{y_j^{m-1}\}_{j=1}^{m-1}$  – набор корней полинома  $H_{m-1}$ .

В предположении, что предел последовательности  $\frac{k_n - nq}{\sqrt{2npq}} = \frac{v_n}{\sqrt{2npq}}$  не совпадает с корнем полинома Эрмита  $H_{m-1}$  (что составляет вышеприведенное условие 2), определим масштабирующий коэффициент  $R_{n,k}^{w_t^q}$  равным  $|\tilde{R}_{n,k}^{w_t^q}|$ , а коэффициент  $\alpha_{n,k}^m$ , отвечающий за знак, равным  $\text{sign} \tilde{R}_{n,k}^{w_t^q}$ . Стабилизирующую последовательность  $(l_n)_n$ , как и в главе 2, естественно выбрать равной  $\binom{n}{k_n}$ .

После нормировки на  $\alpha_{n,k_n}^m R_{n,k_n}^{w_t^q}$  по вертикали и на  $l_n$  по горизонтали, мы видим, что для предельной функции  $\varphi(y)$  в  $q$ -стационарной точке вида  $q^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{i,k_n,n}}{x_{0,k_n,n}}, i \in \mathbb{N}$ , выполнено тождество  $\varphi(q^i) = iq^{i-1}$ , а значит тождество  $\varphi(y_{l_0}) = \frac{\partial}{\partial q} y_{l_0}$  выполнено и для  $q$ -стационарных точек общего вида  $y_{l_0} = \frac{q}{1-q} \sum_{k=1}^{l_0} \omega_k q^{k-s_k} (1-q)^{s_k}$ . Это доказывает, что предельная кривая  $\varphi$  совпадает с обобщенной кривой Такаги  $\mathcal{T}_q^1$  на плотном множестве в интервале  $[0, 1]$ .

Так как множество путей  $(n, k_n)$ , таких, что предел последовательности  $\frac{v_n}{\sqrt{2npq}}$  совпадает с корнем полинома Эрмита  $H_{m-1}$ , имеет меру ноль, теорему 8 для базисных функций  $w_t^q, t \geq 1$ , можно считать доказанной.

Определим ортонормированный базис  $\tilde{w}_t^q, t \geq 0$ , равенством  $\tilde{w}_t^q = w_t^q / \|w_t^q\|_2$ . Пусть  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$  таковы, что  $\mathbf{s}_2(t_1) > \mathbf{s}_2(t_2)$ . Для масштабирующих коэффициентов функций  $\tilde{w}_{t_i}^q, i = 1, 2$ , выполнено соотношение  $R_{n,k}^{\tilde{w}_{t_1}^q} = o(R_{n,k}^{\tilde{w}_{t_2}^q})$ . Соотношение означает, что нормирующий коэффициент  $R_{n,k}^g$  линейной комбинации  $g = \alpha \tilde{w}_{t_1}^q + \beta \tilde{w}_{t_2}^q, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , пропорционален  $R_{n,k}^{\tilde{w}_{t_2}^q}$ .

Перейдем к общему случаю некогомологичной константе цилиндрической функции  $f \in \mathcal{F}_N$ . В силу предложения 9 найдется *минимальное* натуральное  $m \leq N$ , которое мы обозначим через  $m_f$ , такое, что значение ковариации  $\text{cov}_{\mu_q}(f, \sum_{t: \mathbf{s}_2(t)=m} \tilde{w}_t^q)$ , которое мы обозначаем через  $c_f$ , не равно нулю. Обозначим через  $t_f$  индекс, равный  $2^{m_f} - 1$ . Тогда для  $\mu_q$ -почти всех точек  $x$

найдется такая последовательность  $(n, k_n) = (n(x), k_n(x))$ , что непрерывный мост задается стабилизирующей последовательностью  $\left(\binom{n}{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ , масштабирующей последовательностью  $R_{n, k_n}^{\tilde{w}_{t_f}^q} c_f$  и предельной функцией  $\mathcal{T}_q^1$ . Формально это завершает доказательство теоремы 8.

Так как для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено соотношение  $\left(\binom{n}{k}\right)^{1-\varepsilon} = o(R_{n, k}^{w_t^p})$ , то для всякой некогомологичной константе цилиндрической функции  $f$  предельные мосты являются *существенными* в смысле определения 2.

В следующем пункте будут изучены предельные кривые для *транзитных путей* (т.е. для путей  $(n_j, k_{n_j})$  для которых не выполнено условие 2).

### 3.3. Вид предельных кривых в транзитных режимах.

В этой части рассмотрим предельные кривые, возникающие в транзитных режимах. Мы будем считать стабилизирующую последовательность  $l_n$  канонически выбранной равной  $\binom{n}{k_n}$ , а функцию  $g$ , равной  $w_t^q, t \geq 1$ .

Дадим сначала неформальную интерпретацию. Если варьировать путь  $(n_j, k_{n_j})$ , удовлетворяющий свойству  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{k_{n_j} - n_j q}{\sqrt{2n_j p q}} = y, |y| \neq \infty$ , так, чтобы сначала  $y$  был меньше некоторого корня  $y^*$  полинома Эрмита  $H_{m-1}$ ,  $m = \mathbf{s}_2(t)$ , а затем превосходил его, то в процессе данной вариации знак  $\alpha_{n_j, k_{n_j}}$  изменится на противоположный. Естественно ожидать, что в процессе такой вариации для *транзитных путей*  $(n_j, k_{n_j})$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{k_{n_j} - n_j q}{\sqrt{2n_j p q}} = y_l^{m-1}$ , соответствующих корням  $y_l^{m-1}, 1 \leq l \leq m - 1$ , полинома Эрмита  $H_{m-1}$ , должны возникать предельные кривые, отличные от  $\mathcal{T}_q^1$ , см. рис. 3.1.

Как и в общем случае, вид предельной кривой в транзитном режиме определяется главным членом разности полиномов Кравчука  $K_m(k - i, q, n - i) - K_m(k, q, n)$ , возникающей в качестве сомножителя в формуле (3.18). Однако для нахождения главного члена этой разности в транзитном режиме необходимо найти равномерное асимптотическое разложение полиномов Кравчу-

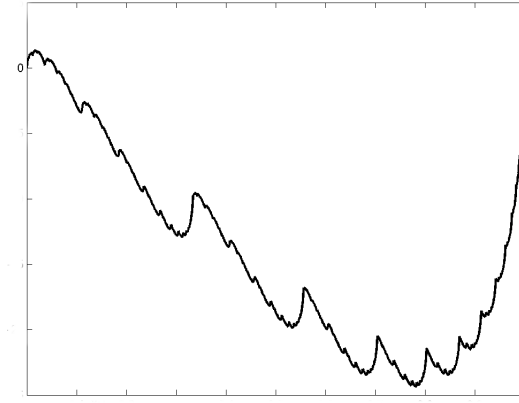


Рис. 3.1. Пример предельной кривой в транзитном режиме.

ка следующего порядка, что может быть сделано двумя способами:

1. Через уточненную локальную предельную теорему В. В. Петрова, что было сделано автором в работе [4]. Данный подход позволяет получить асимптотическое разложение полинома Кравчука  $K_m(k, q, n)$  через полиномы Эрмита  $\{H_j\}_{j \geq m}$ .
2. Через производящие функции, как было предложено Темме и Лопезом в работе [33] для произвольных гипергеометрических функций из схемы Аски, куда входят и полиномы Кравчука. Данный подход позволяет получить асимптотическое разложение полинома Кравчука  $K_m(k, q, n)$  через полиномы Эрмита  $\{H_j\}_{j \leq m}$ .

Независимо от выбранного подхода, в общем случае  $q \in (0, 1)$ , асимптотические выражения оказываются достаточно громоздкими, поэтому мы ограничимся в основном случае  $q = 1/2$ . Подход Темме и Лопеза приводит к следующему тождеству:

$$p_m(x) = \binom{n}{m} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -x, -m \\ -n \end{matrix}; \frac{1}{q} \right] = z^m \sum_{j=0}^m \frac{c_j H_{m-j}(\xi)}{z^j (m-j)!}, \quad (3.23)$$

где  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{nq-x}{\sqrt{q(nq-x)+x(1-q)}}$ ,  $c_0 = 1, c_1 = c_2 = 0$ , а коэффициенты  $c_j, j \geq 3$ , могут быть вычислены рекуррентно, в частности:  $c_3 = \frac{1}{3} \frac{nq^3 - 3q^2x + 3qx - x}{q^3}$ ,  $c_4 =$

$-\frac{1}{4} \frac{nq^4 - 4q^3x + 6q^2x^2 - 4qx + x}{q^4}$ . Тожждество имеет асимптотический смысл, что означает, что, если рассмотреть функцию  $\tilde{p}_m(\xi) = p_m(x)$ , то разность  $|\tilde{p}_m(\xi) - z^m \sum_{j=0}^r \frac{c_j}{z^j} \frac{H_{m-j}(\xi)}{(m-j)!}| = O(|n|^{r/3 + \frac{1}{2}(m-r) - r/2})$ , и оценка равномерна на компактах по  $\xi = O(1)$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, m$ . При  $r = 3$ , в случае  $q = 1/2$ , результат выглядит так:

$$p_m(x) = (-1)^m \left(\frac{n}{2}\right)^{m/2} \left(\frac{1}{m!} H_m(\xi) + \frac{4}{3} \xi \frac{1}{(m-3)!} H_{m-3}(\xi) \frac{1}{n}\right) + o(n^{(m-2)/2}).$$

Асимптотика приводит следующему асимптотическому разложению разности  $K_m(k-i, q, n-i) - K_m(k, q, n)$  полиномов Кравчука:

$$\frac{m(-1)^m}{(2n)^{m/2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} H_{m-1}(y) i + \frac{1}{n} \left( (m-1) H_{m-2}(y) i^2 + \left( \frac{1}{2} H_m(y) + y H_{m-1}(y) \right) i \right) + o(n^{-1}) \right),$$

где  $y = -\frac{\sqrt{2}(k_n - n/2)}{\sqrt{n}}$  и  $k_n - n/2 = O(\sqrt{n})$ . Так как корни полиномов Эрмита  $H_{m-1}$  и  $H_{m-2}$  чередуются, то, когда в транзитном режиме первый член  $\frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{n}} H_{m-1}(y_j^{m-1}) i$  приведенной асимптотики обнуляется, второй необходимо нет. Отсюда следует, что предельной функцией является линейная комбинация функций  $\mathcal{T}_{1/2}^1$  и  $\mathcal{T}_{1/2}^2$ . Группируя коэффициенты при  $i$  и  $2i(i-1)$ , возможно выписать точные веса этой линейной комбинации.

При  $q \neq 1/2$  можно получить аналогичное, хотя и более громоздкое (оно будет включать, в том числе, полином  $H_{m-3}$ ), асимптотическое выражение для разности  $K_m(k-i, q, n-i) - K_m(k, q, n)$ .

Используя первый подход, для произвольного параметра  $q \in (0, 1)$ , для случая  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{\sqrt{2npq}} = 0$  (ноль является корнем полиномов Эрмита  $H_{2l-1}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ) автор в работе [3] (см. следствие 2) вычислил асимптотику  $K_m(k-i, q, n-i) - K_m(k, q, n)$ ,  $m = 2l$ .

**Лемма 7.** Для всякой последовательности  $\varepsilon(n)$ , такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$ , равномерно по  $v$ , удовлетворяющему ограничению  $|v| \leq \varepsilon(n)n^{1/3}$ , для разности  $K_m(k-i, q, n-i) - K_m(k, q, n)$ ,  $m = 2l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , справедливы следу-



ющие асимптотические соотношения:  $c_{p,l,n}l(i^2 - \beta_{p,l,n,v}i) + o(n^{-l-1})$ , где  $c_{q,l,n} = \left(-\frac{p}{q}\right)^{l+1} \frac{(2l-1)!!}{n^{l+1}}$ ,  $\beta_{q,l,n,v} = \frac{1}{3p}(6v + 8l(q - 1/2) + q + 1)$ .

Если  $y^* = 0$  является корнем полинома Эрмита  $H_{m-1}$ , то главный член асимптотического выражения (3.19) обращается в ноль, а выражение  $c_{p,l,n}l(i^2 - \beta_{p,l,n,v}i)$ , полученное в лемме 7, соответствует второму члену асимптотического разложения. Так как  $\mathcal{T}_q^1(q^i) = iq^{i-1}$ ,  $\mathcal{T}_q^2(q^i) = i(i-1)q^{i-2}$ , мы видим, что в этом случае предельная функция (с точностью до нормировки) является взвешенной суммой  $\mathcal{T}_q^2 + \alpha_{q,l,n,v}\mathcal{T}_q^1$ ,  $\alpha_{q,l,n,v} = \beta_{q,l,n,v} - 1$ , функций  $\mathcal{T}_q^1$  и  $\mathcal{T}_q^2$ . Причем при  $|v| \rightarrow \infty$  коэффициент  $|\alpha_{q,l,n,v}|$  стремится к бесконечности, и предельной функцией оказывается  $\pm\mathcal{T}_q^1$ , а знак определяется знаком аргумента  $v$  и четностью индекса  $m$ .

### 3.4. Свойства самоподобия функций $\mathcal{T}_q^k$ , $k \geq 1$ .

Опишем свойства самоподобия функций  $\mathcal{T}_q^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $q \in (0, 1)$ , обобщающие случай  $q = \frac{1}{2}$ , рассматривавшийся в работе [27]. Функции  $\mathcal{T}_q^k$ ,  $k > 1$ , разделяют некоторые свойства функции Такаги  $\frac{1}{2}\mathcal{T}_{1/2}^1$ . Например, см. статью [26], они являются нигде не дифференцируемыми функциями.

**Теорема 10.** Для всякого  $k \geq 1$ , для всякой  $q$ -стационарной точки  $x_0 = \sum_{j=1}^{l_0} \omega_j(x_0)q^j \left(\frac{1-q}{q}\right)^{s_{j-1}(x_0)}$  и произвольного  $x \in [0, 1]$  функция  $\mathcal{T}_q^k$  удовлетворяет функциональному соотношению

$$\mathcal{T}_q^k(x_0 + q^{l_0} \left(\frac{1-q}{q}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)} x) = \mathcal{T}_q^k(x_0) + \sum_{\mu=0}^k c_\mu \mathcal{T}_q^\mu(x), \quad (3.24)$$

где коэффициенты  $c_\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq k$ , вычисляются по формуле

$$c_\mu = \binom{k}{\mu} \frac{\partial^{k-\mu}}{\partial q^{k-\mu}} q^{l_0} \left(\frac{1-q}{q}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)} \quad (3.25)$$

и  $\mathcal{T}_q^0(x) \equiv x$ .

*Доказательство.* Выражение (2.16), в котором  $q_1$  заменено на  $a$ , а  $q_2$  на  $b$ , для диадического случая принимает следующий вид:

$$S_{a,b}(x_0 + a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}(x_0)} x) = S_{a,b}(x_0) + b^{l_0} \left(\frac{1-b}{b}\right)^{s_{l_0}(x_0)} S_{a,b}(x). \quad (3.26)$$

Дифференцируем (3.26) по  $b$  и, полагая  $b$  равным  $a$ , получаем:

$$\mathcal{T}_a^k(x_0 + rx) = \mathcal{T}_a^k(x_0) + \sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} \mathcal{T}_a^\mu(x) \frac{\partial^{k-\mu}}{\partial a^{k-\mu}} a^{l_0-1-s_{l_0-1}} (1-a)^{1+s_{l_0-1}},$$

где  $r = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)}$ . □

Формула (3.24) означает, что функция  $\mathcal{T}_q^k(x)$  на обобщенном диадическом интервале  $[x_0, x_0 + \alpha_0]$ ,  $\alpha_0 = q^{l_0} \left(\frac{1-q}{q}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)}$ , выражается через линейную комбинацию функций  $\{\mathcal{T}_q^j(x)\}_{j=1}^k$  и линейной функции  $c_0x$ , которую естественно назвать трендом<sup>3</sup>. Например, при  $k = 1$  на  $q$ -диадическом интервале функция  $\mathcal{T}_q^1(x)$  с точностью до константы, тренда и нормировки совпадает с собой же. Для функции  $\mathcal{T}_q^2(x)$  это не так: необходимо привлекать линейные комбинации вида  $\gamma \mathcal{T}_q^1(x) + \mathcal{T}_q^2(x)$ . Возникает естественный вопрос: верно ли, что всякий график линейной комбинации  $\alpha \mathcal{T}_q^1(x) + \beta \mathcal{T}_q^2(x)$  является участком (с точностью до нормировки и тренда) графика  $\mathcal{T}_q^2(x)$ ? На этот вопрос отвечает предложение 9, полученное автором в работе [3]. Для функции  $\psi \in C[0, 1]$  определим новую функцию  $\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c} \in C[0, 1]$  равенством

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c}(x) = \frac{1}{c} (\psi(x_0 + \alpha_0 x) - \psi(x_0) - x\psi(x_0 + \alpha_0)). \quad (3.27)$$

График функции  $\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c}$  получается из графика функции  $\psi(x)$  сужением на  $q$ -диадический интервал  $[x_0, x_0 + \alpha_0]$ , вычитанием линейного тренда и нормировкой на, заключающейся в умножении на  $\alpha_0$  и  $1/c$  по, соответственно, горизонтальной и вертикальным осям.

<sup>3</sup> Ввиду того, что  $\mathcal{T}_q^k(0) = \mathcal{T}_q^k(1) = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

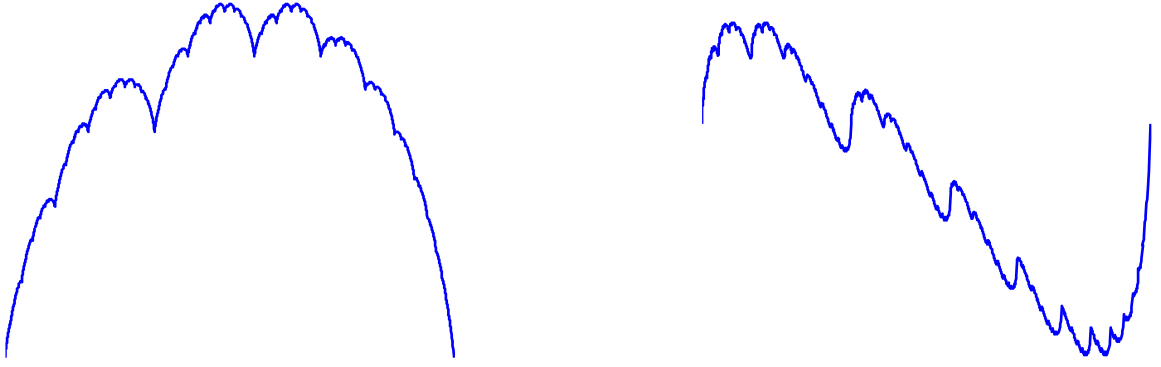


Рис. 3.2. Графики функций  $\mathcal{T}_{1/3}^1$  (слева) и  $\mathcal{T}_{1/3}^2$  (справа).

Следующее утверждение доказано в работе автора [3]:

**Предложение 9.** Пусть  $q \in (0, 1)$ . Всякую линейную комбинацию вида  $\alpha \mathcal{T}_q^1(x) + \beta \mathcal{T}_q^2(x)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , можно представить как предел в  $C[0, 1]$   $\lim_{x_k \rightarrow z} \beta \Lambda_{x_k, c_k}^{\mathcal{T}_q^2, c_k}$  для некоторой сходящейся последовательности  $q$ -стационарных чисел  $x_k$  и  $c_k = q^{l_0(x_k)} \left(\frac{1-q}{q}\right)^{s_{l_0(x_k)}}$  тогда и только тогда, когда параметр  $q$  – иррациональное число.

*Доказательство.* Положим  $\gamma$  равным  $\frac{\alpha}{\beta}$ . Согласно теореме 10, функция  $\Lambda_{x_k, c_k}^{\mathcal{T}_q^2, c_k}$ , где  $c_k = q^{l_0(x_k)} \left(\frac{1-q}{q}\right)^{s_{l_0(x_k)}}$ , равна  $\gamma(k) \mathcal{T}_q^1(x) + \mathcal{T}_q^2(x)$ , где  $\gamma(k) = -\frac{2(s_{l_0(x_k)} - l_0(x_k)(1-q))}{q(1-q)}$  для всякого  $q$ -рационального  $x_k$ . В силу того, что  $q \in (0, 1)$ , а траектории поворота окружности на иррациональный угол плотны, выражение вида  $i - (1 - q)j$ , где  $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , позволяет приблизить произвольное  $z \in \mathbb{R}$ . Поэтому мы можем выбрать  $x_k$  таким образом, чтобы  $\gamma(k)$  стремилось по  $k$  к  $\gamma$ . Сходимость  $\Lambda_{x_k}^{\mathcal{T}_q^2, c_k}(x)$ , очевидно, равномерна.  $\square$

### 3.5. Некоторые приложения полученных результатов к теории булевых функций, комбинаторике и теории чисел.

**Теоретико-числовая интерпретация.** В теории чисел известной задачей является поиск явной формулы для суммы

$$S_g(N) = \sum_{n=0}^{N-1} g(\mathbf{s}_2(n))$$

при заданной функции  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . В классическом случае, когда  $g(y) \equiv y$ , ответ представляется формулой Троллопа-Деланжа, см. работу [34]. В современных работах [27] и [35] рассмотрены случаи  $g(y) = \binom{y}{m}, m > 0, g(y) = y^m$  и даже  $g(y, t) = \exp(ty)$ . Оказывается, что  $S_g(N)$  в каждом из этих случаев имеет явное выражение, ключевой частью которого являются линейные комбинации функций  $\mathcal{T}_q^k, k \geq 1, 0 < q < 1$ .

Графики линейной комбинации  $\mathcal{T}_q^1$  и  $\mathcal{T}_q^2$  возникают как предельные кривые автоморфизма Паскаля. Отметим, что так как башню  $\tau_{n,k}$  автоморфизма Паскаля можно рассматривать как набор натуральных чисел  $\{j : \mathbf{s}_2(j) = k\}$  (см., например, [1]), упорядоченных по возрастанию, то изучаемые нами частичные суммы  $F_{n,k}^g$  равны «условным суммам»:

$$\sum_{0 \leq j < 2^n, \mathbf{s}_2(j)=k} g(j),$$

где функция  $g$  зависит от конечного числа младших разрядов в диадической записи натурального  $j$ .

Функции Уолша используют в качестве удобного ортогонального базиса в теории булевых функций. Через  $I_n$  обозначим множество вершин единичного куба  $\{0, 1\}^n$ . Пусть  $B_n$  – множество булевых функций  $f : I_n \rightarrow \{0, 1\}$ , а  $\mathcal{S}_n$  – множество симметричных булевых функций от  $n$  переменных, т.е. таких функций  $f(\bar{x}), \bar{x} = (x_1, x_2 \dots x_n) \in I_n$ , которые принимают одно и то же

значение на всех векторах  $\bar{x}$  постоянного веса  $\|\bar{x}\| = s_2(x)$ . Спектром Уолша<sup>4</sup> функции  $f \in B_n$  называется вектор  $(c_t^f)_{t=0}^{2^n-1}$  коэффициентов Фурье по системе Уолша  $\{w_t\}_{t=0}^{2^n-1}$  в пространстве  $L^2(\{0, 1\}^n, \mu_{1/2})$  с равномерной мерой  $\mu_{1/2}$ :

$$c_t^f = \sum_{x \in I_n} f(x) w_t(x).$$

Симметричная функция  $f \in \mathcal{S}_n$  полностью определяется двоичным вектором  $\bar{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ , где  $f_k = f(x)$  при  $\|x\| = k, k = 0, 1, \dots, n$ . Спектр Уолша симметричной функции, лежащей в пространстве  $L^2(\{0, 1\}^n, \mu_{1/2})$ , может быть выражен через симметричные многочлены Кравчука:

$$c_t^f = \sum_{k=0}^n f_k \sum_{j: s_2(j)=k} w_j = \sum_{k=0}^n (-1)^m \binom{n}{k} K_m(k, 1/2, n) \cdot f_k, \quad (3.28)$$

где  $m = \mathbf{s}_2(t)$ .

Если вместо пространства  $L^2(\{0, 1\}^n, \mu_{1/2})$  рассмотреть пространства  $L^2(\{0, 1\}^n, \mu_q)$ ,  $q \in (0, 1)$ , с метрикой, заданной мерой Бернулли  $\mu_q$ , то аналогом базиса Уолша окажется ортонормированный базис  $\{w_t^q / \|w_t^q\|_2\}_{t=0}^{2^n-1}$ , заданный выражением (3.2). Из соотношения (3.13) следует, что спектр Уолша  $(\tilde{c}_t^f)_{t=0}^{2^n-1}$  симметричной функции  $f \in \mathcal{S}_n$  по системе  $\{w_t^q / \|w_t^q\|_2\}_{t=0}^{2^n-1}$  может быть выражен через многочлены Кравчука  $K_m(k, q, n)$  следующим образом:

$$\tilde{c}_t^f = \sum_{k=0}^n \frac{(-2q)^m}{1 - (2q - 1)^{2m}} \binom{n}{k} K_m(k, q, n) \cdot f_k, \quad m = \mathbf{s}_2(t). \quad (3.29)$$

Лексикографический порядок, на котором основан автоморфизм Паскаля, напрямую связан с комбинаторными теоремами Маколея и Крускала-Катона. Обозначим через  $U$  множество  $\{1, 2, \dots, n\}$ ; подмножества

---

<sup>4</sup> На практике для функций Уолша часто используют нумерацию Адамара, вместо нумерации Уолша-Пэли, используемой в этой работе.

множества  $U$  удобно отождествлять с векторами из  $\{0, 1\}^n$ . Пусть  $A \subset \{0, 1\}^n$  – некоторое семейство векторов (подмножеств  $U$ ). *Тенью*  $\partial A$  семейства  $A$  называется множество всех векторов, получаемых из векторов множества  $A$  заменой одной из единиц на ноль. Предположим, что семейство векторов  $A$  является  $k_1$ -регулярным, что значит, что каждый вектор семейства состоит в точности из  $k_1$  единиц и, соответственно,  $k = n - k_1$  нулей.

Естественным вопросом является вопрос об устройстве  $m$ -элементного семейства  $A$  с наименьшей тенью.

Теорема Маколея [36] утверждает, что  $m$ -элементное семейство  $A^*$  векторов с наименьшей тенью представляет собой первые  $m$  векторов сечения куба  $\{0, 1\}^n$  по векторам с  $k_1$  единицами, упорядоченного в лексикографическом<sup>5</sup> порядке, а в теореме Крускала-Катона [37, 38] найдена формула для вычисления мощности тени семейства  $A^*$ . Другими словами, семейством  $A^*$  являются первые  $m$  путей длины  $n$  из башни  $\tau_{n,k}$  автоморфизма Паскаля. Используя введенные выше обозначения, теорему Крускала-Катона можно записать как неравенство (которое достигается на множестве  $A^*$ )

$$|\partial A| \geq \partial_{k_1}^{0,1} A,$$

где через  $|\cdot|$  обозначена мощность множества, а функция  $\partial_k^{N,j}(\cdot)$  была задана выше соотношением (3.10).

В работе [39] изучались графики функций  $K_{k_1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , заданных равенством  $K_{k_1}(t) = \partial_{k_1}^{0,1}(t) - t$  при  $t \in [1, \binom{2k_1-1}{k_1}]$ . Авторами работы [39] было показано, что после нормировки графики сходятся к кривой Такаги  $2\mathcal{T}_{1/2}^1$ . Существует явное выражение функции  $K_{k_1}$ , изучавшейся в [39], через частичные суммы  $F_{2k,k}^{w_1^{1/2}}$ ,  $k = n - k_1$ , для функции Радемахера  $w_1^{1/2} = r_1$ , которое имеет

---

<sup>5</sup> Отмечу, что в литературе порядок, который в данной работе нами называется лексикографическим, часто называют *колексикографическим*, так как левый (первый) разряд вектора  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  является младшим.

вид

$$\partial_{k_1-m}^{0,1}(t) - t = F_{2k,k+m}(\partial_{k_1-m}^{0,1}(t) + t).$$

В частности, приведенное тождество позволяет получить обобщение результата (теорема 4 в работе [39]), допускающее более слабые ограничения на возможные значения аргумента  $t$  функции  $K_{k_1}$ :

**Теорема** (Утверждение 1 из работы [2]) Пусть  $q \in (0, 1)$ . Для любой последовательности  $\kappa(k)$ , такой, что  $\frac{\kappa(k)}{2k} \rightarrow q$  и при всяком  $k$ ,  $|\kappa(k)| < 2k$ , выполнено:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| S_{k,\kappa}(x) - \mathcal{T}_{1-q}(x) \right| = 0,$$

где  $S_{k,\kappa}(x) = \frac{K_\kappa \left( \left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{\kappa} \right\rfloor \right) - x \cdot K_\kappa \left( \binom{2k-1}{\kappa} \right)}{R_{k,\kappa}}$ , а нормирующий коэффициент  $R_{k,\kappa}$  равен  $\frac{\binom{2k-1}{\kappa}}{2qk+1} \left( 4(1-q)^2 - (1-2q)(1+2k(q-1)^2) \right)$ .

## Заключение

В работе применен новый подход к задаче об отклонениях эргодических средних вдоль траектории – изучение непрерывных предельных мостов. Дано необходимое условие существования непрерывный предельных мостов для эргодических автоморфизмов. Для класса полиномиальных самоподобных автоморфизмов показано, что найденное условие является достаточным. Для автоморфизма Паскаля, который являлся первым модельным примером и анализ траекторий которого являлся мотивацией при определении понятия предельных мостов, доказана гипотеза Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Веленика о появлении в качестве предельной кривой обобщенной кривой Такаги для цилиндрических функций.

## Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, Андрею Александровичу Лодкину, за помощь в работе и поддержку во всех трудных ситуациях и Анатолию Моисеевичу Вершику за постановку задач, многочисленные полезные обсуждения, комментарии и советы.



## Приложение А

### Список основных обозначений.

- $B = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  — диаграмма Браттели.  
 $L(n) + 1$  — количество вершин на уровне  $n$  диаграммы  $B$ .  
 $X = X(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  — множество путей (последовательностей ребер) на диаграмме Браттели  $B$ .  
 $(n, k)$  —  $k$ -ая вершина уровня  $n$  в нумерации слева-направо,  $0 \leq k \leq L(n)$ .  
 $\pi_{n,k}$  — множество конечных путей из вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(n, k)$ , упорядоченных в лексикографическом порядке.  
 $\dim(n, k)$  — размерность вершины  $(n, k)$ ,  $0 \leq k \leq L(n)$ .  
 $\leq_{n,k}$  — линейный порядок на ребрах, входящих в вершину  $(n, k)$ .  
 $\preceq$  — соответствующий порядку  $\leq_{n,k}$  частичный порядок на  $X$ .  
 $X_{\max}, X_{\min}$  — подмножества  $X$ , соответственно, максимальных и минимальных путей.  
 $\tau_{n,k}$  — башня, соответствующая вершине  $(n, k)$ .  
 $H_{n,k}$  — высота башни  $\tau_{n,k}$ ,  $H_{n,k} = \dim(n, k)$ .  
 $\tau_{n,k}(j)$  — цилиндр, соответствующий этажу  $j$  башни  $\tau_{n,k}$ ,  $1 \leq j \leq H_{n,k}$ .  
 $k_n(\omega)$  — номер вершины уровня  $n$ , через которую проходит путь  $\omega$ .  
 $\mathcal{F}_N$  — пространство цилиндрических функций ранга  $N$ .  
 $\text{Num}(\omega)$  — номер конечного пути  $\omega \in \pi_{n,k}$  в лексикографическом порядке.)  
 $F_{n,k}^f$  — линейно-интерполированные частичные суммы  $S_x^f$ ,  $x \in \tau_n^k(1)$ , цилиндрической функции  $f$ .

## Список публикаций

1. Лодкин А. А., Минабутдинов А. Р., Манаев И. Е. Реализация автоморфизма Паскаля в графе конкатенаций и функция  $s_2(n)$  // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2012. Т. 403. С. 95–102.
2. Минабутдинов А. Р., Манаев И. Е. Функция Крускала–Катоны, последовательность Конвея, кривая Такаги и автоморфизм Паскаля // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2013. Т. 411. С. 135–147.
3. Минабутдинов А. Р. Случайные отклонения эргодических сумм в автоморфизме Паскаля для меры Лебега // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 432. С. 224–260.
4. Минабутдинов А. Р. Асимптотическое разложение полиномов Кравчука // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 436. С. 174–189.
5. Лодкин А. А., Минабутдинов А. Р. Предельные кривые для автоморфизма Паскаля // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 437. С. 145–183.
6. Минабутдинов А. Р. Теорема существования предельных кривых для полиномиальных адических автоморфизмов // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 448. С. 177–200.

## Цитированная литература

7. Вершик, А.М. Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 72–82.
8. Mela X., Petersen K. Dynamical properties of the Pascal adic transformation // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2003. Vol. 25. P. 227–256.

9. Janvresse É., de la Rue T. The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli // *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*. 2004. Vol. 40, no. 2. P. 133–139.
10. Вершик, А.М. Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр // *Функц. анализ и его прил.* 2011. Т. 45, № 3. С. 16–33.
11. Vershik, A.M. Several remarks on Pascal automorphism and infinite ergodic theory // *Armenian Journal of Mathematics*. 2015. Т. 7, № 2. С. 85–96.
12. Janvresse É., de la Rue T., Velenik Y. Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation // *Stoch. Dyn.* 2005. Vol. 5, no. 1. P. 1–25.
13. Takagi T. A simple example of the continuous function without derivative // *Proc. Phys.-Math. Soc.* 1903. Vol. 5–6. P. 176–177.
14. Вершик, А.М. Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения // *ДАН СССР*. 1981. Т. 259, № 3. С. 526–529.
15. Lodkin A. A., Vershik A. M. Approximation for actions of amenable groups and transversal automorphisms // *Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory: Proceedings of the OATE Conference held in Buşteni, Romania, Aug. 29 – Sept. 9, 1983*. 1985. P. 331–346.
16. Vershik, A. M., Livshits, A. N. Adic models of ergodic transformations, spectral theory, and related topics // *Adv. in Soviet Math. AMS Transl.* 1992. Vol. 9. P. 185–204.
17. Вершик, А.М. Задача о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов // *Функц. анализ и его прил.* 2014. Vol. 48, no. 4. P. 26–46.

18. Herman R., Putnam I., Skau C. Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics // *Internat. J. Math.* 1992. Vol. 3, no. 6. P. 827–864.
19. Méla X. A class of nonstationary adic transformations // *Ann. Inst. H. Poincaré Prob. and Stat.* 2006. Vol. 42, no. 1. P. 103–123.
20. Bailey (Frick) S. Dynamical properties of some non-stationary, non-simple Bratteli-Vershik systems // Ph.D. thesis, University of North Carolina, Chapel Hill. 2006.
21. Рохлин В. А. Избранные вопросы метрической теории динамических систем // *УМН.* 1949. Т. 4. С. 57–128.
22. Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // *УМН.* Vol. 51. P. 73–124.
23. Kakutani S. A problem of equidistribution on the unit interval  $[0, 1]$  // *Measure Theory.* Springer, Berlin, 1976. Vol. 541. P. 369–375.
24. Odlyzko A., Richmond L. On the Unimodality of High Convolutions of Discrete Distributions // *Ann. Probab.* 1985. — 02. Vol. 13, no. 1. P. 299–306.
25. Hata M., Yamaguti M. The Takagi function and its generalization // *Japan J. Appl. Math.* 1984. Vol. 1, no 1. P. 183–199.
26. de Amo E., Diaz Carrillo M., Fernandez-Sanchez J. Singular functions with applications to fractal dimensions and generalized Takagi functions // *Acta Applicandae Mathematicae.* 2012. Vol. 119, no 1. P. 129–148.
27. Krüppel M. De Rham’s singular function, its partial derivatives with respect to the parameter and binary digital sums // *Rostocker Math. Kolloq.* 2009. Vol. 64. P. 57–74.

28. Allaart P., Kawamura K. The Takagi function: a survey // *Real Anal. Exch.* 2012. Vol. 37, no 1. P. 1–54.
29. Okada T., Sekiguchi T., Shiota Y. A generalization of Hata-Yamaguti's results on the Takagi function II: Multinomial case // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.* 1996. Vol. 13, no. 3. P. 435–463.
30. Kummer E. Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen. // *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1852. Vol. 44. P. 93–146.
31. Jukna S. *Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science.* 1st edition. Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.
32. Szegő G. *Orthogonal Polynomials.* Iss. American Mathematical Society colloquium publications, no. т. 23. American Mathematical Society, 1959.
33. Temme N., Lopez J. The Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials viewed from asymptotic analysis // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2001. Vol. 133, no. 1–2. P. 623–633. 5th Int. Symp. on Orthogonal Polynomials, Special Functions and their Applications.
34. Trollope E. An explicit expression for binary digital sums // *Mat. Mag.* 1968. Vol. 41. P. 21–25.
35. Girgensohn R. Digital Sums and Functional Equations // *Integers.* 2012. Vol. 12, no 1. P. 141–160.
36. Macaulay F. Some properties of enumeration in theory of modular systems // *Proc. London Math. Soc.* 1927. Vol. 26. P. 531–555.
37. Kruskal J. The optimal number of simplices in a complex // *Math. Opt. Techniques.* Univ. California Press, Berkeley, 1963. P. 251–278.

38. Katona G. A theorem of finite sets // Theory of Graphs. Akadémia Kiady, Budapest, 1968. P. 187–207.
39. Frankl P., Matsumoto M., Ruzsa I., Tokushige N. Minimum shadows in uniform hypergraphs and a generalization of the Takagi function // Journal of Combinatorial Theory, Series A. 1995. Vol. 69, no. 1. P. 125–148.