Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Целищев Антон Сергеевич

Два сюжета из гармонического анализа: квадратичные функции и задача об изоморфизме

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., академик РАН Кисляков С.В.

Санкт–Петербург — 2021

Оглавление

Глава 1

Введение

Две темы, упомянутые в заглавии диссертации, на первый взгляд, разнородны. Однако их роднит существенное использование идей и методов современного гармонического анализа, в особенности теории сингулярных интегральных операторов и родственной теории мартингальных преобразований, неважно, используются ли они непосредственно в наших построениях или лежат в основе обсуждаемых структур и соотношений между ними.

Первая тема связана с теорией Литтлвуда–Пэли, под которой в широком смысле понимают целую серию утверждений об эквивалентности L^p-нормы функции L^p-норме некоторой ассоциированной с ней функции со значениями в подходящем гильбертовом пространстве (некоторые начальные аспекты теории Литтвуда–Пэли можно найти, например, в [25, глава 6] и [43, глава 8]). Мы рассмотрим две задачи, относящиеся к этой теории. Одна касается классического (тригонометрического) анализа Фурье, речь в ней идёт об описании пространства функций ограниченной средней осцилляции в терминах квадратичных выражений, связанных с мультипликаторами Фурье из классической теоремы Михлина–Хёрмандера. Другая задача касается нетригонометрического анализа Фурье, в ней речь идёт об аналогах теоремы Рубио де Франсиа (иными словами, так называемого неравенства Литтлвуда–Пэли для произвольных интервалов) для ортогональных систем Виленкина. Отметим, что теорема Хёрмандера–Михлина и теорема Рубио де Франсиа основаны на классической теории сингулярных интегралов, а в наших обобщениях второй из этих теорем будут использованы мартингальные преобразования.

Вторая тема из заглавия относится к одному варианту общей задачи о том, какие из классических функциональных пространств одинаковы (изоморфны), а какие — различны. В недавней работе [35] был достигнут очень значительный прогресс в этом ключе для пространств гладких функций от нескольких переменных с “sup”-нормой, порождённых произвольными наборами дифференциальных выражений с постоянными коэффициентами. А именно, была доказана некая естественная гипотеза об отсутствии изоморфизма таких пространств пространствам вида $C(K)$. Мы докажем здесь, что во всех таких случаях эти пространства гладких функций очень далеки даже от всех банаховых решёток. Соображения из гармонического анализа очень существенно использовались и в упомянутой работе [35]. Усиление, рассмотренное в диссертации, удалось получить путём введения в игру дополнительного аппарата — теории сингулярных интегральных операторов со смешанной однородностью.

По главам этот материал распределён следующим образом.

Первая часть, то есть вторая глава, посвящена описанию пространства BMO при помощи проекторов Литтлвуда–Пэли. Отличие от классической ситуации состоит в том, что мы рассматриваем произвольный набор функций, на которые наложены некоторые естественные условия, вместо растяжений одной гладкой функции.

Третья глава посвящена доказательству неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа в контексте, отличающемся от традиционного, а именно, для систем Виленкина.

В четвёртой главе мы обращаемся к изучению неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для системы Уолша для функций со значениями в банаховых пространствах. Мы доказываем неравенство для нетривиального класса банаховых решёток, а также исследуем некоторые простые свойства пространств, для которых выполняется это неравенство.

Наконец, в пятой главе мы изучаем свойства некоторых банаховых пространств гладких функций на торе. Полученные результаты обобщают несколько уже известных теорем о том, что такие пространства невозможно дополняемо вложить в пространство непрерывных функций на компакте $C(K)$.

Актуальность. В диссертационной работе исследуются различные вопросы, связанные с теорией Литтлвуда–Пэли. Описание функциональных пространств в терминах проекторов Литтлвуда–Пэли — важное направление в современном гармоническом анализе, см., например, работы [21, 28, 37], и результаты второй главы диссертации являются частью этого направления.

Кроме того, в третьей и четвёртой главе мы доказываем некоторые аналоги неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа. После того, как доказательство этого неравенства в исходном виде впервые было опубликовано в статье [50], работа в этом направлении велась многими математиками, в том числе Ж. Бургейном, С. В. Кисляковым, М. Лэйси, Н. Осиповым — см. работы [20, 11, 39, 44]. Также отметим, что в этих главах доказываются неравенства, связанные с разложением функции по системе Уолша и по общим системам Виленкина — ортогональным системам, играющим большую роль в нетригонометрическом анализе Фурье. Среди прочих, отметим работы [53, 52, 56, 44], посвящённые в том числе подобного рода вопросам.

В пятой главе мы обращаемся к исследованию некоторых линейно-топологических свойств банаховых пространств гладких функций на торе. Эта тема активно изучалась в последней трети XX века, однако, многие относящиеся к ней задачи не решены до сих пор. Процитируем лишь некоторые работы, посвящённые этому направлению: [27, 15, 8, 34, 38, 14, 46, 12, 9, 10, 13].

Методы. В настоящей диссертации используются различные методы современного гармонического анализа. Прежде всего, это методы теории сингулярных интегральных операторов, а также мартингальных преобразований. Кроме того, в последней главе используются также различные методы современной теории банаховых пространств — такие, как применение теоремы Гротендика.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации — новые.

Теоретическая и практическая значимость. Все полученные результаты носят теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при решении различных задач функционального и гармонического анализа, например, в различных вопросах гармонического анализа на группах Уолша и Виленкина, при описании функциональных пространств в духе теории Литтлвуда–Пэли, а также в исследовании свойств банаховых пространств гладких функций.

Степень достоверности, публикации и апробация результатов. Все полученные в этой диссертационной работе результаты являются математически достоверными фактами. Материалы диссертации опубликованы в статьях [TV1, T1, T2, T3] в рецензируемых журналах, которые входят в список ВАК. Также результаты были доложены на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций ПОМИ РАН, на семинаре по функциональному анализу института математики Польской академии наук и на Конференции международных математических центров мирового уровня в Сочи.

Далее мы введём некоторые основные обозначения, которыми будем пользоваться в диссертации.

1.1 Основные определения и обозначения

Мы будем широко использовать обозначение “$\lesssim$”. Для неотрицательных величин A и B запись $A \lesssim B$ означает, что выполняется неравенство $A \leqslant CB$ для некоторой положительной константы C. Из контекста всегда будет понятно, от каких параметров эта константа может зависеть, а от каких — нет (или это будет явно указано). Кроме того, запись $A \asymp B$ означает, что $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$.

Зафиксируем следующую нормировку преобразования Фурье функции f, заданной на $\mathbb{R}^d$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx.$$

Везде, где не сказано обратное, мы будем подразумевать именно такую нормировку. В том числе, для коэффициентов Фурье функции, заданной на торе, мы также будем использовать такую нормировку:

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-2\pi i n\cdot x} dx,$$

где $n \in \mathbb{Z}^d$.

В настоящей диссертации пойдёт речь о различных функциональных пространствах, прежде всего — о пространствах L^p. Чаще всего из контекста будет ясно, на каком множестве заданы встречающиеся функции, поэтому мы не будем указывать это явно в обозначениях (исключение составляет лишь глава 5). Однако, иногда нам понадобятся пространства функций, действующих в некоторое банахово пространство X — так называемые пространства Бохнера, которые мы будем обозначать символом $L^p(X)$. Отметим, что подробная информация об этих пространствах содержится в книге [29]. В частности, например, через $L^p(\ell^2)$ в главе 3 будет обозначено пространство ℓ^2-значных функций f, заданных на отрезке $[0,1]$, таких, что $\|f(\cdot)\|_{\ell^2} \in L^p$.

Кроме пространств L^p, в диссертации также пойдёт речь о пространстве BMO. Это пространство задаётся полунормой

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^p dx\Big)^{1/p},$$

где супремум берётся по всем кубам Q со сторонами, параллельными осям координат, а f_Q — среднее функции f по кубу Q. Отметим, что это определение не зависит от выбора числа $p \geqslant 1$ — это следует из классического неравенства Джона–Ниренберга (см., например, [43, стр. 185]).

Для всякого числа p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, символом p' мы будем обозначать сопряжённый показатель: $p' = \frac{p}{p-1}$.

Мы также будем использовать обозначение $\mathbb{N}_0$ для множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Результаты четвёртой главы диссертации касаются банаховых пространств (и решёток), обладающих свойством UMD. Это ключевое свойство для многих вопросов анализа в банаховых пространствах (см. книги [29, 30, 48]), поэтому приведём здесь его определение. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством UMD, если для всякого конечного мартингала $f = (f_n)_{n=0}^N$ со значениями в X, лежащего в $L^p(X)$, и всякого набора чисел (ε_n), где $|\varepsilon_n| = 1$, верно неравенство

$$\Big\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n df_n\Big\|_{L^p(X)} \leqslant C_p \Big\|\sum_{n=1}^N df_n\Big\|_{L^p(X)}.$$

Это определение не зависит от выбора параметра p, $1 < p < \infty$. Все необходимые нам факты, связанные с этим свойством, будут определены в соответствующих местах четвёртой главы.

Далее мы приведём формулировки основных результатов настоящей работы, а также некоторые основные определения. Все доказательства излагаются в четырёх последующих главах.

1.2 Описание пространства BMO

Вторая глава диссертации посвящена описанию пространства BMO при помощи разложения Литтлвуда–Пэли. Коротко опишем историю этого вопроса.

В работе С. В. Бочкарёва [1] доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\{V_n\}$ — ядра Валле-Пуссена на окружности, $Q_0 = 1$, $Q_n = V_{2^n} - V_{2^{n-1}}$ при $n \geqslant 1$. Для $f \in L^1$ положим*

$$\|f\|_D = \sup_I \Big(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{2^{-n} \leqslant |I|} \Big| \int_0^1 f(t) Q_n(x-t) dt \Big|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Тогда эта норма эквивалентна величине $\|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

Напомним, что ядра Валле-Пуссена определяются формулой

$$V_n(x) = (1 + e^{2\pi i n x} + e^{-2\pi i n x}) K_n(x),$$

где K_n — ядра Фейера на окружности.

Отметим, что большая эффективность этой теоремы в различных тонких вопросах теории тригонометрических рядов была продемонстрирована С. В. Бочкарёвым в работе [2].

В связи с появлением приведённой выше теоремы, естественно возникает вопрос — нельзя ли заменить операторы свёртки с тригонометрическими полиномами Q_n, определёнными выше, на некоторые более общие мультипликаторы Фурье? Ответ на этот вопрос был получен автором настоящей диссертации совместно с И. Васильевым в работе [TV1] — основной результат этой работы обобщает результат более ранней статьи [3]. Приведём здесь его формулировку.

Теорема 1. *Пусть $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — набор равномерно ограниченных функций на $\mathbb{R}^d$, имеющих все обобщённые производные в смысле Соболева порядков не выше $a = [d/2]+1$. Наложим на эти функции следующие условия:*

1) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n(x) \equiv 1$ *для всех* $x \neq 0$;

2) $\operatorname{supp} \psi_n \subset \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \leqslant |x| \leqslant 2^{n+1}\}$;

3) $(2^{-nd} \int |D^\alpha \psi_n(\xi)|^2 d\xi)^{1/2} \leqslant K 2^{-n|\alpha|}$ *для* $0 \leqslant |\alpha| \leqslant a$.

Здесь K — константа, которая не зависит от n. Определим оператор $\widehat{\Delta_n f} := \psi_n \hat{f}$ и норму

$$\|f\|_D := \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Здесь рассматривается супремум по всем кубам Q (с гранями, параллельными координатным плоскостям), а через $l(Q)$ обозначена длина ребра Q.

Тогда для всякой интегрируемой функции f выполняются неравенства $C_1\|f\|_D \leqslant \|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C_2\|f\|_D$, где C_1 и C_2 — некоторые положительные константы.

Приведённая теорема сформулирована для функций на $\mathbb{R}^d$, однако аналогичное утверждение верно и для функций на $\mathbb{T}^d$, и для $d = 1$ оно действительно является обобщением теоремы о ядрах Валле-Пуссена. Отметим, что накладываемые здесь условия на набор функций $\{\psi_n\}$ аналогичны условиям из теоремы Хёрмандера–Михлина о мультипликаторах (формулировку которой можно найти, например, в книге [23]), и, кроме того, теорему 1 можно рассматривать в духе различных теорем о “векторнозначных мультипликаторах” (см., например, работу [45]).

Основными методами, используемыми при доказательстве теоремы 1, являются методы теории сингулярных интегральных операторов. Как уже отмечалось, теорема 1 новая и опубликована в совместной с И. Васильевым работе [TV1].

1.3 Неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для систем Виленкина

Третья глава диссертации посвящена доказательству неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для систем Виленкина. Здесь мы приведём необходимые определения и сформулируем основную теорему, доказательство которой будет изложено в третьей главе.

Пусть $\{I_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — набор попарно не пересекающихся отрезков в $\mathbb{Z}$, а f — функция, заданная на $\mathbb{T}$. Через P_j обозначим оператор, определяемый соотношением $(P_j f)\hat{} = \chi_{I_j}\hat{f}$, где $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f (то есть попросту последовательность коэффициентов Фурье). В своей работе [50] Рубио де Франсиа доказал, что при $p \geqslant 2$

выполняется следующее неравенство:

$$\Big\|\Big(\sum_j |P_j f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \lesssim \|f\|_p.$$

Напомним, что использованное здесь обозначение $A \lesssim B$ означает, что левая часть неравенства не превосходит правой, умноженной на некоторую константу. Здесь эта константа не зависит от набора интервалов $\{I_j\}$ и функции f.

По двойственности, несложно видеть, что такое неравенство эквивалентно следующему:

$$\Big\|\sum_j f_j\Big\|_p \lesssim \Big\|\Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p, \qquad 1 < p \leqslant 2, \tag{1.1}$$

где функции f_j таковы, что $\operatorname{supp}\widehat{f_j} \subset I_j$.

Мы докажем аналогичное неравенство для систем Виленкина. Опишем построение функций Виленкина на отрезке $[0,1]$.

Пусть $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, каждое из которых не меньше, чем 2. Обозначим произведение $p_1p_2\dots p_l$ через m_l (и будем считать, что $m_0 = 1$). Разделим отрезок $[0,1]$ на p_1 равных отрезков и через r_1 обозначим функцию, равную $e^{2\pi ik/p_1}$ на k-ом отрезке (мы считаем, что нумерация отрезков начинается с нуля). Далее, с каждым из полученных отрезков проделаем аналогичную операцию: разделим его на p_2 частей и через r_2 обозначим функцию, равную $e^{2\pi ik/p_2}$ на k-ой части. Повторяя эти операции, получаем последовательность функций r_i, являющихся аналогами классических функций Радемахера. Все функции из системы Виленкина являются произведениями построенных обобщённых функций Радемахера. А именно, всякое число $n \in \mathbb{N}_0$ (этот символ обозначает множество целых неотрицательных чисел) запишем в “(m)-ичной системе счисления”, то есть представим в виде $n = \alpha_1 + \alpha_2 m_1 + \dots \alpha_k m_{k-1}$, где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant p_i - 1$. Отметим сразу, что для такой (m)-ичной записи нам будет удобно использовать следующее обозначение:

$$n \sim \begin{pmatrix} m_{k-1} & \dots & m_1 & m_0 \\ \alpha_k & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

В таком случае, функция Виленкина w_n равна $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_k^{\alpha_k}$. Описанное представление и нумерация систем Виленкина содержится, например, в работе [53].

Приступим теперь к формулировке основного результата. Мы будем считать, что последовательность p_i ограничена: $p_i \leqslant M$ для некоторого $M > 2$. Такие системы Виленкина называются ограниченными. Это существенное предположение для наших рассуждений, как будет видно из дальнейшего. Символом $\widehat{f}$ обозначим последовательность коэффициентов разложения f по системе Виленкина: $\widehat{f}(n) = (f, w_n) = \int f\bar{w}_n$. Ясно, что тогда $f = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \widehat{f}(n)w_n$ (в случае, если $f \in L^2$).

Теорема 2. *Пусть* $\{I_s\}$ *— набор попарно не пересекающихся конечных интервалов в* $\mathbb{N}_0$*, а функции* f_s *таковы, что* $\operatorname{supp}\widehat{f_s} \subset I_s$ *(таким образом, каждая функция* f_s *— полином Виленкина). Тогда при* $1 < p \leqslant 2$ *справедливо следующее неравенство:*

$$\Big\|\sum_s f_s\Big\|_p \lesssim \Big\|\Big(\sum_s |f_s|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p.$$

Теорема 2 новая и опубликована в работе [T1]. Отметим, что соответствующее утверждение для функций Уолша (которые являются частным случаем функций Виленкина — когда все p_i равны 2) было доказано в работе [44]. Однако, оказалось, что основное комбинаторное построение из статьи [44] напрямую на случай систем Виленкина не обобщается, поэтому несколько лет теорема 2 оставалась открытым вопросом.

Кроме того, классическое неравенство Рубио де Франсиа (1.1) было позднее доказано и для $p = 1$ Бургейном в работе [20], а также для всех $p \in (0, 2]$ Кисляковым и Париловым в работе [11]. Некоторые замечания на этот счёт в контексте систем Виленкина также можно найти в третьей главе настоящей диссертации (и в работе [T1]).

Основными методами доказательства теоремы 2 являются как стандартные “мартингальные” инструменты (такие как оценки квадратичной функции), так и специфические методы, связанные с функциями Виленкина, которые, в частности, разрабатывались в статьях [52, 53]. Кроме того, важную роль в доказательстве играет правильное обобщение комбинаторной конструкции из работы [44].

1.4 Неравенства для функций со значениями в банаховых пространствах

В четвёртой главе диссертации исследуется обобщение неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для функций Уолша, доказанное в работе [44], на случай функций, принимающих значения в некоторых банаховых пространствах. Коротко опишем историю вопроса и приведём формулировки утверждений, доказательству которых будет посвящена глава 4.

Как мы уже упоминали выше, аналог неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для функций Уолша (напомним, что функции Уолша являются частным случаем функций Виленкина, которые были определены в предыдущем параграфе — достаточно подставить все $p_i = 2$) был доказан в работе [44]. Сформулируем его ещё раз, теперь для $p \geqslant 2$: если $\{I_s\}$ — набор попарно не пересекающихся отрезков в $\mathbb{N}_0$, то для всякой функции $f \in L^p[0,1]$ выполняется неравенство:

$$\Big\| \Big(\sum_s |P_{I_s} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}. \tag{1.2}$$

Наша цель — обобщить это неравенство на функции f, принимающие значения в некотором банаховом пространстве X.

Обозначим через ε_s последовательность функций Радемахера (их не стоит путать с функциями r_k, использующимися при определении функций Уолша; это другая "копия" последовательности функций Радемахера, и можно считать, что они определены на некотором другом вероятностном пространстве Ω). Если X — банахово пространство, а f — X-значная функция, то аналог неравенства (1.2) имеет следующий вид:

$$\Big\| \sum_s \varepsilon_s P_{I_s} f \Big\|_{L^p(\mathrm{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}. \tag{1.3}$$

Символом $\mathrm{Rad}X$ обозначено замыкание в $L^p(\Omega; X)$ множества X-значных функций вида

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j(\omega) x_j, \quad x_j \in X.$$

Несложно видеть, что из неравенства Хинчина–Кахана (см., например, [29, стр. 191]) следует, что определение пространства $\mathrm{Rad}X$ не зависит от p, если $1 \leqslant p < \infty$. Кроме того, из неравенства Хинчина следует, что для $X = \mathbb{R}$ неравенства (1.2) и (1.3) равносильны.

Приведём теперь следующее определение (из работы [T2]).

Определение. *Будем говорить, что банахово пространство X обладает свойством LPR_p^w, если неравенство* (1.3) *выполняется для всякой функции $f \in L^p(X)$.*

Это естественный аналог свойства LPR_p, которое было аксиоматизировано в работе [17], для контекста функций Уолша. Свойство LPR_p (которое естественно обобщает неравенство для стандартного преобразования Фурье из работы [50] на случай банаховозначных функций) изучалось в том числе в работах [31], [49]. В настоящей диссертации мы докажем аналоги результатов из работы [49] для функций Уолша. Перейдём теперь к конкретным формулировкам результатов.

Теорема 3. *Если X — такая банахова решётка, что ассоциированная с ней 2-вогнутая решётка $X_{(2)}$ является банаховой решёткой со свойством UMD, то X обладает свойством LPR_p^w для $2 < p < \infty$.*

Напомним, что решётка $X_{(2)}$ задаётся следующей нормой:

$$\|x\|_{X_{(2)}} = \||x|^{1/2}\|^2.$$

Она действительно будет являться банаховой решёткой, если решётка X 2-выпукла. Более подробную информацию о банаховых решётках можно найти в книге [40], а все необходимые определения будут приведены в главе 4.

Теорема 4. *Если X — банахово пространство, обладающее свойством LPR_p^w для некоторого $p \geqslant 2$, то X также обладает свойством LPR_q^w для всякого $q > p$.*

Обе теоремы 3 и 4 новые и опубликованы в работе [T2]. Основными методами, используемыми при их доказательстве, являются как стандартные методы оценок для мартингалов со значениями в банаховых пространствах, так и специфическая комбинаторная конструкция, связанная с функциями Уолша и приведённая в работе [44].

Отметим также, что, по всей видимости, аналогичные результаты можно получить и для более общих систем Виленкина вместо системы Уолша (используя более громоздкую комбинаторную конструкцию из работы [T1]). Однако, мы оставляем этот вопрос за рамками настоящей диссертации — отчасти для того, чтобы сделать изложение более ясным, отчасти чтобы более явно продемонстрировать методы, позволяющие обобщать неравенства нетригонометрического гармонического анализа на функции со значениями в банаховых пространствах.

1.5 Локальная безусловная структура в пространствах гладких функций

В пятой главе диссертации исследуются некоторые свойства банаховых пространств гладких функций на многомерном торе. Опишем историю этого вопроса и приведём основные формулировки.

Хорошо известно, что при $n \geqslant 2$ пространство $C^k(\mathbb{T}^n)$, то есть пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на торе $\mathbb{T}^n$, не изоморфно пространству $C(\mathbb{T}^n)$. Этот факт был впервые анонсирован в работе [27], а позднее появилось множество его обобщений (см. работы [15, 8, 34, 38, 14, 46, 12, 9, 10, 13]). Однако наиболее общий и естественный контекст был рассмотрен только в довольно недавней работе [35] (см. также препринт [36] для двумерного случая).

Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ символом D^α обозначим дифференциальный моном $\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ (отметим, что $\partial z^l = 2\pi i l z^l$, $z \in \mathbb{T}$). Зафиксируем набор дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_J\}$, то есть каждый из этих операторов является линейной комбинацией различных дифференциальных мономов D^α. Число $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ называется порядком монома D^α, а порядком оператора T_j называется наибольший из порядков мономов, входящих в его состав.

Рассмотрим следующую полунорму на тригонометрических полиномах f:

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \max_{1 \leqslant j \leqslant J} \|T_j f\|_{C(\mathbb{T}^n)}.$$

Пространство, порождаемое этой полунормой (то есть при помощи факторизации по ядру и пополнения) будем обозначать через $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$. Например, если $\mathcal{T}$ — это множество всех дифференциальных мономов порядка не более k, то определённое нами пространство совпадает с $C^k(\mathbb{T}^n)$.

Пространства $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ изучались уже в работах [9, 10]. В частности, там было доказано следующее утверждение. Предположим, что порядок каждого оператора T_j не превосходит k. Исключим из каждого из операторов T_j мономы, порядок которых строго меньше k. Если среди оставшихся старших частей операторов T_j есть хотя бы две линейно независимые, то пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не изоморфно дополняемому подпространству пространства $C(S)$. (Здесь S — произвольное несчётное компактное метрическое пространство. По теореме Милютина, все такие пространства $C(S)$ изоморфны друг другу.) Однако, в случае, если все старшие части отличаются друг от друга умножением на константу, ситуация оставалась неясной.

После этого, в статье [35] было доказано обобщение сформулированного выше утверждения об отсутствии изоморфизма. Чтобы привести его здесь, нам понадобится понятие смешанной однородности.

Зафиксируем некоторый *шаблон смешанной однородности*, то есть гиперплоскость Λ в $\mathbb{R}^n$, пересекающую положительные координатные полуоси. Уравнение такой гиперплоскости имеет вид $\langle x, \rho \rangle = 1$ для некоторого вектора ρ с положительными координатами. Будем называть такую гиперплоскость допустимой, если всякий мультииндекс α, такой что моном D^α участвует в одном из операторов T_j, лежит под Λ или на ней. Это равносильно тому, что выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^{N} \rho_j \alpha_j \leqslant 1.$$

Теперь определим старшую часть оператора T_j как линейную комбинацию всех дифференциальных мономов, участвующих в T_j, чьи мультииндексы лежат на Λ, а младшую часть — как линейную комбинацию всех оставшихся мономов, входящих в состав T_j. Старшую часть обозначим через σ_j, а младшую — через τ_j. В статье [35] доказывается, что если среди старших частей есть хотя бы две линейно независимые, то пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не изоморфно дополняемому подпространству пространства $C(S)$.

Отметим, что в случае, когда все операторы, входящие в набор $\mathcal{T}$ — мономы, теорема о неизоморфности дополняемому подпространству пространства $C(S)$ — не самое общее известное утверждение. Приведём здесь некоторые определения из теории банаховых пространств. Говорят, что банахово пространство X имеет локальную безусловную структуру, если существует такая константа $C > 0$, что для всякого конечномерного подпространства $F \subset X$ найдутся банахово пространство E с 1-безусловным базисом и два линейных оператора $R : F \to E$ и $S : E \to X$, такие что $SRx = x$ для всякого $x \in F$ и $\|S\| \cdot \|R\| \leqslant C$. Напомним также, что базис $\{e_n\}$ называется 1-безусловным, если для любых чисел ε_n, таких что $|\varepsilon_n| \leqslant 1$, и всякой финитной последовательности (α_n) выполняется неравенство $\|\sum \varepsilon_n \alpha_n x_n\| \leqslant \|\sum \alpha_n x_n\|$. Отметим, что, вообще говоря, существование локальной безусловной структуры не сохраняется при переходе к замкнутым подпространствам (однако, оно сохраняется, если подпространство дополняемо). Известно, что пространство X обладает локальной безусловной структурой тогда и только тогда, когда его второе сопряжённое вкладывается дополняемо в банахову решётку (см., например, [33]).

В работе [12], в случае, когда все операторы T_j — дифференциальные мономы, были доказаны следующие утверждения. Если, опять же, среди старших частей T_j найдутся хотя бы две линейно независимые (поскольку все T_j — это мономы, старшая часть каждого их операторов T_j равна либо нулю, либо самому оператору T_j), то пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не имеет локальной безусловной структуры. Кроме того, если пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)^*$ изоморфно подпространству пространству Y с локальной безусловной структурой, то Y равномерно содержит пространства ℓ_∞^k. Это означают, что существуют подпространства Y_k в Y, такие что $\dim Y_k = k$, и обратимые операторы $T_k : Y_k \to \ell_\infty^k$, обладающие свойством $\|T_k\| \cdot \|T_k^{-1}\| \leqslant C$. Ввиду того, что пространство $C(S)^*$ имеет локальную безусловную структуру, но не содержит пространства ℓ_∞^k равномерно, из этих утверждений следует, что $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не изоморфно факторпространству пространства $C(S)$.

В настоящей диссертации мы докажем те же самые утверждения, но в описанном выше более общем контексте. Перейдём к формулировке теоремы, доказательству которой посвящена пятая глава.

Теорема 5. *Предположим, что набор дифференциальных операторов $\mathcal{T}$ таков, что среди старших частей этих операторов найдутся по крайней мере 2 линейно независимые (при некотором выборе допустимой гиперплоскости Λ). Тогда $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ не* *имеет локальной безусловной структуры. Кроме того, если $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)^*$ изоморфно подпространству пространства Y с локальной безусловной структурой, то Y равномерно содержит пространства ℓ_∞^k.*

Теорема 5 новая и опубликована в работе [T3]. Основными методами доказательства теоремы 5 являются уже ставшие стандартными методы теории банаховых пространств, такие, как теорема Гротендика, а также методы из работы [35], адаптированные для доказательства приведённого общего утверждения — прежде всего, это доказанная в той работе теорема вложения.

Глава 2

Описание пространства BMO

2.1 Введение

Эта глава диссертации посвящена доказательству теоремы 1, сформулированной во введении. Для удобства читателя приведём здесь её формулировку ещё раз.

Теорема. *Пусть $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — набор равномерно ограниченных функций на $\mathbb{R}^d$, имеющих все обобщённые производные в смысле Соболева порядков не выше $a = [d/2]+1$. Наложим на эти функции следующие условия:*

1) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n(x) \equiv 1$ *для всех* $x \neq 0$;

2) $\operatorname{supp}\psi_n \subset \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \leqslant |x| \leqslant 2^{n+1}\}$;

3) $(2^{-nd}\int |D^\alpha \psi_n(\xi)|^2 d\xi)^{1/2} \leqslant K2^{-n|\alpha|}$ *для* $0 \leqslant |\alpha| \leqslant a$.

Здесь K — константа, которая не зависит от n. Определим оператор $\widehat{\Delta_n f} := \psi_n \hat{f}$ и норму

$$\|f\|_D := \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Здесь рассматривается супремум по всем кубам Q (с гранями, параллельными координатным плоскостям), а через $l(Q)$ обозначена длина ребра куба Q.

Тогда для всякой интегрируемой функции f выполняется соотношение $\|f\|_D \asymp \|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

Отметим, что похожее описание пространства BMO также доказывается в статье [28] — однако существенное отличие состоит в том, что мы накладываем условия на функции ψ_n, а не на их преобразования Фурье. Кроме того, выражение, похожее на правую часть равенства (2.1), можно найти в книге [26] на странице 93.

Мы будем использовать обозначение f_Q для среднего значения функции f на множестве Q, то есть

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx.$$

Под нормой функции f в пространстве BMO будем подразумевать выражение

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Приступим к доказательству теоремы 1. Оно будет разбито на две части — в первой мы докажем неравенство $\|f\|_D \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}}$, а во второй — неравенство $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|f\|_D$

2.2 Неравенство $\|f\|_D \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}}$

Для доказательства неравенства $\|f\|_D \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}}$ мы прежде всего зафиксируем куб Q. Наша цель — оценить интеграл

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Представим функцию f как сумму трёх функций. А именно, напишем:

$$(f-f_Q)\chi_{2Q} + (f-f_Q)\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q} + f_Q =: f_1 + f_2 + f_3.$$

Здесь через χ_A обозначена характеристическая функция множества A, а через $2Q$ — куб с тем же центром, что и у Q, и в два раза большей длиной ребра. Отметим, что f_3 — константа, а потому $\Delta_n f_3 = 0$. Поэтому мы можем заключить, что

$$\|f\|_D \lesssim \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n f_1(x)|^2 dx\Big)^{1/2} + \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n f_2(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства оценивается легко. В самом деле, поскольку функции $\{\psi_n\}$ равномерно ограниченны, легко видеть, что $\|Sg\|_{L^2} \lesssim \|g\|_{L^2}$, где $Sg = \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta_n g|^2\big)^{1/2}$. Таким образом, первое слагаемое не больше, чем

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\Delta_n((f-f_Q)\chi_{2Q})|^2dx\Big)^{1/2} \lesssim \Big(\frac{1}{|Q|}\int_{2Q}|f(x)-f_Q|^2dx\Big)^{1/2} \lesssim \Big(\frac{1}{|2Q|}\int_{2Q}|f(x)-f_{2Q}|^2dx\Big)^{1/2} + |f_{2Q}-f_Q|.$$

Оба выражения в правой части неравенства не больше, чем $C\|f\|_{\mathrm{BMO}}$ для некоторой универсальной константы C. Для первого выражения это следует из определения пространства BMO, а для второго, чтобы это доказать, достаточно сложить неравенства

$$\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leqslant |Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}} \text{ и } \int_Q |f(x)-f_{2Q}|dx \leqslant \int_{2Q}|f(x)-f_{2Q}|dx \lesssim |Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Таким образом, для завершения первой части доказательства нам остаётся оценить величину

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n((f-f_Q)\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q})(x)|^2dx. \tag{2.2}$$

Пусть $x\in Q$. Введём обозначение $S_n = \check{\psi}_n$ и перепишем выражение, стоящее внутри интеграла в формуле (2.2):

$$\begin{aligned}|\Delta_n((f-f_Q)\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q})(x)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q}(f(y)-f_Q)S_n(x-y)dy\Big| \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\int_{2^kQ\setminus 2^{k-1}Q}|f(y)-f_Q||S_n(x-y)|dy \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\Bigg[\Big(\int_{2^kQ\setminus 2^{k-1}Q}|f(y)-f_Q|^2\Big)^{\frac12}\Big(\int_{2^kQ\setminus 2^{k-1}Q}|S_n(x-y)|^2dy\Big)^{\frac12}\Bigg].\end{aligned} \tag{2.3}$$

Далее, напишем:

$$\begin{aligned}\Big(\int_{2^kQ\setminus 2^{k-1}Q}|f(y)-f_Q|^2\Big)^{1/2}dy &\leqslant \Big(\int_{2^kQ}|f(y)-f_Q|^2\Big)^{1/2}dy \\ &\leqslant \Big(\int_{2^kQ}|f(y)-f_{2^kQ}|^2\Big)^{1/2}dy + |2^kQ|^{1/2}\cdot|f_{2^kQ}-f_Q|.\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое не превосходит $|2^kQ|^{1/2}\|f\|_{\mathrm{BMO}}$, в то время как второе — не больше, чем $k|2^kQ|^{1/2}\|f\|_{\mathrm{BMO}}$ — это легко доказать индукцией по k. Оценим теперь второй сомножитель в формуле (2.3). Заметим, что, поскольку $x \in Q$ и $y \in 2^kQ \setminus 2^{k-1}Q$, выполняется соотношение $|x-y| \asymp 2^k l(Q)$. В связи с этим, напишем:

$$\int_{2^kQ\setminus 2^{k-1}Q} |S_n(x-y)|^2 dy \lesssim \int_{2^kQ\setminus 2^{k-1}Q} \frac{|x-y|^{2a}}{2^{2ak} l(Q)^{2a}} |S_n(x-y)|^2 dy \lesssim \frac{1}{2^{2ak} l(Q)^{2a}} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{2a} |S_n(x)|^2 dx \lesssim \dots .$$

Продолжим нашу оценку, воспользовавшись теоремой Планшереля и условием 3 из формулировки доказываемой теоремы для таких мультииндексов α, что $|\alpha| = a$:

$$\dots \lesssim \frac{1}{2^{2ak} l(Q)^{2a}} 2^{nd-2na}.$$

Из полученных нами неравенств вытекает следующая оценка.

$$|\Delta_n((f-f_Q)\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q})(x)| \lesssim \sum_{k=2}^{\infty} k(2^{kd}|Q|)^{1/2} \cdot 2^{\frac{nd}{2}-na} 2^{-ak} l(Q)^{-a} \|f\|_{\mathrm{BMO}}$$
$$= l(Q)^{d/2-a} 2^{n(d/2-a)} \|f\|_{\mathrm{BMO}} \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot 2^{k(d/2-a)} \lesssim l(Q)^{d/2-a} 2^{n(d/2-a)} \|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Наконец, мы можем закончить оценку выражения (2.2):

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n((f-f_Q)\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q})(x)|^2 dx\right)$$
$$\lesssim \|f\|^2_{\mathrm{BMO}} l(Q)^{d-2a} \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} 2^{n(d-2a)} \lesssim \|f\|^2_{\mathrm{BMO}},$$

и таким образом неравенство $\|f\|_D \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}}$ доказано.

Приступим теперь к доказательству обратного неравенства.

2.3 Неравенство $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|f\|_D$

Итак, нам осталось доказать неравенство $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|f\|_D$. Отметим, что, если c — произвольная константа, то выполняется следующее неравенство:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^2 dx\right)^{1/2} \lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-c|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Напомним, что мы используем обозначение $S_n := \mathcal{F}^{-1}[\psi_n]$, и, таким образом, верно равенство $\Delta_n f = S_n * f$. Выберем константу $c := \sum_{2^{-(n-10)} \geqslant l(Q)} (f * S_n)(y)$, где y — это центр куба Q. Мы можем заключить, что

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^2 dx\Big)^{1/2}$$
$$\lesssim \frac{1}{|Q|^{1/2}}\Big(\int_Q \Big|f(x) - \sum_{2^{-(n-10)} \geqslant l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) S_n(y-t)dt\Big|^2 dx\Big)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Учитывая, что $f(x)$ можно представить в виде $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) S_n(x-t)dt$ (для почти всех x), легко видеть, что правая часть неравенства (2.5) не больше, чем

$$\frac{1}{|Q|^{1/2}}\Big(\int_Q \Big|\sum_{2^{-(n-10)} \leqslant l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) S_n(x-t)dt\Big|^2 dx\Big)^{1/2} \quad (2.6)$$
$$+ \frac{1}{|Q|^{1/2}}\Big(\int_Q \Big|\sum_{2^{-(n-10)} \geqslant l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)(S_n(x-t) - S_n(y-t))dt\Big|^2 dx\Big)^{1/2} =: B_1 + B_2. \quad (2.7)$$

Оценим слагаемые B_1 и B_2 по отдельности. Главным ингредиентом в обеих оценках будет подходящее разбиение пространства $\mathbb{R}^d$ на кубы. Кроме того, при оценке слагаемого B_2 также необходимо будет использовать некоторое “свойство сокращения”, которым обладают ядра S_n — в духе того, как это делается при доказательстве уже упоминавшейся во введении теоремы Хёрмандера–Михлина о мультипликаторах (то доказательство можно найти, например, в книге [23]).

2.3.1 Оценка слагаемого B_1

Итак, докажем сначала неравенство

$$\Big(\int_Q \Big|\sum_{2^{-(n-10)} \leqslant l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) S_n(x-t)dt\Big|^2 dx\Big)^{1/2} \lesssim |Q|^{1/2}\|f\|_D. \quad (2.8)$$

Обозначим через P_n сумму $S_{n-1} + S_n + S_{n+1}$. Тогда, очевидно, выполняется соотношение $S_n = P_n * S_n$. Используя этот факт, оценим квадрат выражения, стоящего в левой части неравенства (2.8):

$$\int_Q \Big| \sum_{2^{-(n-10)} \leqslant l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} (f * P_n)(u) S_n(x-u) du \Big|^2 dx$$
$$\lesssim \int_Q \Big| \sum_{2^{-(n-10)} \leqslant l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} (f * P_n)(u) S_n(x-u) du \Big|^2 dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \sum_{2^{-(n-10)} \leqslant l(Q)} \int_Q (f * P_n)(u) S_n(x-u) du \Big|^2 dx.$$

Для оценки слагаемого B_1 теперь достаточно доказать следующие два неравенства.

$$B_3 := \int_Q \Big| \sum_{2^{-(n-10)} \leqslant l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} (f * P_n)(u) S_n(x-u) du \Big|^2 dx \lesssim |Q| \|f\|_D^2, \tag{2.9}$$

$$B_4 := \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \sum_{2^{-(n-10)} \leqslant l(Q)} \int_Q (f * P_n)(u) S_n(x-u) du \Big|^2 dx \lesssim |Q| \|f\|_D^2. \tag{2.10}$$

Используя неравенство треугольника в пространстве L^2, мы можем заключить, что квадратный корень из выражения, стоящего в левой части неравенства (2.9), не превосходит величины

$$\sum_{2^{-(n-10)} \leqslant l(Q)} \Big(\int_Q \Big(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} |S_n(x-u)| \cdot |(f * P_n)(u)| du \Big)^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Обозначим слагаемые, участвующие в этом выражении, через G_n, и оценим величину

$$G_n^2 = \Big(\int_Q \Big(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} |S_n(x-u)| \cdot |f * P_n(u)| du \Big)^2 dx.$$

Оценке предпошлём следующую простую лемму.

Лемма 2.1. *Если σ — куб со стороной не менее, чем $2^{-(n-1)}$, то верно следующее неравенство:*

$$\Big(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma |f * P_n|^2 \Big)^{1/2} \lesssim \|f\|_D.$$

Доказательство. Используя определение функции P_n, напишем:

$$\Big(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma |f * P_n|^2 \Big)^{1/2} = \Big(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma |\Delta_{n-1} f + \Delta_n f + \Delta_{n+1} f|^2 \Big)^{1/2} \lesssim \|f\|_D.$$

Здесь последнее неравенство очевидно следует из определения нормы $\|f\|_D$. □

Обозначим через Q^- куб с тем же центром, что у Q, у которого длина ребра на $2^{-(n-5)}$ меньше, чем у Q. Нам будет удобно зафиксировать разбиение всего пространства $\mathbb{R}^d$ на семейство кубов $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ с длинами рёбер порядка $2^{-(n-4)}$ такое что $Q^- = \bigcup_{j\in J} \sigma_{k_j}$. Обозначим через G_1 множество кубов из набора $\{\sigma_k\}$, содержащихся в Q^-, а через G_2 — множество кубов, не пересекающихся ни с одним из кубов из G_1. Отметим, что в таком случае $\mathbb{R}^d\backslash Q$ содержится в объединении кубов из G_2. Мы можем заключить, что

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{Q^-}\Big(\int_{\mathbb{R}^d\backslash Q} |S_n(x-u)|\cdot|f*P_n(u)|du\Big)^2 dx \\
&\leqslant \sum_{\sigma_l\in G_1}\int_{\sigma_l}\Big(\sum_{\sigma_k\in G_2}\int_{\sigma_k}|S_n(x-u)|\cdot|f*P_n(u)|du\Big)^2 dx \\
&\leqslant \sum_{\sigma_l\in G_1}\int_{\sigma_l}\left(\sum_{\sigma_k\in G_2}\Big(\int_{\sigma_k}\frac{|f*P_n(u)|^2}{|x-u|^{2a}}du\Big)^{1/2}\Big(\int_{\sigma_k}|S_n(x-u)||x-u|^{2a}du\Big)^{1/2}\right)^2 dx \\
&\leqslant \sum_{\sigma_l\in G_1}\int_{\sigma_l}\Big(\sum_{\sigma_k\in G_2}\int_{\sigma_k}\frac{|f*P_n(u)|^2}{|x-u|^{2a}}du\Big)\Big(\sum_{\sigma_k\in G_2}\int_{\sigma_k}|S_n(x-u)||x-u|^{2a}du\Big)dx \lesssim \dots .
\end{aligned}$$

Заметим, что вторая сумма, по кубам $\sigma_k \in G_2$, очевидно не больше, чем интеграл $\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{2a}|S_n(x)|^2dx$, что в свою очередь не превосходит 2^{nd-2na} по теореме Планшереля. Продолжим оценку, на этот раз используя, что $|x-u| \asymp 2^{-n}|k-l|$, если $x\in\sigma_k, y\in\sigma_l$:

$$\dots \lesssim \sum_{\sigma_l\in G_1}\int_{\sigma_l}\left(\sum_{\sigma_k\in G_2}\int_{\sigma_k}|f*P_n(u)|^2du\cdot 2^{2na}|k-l|^{-2a}\right)\cdot 2^{nd-2na}dx \lesssim \dots .$$

Используя лемму 2.1, заметим, что верно неравенство $\int_{\sigma_k}|f*P_n|^2 \lesssim 2^{-nd}\|f\|_D^2$, и, используя его, продолжим нашу цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
\dots &\lesssim \sum_{\sigma_l\in G_1}\int_{\sigma_l}\sum_{\sigma_k\in G_2}\|f\|_D^2 2^{-nd}2^{2na}|k-l|^{-2a}2^{nd-2na}dx \\
&\lesssim \|f\|_D^2 2^{-nd}\sum_{\sigma_l\in G_1}\sum_{\sigma_k\in G_2}|k-l|^{-2a}.
\end{aligned}$$

Как мы уже отмечали, для $x\in\sigma_k, y\in\sigma_l$, выполняется соотношение $|k-l| \asymp 2^n|x-u|$, а потому мы можем заключить, что

$$2^{-2nd}|k-l|^{-2a} \asymp \int_{\sigma_l}\int_{\sigma_k}|k-l|^{-2a}dudx \asymp 2^{-2an}\int_{\sigma_l}\int_{\sigma_k}|x-u|^{-2a}dudx,$$

и следовательно $|k-l|^{-2a} \asymp 2^{2nd}2^{-2an}\int_{\sigma_l}\int_{\sigma_k}|x-u|^{-2a}$. Используем это соотношение, чтобы продолжить оценку выражения I:

$$I \lesssim \|f\|_D^2 2^{nd-2an}\sum_{\sigma_l\in G_1}\sum_{\sigma_k\in G_2}\int_{\sigma_l}\int_{\sigma_k}|x-u|^{-2a}dudx$$
$$= \|f\|_D^2 2^{nd-2an}\int_{Q^-}\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'}|x-u|^{-2a}dudx,$$

где через Q' обозначен куб, являющийся объединением всех кубов σ_k, не входящих в G_2. Нетрудно видеть, что на Q' — это куб с тем же центром, что и Q^-, у которого длина ребра равна $l(Q^-)+2^{-(n-3)}$.

Оценим теперь интеграл

$$\int_{Q^-}\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'}|x-u|^{-2a}dudx.$$

Для удобства, сдвинем куб Q^- так, что $Q^- = [0, l(Q^-)]^d$. Не умаляя общности, мы можем считать, что внутренний интеграл берётся по множеству

$$\{u=(u_1,\ldots,u_d)\in\mathbb{R}^d : u_1,\ldots u_k\in[-2^{-(n-3)}, l(Q^-)+2^{-(n-3)}],$$
$$u_{k+1},\ldots,u_d\in(-\infty,-2^{-(n-3)})\},$$

где $0\leqslant k\leqslant d-1$ (поскольку $\mathbb{R}^d\setminus Q'$ представляется в виде конечного объединения множеств такого вида). Очевидно также, что выражение $|x-u|$ можно заменить суммой $|x_1-u_1|+\ldots+|x_d-u_d|$. Явным образом посчитав интеграл, можно заметить, что выполняется неравенство

$$\int_{-2^{-(n-3)}}^{l(Q)+2^{-(n-3)}}(|x_1-u_1|+\ldots+|x_d-u_d|)^{-2a}du_1$$
$$\lesssim (|x_2-u_2|+\ldots+|x_d-u_d|)^{-2a+1}.$$

Проинтегрировав получающееся выражение ещё $k-1$ раз по переменным $u_1,\ldots,u_k$, мы получим величину $(|x_{k+1}-u_{k+1}|+\ldots+|x_d-u_d|)^{-2a+k}$. Мы можем явно проинтегрировать это выражение по u_{k+1} и получить неравенство

$$\int_{-\infty}^{-2^{-(n-3)}} (|x_{k+1} - u_{k+1}| + \ldots + |x_d - u_d|)^{-2a+k} du_{k+1} \lesssim (|x_{k+1} + 2^{-(n-3)}| + |x_{k+2} - u_{k+2}| + \ldots + |x_d - u_d|)^{-2a+k+1}.$$

После интегрирования этого неравенства по оставшимся переменным остаётся оценить выражение

$$\int_0^{l(Q^-)} \ldots \int_0^{l(Q^-)} (|x_{k+1} + 2^{-(n-3)}| + \ldots + |x_d + 2^{-(n-3)}|)^{-2a+d} dx_1 \ldots x_d.$$

Очевидно, что этот интеграл максимален, когда $k = d-1$. В таком случае он оценивается величиной

$$H := l(Q^-)^{d-1} \int_0^{l(Q^-)} (x_d + 2^{-(n-3)})^{-2a+d} dx_d.$$

Чтобы оценить H, разберём два случая. Если d — чётное число, то $a = (d+2)/2$ и следовательно $H \leqslant l(Q)^{d-1} 2^n$. В таком случае, мы получаем неравенство

$$I \lesssim \|f\|_D^2 l(Q)^{d-1} 2^{-n}.$$

Если d нечётно, то $a = (d+1)/2$ и

$$H \leqslant l(Q)^{d-1} (\log(l(Q) + 2^{-n}) - \log(2^{-n})) = l(Q)^{d-1} \log(1 + 2^n l(Q)).$$

В таком случае, верно неравенство

$$I \lesssim \|f\|_D^2 l(Q)^{d-1} 2^{-n} \log(1 + 2^n l(Q)). \tag{2.11}$$

Таким образом, мы можем заключить, что в любом случае имеет место оценка

$$\int_{Q^-} \Big(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} |f * P_n(u)| \cdot |S_n(x-u)| du \Big)^2 dx \lesssim \|f\|_D^2 l(Q)^{d-1} 2^{-n} \log(1 + 2^n l(Q)).$$

Для того, чтобы закончить оценку величины G_n^2, остаётся теперь оценить сверху выражение

$$\int_{Q\setminus Q^-} \Big(\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q} |f * P_n(u)| \cdot |S_n(x-u)| du\Big)^2 dx$$

Разобьём множество $Q\setminus Q^-$ на кубы $\{q_l\}$, длины рёбер которых имеют порядок $2^{-(n-4)}$. Количество таких кубов можно оценить величиной $l(Q)^{d-1}2^{n(d-1)}$. Через q_l^+ обозначим куб с тем же центром, что и q_l, и длиной ребра большей, чем длина ребра q_l, на $2^{-(n-5)}$. Аналогично проделанным выше вычислениям, мы можем получить следующую оценку:

$$\int_{q_l} \Big(\int_{\mathbb{R}^d\setminus q_l^+} |f * P_n(u)| \cdot |S_n(x-u)| du\Big)^2 dx \\ \lesssim \|f\|_D^2 l(q_l)^{d-1} 2^{-n} 2 \log(1 + 2^n l(q_l)) \lesssim \|f\|_D^2 2^{-nd}.$$

Теперь оценим аналогичное выражение, где внутренний интеграл берётся по множеству q_l^+. Для этого используем неравенство Гёльдера, а также неравенство

$$\int_{q_l^+} |f * P_n(u)|^2 du \lesssim \|f\|_D^2 2^{-nd},$$

которое следует из леммы 2.1, и очевидную оценку

$$\int_{q_l^+} |S_n(x-u)|^2 du \leqslant \|S_n\|_{L^2}^2 = \|\psi_n\|_{L^2}^2 \lesssim 2^{nd}$$

. Напишем:

$$\int_{q_l} \Big(\int_{q_l^+} |f * P_n(u)| \cdot |S_n(x-u)| du\Big)^2 dx \\ \lesssim \int_{q_l} \Big(\int_{q_l^+} |f * P_n(u)|^2 du \cdot \int_{q_l^+} |S_n(x-u)|^2 du\Big) dx \lesssim \|f\|_D^2 2^{-nd}.$$

Таким образом, мы получаем оценку

$$\int_{q_l} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f * P_n(u)| \cdot |S_n(x-u)| du\Big)^2 dx \lesssim \|f\|_D^2 2^{-nd}.$$

Принимая во внимание тот факт, что количество кубов в наборе $\{q_l\}$ имеет порядок

$l(Q)^{d-1}2^{n(d-1)}$, мы можем заключить, что

$$\int_{Q\setminus Q^-}\Big(\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q}|f*P_n(u)|\cdot|S_n(x-u)|du\Big)^2dx \leqslant \sum_l\int_{q_l}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|f*P_n(u)|\cdot|S_n(x-u)|du\Big)^2dx$$
$$\lesssim \|f\|_D^2 2^{-nd}l(Q)^{d-1}2^{n(d-1)} \lesssim \|f\|_D^2 l(Q)^{d-1}2^{-n}.$$

Складывая полученную только что оценку с оценкой выражения I (см. неравенство (2.11)), мы видим, что выполняется следующее неравенство:

$$G_n^2 \lesssim \|f\|_D^2 l(Q)^{d-1}2^{-n}\log(1+2^nl(Q)). \tag{2.12}$$

Теперь, наконец, мы можем завершить оценку величины B_3:

$$\frac{B_3^{1/2}}{|Q|^{1/2}} \lesssim \frac{1}{|Q|^{1/2}}\sum_{n\geqslant -\log_2 l(Q)}\|f\|_D l(Q)^{(d-1)/2}2^{-n/2}\log_2(1+2^nl(Q))^{1/2}$$
$$\asymp \|f\|_D l(Q)^{-1/2}\sum_{m\geqslant 0}2^{-(m-\log_2 l(Q))/2}\log_2(1+2^{m-\log_2 l(Q)}l(Q))^{1/2}$$
$$= \|f\|_D\sum_{m\geqslant 0}2^{-m/2}\log_2(1+2^m)^{1/2} \lesssim \|f\|_D,$$

и неравенство (2.9) доказано.

Приступим теперь к доказательству неравенства (2.10). Заметим, что функции

$$x \mapsto \int_Q (f*P_n)(u)S_{n_1}(x-u)du,$$
$$x \mapsto \int_Q (f*P_n)(u)S_{n_1}(x-u)du$$

ортогональны в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ при условии $|n_1-n_2|\geqslant 2$. Это прямое следствие того, что носители функций ψ_{n_1} и ψ_{n_2} не пересекаются (и, следовательно, эти функции ортогональны). Благодаря этому факту, выражение B_4, стоящее в левой части неравенства (2.10), можно оценить следующим образом:

$$B_4 \lesssim \sum_{2^{-(n-10)}\leqslant l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \int_Q (f*P_n)(u) S_n(x-u)du \Big|^2 dx$$
$$= \sum_{2^{-(n-10)}\leqslant l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q} \Big| \int_Q (f*P_n)(u) S_n(x-u)du \Big|^2 dx$$
$$+ \sum_{2^{-(n-10)}\leqslant l(Q)} \int_Q \Big| \int_Q (f*P_n)(u) S_n(x-u)du \Big|^2 dx.$$

Первое слагаемое здесь оценивается аналогично приведённой выше оценке выражения B_3. Второе слагаемое не превосходит удвоенной суммы

$$\sum_{2^{-(n-10)}\leqslant l(Q)} \int_Q \Big| \int_{\mathbb{R}^d} (f*P_n)(u) S_n(x-u)du \Big|^2 dx$$
$$+ \sum_{2^{-(n-10)}\leqslant l(Q)} \int_Q \Big| \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q} (f*P_n)(u) S_n(x-u)du \Big|^2 dx.$$

Здесь второе слагаемое не превосходит суммы величин G_n^2 — и легко оценивается при помощи уже доказанного неравенства (2.12). Принимая во внимание тот факт, что $P_n * S_n = S_n$, мы можем заключить, что первое слагаемое равно

$$\sum_{2^{-(n-10)}\leqslant l(Q)} \int_Q \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(t) S_n(x-t)dt \Big|^2 dx,$$

что в свою очередь не превосходит $\|f\|_D^2 |Q|$ по определению нормы $\|f\|_D$. Таким образом, мы закончили оценку выражения B_4, а, следовательно, и B_1.

2.3.2 Оценка слагаемого B_2

Для того, чтобы завершить доказательство теоремы, нам остаётся доказать следующее неравенство.

$$B_2 = \frac{1}{|Q|^{1/2}} \Big(\int_Q \Big| \sum_{2^{-(n-10)}> l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)(S_n(x-t) - S_n(y-t))dt \Big|^2 dx \Big)^{1/2} \lesssim \|f\|_D.$$

Напомним, что y здесь — это центр (фиксированного) куба Q. В очередной раз воспользовавшись равенством $S_n = S_n * P_n$, мы можем заключить, что имеет место следующее неравенство:

$$B_2 \leqslant \frac{1}{|Q|^{1/2}}\Big(\int_Q \Big|\sum_{2^{-(n-10)}>l(Q)} \int_{\mathbb{R}^d} |(f*P_n)(u)||S_n(x-u)-S_n(y-u)|du\Big|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Не умаляя общности, будем считать, что центр куба Q находится в нуле, так что $y = 0$. Мы будем отдельно оценивать слагаемые в приведённой выше формуле — более конкретно, рассмотрим выражение

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*P_n)(-u)||S_n(u-x)-S_n(u)|du. \tag{2.13}$$

Разобьём пространство $\mathbb{R}^d$ на кубы $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ с длиной ребра $2^{-(n-10)}$ (так, что центр куба δ_k находится в точке $2^{-(n-10)}k$). Через G_m, $m \in \mathbb{N}$, обозначим объединение таких кубов, что максимальные (по модулю) координаты их центров лежат в промежутке между $2^{-(n-10)+m}$ и $2^{-(n-10)+m+1}$, а через G_0 — объединение всех оставшихся кубов. Таким образом, мы видим, что выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{G_m} &|(f*P_n)(-u)||S_n(u-x)-S_n(u)|du\\ &\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\int_{G_m}|(f*P_n)(u)|^2du\Big)^{1/2}\Big(\int_{G_m}|S_n(u-x)-S_n(u)|^2du\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Из леммы 2.1 следует, что

$$\Big(\int_{G_m}|(f*P_n)(u)|^2du\Big)^{1/2} \lesssim |G_m|^{1/2}\|f\|_D \asymp 2^{md/2}\cdot 2^{-nd/2}\cdot\|f\|_D.$$

Сосредоточимся теперь на оценке второго множителя в правой части неравенства (2.14):

$$\Big(\int_{G_m}|S_n(u-x)-S_n(u)|^2du\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_{\{|u|\geqslant 2^{-n+m}\}}|S_n(u-x)-S_n(u)|^2du\Big)^{1/2}.$$

Для оценки этого интеграла нам необходимо воспользоваться свойствами “сокращения” для ядра $\widetilde{S_n}(u) := S_n(u-x)-S_n(u)$. Напомним, что для всякого числа $r > 1$ мы используем обозначение $r' = r/(r-1)$. Зафиксируем число q, $1 < q < \infty$, большее, чем $d/(2a-d)$. Используя неравенства Гёльдера и Хаусдорфа–Юнга, напишем:

$$\int_{|u|\geqslant 2^{-n+m}} |\widetilde{S_n}(u)|^2 du \lesssim \sum_{j=1}^{d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u_j^a \widetilde{S_n}(u)|^{2q'}\Big)^{1/q'} \Big(\int_{\{|u|\geqslant 2^{-n+m}\}} |u|^{-2aq} du\Big)^{1/q}$$
$$\asymp \sum_{j=1}^{d} 2^{(-n+m)(-2aq+d)/q} \|u_j^a \widetilde{S_n}(u)\|_{2q'}^2 \lesssim \sum_{j=1}^{d} 2^{(-n+m)(-2aq+d)/q} \|D_{\xi_j}^a \widehat{\widetilde{S_n}}(\xi)\|_{(2q')'}^2.$$

Прямое вычисление показывает, что $(2q')' = 2q/(q+1)$. Поэтому выражение, стоящее в правой части неравенства (2.14) не превосходит

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{md/2} \cdot 2^{-nd/2} \cdot \|f\|_D \cdot 2^{(-n+m)(-2aq+d)/2q} \cdot \max_j \|D_{\xi_j}^a \widehat{\widetilde{S_n}}(\xi)\|_{\frac{2q}{q+1}}$$
$$= \|f\|_D \cdot \max_j \|D_{\xi_j}^a \widehat{\widetilde{S_n}}(\xi)\|_{\frac{2q}{q+1}} \cdot 2^{-nd/2} \cdot 2^{na} \cdot 2^{-nd/2q} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(\frac{d}{2}-a+\frac{d}{2q})}.$$

Поскольку q больше, чем $d/(2a-d)$, стоящая здесь сумма — это некоторая конечная константа, и таким образом нам нужно оценивать выражение

$$\|f\|_D \cdot \max_j \|D_{\xi_j}^a \widehat{\widetilde{S_n}}(\xi)\|_{\frac{2q}{q+1}} \cdot 2^{-nd/2} \cdot 2^{na} \cdot 2^{-nd/2q}.$$

Для того, чтобы оценить величину $\|D_{\xi_j}^a \widehat{\widetilde{S_n}}(\xi)\|_{2q/(q+1)}$, заметим, что выполняется соотношение $\widehat{\widetilde{S_n}}(\xi) = \psi_n(\xi)(e^{2\pi i x\cdot\xi} - 1)$, и потому

$$\operatorname{supp} \widehat{\widetilde{S_n}} \subset \{2^{n-1} \leqslant |\xi| < 2^{n+1}\}.$$

Легко видеть, что для всякого числа $\gamma \leqslant a$, и $x \in Q$, $\xi \in \operatorname{supp} \widehat{\widetilde{S_n}}$ верно неравенство

$$|D_{\xi_j}^{\gamma}[e^{2\pi i x\cdot\xi} - 1]| \lesssim l(Q) 2^{n(1-\gamma)}.$$

В самом деле, для $\gamma = 0$ это так, поскольку $|e^{2\pi i x\cdot\xi} - 1| \lesssim |x\cdot\xi| \lesssim 2^n l(Q)$, а для $\gamma > 0$ это следствие неравенства $D_{\xi_j}^{\gamma}[e^{2\pi i x\cdot\xi}] \lesssim |x|^{\gamma} \lesssim l(Q)(2^{-n})^{\gamma-1}$.

Используя полученную выше оценку и правило Лейбница, мы получаем следующее неравенство.

$$|D_{\xi_j}^a \widehat{\widetilde{S_n}}(\xi)| \lesssim l(Q) \sum_{r=0}^{a} |D_{\xi}^r \psi_n(\xi)| \cdot 2^{-n(a-r-1)}.$$

Это позволяет нам заключить, что

$$\|D^a_{\xi_j}\widehat{\widetilde{S_n}}(\xi)\|_{\frac{2q}{q+1}} \lesssim l(Q)\cdot \max_{0\leqslant r\leqslant a} 2^{-n(a-r-1)}\|D^r_{\xi_j}\psi_n(\xi)\|_{\frac{2q}{q+1}}.$$

Стоящую здесь норму оценим при помощи неравенства Гёльдера:

$$\|D^r_{\xi_j}\psi_n(\xi)\|^{\frac{2q}{q+1}}_{\frac{2q}{q+1}} = \int_{2^{n-1}\leqslant|\xi|<2^{n+1}} |D^r_{\xi_j}\psi_n(\xi)|^{\frac{2q}{q+1}}d\xi$$
$$\leqslant |\{2^{n-1}\leqslant|\xi|<2^{n+1}\}|^{1/(q+1)}\Big(\int |D^r_{\xi_j}\psi_n(\xi)|^2 d\xi\Big)^{q/(q+1)}.$$

Первый сомножитель здесь не превосходит (с точностью до константы) величины $2^{nd/(q+1)}$, а второй — величины $(2^{nd-2nr})^{q/(q+1)}$, благодаря третьему условию доказываемой теоремы. Поэтому мы получаем неравенство

$$\|D^r_{\xi_j}\psi_n(\xi)\|_{\frac{2q}{q+1}} \lesssim 2^{\frac{nd}{2q}}\cdot 2^{\frac{nd}{2}-nr}.$$

Наконец, собирая вместе полученные оценки, мы видим, что правая часть неравенства (2.14) оценивается сверху величиной $2^n l(Q)\|f\|_D$.

Чтобы завершить оценку выражения (2.13), остаётся вывести аналогичное неравенство для выражения

$$\int_{G_0} |f * P_n(-u)||S_n(u-x)-S_n(u)|du.$$

Заметим, что G_0 состоит из фиксированного количества кубов: это количество зависит только от размерности d. Поэтому нам достаточно получить оценку для интеграла по δ, где $\delta\in G_0$, то есть для выражения

$$\int_{\delta} |f * P_n(-u)||S_n(u-x)-S_n(u)|du.$$

Используя основные свойства преобразования Фурье, а также неравенство Гёльдера, мы видим, что

$$|S_n(u-x)-S_n(u)| \lesssim l(Q)\|\nabla S_n\|_\infty \lesssim l(Q)\||\xi|\psi_n(\xi)\|_1$$
$$\lesssim l(Q)2^n\|\psi_n\|_1 \lesssim l(Q)2^n 2^{nd/2}\|\psi_n\|_2 \lesssim 2^{nd}l(Q)2^n.$$

Отсюда вытекает следующая оценка:

$$\int_\delta |f * P_n(-u)||S_n(u-x) - S_n(u)|du \lesssim 2^{nd} l(Q) 2^n \int_\delta |f * P_n(-u)|du$$
$$\leqslant 2^{nd} l(Q) 2^n |\delta|^{1/2} \left(\int_\delta |f * P_n(-u)|^2 du \right)^{1/2} \lesssim 2^{nd} |\delta| l(Q) 2^n \|f\|_D \lesssim \|f\|_D l(Q) 2^n.$$

Отметим, что здесь мы в очередной раз воспользовались леммой 2.1.

Наконец, мы готовы закончить оценку слагаемого B_2, а значит и доказательство теоремы:

$$B_2 \lesssim \sum_{2^{-(n-10)} > l(Q)} \|f\|_D \cdot l(Q) \cdot 2^n \lesssim \|f\|_D.$$

Глава 3

Неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для систем Виленкина

3.1 Введение

Основная цель настоящей главы — доказать теорему 2. Напомним, что построение функций Виленкина описано в первой главе. Приведём для полноты их альтернативное построение.

Пусть $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, каждое из которых не меньше, чем 2. В таком случае, система Виленкина, соответствующая этой последовательности, — это множество характеров (то есть непрерывных гомоморфизмов в единичную окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) на группе

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i}.$$

Такие системы были впервые введены и изучены Н. Я. Виленкиным в его работе [4].

Обозначим произведение $p_1 p_2 \dots p_l$ через m_l (и будем считать, что $m_0 = 1$). Нам будет удобно считать функции из систем Виленкина заданными на отрезке $[0, 1]$ (иногда их считают заданными на полуинтервале, см., например, определения в книгах [5, 54], но в контексте настоящей работы это несущественно) — множество G (с мерой Хаара на G) можно отождествить с отрезком $[0, 1]$ (за исключением счётного числа точек) с помощью отображения

$$G \ni (a_1, a_2, \ldots) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{m_i}.$$

Здесь мы считаем, что $0 \leqslant a_i \leqslant p_i - 1$. Нетрудно видеть, что такое отображение сохраняет меру.

Всякая функция Виленкина (отныне мы будем считать их заданными на отрезке $[0, 1]$) представляется в виде произведения обобщённых функций Радемахера: если число n записывается в m-ичной системе счисления в виде $n = \alpha_1 + \alpha_2 m_1 + \ldots \alpha_k m_{k-1}$, где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant p_i - 1$, то функция Виленкина w_n равна $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \ldots r_k^{\alpha_k}$. Напомним, что для того, чтобы обозначить тот факт, что число n имеет вышеуказанное разложение в m-ичной системе счисления, мы используем следующее обозначение:

$$n \sim \begin{pmatrix} m_{k-1} & \ldots & m_1 & m_0 \\ \alpha_k & \ldots & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Итак, наша цель — для всякого $1 < p \leqslant 2$ доказать неравенство

$$\Big\| \sum_s f_s \Big\|_p \lesssim \Big\| \Big(\sum_s |f_s|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p.$$

Здесь функции f_s таковы, что $\operatorname{supp} \widehat{f_s} \subset I_s$, где $\{I_s\}$ — какой-то набор попарно не пересекающихся отрезков в $\mathbb{N}_0$. Разумеется, в этой главе под $\widehat{f}$ мы подразумеваем последовательность коэффициентов Виленкина функции f, то есть $\widehat{f}(n) = \int f \bar{w}_n$

3.2 Вспомогательные утверждения

Пусть $k, l \in \mathbb{N}_0$ — числа, записывающиеся в (m)-ичной системе счисления следующим образом:

$$k = \alpha_1 + \alpha_2 m_1 + \ldots + \alpha_j m_{j-1}, \quad l = \beta_1 + \beta_2 m_1 + \ldots + \beta_j m_{j-1}.$$

Тогда нетрудно видеть, что произведение функций w_k и w_l — это функция Виленкина $w_{k \dotplus l}$, где $k \dotplus l$ — число, имеющее следующую (m)-ичную запись:

$$\begin{pmatrix} m_{j-1} & \dots & m_1 & m_0 \\ (\alpha_j + \beta_j) \bmod p_j & \dots & (\alpha_2 + \beta_2) \bmod p_2 & (\alpha_1 + \beta_1) \bmod p_1 \end{pmatrix}.$$

Через $(\dot{-}k)$ будем обозначать число, обратное k относительно операции $\dotplus$.

Символом $\mathcal{F}_k$ обозначим σ-алгебру, порождённую интервалами $[jm_k^{-1}, (j+1)m_k^{-1})$, $0 \leqslant j \leqslant m_k - 1$. В таком случае оператор $\mathbb{E}_k$,

$$\mathbb{E}_k f = \sum_{n=0}^{m_k - 1} (f, w_n) w_n,$$

является оператором условного матожидания относительно $\mathcal{F}_k$. Соответствующие мартингальные разности тогда имеют вид

$$\Delta_k f = \mathbb{E}_k f - \mathbb{E}_{k-1} f = \sum_{n=m_{k-1}}^{m_k - 1} (f, w_n) w_n.$$

Под $\Delta_0 f$ мы понимаем функцию $(f, w_0) w_0$ (то есть попросту функцию, равную $\int f$ на отрезке $[0,1]$) Отметим, что ограниченность последовательности $\{p_i\}$ равносильна тому, что фильтрация $\{\mathcal{F}_k\}$ регулярна (то есть для всякого множества $e \in \mathcal{F}_k$ найдётся множество $e' \in \mathcal{F}_{k-1}$, содержащее e, меры не более, чем в M раз большей).

Мартингальная квадратичная функция Sf задаётся следующим образом:

$$Sf = \sqrt{\sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j f|^2}.$$

Хорошо известно, что для $p > 1$ выполняется соотношение $\|Sf\|_p \asymp \|f\|_p$ (см., например, [54, §2.2]).

Однако, при работе с системами Виленкина, часто оказывается более удобна другая квадратичная функция. Определим операторы $\Delta_{k,l}$ по формуле:

$$\Delta_{k,l} f = \sum_{n=lm_{k-1}}^{(l+1)m_{k-1}-1} (f, w_n) w_n, \quad 1 \leqslant l \leqslant p_k - 1.$$

Квадратичная функция, которой мы будем пользоваться, имеет следующий вид:

$$\widetilde{S}f = \Big(|\Delta_0 f|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{p_k-1}|\Delta_{k,l}f|^2\Big)^{1/2}.$$

Такая квадратичная функция рассматривалась ещё в работе [53]. Там же было доказано, что её L^p-норма оценивается через L^p-норму самой функции f. Однако, мы приведём здесь несложное доказательство этого факта для полноты изложения (к тому же, это доказательство дословно работает и для ℓ^2-значных функций f).

Лемма 3.1. *Для* $1 < p < \infty$ *и* $f \in L^p$ *выполняется соотношение* $\|\widetilde{S}f\|_p \asymp \|f\|_p$.

Доказательство. Во-первых, очевидно, выполняется поточечная оценка $Sf \lesssim \widetilde{S}f$, поэтому достаточно доказать неравенство $\|\widetilde{S}f\|_p \lesssim \|Sf\|_p$. Для этого для всякого k зафиксируем l_k, $1 \leqslant l_k \leqslant p_k - 1$, и докажем оценку

$$\Big\|\Big(\sum_k |\Delta_{k,l_k}f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \lesssim \|Sf\|_p.$$

Из этого неравенства следует требуемое, так как $\widetilde{S}f$ представляется в виде корня из суммы квадратов нескольких (не более, чем M) квадратичных функций, стоящих в левой части неравенства.

Рассмотрим набор функций $(\Delta_1 f, \Delta_2 f, \ldots) = (f_1, f_2, \ldots)$. Заметим, что верно следующее соотношение:

$$\Delta_{k,l_k}f = w_{l_k m_{k-1}}\mathbb{E}_{k-1}[w_{l_k m_{k-1}}^{-1} f_k].$$

Это соотношение вытекает из того, что $w_n^{-1}w_m = w_{m \dot{-} n}$ и

$$[l_k m_{k-1}, (l_k+1)m_{k-1} - 1] \dot{-} l_k m_{k-1} = [0, m_{k-1} - 1].$$

Таким образом, мы можем написать:

$$\Big\|\Big(\sum_k |\Delta_{k,l_k}f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p = \Big\|\Big(\sum_k \big|\mathbb{E}_{k-1}[w_{l_k m_{k-1}}^{-1} f_k]\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p$$

$$\lesssim \Big\|\Big(\sum_k \big|w_{l_k m_{k-1}}^{-1} f_k\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p = \|Sf\|_p.$$

Мы воспользовались здесь тем, что для произвольных натуральных чисел n_k выполняется неравенство

$$\|\{\mathbb{E}_{n_k} g_k\}\|_{L^p(\ell^2)} \lesssim \|\{g_k\}\|_{L^p(\ell^2)}.$$

Оно следует из того, что квадратичная функция (мартингальная) от ℓ^2-значной функции $\{\mathbb{E}_{n_k} g_k\}$ не больше, чем квадратичная функция от $\{g_k\}$. В самом деле, имеет место неравенство:

$$S(\{g_k\}) = \Big(\sum_k \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j g_k|^2\Big)^{1/2} \geqslant \Big(\sum_k \sum_{j=0}^{n_k} |\Delta_j g_k|^2\Big)^{1/2} = S(\{\mathbb{E}_{n_k} g_k\}).$$

□

Как уже было сказано, эта лемма верна и для скалярных, и для ℓ^2-значных функций f. Отметим также, что здесь существенно используется ограниченность системы Виленкина — без этого предположения лемма не верна, что также было показано в работе [53].

Нам потребуется ещё одно несложное свойство операторов $\Delta_{k,l}$. Заметим, что, если носитель функции f лежит в множестве $e_k \in \mathcal{F}_{k-1}$, то и носитель функции Δ_k будет содержаться в e_k (так как $\Delta_k f = \mathbb{E}_k f - \mathbb{E}_{k-1} f$, а операторы $\mathbb{E}_k$ и $\mathbb{E}_{k-1}$ усредняют функцию f по отрезкам из $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{F}_{k-1}$, соответственно). Докажем такое же свойство и для $\Delta_{k,l}$.

Лемма 3.2. *Пусть* $\operatorname{supp} f \subset e_k \in \mathcal{F}_{k-1}$. *Тогда* $\operatorname{supp} \Delta_{k,l} f \subset e_k$, $1 \leqslant l \leqslant p_k - 1$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что e_k — один из отрезков длины m_{k-1}, порождающий σ-алгебру $\mathcal{F}_{k-1}$, то есть отрезок вида $[jm_{k-1}^{-1}, (j+1)m_{k-1}^{-1})$. Рассмотрим любой другой такой отрезок e и докажем, что $\Delta_{k,l} f = 0$ на e. Как было сказано выше, функция

$$\Delta_k f = \sum_{l=1}^{p_k-1} \Delta_{k,l} f$$

равна нулю на e. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что функции $\Delta_{k,l} f$, $1 \leqslant l \leqslant p_k - 1$, попарно ортогональны в пространстве $L^2(e)$.

Для этого в свою очередь достаточно проверить ортогональность в $L^2(e)$ функций w_{n_1} и w_{n_2}, если $n_1 \in [l_1 m_{k-1}, (l_1 + 1)m_{k-1} - 1]$, а $n_2 \in [l_2 m_{k-1}, (l_2 + 1)m_{k-1} - 1]$. Такие функции w_{n_1} и w_{n_2} имеют следующий вид:

$$w_{n_1} = r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_{k-1}^{\alpha_{k-1}} r_k^{l_1}, \quad w_{n_2} = r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \dots r_{k-1}^{\beta_{k-1}} r_k^{l_2},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ и $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ — какие-то целые неотрицательные числа. По построению, функции $r_1, \dots, r_{k-1}$ постоянны на $e_k \in \mathcal{F}_{k-1}$, а ортогональность функций $r_k^{l_1}$ и $r_k^{l_2}$ на e следует из того, что

$$\int_e r_k^{l_1} \bar{r}_k^{l_2} = \int_e r_k^{l_1 - l_2} = m_k^{-1} \sum_{s=0}^{p_k - 1} e^{\frac{2\pi i (l_1 - l_2) s}{p_k}} = 0.$$

□

Нам потребуется аналог теоремы Ганди для систем Виленкина. Благодаря лемме 3.2, мы можем переформулировать теорему Ганди в удобном виде. Доказательство теоремы Ганди для векторнозначных мартингалов приведено в статье [6].

Предложение 3.1. *Пусть T — линейный оператор, переводящий ℓ^2-значные функции, заданные на отрезке $[0,1]$, в скалярные. Пусть также область определения T содержит все "полиномы Виленкина", то есть такие функции f, что $\mathbb{E}_n f = f$ для всех достаточно больших n. Предположим ещё, что выполняются следующие условия.*

1. $\|Tf\|_2 \lesssim \|f\|_2$.

2. Если функция f такова, что $\Delta_0 f = 0$ и $\operatorname{supp} \Delta_k f \subset e_k$, где $e_k \in \mathcal{F}_{k-1}$, то $\{Tf \neq 0\} \subset \cup_{k \geqslant 1} e_k$.

Тогда оператор T — слабого типа $(1,1)$ и, следовательно, действует из $L^p(\ell^2)$ в L^p при $1 < p \leqslant 2$.

Из леммы 3.2 следует, что во втором условии этой теоремы операторы Δ_k можно заменить на $\Delta_{k,l}$.

Лемма 3.3. *В предыдущем предложении условие 2 можно заменить на следующее: 2'. Если функция f такова, что $\Delta_0 f = 0$ и $\operatorname{supp} \Delta_{k,l} f \subset e_k \in \mathcal{F}_{k-1}$ для всех $1 \leqslant l < p_k - 1$, то $\{Tf \neq 0\} \subset \cup_{k \geqslant 1} e_k$.*

В самом деле, из леммы 3.2 следует, что, если $\Delta_k f \subset e_k$, то и $\Delta_{k,l} f \subset e_k$.

Применяя лемму 3.3, можно получить ограниченность в L^p операторов специального вида, которые понадобятся нам в дальнейшем. Символом $\delta_{k,l}$ обозначим интервал $[lm_{k-1},(l+1)m_{k-1}-1]$.

Следствие. *Пусть* $\mathcal{A}\subset\mathbb{N}_0^2$, $h=\{h_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{N}_0^2}\in L^p(\ell^2)$. *Для всякого элемента* $(j,k)\in\mathcal{A}$ *зафиксируем множество* $\Lambda_{\mathcal{A}}\subset[1,p_k-1]$. *Пусть также* $\{a_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathcal{A}}$ *— такой набор целых неотрицательных чисел, что* $\{a_{j,k}\dotplus\delta_{k,l}\}_{\substack{(j,k)\in\mathcal{A}\\ l\in\Lambda_{\mathcal{A}}}}$ *— набор непересекающихся подмножеств* $\mathbb{N}_0$. *Зададим оператор* G *формулой*

$$Gh=\sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{A}\\ l\in\Lambda_{\mathcal{A}}}} w_{a_{j,k}}\Delta_{k,l}h_{j,k}.$$

Тогда $\|Gh\|_p\lesssim\|h\|_{L^p(\ell^2)}$ *при* $1<p\leqslant 2$.

Доказательство. Так как множества $a_{j,k}\dotplus\delta_{k,l}$ не пересекаются, функции $w_{a_{j,k}}\Delta_{k,l}(h_{j,k})$ попарно ортогональны. Поэтому мы можем написать:

$$\|Gh\|_2^2=\sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{A}\\ l\in\Lambda_{\mathcal{A}}}}\|w_{a_{j,k}}\Delta_{k,l}h_{j,k}\|_2^2=\sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{A}\\ l\in\Lambda_{\mathcal{A}}}}\|\Delta_{k,l}h_{j,k}\|_2^2\leqslant\|h\|_2^2.$$

Кроме того, очевидно, для G выполняется условие 2' из леммы 3.3, а значит G — оператор слабого типа $(1,1)$ и действует из $L^p(\ell^2)$ в L^p при $1<p\leqslant 2$. □

Теперь мы готовы перейти к доказательству теоремы 2.

3.3 Доказательство теоремы 2

Нам даны непересекающиеся интервалы $I_s=[a_s,b_s)\subset\mathbb{N}_0$. Доказательство теоремы 2 будет состоять из двух частей: разбиения каждого из интервалов на более мелкие (обобщающее конструкцию из работы [44]) и применения этого разбиения к оценке L^p-нормы функции $\sum_s f_s$.

3.3.1 Конструкция разбиения интервалов

Опустим здесь индекс s и опишем разбиение интервала $I = [a, b)$. Пусть b имеет следующую (m)-ичную запись:

$$b = \beta_{k+1} m_k + \beta_k m_{k-1} + \ldots + \beta_1.$$

Разобьём сначала интервал $[0, b)$ следующим образом:

$$[0, b) = \bigcup_{j=1}^{k+1} J_j, \quad \text{где } J_j = [\beta_{k+1} m_k + \ldots + \beta_{j+1} m_j, \beta_{k+1} m_k + \ldots + \beta_j m_{j-1} - 1].$$

В частности, J_{k+1} — это интервал $[0, \beta_{k+1} m_k - 1]$. Если $\beta_j = 0$ при некотором j, то интервал J_j мы считаем пустым. Отметим, что J_j состоит из всех чисел, имеющих следующее (m)-ичное представление:

$$J_j \sim \begin{pmatrix} m_k & \ldots & m_j & m_{j-1} & m_{j-2} & \ldots & m_0 \\ \beta_{k+1} & \ldots & \beta_{j+1} & [0, \beta_j - 1] & * & \ldots & * \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Эта запись означает, что числа из интервала J_j в (m)-ичной системе счисления представляются в виде $\beta_{k+1} m_k + \ldots + \beta_{j+1} m_j + \gamma_j m_{j-1} + \varepsilon_{j-1} m_{j-2} + \ldots + \varepsilon_1$, где $\gamma_j \in [0, \beta_j - 1]$, а ε_i — любое число в промежутке $[0, p_i - 1]$, $1 \leqslant i \leqslant j - 1$. Мы будем пользоваться подобной записью в дальнейшем без дополнительных пояснений.

Число a попадает в один из интервалов J_j — пусть $a \in J_t$, $1 \leqslant t \leqslant k + 1$. В таком случае, a в (m)-ичной системе счисления записывается следующим образом:

$$a = \beta_{k+1} m_k + \ldots + \beta_{t+1} m_t + \alpha_t m_{t-1} + \alpha_{t-1} m_{t-2} + \ldots + \alpha_1,$$

причём $\alpha_t < \beta_t$. Для удобства положим $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} \ldots, \alpha_{t+1} = \beta_{t+1}$. Разобьём теперь отрезок $[a, \beta_{k+1} m_k + \ldots + \beta_{t+1} m_t + \beta_t m_{t-1} - 1] = [a, +\infty) \cap J_t$ следующим образом:

$$[a, +\infty) \cap J_t = \{a\} \cup \bigcup_{j=1}^{t} \widetilde{J}_j,$$

где при $1 \leqslant j \leqslant t-1$

$$\widetilde{J}_j = [\alpha_{k+1}m_k + \ldots + \alpha_{j+1}m_j + (\alpha_j + 1)m_{j-1}, \alpha_{k+1}m_k + \ldots + \alpha_{j+1}m_j + p_j m_{j-1} - 1],$$

а отрезок $\widetilde{J}_t$ имеет вид

$$\widetilde{J}_t = [\alpha_{k+1}m_k + \ldots + \alpha_{t+1}m_t + (\alpha_t + 1)m_{t-1}, \alpha_{k+1}m_k + \ldots + \alpha_{t+1}m_t + \beta_t m_{t-1} - 1].$$

Если $\alpha_j = p_j - 1$, $1 \leqslant j \leqslant t-1$, то отрезок $\widetilde{J}_j$ мы считаем пустым. Аналогично, если $\alpha_t = \beta_t - 1$, то $\widetilde{J}_t = \varnothing$. Опять же, отметим, что отрезок $\widetilde{J}_j$ при $1 \leqslant j \leqslant t-1$ состоит из чисел, имеющих следующее (m)-ичное представление:

$$\widetilde{J}_j \sim \begin{pmatrix} m_k & \ldots & m_j & m_{j-1} & m_{j-2} & \ldots & m_0 \\ \alpha_{k+1} & \ldots & \alpha_{j+1} & [\alpha_j + 1, p_j - 1] & * & \ldots & * \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Отрезок $\widetilde{J}_t$ в таком виде можно записать следующим образом:

$$\widetilde{J}_t \sim \begin{pmatrix} m_k & \ldots & m_t & m_{t-1} & m_{t-2} & \ldots & m_0 \\ \alpha_{k+1} & \ldots & \alpha_{t+1} & [\alpha_t + 1, \beta_t - 1] & * & \ldots & * \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Итак, мы построили разбиение отрезка $I = [a, b)$:

$$I = \{a\} \cup \bigcup_{j=1}^{t} \widetilde{J}_j \cup \bigcup_{j=1}^{t-1} J_j.$$

3.3.2 Завершение доказательства

Будем теперь писать индекс s у интервалов, получающихся при разбиении интервала I_s:

$$I_s = \{a_s\} \cup \bigcup_{j=1}^{t_s} \widetilde{J}_{j,s} \cup \bigcup_{j=1}^{t_s-1} J_{j,s}.$$

Положим также $\{a_s\} =: \widetilde{J}_{0,s}$. Каждую функцию f_s также разобьём в соответствующую сумму:

$$f_s = \sum_{j=0}^{t_s} \widetilde{f}_{j,s} + \sum_{j=1}^{t_s-1} f_{j,s},$$

где функции $\widetilde{f}_{j,s}$ и $f_{j,s}$ определяются следующим образом:

$$\widetilde{f}_{j,s} = \sum_{n\in\widetilde{J}_{j,s}} (f_s, w_n)w_n,\ 0 \leqslant j \leqslant t_s; \quad f_{j,s} = \sum_{n\in J_{j,s}} (f_s, w_n)w_n,\ 1 \leqslant j \leqslant t_s - 1.$$

Введём обозначение:

$$\widetilde{g}_{j,s} = w_{a_s}^{-1}\widetilde{f}_{j,s},\ 0 \leqslant j \leqslant t_s; \quad g_{j,s} = w_{b_s}^{-1} f_{j,s},\ 1 \leqslant j \leqslant t_s - 1.$$

При помощи этого обозначения, перепишем формулу, определяющую функции f_s:

$$f_s = w_{a_s}\sum_{j=0}^{t_s}\widetilde{g}_{j,s} + w_{b_s}\sum_{j=1}^{t_s-1} g_{j,s}. \tag{3.4}$$

Отметим, что ненулевые коэффициенты Виленкина у функций $\widetilde{g}_{j,s}$ и $g_{j,s}$ содержатся в отрезках $\widetilde{J}_{j,s} \dot{-} a_s$ и $J_{j,s} \dot{-} b_s$, соответственно. Используя формулы (3.1), (3.2), (3.3), можно заключить, что эти множества имеют следующий вид (в формулах, приведённых ниже, предполагается, что $1 \leqslant j \leqslant t_s - 1$):

$$\widetilde{J}_{j,s} \dot{-} a_s \sim \begin{pmatrix} m_{k_s} & \dots & m_j & m_{j-1} & m_{j-2} & \dots & m_0 \\ 0 & \dots & 0 & [1, p_j - 1 - \alpha_{j,s}] & * & \dots & * \end{pmatrix}; \tag{3.5}$$

$$\widetilde{J}_{t_s,s} \dot{-} a_s \sim \begin{pmatrix} m_{k_s} & \dots & m_{t_s} & m_{t_s-1} & m_{t_s-2} & \dots & m_0 \\ 0 & \dots & 0 & [1, \beta_{t_s,s} - 1 - \alpha_{t_s,s}] & * & \dots & * \end{pmatrix}; \tag{3.6}$$

$$J_{j,s} \dot{-} b_s \sim \begin{pmatrix} m_{k_s} & \dots & m_j & m_{j-1} & m_{j-2} & \dots & m_0 \\ 0 & \dots & 0 & [p_j - \beta_{j,s}, p_j - 1] & * & \dots & * \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Отсюда и из формулы (3.4) вытекает соотношение

$$f_s = w_{a_s}\Big(\Delta_0\widetilde{g}_{0,s} + \sum_{j=1}^{t_s-1}\sum_{l=1}^{p_j-1-\alpha_{j,s}} \Delta_{j,l}\widetilde{g}_{j,s} + \sum_{l=1}^{\beta_{t_s,s}-1-\alpha_{t_s,s}} \Delta_{t_s,l}\widetilde{g}_{t_s,s}\Big) \\ + w_{b_s}\Big(\sum_{j=1}^{t_s-1}\sum_{l=p_j-\beta_{j,s}}^{p_j-1} \Delta_{j,l} g_{j,s}\Big).$$

Воспользовавшись следствием из леммы 3.3, мы можем заключить, что справедливо неравенство:

$$\Big\|\sum_s f_s\Big\|_p \lesssim \Big\|\Big(\sum_s\sum_{j=0}^{t_s}|\widetilde{g}_{j,s}|^2+\sum_s\sum_{j=1}^{t_s-1}|g_{j,s}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p. \tag{3.8}$$

Это выражение можно оценить величиной

$$\Big\|\Big(\sum_s\sum_{j=0}^{t_s}|\widetilde{g}_{j,s}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p+\Big\|\Big(\sum_s\sum_{j=1}^{t_s-1}|g_{j,s}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p =: A+B.$$

Оценим отдельно величины A и B.

Введём обозначение

$$\widetilde{g}_s = w_{a_s}^{-1}f_s = \sum_{j=0}^{t_s}\widetilde{g}_{j,s}+w_{a_s}^{-1}\sum_{j=1}^{t_s-1}f_{j,s}.$$

Из формул (3.5), (3.6), (3.1) соответственно, можно заключить, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&\widetilde{g}_{j,s}=\Delta_j\widetilde{g}_s,\ 0\leqslant j\leqslant t_s-1;\\
&\widetilde{g}_{t_s,s}=\sum_{l=1}^{\beta_{t_s,s}-1-\alpha_{t_s,s}}\Delta_{t_s,l}\widetilde{g}_s;\\
&w_{a_s}^{-1}\sum_{j=1}^{t_s-1}f_{j,s}=\Delta_{t_s,\beta_{t_s,s}-\alpha_{t_s,s}}\widetilde{g}_s.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$A\lesssim\Big\|\Big(|\Delta_0\widetilde{g}_s|^2+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{p_j-1}|\Delta_{j,l}\widetilde{g}_s|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p=\|\widetilde{S}(\{\widetilde{g}_s\}_s)\|_p,$$

где под записью $\widetilde{S}(\{\widetilde{g}_s\}_s)$ мы понимаем оператор $\widetilde{S}$, применённый к ℓ^2-значной функции $\{\widetilde{g}_s\}_s$. Остаётся применить лемму 3.1, заметить, что $\|\{g_s\}_s\|_{L^p(\ell^2)}=\|\{f_s\}_s\|_{L^p(\ell^2)}$ и завершить таким образом оценку выражения A.

Выражение B оценивается аналогично. Положим

$$g_s=w_{b_s}^{-1}f_s=w_{b_s}^{-1}\sum_{j=0}^{t_s}\widetilde{f}_{j,s}+\sum_{j=1}^{t_s-1}g_{j,s}.$$

Из формул (3.2), (3.3) и (3.7) можно сделать вывод, что выполняются соотношения

$$w_{b_s}^{-1} \sum_{j=0}^{t_s} \widetilde{f}_{j,s} = \Delta_{t_s} g_s;$$

$$g_{j,s} = \Delta_j g_s,\ 1 \leqslant j \leqslant t_s - 1.$$

Отсюда следует, что

$$B \lesssim \|S(\{g_s\}_s)\|_p \lesssim \|\{g_s\}_s\|_{L^p(\ell^2)} = \|\{f_s\}\|_{L^p(\ell^2)},$$

и теорема 2 доказана.

3.4 Случай $p \leqslant 1$

В этом параграфе мы покажем, что на самом деле из приведённого выше доказательства теоремы 2 можно вывести также некоторое неравенство для $p \leqslant 1$. Чтобы это сделать, нам понадобится понятие мартингальных классов Харди $\mathcal{H}^p$. Вся необходимая информация о них содержится в книге [54]. Отметим, что нужные нам утверждения верны и для скалярных, и для ℓ^2-значных классов Харди.

Функция f принадлежит классу Харди $\mathcal{H}^p$, если $Sf \in L^p$, $0 < p \leqslant 2$. В случае $p > 1$, как известно, $\mathcal{H}^p = L^p$, а для $p \leqslant 1$ классы Харди не совпадают с L^p. Полагают $\|f\|_{\mathcal{H}^p} = \|Sf\|_p$ (отметим, что для $p < 1$ выражение $\|\cdot\|_p$ является только квазинормой, а не нормой).

Сформулируем следующую теорему, которая доказывается аналогично теореме 2.

Теорема 6. *В условиях теоремы 1 для интервалов $I_s = [a_s, b_s)$ при $0 < p \leqslant 2$ выполняется неравенство*

$$\Big\|\sum_s f_s\Big\|_p \lesssim \|\{w_{a_s}^{-1} f_s\}_s\|_{\mathcal{H}^p(\ell^2)} + \|\{w_{b_s}^{-1} f_s\}_s\|_{\mathcal{H}^p(\ell^2)}.$$

Доказательство. Прежде всего, отметим, что для $p > 1$ эта теорема равносильна теореме 1 — достаточно заменить стоящие в правой части неравенства нормы в классе Харди на нормы в $L^p(\ell^2)$ и заметить, что $\|\{w_{a_s}^{-1} f_s\}_s\|_{L^p(\ell^2)} = \|\{w_{b_s}^{-1} f_s\}_s\|_{L^p(\ell^2)} = \|\{f_s\}_s\|_{L^p(\ell^2)}$.

Покажем теперь, как изменить доказательство теоремы 2, чтобы получить данное неравенство для $0 < p \leqslant 1$.

Во-первых, отметим, что оператор T, для которого выполняются условия леммы 3.3, действует из $\mathcal{H}^p(\ell^2)$ в L^p. Это очевидно следует из атомного разложения для классов Харди (опять же, см. книгу [54], в которой содержится соответствующая теория для скалярных классов $\mathcal{H}^p$; для пространств $\mathcal{H}^p(\ell^2)$ все соответствующие утверждения, такие как атомное разложение, остаются справедливыми).

Это наблюдение позволяет заключить, что неравенство (3.8) справедливо и в случае $0 < p \leqslant 1$ (ввиду того, что $\Delta_j \widetilde{g}_{j,s} = \widetilde{g}_{j,s}$ и $\Delta_j g_{j,s} = g_{j,s}$, см. формулы (3.5), (3.6), (3.7)).

Далее, выражения A и B мы оценили величинами $\|\widetilde{S}(\{\widetilde{g}_s\}_s)\|_p$ и $\|S(\{g_s\}_s)\|_p$. Для завершения доказательства теоремы 6 остаётся заметить, что $\|\widetilde{S}f\|_p \asymp \|Sf\|_p$ при $0 < p \leqslant 1$ (то есть классы Харди для систем Виленкина можно определять также и при помощи квадратичной функции $\widetilde{S}$). Этот факт известен — учитывая, что верно неравенство $Sf \lesssim \widetilde{S}f$, он является переформулировкой утверждения о том, что оператор $\widetilde{S}$ действует из $\mathcal{H}^p$ в L^p. В свою очередь, это верно, поскольку $\widetilde{S}$ — сублинейный оператор, удовлетворяющий условиям леммы 3.3. Это последнее утверждение проверяется, например, в работе [52] (и, кроме того, там доказывается, что $\|\widetilde{S}f\|_p \asymp \|Sf\|_p$ при $p = 1$). $\square$

3.5 Вопросы, которые остаются открытыми

Результаты настоящей главы доказываются в предположении ограниченности системы Виленкина. Это естественное предположение во многих вопросах анализа на группах Виленкина — см., например, работы [52] и [53]. Как уже было сказано ранее, ограниченность системы Виленкина необходима для ограниченности оператора $\widetilde{S}$ в L^p. Кроме того, из этого предположения вытекает регулярность рассматриваемой нами фильтрации. Тем не менее, в некоторых вопросах от предположения ограниченности удаётся отказаться (см., например, работу [56]). Мы не знаем, верны ли доказанные нами теоремы в случае неограниченных систем Виленкина, однако приведённый в настоящей работе “комбинаторный” подход существенно использует ограниченность.

Кроме того, мы не знаем, верно ли само неравенство из теоремы 1 при $0 < p \leqslant 1$. Однако тот факт, что неравенство (1.1) справедливо и для $p \leqslant 1$, позволяет надеяться, что соответствующая теорема верна и для систем Виленкина. Тем не менее, этот вопрос остаётся открытым даже в частном случае — для функций Уолша.

Глава 4

Неравенства для функций со значениями в банаховых пространствах

4.1 Введение

В настоящей главе мы докажем теоремы 3 и 4, сформулированные в четвёртом параграфе первой главы. Напомним, что в обеих этих теоремах речь идёт о свойстве LPR_p^w для банаховых пространств X, которое заключается в том, что для всякой X-значной функции выполняется неравенство (1.3):

$$\Big\| \sum_s \varepsilon_s P_{I_s} f \Big\|_{L^p(\mathrm{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}.$$

Здесь предполагается, что $p \geqslant 2$ — поскольку в противном случае такое неравенство не верно даже для $X = \mathbb{R}$.

Ключевым инструментом для доказательства теорем 3 и 4 будет являться конструкция из работы [44]. Однако, мы будем использовать её не так, как в указанной работе — мы не будем переходить к двойственности, и, таким образом, сможем обобщить доказательство скалярного неравенства на случай функций, принимающих значения в некоторых банаховых пространствах.

Напомним коротко основные факты о функциях Уолша, которыми мы будем пользоваться. Поскольку в предыдущей главе шла речь о более общих функциях Виленкина, эти факты (в даже более общем виде) уже были упомянуты, однако, для того, чтобы пользоваться ими в дальнейшем, будет удобно собрать их в одном месте.

Функции Радемахера (стандартные), заданные на отрезке $[0,1]$, определяются следующим образом: $r_k(x) = \operatorname{sign}\sin 2^k\pi x$. Для числа n, такого, что $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}$, где $k_1 > k_2 > \ldots > k_m \geqslant 0$, функция Уолша с номером n определяется как произведение $w_n = r_{k_1+1}r_{k_2+1}\ldots r_{k_m+1}$. Как известно, функции Уолша образуют ортонормированный базис в $L^2[0,1]$. Для всякой функции f, определённой на отрезке $[0,1]$, символом $\widehat{f}$ будем обозначать последовательность её коэффициентов разложения по этому базису, то есть $\widehat{f}(n) = (f, w_n) = \int f w_n$.

Предположим, что числа n_1 и n_2 имеют следующее двоичное представление:

$$n_1 = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k 2^k \quad \text{и} \quad n_2 = \sum_{j=0}^{m} \beta_j 2^j.$$

Мы будем использовать следующее обозначение:

$$n_1 \dot{+} n_2 = \sum_{k=0}^{m} ((\alpha_k + \beta_k) \bmod 2) 2^k.$$

Легко видеть, что в таком случае выполняется следующее соотношение:

$$w_{n_1} w_{n_2} = w_{n_1 \dot{+} n_2}.$$

Функции Уолша тесно связаны с двоичными мартингалами. Символом $\mathcal{F}_k$ обозначим σ-алгебру подмножеств отрезка $[0,1]$, порождённую диадическими интервалами длины 2^{-k}. Нетрудно видеть, что математическое ожидание функции f относительно $\mathcal{F}_k$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k) = \sum_{n=0}^{2^k-1} (f, w_n) w_n.$$

Для краткости мы будем использовать обозначение $\mathbb{E}_k f$ вместо $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)$. Обозначим через δ_k отрезок $[2^{k-1}, 2^k - 1]$ в $\mathbb{N}_0$. Мартингальные разности для функции f в таком случае имеют следующий вид:

$$\Delta_k f = \mathbb{E}_k f - \mathbb{E}_{k-1} f = \sum_{n \in \delta_k} (f, w_n) w_n, \qquad k \geqslant 1.$$

Положим также $\delta_0 = \{0\}$ и $\Delta_0 f = (f, w_0) w_0$.

На всякий случай, ещё раз упомянем, что мы используем обозначение

$$P_A f = \sum_{n \in A} (f, w_n) w_n = (\chi_A \widehat{f})^{\vee}.$$

Здесь $A \subset \mathbb{N}_0$ — произвольное множество целых неотрицательных чисел.

Приступим теперь к доказательству теоремы 3, то есть неравенства (1.3) для некоторого класса банаховых решёток.

4.2 Свойство LPR_p^w в банаховых решётках

Отметим прежде всего, что для банаховых решёток X, обладающих свойством UMD, неравенство (1.3) можно записать в том же виде, что и неравенство для скалярных функций:

$$\Big\| \Big(\sum_s |P_{I_s} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}.$$

Этот факт следует из неравенства Хинчина–Море (см., например, [30, стр. 86]; для неравенства Хинчина–Море необходимо некоторое геометрическое условие на решётку, а именно, её конечный котип — отметим, что из свойства UMD следует конечный котип, этот факт можно найти, например, в книге [48, стр. 409]).

Для того, чтобы доказать неравенство для банаховых решёток, мы сначала приведём доказательство для скалярных функций f, отличное от доказательства из работы [44], а потом обобщим его на случай X-значных функций f.

4.2.1 Комбинаторная конструкция

Пусть интервалы I_s имеют вид $I_s = [a_s, b_s)$. Нам потребуется разбиение этих интервалов, построенное в работе [44]:

$$I_s = \{a_s\} \cup \bigcup_{j\in\Theta_s} J_{js} \cup \bigcup_{i\in\widetilde{\Theta}_s} \widetilde{J}_{is}, \quad \text{где} \quad \Theta_s, \widetilde{\Theta}_s \subset \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Интервалы J_{js} и $\widetilde{J}_{is}$ таковы, что выполняются следующие соотношения:

$$a_s \dotplus J_{js} = \delta_j \quad \text{и} \quad b_s \dotplus \widetilde{J}_{is} = \delta_i. \tag{4.2}$$

Мы коротко опишем конструкцию этого разбиения (а все детали читатель может найти в статье [44]; кроме того, отметим, что эта конструкция — частный случай построенного нами в предыдущей главе разбиения интервалов).

Опустим индекс s и построим разбиение интервала $I = [a, b)$. Рассмотрим двоичную запись чисел a и b:

$$a = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k 2^k, \quad b = \sum_{k=0}^{N} \beta_k 2^k.$$

Для начала, построим разбиение интервала $[0, b)$. Пронумеруем все цифры, равные 1, в двоичной записи числа b:

$$\beta_{k_1} = \beta_{k_2} = \ldots = \beta_{k_l} = 1, \quad k_1 > k_2 > \ldots > k_l.$$

После этого возьмём следующие интервалы:

$$\widetilde{J}_{k_i+1} = \Big[\sum_{r=1}^{i-1} 2^{k_r}, \sum_{t=1}^{i} 2^{k_t}\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Нетрудно видеть, что $b \dotplus \widetilde{J}_{k_i+1} = \delta_{k_i+1}$.

Один из этих отрезков содержит число a. Предположим, что $a \in \widetilde{J}_{k_m+1}$. Это означает, что $\alpha_j = \beta_j$ для $j > k_m$ и $\alpha_{k_m} = 0$. Теперь наша задача — построить разбиение интервала

$$\Big(a, \sum_{t=1}^{m} 2^{k_t}\Big).$$

Это можно сделать похожим образом. Пронумеруем все цифры в двоичном представлении числа a, равные нулю:

$$\alpha_{k_m} = \alpha_{\varkappa_h} = \ldots = \alpha_{\varkappa_1} = 0, \quad k_m > \varkappa_h > \ldots > \varkappa_1.$$

После этого, возьмём следующие интервалы:

$$J_{\varkappa_i+1} = \Big[a + \sum_{j=1}^{i-1} 2^{\varkappa_j} + 1,\ a + \sum_{g=0}^{i} 2^{\varkappa_g}\Big], \quad i = 1, 2, \ldots, h.$$

Нетрудно видеть, что $a \dotplus J_{\varkappa_i+1} = \delta_{\varkappa_i+1}$, и таким образом мы построили требуемое разбиение.

4.2.2 Основное рассуждение для скалярных функций

Для доказательства неравенства (1.2) нам теперь достаточно доказать следующие три неравенства:

$$\Big\|\Big(\sum_s |P_{\{a_s\}} f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p},$$
$$\Big\|\Big(\sum_s \Big|\sum_{j\in\Theta_s} P_{J_{js}} f\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p},$$
$$\Big\|\Big(\sum_s \Big|\sum_{i\in\widetilde{\Theta}_s} P_{\widetilde{J}_{is}} f\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Первое неравенство легко следует из соображений ортогональности (поскольку, очевидно, $\sum_s |P_{\{a_s\}} f|^2 \leqslant \|f\|^2_{L^2}$). Таким образом, нам достаточно доказать второе (а третье доказывается аналогично). Введём следующее обозначение:

$$J_s = \bigcup_{j\in\Theta_s} J_{js}.$$

Заметим, что из формул (4.2) вытекает соотношение

$$P_{J_s} f = w_{a_s} \sum_{j\in\Theta_s} \Delta_j(w_{a_s} f).$$

Пользуясь этой формулой, мы можем переписать наше неравенство:

$$\Big\|\Big(\sum_s\Big|\sum_{j\in\Theta_s}\Delta_j(w_{a_s}f)\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p}\lesssim\|f\|_{L^p}.$$

Обозначим через G следующий оператор, действующий из L^p в пространство ℓ^2-значных функций:

$$f\mapsto\Big(\sum_{j\in\Theta_s}\Delta_j(w_{a_s}f)\Big)_s. \tag{4.3}$$

Наша задача свелась к тому, чтобы доказать, что G — ограниченный оператор из L^p в $L^p(\ell^2)$. Для ℓ^2-значной функции g рассмотрим подходящую максимальную функцию:

$$g^{\#}(x)=\sup_{I\ni x}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I\|g(t)-g_I\|_{\ell^2}^2\,dt\Big)^{1/2},\quad \text{где } g_I=\frac{1}{|I|}\int_I g(s)\,ds\in\ell^2.$$

Здесь супремум берётся по всем двоичным интервалам, содержащим точку x.

Кроме того, нам потребуется стандартная диадическая максимальная функция (на этот раз мы определяем её для скалярных функций f):

$$M_2f(x)=\sup_{I\ni x}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I|f|^2\Big)^{1/2}.$$

Здесь супремум также берётся по всем двоичным интервалам, содержащим точку x.

Наша цель — доказать следующую поточечную оценку:

$$(Gf)^{\#}(x)\lesssim M_2f(x). \tag{4.4}$$

Это неравенство влечёт доказываемую нами теорему для скалярных функций f, поскольку мы можем написать:

$$\|Gf\|_{L^p(\ell^2)}\lesssim\|(Gf)^{\#}\|_{L^p}\lesssim\|M_2f\|_{L^p}\lesssim\|f\|_{L^p}.$$

Здесь первое неравенство вытекает из того известного факта, что неравенство

$$\|g\|_{L^p(\ell^2)}\lesssim\|g^{\#}\|_{L^p}$$

выполняется для всякой ℓ^2-значной функции g, такой, что $\int_0^1 g=0$. По поводу доказательства этого факта см., например, теорему 1.2.5 в книге [42] — для скалярных функций g; в случае ℓ^2-значных функций доказательство проходит без изменений. Отметим, что $\int_0^1 Gf = 0 \in \ell^2$, поскольку $\int_0^1 \Delta_j(h) = 0$ для любой функции h и любого числа $j > 0$.

Для того чтобы доказать неравенство (4.4), достаточно проверить, что имеет место оценка

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I \sum_s \Big|\sum_{j\in\Theta_s} \Delta_j(w_{a_s}f) - h_s\Big|^2\Big)^{1/2} \lesssim \Big(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^2\Big)^{1/2}. \tag{4.5}$$

где

$$h_s = \frac{1}{|I|}\int_I \sum_{j\in\Theta_s} \Delta_j(w_{a_s}f).$$

Здесь I — двоичный интервал.

Заметим, что для всякой функции g интеграл $\int_I \Delta_j(g)$ равен нулю 0, если $2^{j-1} \geqslant |I|^{-1}$, — это так, поскольку для всякого такого интервала $\int_I \mathbb{E}_j g = \int_I \mathbb{E}_{j-1} g = \int_I g$. Следовательно, определение функции h_s можно переписать в виде

$$h_s = \frac{1}{|I|}\int_I \sum_{\substack{j\in\Theta_s,\\ 2^j\leqslant|I|^{-1}}} \Delta_j(w_{a_s}f).$$

С другой стороны, для всякой функции g функция $\Delta_j(g)$ постоянна на интервале I, если $|I| \leqslant 2^{-j}$ (поскольку обе функции $\mathbb{E}_j g$ и $\mathbb{E}_{j-1} g$ постоянны на I). Таким образом, левая часть формулы (4.5) равна следующему выражению:

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I \sum_s \Big|\sum_{\substack{j\in\Theta_s,\\ 2^{j-1}\geqslant|I|^{-1}}} \Delta_j(w_{a_s}f)\Big|^2\Big)^{1/2}.$$

Рассмотрим сужение функции f на интервал I: $\widetilde{f} = f|_I$. Пусть $|I| = 2^{-m}$ и одно из чисел a_s записывается в двоичной системе счисления в виде

$$a_s = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_t},$$

где

$$k_1 < \ldots < k_t, \quad k_l \leqslant m-1,\ k_{l+1} \geqslant m.$$

Обозначим через $\widetilde{a}_s$ число

$$2^{k_{l+1}-m} + \ldots + 2^{k_t - m}.$$

Кроме того, через $\widetilde{w}_n$ обозначим функции Уолша, "отмасштабированные" на отрезок I (то есть они образуют ортонормированный базис в пространстве $L^2(I;|I|^{-1}dx)$). Будем также использовать обозначение $\widetilde{\Delta}_j$ для двоичных мартингальных разностей на I. Тогда функция $\Delta_j(w_{a_s}f)$ совпадает на I с функцией $\pm\widetilde{\Delta}_{j-m}(\widetilde{w}_{\widetilde{a}_s}\widetilde{f})$ (отметим здесь, что функции $r_{k_1+1}, \ldots, r_{k_l+1}$ на I — постоянные, равные ± 1; кроме того, операторы Δ_j "локальны" в том смысле, что значение функции $\Delta_j g$ на I зависит только от сужения g на интервал I, если $2^{j-1} \geqslant |I|$).

Теперь нетрудно видеть, что из того, что множества

$$\{a_s \dotplus \delta_j\}_{j\in\Theta_s}$$

попарно не пересекаются при разных значениях s и j (а это так, поскольку $a_s \dotplus \delta_j = J_{js}$; см. формулу (4.2)), следует, что множества

$$\{\widetilde{a}_s \dotplus \delta_{j-m}\}_{\substack{j\in\Theta_s,\\ j\geqslant m+1}}$$

также попарно не пересекаются.

Следовательно, просто воспользовавшись равенством Парсеваля, можно заключить, что

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I \sum_s \Big| \sum_{\substack{j\in\Theta_s,\\ 2^{j-1}\geqslant |I|^{-1}}} \Delta_j(w_{a_s}f)\Big|^2\Big)^{1/2} \leqslant \|\widetilde{f}\|_{L^2(I;|I^{-1}|dx)} = \Big(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^2\Big)^{1/2},$$

и таким образом доказательство неравенства (4.4) завершено.

4.2.3 Неравенство для функций со значениями в решётке

После того, как мы доказали неравенство (4.4), мы можем закончить доказательство теоремы 3 аналогично тому, как это делается в статье [49] (для обычного свойства LPR_p).

Пусть X — банахова решётка. Нам понадобится тот факт, что, не умаляя общности, можно считать, что X — пространство Кётэ на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ). Это, по определению, означает, что X является банаховой решёткой измеримых функций на (Ω, Σ, μ), содержит все характеристические функции измеримых множеств и обладает тем свойством, что если $u \in X$ и v — измеримая функция, такая, что $|v| \leqslant |u|$, то $v \in X$ и $\|v\| \leqslant \|u\|$. Это следует из теоремы 1.b.14 в книге [40] (и, более того, эта теорема гарантирует, что $X' = X^*$, то есть что любой линейный непрерывный функционал на X имеет вид $u \mapsto \int_\Omega uw\, d\mu$ для некоторой измеримой функции w на Ω). В самом деле, свойство UMD для решётки $X_{(2)}$ влечёт свойство UMD для X (см. [51, Теорема 4]) — а отсюда следует рефлексивность решётки X (см. [48, стр. 183]); кроме того, можно считать её сепарабельной и что в ней есть слабая единица.

Помимо этого, решётка X обладает свойством Фату, то есть любая ограниченная по норме возрастающая последовательность неотрицательных функций u_n из X сходится к функции $u \in X$, причём $\|u\| = \lim \|u_n\|$ (см. [40, стр. 30]; напомним, что из свойства UMD следует рефлексивность решётки X). Нам понадобится это далее, в определении пространства $X(\ell^2)$ — чтобы корректно определить бесконечную квадратичную сумму функций из решётки.

Напомним, что решётка $X_{(2)}$ задаётся нормой

$$\|x\|_{X_{(2)}} = \||x|^{1/2}\|_X^2.$$

Пространство $X_{(2)}$ является банаховой решёткой тогда и только тогда, когда X — 2-выпуклая решётка, то есть для любых $x_1, \ldots, x_n \in X$ верно неравенство

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X \leqslant \Big(\sum_{j=1}^n \|x_j\|_X^2\Big)^{1/2}.$$

Аналогично скалярному случаю (см. начало предыдущего параграфа), ясно, что для доказательства теоремы 3 достаточно доказать следующие три неравенства (на этот раз для X-значных функций f):

$$\Big\|\Big(\sum_s |P_{\{a_s\}}f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}, \tag{4.6}$$

$$\Big\|\Big(\sum_s \Big|\sum_{j\in\Theta_s} P_{J_{js}}f\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}, \tag{4.7}$$

$$\Big\|\Big(\sum_s \Big|\sum_{i\in\widetilde{\Theta}_s} P_{\widetilde{J}_{is}}f\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}. \tag{4.8}$$

Оценка (4.6) в настоящем контексте также доказывается легко. Заметим, что для всякого фиксированного $\omega \in \Omega$ следующая оценка вытекает из равенства Парсеваля:

$$\Big(\sum_s |(f, w_{a_s})|^2\Big)^{1/2}(\omega) \leqslant \Big(\int_0^1 |f|^2\Big)^{1/2}(\omega).$$

Воспользовавшись этим неравенством, напишем:

$$\Big\|\Big(\sum_s |(f, w_{a_s})|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X \lesssim \Big\|\Big(\int_0^1 |f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X \leqslant \Big(\int_0^1 \|f\|_X^2\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant \Big(\int_0^1 \|f\|_X^p\Big)^{1/p} = \|f\|_{L^p(X)}.$$

Мы воспользовались 2-выпуклостью решётки X во втором неравенстве (мы можем считать, что f является конечной линейной комбинацией функций Уолша и, следовательно, константой на двоичных интервалах длины 2^{-n} для достаточно большого значения n; поэтому вместо интеграла мы можем написать сумму и воспользоваться 2-выпуклостью).

Приступим теперь к доказательству неравенств (4.7) и (4.8). Мы покажем только, как доказывать неравенство (4.7), поскольку (4.8) доказывается аналогично.

Напомним, что пространство $X(\ell^2)$ — это пространство последовательностей $x = (x_j) \subset X$, таких, что

$$\|x\|_{X(\ell^2)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\|\Big(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X < \infty.$$

Определим оператор G точно так же, как мы это делали для скалярных функций (см. формулу (4.3)). На этот раз наша цель — доказать, что G — ограниченный оператор из $L^p(X)$ в $L^p(X(\ell^2))$.

Для всякой X-значной функции f определим функцию $M_2 f$ следующим образом:

$$M_2 f(x) = \sup_{I \ni x} \Big(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^2 \Big)^{1/2}.$$

Отметим, что это функция двух переменных — для всякого фиксированного $\omega \in \Omega$ это обычная максимальная функция, применённая к скалярной функции $f(\cdot, \omega)$.

Для $X(\ell^2)$-значной функции g аналогичным образом определим функцию $g^\#$: для всякого фиксированного $\omega \in \Omega$ рассмотрим функцию $g^\#(\cdot, \omega)$ (которую мы уже определяли в предыдущем параграфе для ℓ^2-значной функции $g(\cdot, \omega)$). Таким образом, формула, задающая функцию $g^\#$ для $X(\ell^2)$-значной функции $g = (g_1, g_2, \ldots)$, имеет следующий вид:

$$g^\#(x) = \sup_{I \ni x} \Big(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(t) - (g_I)_j|^2 \, dt \Big)^{1/2}, \quad \text{где } g_I = \frac{1}{|I|} \int_I g(s) \, ds \in X(\ell^2).$$

Из неравенства (4.4), доказанного нами для скалярных функций, вытекает в нашем контексте оценка

$$G(f(\cdot, \omega))^\# \lesssim M_2(f(\cdot, \omega)), \quad \text{п.в. } \omega \in \Omega.$$

Таким образом, справедливо следующее неравенство:

$$\|(Gf)^\#\|_{L^p(X)} \lesssim \|M_2 f\|_{L^p(X)}.$$

Для завершения доказательства теоремы 3 нам остаётся доказать две оценки:

$$\|g\|_{L^p(X(\ell^2))} \lesssim \|g^\#\|_{L^p(X)} \quad \text{и} \quad \|M_2 f\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)} \tag{4.9}$$

для произвольной $X(\ell^2)$-значной функции g, такой, что $\int g = 0$ (напомним, в предыдущем параграфе мы доказали, что $\int Gf = 0$) и X-значной функции f. Вторая из этих оценок следует из ограниченности максимальной функции Харди–Литтлвуда в $L^p(X)$ для банаховых решёток X со свойством UMD (это утверждение впервые было доказано в работе [19]; см. также [51, теорема 3]) — просто применим это утверждение к $X_{(2)}$:

$$\|M_2 f\|^2_{L^p(X)} = \|M[|f|^2]\|_{L^{p/2}(X_{(2)})} \lesssim \||f|^2\|_{L^{p/2}(X_2)} = \|f\|^2_{L^p(X)}.$$

Здесь Mf — стандартная (двоичная) максимальная функция Харди–Литтлвуда:

$$Mf(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(s)|\, ds.$$

Отметим, что $M_2 f(x) = M[|f^2|]^{1/2}$.

Объясним теперь, почему первое из неравенств (4.9) справедливо для всякой $X(\ell^2)$-значной функции $g = (g_1, g_2, \ldots)$, интеграл которой равен нулю. Воспользуемся следующим стандартным неравенством для ℓ^2-значных функций u и v, таких, что $\int_0^1 v = 0$ (см., например, [43, стр. 223] для случая скалярных функций; как обычно, доказательство для ℓ^2-значных ничем не отличается):

$$\int_0^1 |\langle u(x), v(x)\rangle|\, dx \lesssim \int_0^1 (\mathcal{S}u)(x) v^{\#}(x)\, dx.$$

Здесь через $\mathcal{S}$ обозначена мартингальная квадратичная функция относительно фильтрации Хаара.

Возьмём произвольную функцию $h \in L^{p'}(X^*(\ell^2))$ и напишем:

$$\Big| \int_{[0,1]\times\Omega} \langle g, h\rangle \Big| \lesssim \int_{[0,1]\times\Omega} g^{\#} \mathcal{S}h \lesssim \|g^{\#}\|_{L^p(X)} \|\mathcal{S}h\|_{L^{p'}(X^*)} \lesssim \|g^{\#}\|_{L^p(X)} \|h\|_{L^{p'}(X^*(\ell^2))}. \quad (4.10)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались следующим простым утверждением (отметим, что если X — банахова решётка со свойством UMD, то X^* — тоже банахова решётка, обладающая свойством UMD).

Лемма 4.1. *Если Y — банахова решётка, обладающая свойством UMD, а $h = (h_1, h_2, \ldots)$ — $Y(\ell^2)$-значная функция, то для всякого q, $1 < q < \infty$, верно неравенство $\|\mathcal{S}h\|_{L^q(Y)} \lesssim \|h\|_{L^q(Y(\ell^2))}$.*

Найти ссылку на именно этот факт оказалось затруднительно, поэтому приведём здесь его доказательство.

Доказательство. Опять будем предполагать, что Y — банахово пространство функций, заданных на пространстве с мерой (Ω', Σ', μ'). Обозначим через d_j операторы мартингальной разности для фильтрации Хаара. Воспользовавшись неравенством

Хинчина и интегральным неравенством Минковского, напишем:

$$\mathcal{S}h(x,\omega') = \Big(\sum_n\sum_j |d_j h_n(x,\omega')|^2\Big)^{1/2} \lesssim \Big(\sum_n \Big[\mathbb{E}\Big|\sum_j \varepsilon_j d_j h_n(x,\omega')\Big|\Big]^2\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant \mathbb{E}\Big(\Big[\sum_n\Big|\sum_j \varepsilon_j d_j h_n(x,\omega')\Big|^2\Big]^{1/2}\Big).$$

Используя это неравенство, оценим норму квадратичной функции следующим образом:

$$\|\mathcal{S}h\|^q_{L^q(Y)} \lesssim \int \Big\|\mathbb{E}\Big(\Big[\sum_n\Big|\sum_j \varepsilon_j d_j h_n(x)\Big|^2\Big]^{1/2}\Big)\Big\|^q_Y dx$$
$$\leqslant \int \mathbb{E}\Big[\Big\|\Big(\sum_n\Big|\sum_j \varepsilon_j d_j h_n(x)\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|^q_Y\Big]\, dx = \mathbb{E}\Big(\Big\|\sum_j \varepsilon_j d_j h\Big\|^q_{L^q(Y(\ell^2))}\Big) \lesssim \|h\|^q_{L^q(Y(\ell^2))}.$$

Здесь последнее неравенство вытекает из определения свойства UMD для пространства $Y(\ell^2)$ (которое действительно обладает свойством UMD, если это верно для Y, см. обзор [51]).

□

Нам остаётся перейти в неравенстве (4.10) к супремуму по всем функциям $h \in L^{p'}(X^*(\ell^2))$ единичной нормы и получить требуемую оценку.

4.3 Вывод свойства LPR_q^w из LPR_p^w для $q > p$

Перейдём теперь к доказательству сформулированной во введении теоремы 4. Пусть банахово пространство X обладает свойством LPR_p^w (напомним, это означает, что неравенство (1.3) выполняется для всякой функции $f \in L^p(X)$). Прежде всего, отметим, что отсюда следует, что X обладает свойством UMD (достаточно взять "набор" $\{I_s\}$ состоящим из одного отрезка $[0, N]$ и получить равномерную ограниченность проекторов $P_{[0,N]}$ — отсюда уже следует свойство UMD, см., например, [48, стр. 254]).

Наша цель — доказать, что для произвольного семейства непересекающихся интервалов $\{I_s\}$ следующее неравенство верно для всякой функции $f \in L^q(X)$:

$$\Big\| \sum_s \varepsilon_s P_{I_s} f \Big\|_{L^q(\mathrm{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^q(X)}, \ q > p.$$

Мы опять будем пользоваться описанной нами выше конструкцией разбиения интервалов I_s из работы [44] (см. формулы (4.1) и (4.2)). Введём также обозначение $J_{0s} = a_s$. Достаточно доказать две оценки:

$$\Big\| \sum_s \varepsilon_s \sum_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} P_{J_{js}} f \Big\|_{L^q(\mathrm{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^q(X)},$$
$$\Big\| \sum_s \varepsilon_s \sum_{i \in \widetilde{\Theta}_s} P_{\widetilde{J}_{is}} f \Big\|_{L^q(\mathrm{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^q(X)}.$$

Поскольку эти неравенства доказываются аналогично, покажем только, как вывести первое. Напомним, что $P_{J_{js}} f = w_{a_s} \Delta_j (w_{a_s} f)$ и, таким образом, наше неравенство можно переписать в виде

$$\Big\| \sum_s \varepsilon_s w_{a_s} \sum_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} \Delta_j (w_{a_s} f) \Big\|_{L^q(\mathrm{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^q(X)}.$$

Воспользовавшись стандартным неравенством Кахана (“принципом сжатия”, см. [29, p.181]), можно заключить, что наше неравенство эквивалентно следующему:

$$\Big\| \sum_s \varepsilon_s \sum_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} \Delta_j (w_{a_s} f) \Big\|_{L^q(\mathrm{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^q(X)}.$$

Рассмотрим оператор T, переводящий функцию $f \in L^p(X)$ в

$$\sum_s \varepsilon_s \sum_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} \Delta_j (w_{a_s} f).$$

Как видно из вышесказанного, свойство LPR_p^w влечёт ограниченность T как оператора из $L^p(X)$ в $L^p(\mathrm{Rad}X)$ (здесь важно отметить, что $\bigcup_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} J_{js}$ — отрезок в $\mathbb{Z}_+$) и наша цель — доказать, что T действует также из $L^q(X)$ в $L^q(\mathrm{Rad}X)$.

Рассмотрим сопряжённый оператор $T^* : L^{p'}(\mathrm{Rad}X^*) \to L^{p'}(X^*)$ (заметим, что $(\mathrm{Rad}X)^* \sim \mathrm{Rad}X^*$, см. третью часть в статье [32]). Нетрудно убедиться (прямым подсчётом), что T^* имеет следующий вид:

$$T^*\Big(\sum_s \varepsilon_s g_s\Big) = \sum_s w_{a_s} \sum_{j\in\Theta_s\cup\{0\}} \Delta_j g_s. \tag{4.11}$$

Здесь $g = \sum_s \varepsilon_s g_s$ — $\mathrm{Rad}X^*$-значная функция. Для того, чтобы доказать, что T^* — ограниченный оператор из $L^{q'}(\mathrm{Rad}X^*)$ в $L^{q'}(X^*)$, мы воспользуемся векторнозначным вариантом разложения Кальдерона–Зигмунда из статьи [6].

Предложение 4.1. *Пусть E — банахово пространство, g — простая E-значная функция (под этим мы подразумеваем, что $g = \mathbb{E}_k g$ для достаточно больших значений k), а λ — произвольное положительное число. Тогда найдутся такие простые функции b и h, что $g = b + h$ и выполняются следующие условия.*

1. $\|h\|_{L^\infty(Y)} \lesssim \lambda$ *и* $\|h\|_{L^1(Y)} \lesssim \|g\|_{L^1(Y)}$.
2. $\int_0^1 b = 0$ *и для всякого* $n \geqslant 1$ *мы имеем* $\Delta_n b = \mathbb{1}_{e_n}\Delta_n b$, *где* $e_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ *и* $|\bigcup_{n\geqslant 1} e_n| \lesssim \lambda^{-1}\|g\|_{L^1(Y)}$.

Наша цель — доказать, что T^* — оператор слабого типа $(1,1)$, поскольку в таком случае ограниченность из $L^{q'}(\mathrm{Rad}X^*)$ в $L^{q'}(X^*)$ будет следовать из интерполяционной теоремы Марцинкевича. Зафиксируем число $\lambda > 0$ и применим сформулированное предложение для $Y = \mathrm{Rad}X^*$ и нашей функции g. Заметим, что мы можем рассматривать только простые функции g, поскольку из-за соображений плотности мы можем считать, что набор отрезков $\{I_s\}$ конечен и всякая функция g_s является конечной линейной комбинацией функций Уолша. Напишем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}&|\{x : \|(T^*g)(x)\|_{X^*} > \lambda\}| \\ &\qquad\leqslant |\{x : \|(T^*b)(x)\|_{X^*} > \lambda/2\}| + |\{x : \|(T^*h)(x)\|_{X^*} > \lambda/2\}|. \end{aligned}\tag{4.12}$$

Второе слагаемое в этой формуле оценивается при помощи ограниченности T^* как оператора из $L^{p'}(\mathrm{Rad}X^*)$ в $L^{p'}(X^*)$:

$$\begin{aligned}|\{x : \|(T^*h)(x)\|_{X^*} > \lambda/2\}| &\leqslant \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^{-p'} \|T^*h\|^{p'}_{L^{p'}(X^*)} \lesssim \lambda^{-p'}\|h\|^{p'}_{L^{p'}(\mathrm{Rad}X^*)} \\ &\leqslant \lambda^{-p'}\|h\|^{p'-1}_{L^\infty(\mathrm{Rad}X^*)}\|h\|_{L^1(\mathrm{Rad}X^*)} \lesssim \lambda^{-1}\|g\|_{L^1(\mathrm{Rad}X^*)}.\end{aligned}$$

Оценим теперь первое слагаемое в формуле (4.12). Нетрудно заметить, что из формулы (4.11) для оператора T^* и свойства функции b из разложения Кальдерона–Зигмунда следует, что носители функции T^*b содержатся в множестве $\bigcup_{n\geqslant 1} e_n$. Таким образом, мы можем заключить, что

$$|\{x : \|(T^*b)(x)\|_{X^*} > \lambda/2\}| \leqslant |\{x : (T^*b)(x) \neq 0\}| \leqslant \Big|\bigcup_{n\geqslant 1} e_n\Big| \lesssim \lambda^{-1}\|g\|_{L^1(\mathrm{Rad}X^*)},$$

и доказательство теоремы 4 завершено.

Глава 5

Локальная безусловная структура в пространствах гладких функций

5.1 Введение

В настоящей главе мы докажем теорему 5. В ней идёт речь о пространстве $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$, которое, напомним, задаётся при помощи следующей полунормы на тригонометрических полиномах f:

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \max_{1\leqslant j\leqslant J} \|T_j f\|_{C(\mathbb{T}^n)}.$$

Пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ можно отождествить с замкнутым подпространством пространства $\ell^\infty_J(C(\mathbb{T}^n))$ при помощи следующего отображения (являющегося изометрией):

$$f \mapsto (T_j f)_{j\leqslant J}.$$

Пространства соболевского типа $W_p^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ для $p > 0$ определяются аналогично — при помощи полунормы

$$\|f\|_{W_p^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)} = \max_{1\leqslant j\leqslant J} \|T_j f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}.$$

Их, в свою очередь, можно отождествить с замкнутым подпространством пространства $\ell^\infty_J(L^p(\mathbb{T}^n))$ — при помощи того же самого отображения, что и выше. Нам будут встречаться такие пространства для $p \in \{1/2, 1, 2\}$.

Отметим, что в работе автора [16] доказывается отсутствие локальной безусловной структуры в пространстве $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ (при тех же предположениях, что и в теореме 5). Оказалось, однако, что по крайней мере не очевидно, как вывести из него утверждение для произвольной размерности (см. объяснения на этот счёт в работе [35]). В связи с этим, при доказательстве нашей общей теоремы 5 появляются значительные технические трудности.

Основным инструментом, которым мы будем пользоваться для доказательства теоремы, будет доказанное в работе [35] утверждение, на которое можно смотреть, как на специфическую теорему вложения.

Предложение 5.1. *Пусть $\rho_0, \ldots, \rho_l$ — комплексные меры конечной вариации на $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. Рассмотрим следующие функции на $\mathbb{R}^2$: $h_j(\xi_1, \xi_2) = \hat{\rho}_j(\xi_1, |\xi_2|^{\theta_2}, \ldots, |\xi_2|^{\theta_n})$, где $\theta_2, \ldots, \theta_n$ — положительные числа. Зафиксируем вещественное число $\varkappa \geqslant 1$ и предположим, что функции η_j, $j = 1, \ldots, l$, заданные на $\mathbb{R}^2$, удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$\xi_1 \eta_1(\xi) = h_0(\xi); \quad \xi_1 \eta_j(\xi) - |\xi_2|^{\varkappa} \eta_{j-1}(\xi) = h_{j-1}(\xi), \;\; j = 2, \ldots, l;$$
$$-|\xi_2|^{\varkappa} \eta_l(\xi) = h_l(\xi).$$

Тогда верно неравенство

$$\max_j \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\eta_j(\xi)|^2 |\xi_2|^{\varkappa - 1} d\xi \right)^{1/2} \lesssim \max_j \|\rho_j\|.$$

Стоит сразу отметить, что приведённая здесь система уравнений разрешима тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие совместимости (см. [35]): $\sum_{j=0}^{l} \xi_1^j \xi_2^{-j\varkappa} h_j(\xi) = 0$ для $\xi \neq 0$.

В доказательстве теоремы 5 нам также понадобятся p-суммирующие операторы. Оператор называется p-суммирующим, если он переводит слабо p-суммируемые последовательности в сильно p-суммируемые. Напомним здесь, что последовательность элементов (x_j) банахова пространства X называется слабо p-суммируемой, если

$$\sup_{F \in X^*, \, \|F\|_{X^*} \leqslant 1} \sum |F(x_j)|^p < \infty.$$

Последовательность (y_j) банахова (или квазибанахова) пространства Y называется сильно p-суммируемой, если $\sum \|y_j\|^p < \infty$.

Согласно теореме Пича, оператор является p-суммирующим тогда и только тогда, когда он факторизуется через часть тождественного вложения из $C(K)$ в $L^p(\mu)$ (где μ — некоторая вероятностная мера на компакте K). Имеются многочисленные утверждения о совпадении классов p-суммирующих операторов при разных p, самое известное из которых — теорема Гротендика: всякий линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C(K)$ в пространство $L^1(\nu)$ (здесь ν — *произвольная* мера, в частности, заданная уже не обязательно на компакте K) является 2-суммирующим. Отметим, что эта теорема остаётся верной, если пространство $L^1(\nu)$ заменить на произвольное квазибанахово пространство котипа 2. Доказательства приведённых утверждений, а также более подробную информацию о p-суммирующих операторах, можно найти в обзоре [7].

Приступим теперь к доказательству теоремы 5.

5.2 Некоторые технические упрощения

5.2.1 Вращение гиперплоскости

Прежде всего, отметим, что мы можем проделать все те же процедуры, что и в работе [35], для того, чтобы повернуть гиперплоскость Λ и изменить набор операторов $\mathcal{T}$. Опишем эти процедуры, не слишком вдаваясь в подробности. Доказательства всех необходимых несложных технических утверждений можно найти в [35], и мы будем ссылаться на них в соответствующих местах.

Обобщённую функцию F на $\mathbb{T}^n$ будем называть правильной, если $\hat{F}(m) = 0$ в случае, если $m_j = 0$ для какого-то j. Например, $z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}$ — правильная функция, если $m_j \neq 0$ для всякого j. Символом $C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ обозначим подпространство пространства $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$, состоящее из правильных функций. Это — дополняемое подпространство в $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$, а потому достаточно доказать теорему 5 для пространства $C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ вместо $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$.

Далее, мы “немного повернём” гиперплоскость Λ так, чтобы её пересечение с множеством мультииндексов, соответствующих дифференциальным мономам, входящим в состав операторов из набора $\mathcal{T}$, не поменялось, она оставалась бы допустимой и пересекала полуоси в рациональных точках. После этого, эту гиперплоскость (и всю конфигурацию) можно сдвинуть на некоторый вектор с неотрицательными целыми координатами так, чтобы сдвинутая гиперплоскость пересекала положительные полуоси в целых точках. Этот сдвиг соответствует умножению всех операторов из $\mathcal{T}$ на некоторый дифференциальный моном D^β. Детали описанной процедуры можно найти в [35, pp. 3237–3238]. Упомянем ещё только, что вращение Λ — элементарная геометрическая процедура, а также что следующие пространства изоморфны:

$$C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n) \qquad \text{и} \qquad C_0^{\{D^\beta T_1,\dots,D^\beta T_J\}}(\mathbb{T}^n).$$

Изоморфизм задаётся отображением $f \mapsto D^\beta f$. Таким образом, указанные операции ничего не меняют. Кроме того, отметим, что умножением на D^β можно добиться того, что операторы из $\mathcal{T}$ не содержат мономы вида $\partial_j^{m_j}$.

Начиная с этого момента, мы будем предполагать, что гиперплоскость Λ пересекает положительные полуоси в целых точках, а её уравнение можно записать в виде $x \cdot a = k$, где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — фиксированный вектор с целыми положительными координатами, а k — натуральное число. Не умаляя общности, мы также будем предполагать, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$.

5.2.2 Изменение набора $\mathcal{T}$

Запишем теперь каждый оператор $T_j \in \mathcal{T}$ в виде $T_j = \sum_{a\cdot\alpha\leqslant k} c_{\alpha j} D^\alpha$. В таком случае, старшая часть может быть представлена в виде $\sigma_j = \sum_{a\cdot\alpha = k} c_{\alpha j} D^\alpha$, а младшая равна $\tau_j = T_j - \sigma_j = \sum_{a\cdot\alpha<k} c_{\alpha j} D^\alpha$.

Обозначим через Π_j характеристические полиномы операторов σ_j. Более конкретно, Π_j — это следующий полином:

$$\Pi_j(\xi_1,\dots,\xi_n) = \sum_{a\cdot\alpha=k} c_{\alpha j}(2\pi i\xi_1)^{\alpha_1}\dots(2\pi i\xi_n)^{\alpha_n},$$

таким образом Π_j — это полином на $\mathbb{R}^n$, у которого сужение на $\mathbb{Z}^n$ совпадает с $\widehat{\sigma}_j$. Очевидно, что, поскольку среди операторов σ_j есть два линейно независимых, по крайней мере два из этих полиномов также независимы. Однако, нам потребуется более сильное утверждение из статьи [35].

Предложение 5.2. *Не умаляя общности, мы можем считать, что следующие два полинома от двух переменных линейно независимы:*

$$\Pi_1(\xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_2}, \xi_2^{a_3}, \ldots, \xi_2^{a_n}) \quad \textit{и} \quad \Pi_2(\xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_2}, \xi_2^{a_3}, \ldots, \xi_2^{a_n}).$$

Это утверждение очевидно для $n = 2$ — достаточно просто перенумеровать полиномы и операторы. Для $n > 2$ доказательство можно найти в работе [35], см. лемму 2.3 там. Оно довольно элементарное, но относительно громоздкое. Это доказательство строится на процедурах перехода к дополняемому подпространству пространства $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ и модификаций набора $\mathcal{T}$, не меняющих его линейную оболочку. Ясно, что это допустимые операции в нашем контексте.

Теперь у нас есть следующие два линейно независимых полинома: $A(\xi_1, \xi_2) = \Pi_1(\xi_1, \xi_2^{a_2}, \xi_2^{a_3}, \ldots, \xi_2^{a_n})$ и $B(\xi_1, \xi_2) = \Pi_2(\xi_1, \xi_2^{a_2}, \xi_2^{a_3}, \ldots, \xi_2^{a_n})$. И A, и B являются линейными комбинациями мономов вида $\xi_1^u \xi_2^v$, где $a_1 u + v = k$. Не умаляя общности, будем считать, что такой моном с наибольшим значением u содержится в A (то есть A содержит моном $\xi_1^u \xi_2^{k-a_1 u}$, а для $x > u$ ни A, ни B не содержит $\xi_1^x \xi_2^{k-a_1 x}$). Вычитая оператор T_1, умноженный на константу, из T_2, мы можем считать, что B не содержит монома $\xi_1^u \xi_2^{k-a_1 u}$. Кроме того, умножая T_1 на константу, сделаем коэффициент при мономе $\xi_1^u \xi_2^{k-a_1 u}$ в A равным -1. Далее, если $u_1 < u$ — наибольший показатель y, такой что моном $\xi_1^y \xi_2^{k-a_1 y}$ содержится в B, то мы аналогично будем считать, что он входит в B с коэффициентом 1. Аналогично описанному выше, мы исключим этот моном из A.

5.2.3 Манипуляция с коэффициентами Фурье

Нам потребуется ещё одна техническая процедура, на этот раз не содержащаяся в статье [35]. На данный момент, мотивация для неё может быть не очень ясна, но в дальнейшем нам потребуются описанные здесь результаты.

Для вещественного числа x обозначим через $[x]$ его целую часть, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Для всякого набора остатков $r_3, r_4, \ldots, r_n$ по модулю 1000 рассмотрим множество

$$A_{r_3,\ldots,r_n} = \{q \in \mathbb{N} : q \,\vdots\, 1000;\ [q^{a_3/a_2}] \equiv r_3 \pmod{1000} \ldots,\ [q^{a_n/a_2}] \equiv r_n \pmod{1000}\}.$$

Объединение всех этих множеств (а их конечное количество) — это, очевидно, множество натуральных чисел, делящихся на 1000, а потому для хотя бы одного набора остатков $r_3, \ldots, r_n$ мы имеем

$$\sum_{q \in A_{r_3,\ldots,r_n}} q^{-1} = \infty.$$

Зафиксируем эти остатки $r_3, r_4, \ldots, r_n$ и обозначим множество $A_{r_3,\ldots,r_n}$ через $\mathcal{A}$. Далее, для всякого банахова пространства X, состоящего из функций на $\mathbb{T}^n$, обозначим через $\widetilde{X}$ его подпространство, состоящее из функций f на $\mathbb{T}^n$, у которых коэффициент Фурье $\hat{f}(p, q, s_3, \ldots, s_n)$ ненулевой, только если p и q делятся на 1000 и $s_j \equiv r_j \pmod{1000}$ для всех $j \geqslant 3$. Для удобства, положим числа r_1 и r_2 равными 0. Нетрудно видеть, что пространство $\widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ дополняемо в $C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$; проектор задаётся свёрткой с подходящей мерой (а именно, пусть μ — такая мера на $\mathbb{T}$, что $\widehat{\mu} = \mathbf{1}_{1000\mathbb{Z}}$, и рассмотрим меру ν на $\mathbb{T}^n$, такую, что $\nu = \mu \otimes \mu \otimes z_3^{r_3}\mu \otimes \ldots \otimes z_n^{r_n}\mu$). Таким образом, теорему 5 достаточно доказать для этого пространства.

5.3 Основное рассуждение

5.3.1 Основные идеи и план доказательства

Сначала мы опишем схему доказательства теоремы 5, не вдаваясь в технические детали.

Напомним, что гиперплоскость $\Lambda = \{\alpha : \alpha \cdot a = k\}$ пересекает положительные полуоси в целых точках, а потому числа $m_j = k/a_j$ — целые. Рассмотрим набор дифференциальных мономов $\mathcal{H} = \{D^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ и соответствующее пространство гладких функций $C_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$.

Предложение 5.3. *Тождественное вложение $j : \widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n) \to \widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ непрерывно.*

Доказательство. Заметим, что

$$\|p\|_{\widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)} = \sum_{a\cdot\beta=k} \|D^\beta p\|_{C(\mathbb{T}^n)} \geqslant \sum_{l=1}^{n} \|\partial_l^{m_l} p\|_{C(\mathbb{T}^n)},$$

и, согласно [18, Теорема 9.5], верно следующее неравенство:

$$\max_{a\cdot\beta<k} \|D^\beta p\|_{C(\mathbb{T}^n)} \lesssim \sum_{l=1}^{n} \|\partial_l^{m_l} p\|_{C(\mathbb{T}^n)}.$$

Отсюда мы можем заключить, что

$$\|p\|_{\widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)} \lesssim \sum_{a\cdot\beta=k} \|D^\beta p\|_{C(\mathbb{T}^n)} + \sum_{a\cdot\beta<k} \|D^\beta p\|_{C(\mathbb{T}^n)} \lesssim \|p\|_{\widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)}.$$

□

Далее, мы просто рассмотрим каноническое вложение $i : \widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n) \to \widetilde{C}_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)$ (здесь определение последнего пространства самоочевидно). Напомним, что старшие части операторов T_1 и T_2 линейно независимы.

После этого, рассмотрим ещё одно вложение $g : \widetilde{C}_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n) \to \widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)$. Нетрудно заметить, что g является 1-суммирующим оператором (это легко выводится из теоремы Пича о факторизации, см. [55, стр.203]; оператор g — это часть канонического вложения $C(\mathbb{T}^n) \oplus C(\mathbb{T}^n)$ в $L^1(\mathbb{T}^n) \oplus L^1(\mathbb{T}^n)$).

Следующий шаг доказательства заключается в построении уже более сложного оператора s из пространства $\widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})$. Этому построению посвящён пункт 5.3.2. Главным ингредиентом приведённой там конструкции является предложение 5.1. Таким образом, у нас получается диаграмма:

$$\widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{j} \widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{i} \widetilde{C}_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{g} \widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{s} L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1}).$$

В этот момент нам потребуется применить некоторые факты из теории банаховых пространств. Описанная ниже процедура в основном повторяет рассуждения из работы [12].

Пусть пространство $\widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ имеет локальную безусловную структуру. В таком случае применим следующий факт (доказательство которого можно найти в работе

[24] или [47, Глава 23]).

Предложение 5.4. *Пусть X — банахово пространство с локальной безусловной структурой. Тогда всякий 1-суммирующий оператор T из X в произвольное банахово пространство Y можно факторизовать через пространство L^1, то есть найдутся мера μ и операторы $V : X \to L^1(\mu)$ и $U : L^1(\mu) \to Y^{**}$, такие, что $UV = \kappa T$, где $\kappa : Y \to Y^{**}$ — каноническое вложение.*

Это предложение даёт нам следующую диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n) \arrow[r, "j"] & \widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "V"] & \widetilde{C}_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n) \arrow[r, "g"] & \widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n) \arrow[d, "s"] \\
 & & L^1(\mu) \arrow[r, "U"] & L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})
\end{tikzcd}$$

После этого мы рассмотрим двойственную диаграмму.

Далее мы построим оператор $P : \widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)^* \to W_{1/2}^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$. Это построение описано в пункте 5.3.3. Его главная идея — рассмотреть пространство $\widetilde{W}_2^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$ как подпространство в $L^2(\mathbb{T}^n) \oplus \ldots \oplus L^2(\mathbb{T}^n) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} L^2(\mathbb{T}^n)$. Тогда P будет ортогональной проекцией на это подпространство. Далее, окажется, что P действует также из $\widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)^*$ в $W_{1/2}^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$, и это даёт нам следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)^* \arrow[d, "P"'] & \widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)^* \arrow[l, "j^*"'] & \widetilde{C}_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)^* \arrow[l, "i^*"'] & \widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)^* \arrow[l, "g^*"'] \\
W_{1/2}^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n) & & L^\infty(\mu) \arrow[ul, "V^*"'] & L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1}) \arrow[l, "U^*"'] \arrow[u, "s^*"']
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Теперь будем рассуждать следующим образом. Заметим, что $L^\infty(\mu)$ — это пространство типа $C(K)$ (для некоторого неметризуемого компакта K), а $W_{1/2}^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$ является квазибанаховым пространством котипа 2. Тогда, согласно обобщению теоремы Гротендика (которое доказывается, например, в обзоре [7]), оператор Pj^*V^* — 2-суммирующий. Таким образом, оператор $Pj^*i^*g^*s^*$ также 2-суммирующий. По определению это означает, что он переводит слабо 2-суммируемые последовательности в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})$ в (сильно) 2-суммируемые последовательности в $W_{1/2}^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$. Мы приведём контрпример к этому заключению и таким образом получим противоречие. Соответствующие вычисления приведены в пункте 5.3.4, и после этого доказательство отсутствия локальной безусловной структуры в пространстве $\widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ завершено.

Перейдём теперь ко второму утверждению теоремы 5. Предположим противное, то есть что $\widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)^*$ изоморфно замкнутому подпространству пространства Y с локальной безусловной структурой и что Y не содержит равномерно пространства ℓ_∞^k.

Обозначим оператор изоморфного вложения пространства $C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)^*$ в Y через R. В пространстве Y^* также есть локальная безусловная структура (см. книгу [47, §23.3]). Следовательно, мы можем применить предложение 5.4 к оператору $(sgi)^{**}R^*$ (который является 1-суммирующим ввиду принципа локальной рефлексивности; см., например, [47, §28.1]); таким образом, оператор $i^*g^*s^*R^{**}$ факторизуется через $L^\infty(\mu)$, и мы получаем диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)^* \arrow[d, "P"'] & \widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)^* \arrow[l, "j^*"'] \arrow[d, "\kappa R"'] & \widetilde{C}_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)^* \arrow[l, "i^*"'] & \widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)^* \arrow[l, "g^*"'] \\
W_{1/2}^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n) & Y^{**} & L^\infty(\mu) \arrow[l, "T"'] & L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1}) \arrow[l, "S"'] \arrow[u, "s^*"']
\end{tikzcd}
\tag{5.2}
$$

Здесь $\kappa : Y \to Y^{**}$ — каноническое вложение. Применяя ещё раз принцип локальной рефлексивности, мы можем заключить, что пространство Y^{**} не содержит пространства ℓ_∞^k равномерно (поскольку мы знаем, что это верно для Y). Воспользуемся теперь следующим фактом.

Предложение 5.5. *Пусть Y — банахово пространство, не содержащее пространства ℓ_∞^k равномерно. Тогда существует число p, $2 \leqslant p < \infty$, такое, что всякий оператор $T : C(K) \to Y$ является p-суммирующим (и $\pi_p(T) \lesssim \|T\|$).*

Доказательство этого факта можно найти в работе [41]. Мы заключаем таким образом, что оператор T является p-суммирующим для некоторого $p \geqslant 2$. В таком случае, оператор TS также p-суммирующий, и оператор $i^*g^*s^*$ — p-суммирующий, поскольку является часть p-суммирующего оператора. Следовательно, $Pj^*i^*g^*s^*$ является p-суммирующим оператором из банахова пространства в квазибанахово пространство котипа 2. Отсюда мы можем заключить, что он на самом деле 2-суммирующий (доказательство этого факта изложено в обзоре [7]).

Таким образом, если мы докажем, что оператор $Pj^*i^*g^*s^*$ — не 2-суммирующий, то получим противоречие и второе утверждение в теореме 5 также будет доказано.

Ещё раз упомянем, что соответствующие вычисления приведены в пункте 5.3.4 — там доказывается, что оператор $Pj^*i^*g^*s^*$ на самом деле не 2-суммирующий.

Приступим теперь к реализации намеченного плана доказательства, приводя все опущенные выше технические моменты.

5.3.2 Построение оператора из $\widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)$ в гильбертово пространство

Опишем построение оператора s из $\widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)$ в гильбертово пространство, а именно, $L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})$. Главным инструментом нам послужит теорема вложения из статьи [35], то есть предложение 5.1.

Для всякой функции $f \in \widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)$ рассмотрим пару функций $(f_1, f_2) = (T_1 f, T_2 f)$, лежащую в $L^1(\mathbb{T}^n) \oplus L^1(\mathbb{T}^n)$. Мы можем избавиться от членов в разложении Фурье функции f (а следовательно и f_1, и f_2) вида $z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ с $k_i \leqslant 1000$ для некоторого i, взяв 1001-й остаток её ряда Фурье по каждой переменной (это непрерывная линейная операция). Возьмём теперь функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такую, что $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ всюду, а также $\psi(\xi) = 1$, если $\max_j |\xi_j| \leqslant 10$, и $\psi(\xi) = 0$, если $\max_j |\xi_j| > 20$. Далее, положим $\phi = \check{\psi}$ и продолжим f_1 и f_2 периодично на $\mathbb{R}^n$ (для продолженных функций будем использовать то же самое обозначение).

Преобразования Фурье всех производных функции ϕ имеют носитель в кубе с центром в начале координат и длиной стороны 40. Кроме того, функции f_1 и f_2 на торе не имеют спектра в кубе с длиной стороны 2000 с центром в начале координат. Таким образом, когда мы продолжаем функции f_1 и f_2 периодично на $\mathbb{R}^n$ и умножаем их на производные функции ϕ, у нас получаются функции, чьи преобразования Фурье равны нулю на шаре $\{\xi : |\xi| \leqslant 100\}$. Обозначим пространство функций из $L^1(\mathbb{R}^n)$, обладающих этим свойством, через $L^1_{\mathrm{null}}(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что, очевидно, функции f_1 и f_2 удовлетворяют уравнению $-T_1 f_2 + T_2 f_1 = 0$. Рассмотрим теперь выражение $-T_1(\phi f_2) + T_2(\phi f_1)$. Нетрудно видеть, что, перегруппировав в нём члены, мы можем переписать его в следующем виде:

$$-T_1(\phi f_2) + T_2(\phi f_1) = \phi(-T_1 f_2 + T_2 f_1) + \sum_{a \cdot \alpha < k} b_\alpha D^\alpha \gamma_\alpha = \sum_{a \cdot \alpha < k} b_\alpha D^\alpha \gamma_\alpha.$$

Здесь γ_α равно некоторой линейной комбинации произведений функций f_j и каких-то производных функции ϕ. Таким образом, эти функции зависят от f непрерывно и линейно. Для $j = 1, 2$, записывая T_j как $\sigma_j + \tau_j$, мы получаем следующее уравнение:

$$-\sigma_1(\phi f_2) + \sigma_2(\phi f_1) + \text{младшие члены} = 0.$$

“Младшие члены” здесь — это выражения вида $D^\alpha \mu_\alpha$ (где $\alpha \cdot a < k$), а μ_α — это линейная комбинация произведений функций f_j и некоторых производных ϕ.

Теперь мы избавимся от младших членов точно так же, как это сделано в статье [35]. Воспользуемся следующей теоремой о мультипликаторах Фурье (она нетрудная и доказывается в работе [35]).

Предложение 5.6. *Пусть u — функция, заданная на $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, такая, что для всякого $t > 0$ и некоторых положительных $b_1, \ldots, b_n$ и γ верно равенство*

$$u(t^{b_1}\xi_1, t^{b_2}\xi_2 \ldots, t^{b_n}\xi_n) = t^{-\gamma} u(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Тогда мультипликатор Фурье M_u с символом u (то есть оператор, переводящий f в $\mathcal{F}^{-1}[u\mathcal{F}f]$) — это линейный ограниченный оператор на $L^1_{\mathrm{null}}(\mathbb{R}^n)$.

Напомним, что у нас есть младшие члены вида $D^\beta \eta$, где η — функция из пространства L^1_{null}, и выполняется соотношение $a \cdot \beta < k$, то есть

$$\frac{\beta_1}{m_1} + \ldots + \frac{\beta_n}{m_n} < 1.$$

Рассмотрим мультипликатор Фурье R_j со следующим символом:

$$u_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{(2\pi i \xi_1)^{\beta_1} \ldots (2\pi i \xi_{j-1})^{\beta_{j-1}} (2\pi i \xi_j)^{\beta_j + 3m_j} (2\pi i \xi_{j+1})^{\beta_{j+1}} \ldots (2\pi i \xi_n)^{\beta_n}}{(2\pi i \xi_1)^{4m_1} + \ldots + (2\pi i \xi_n)^{4m_n}}.$$

Этот оператор удовлетворяет условиям предложения 5.6, поскольку, если мы сделаем замену

$$\xi \mapsto (t^{\frac{1}{4m_1}}\xi_1, \ldots, t^{\frac{1}{4m_n}}\xi_n),$$

то функция u_j умножится на

$$t^{-1}t^{\frac{1}{4}(\frac{\beta_1}{m_1}+\ldots+\frac{\beta_n}{m_n})+\frac{3}{4}} = t^{-\gamma} \quad \text{для некоторого положительного } \gamma.$$

Следовательно, мы можем применить R_j к η и получить функцию из $L^1_{\mathrm{null}}(\mathbb{R}^n)$. Далее, мы можем выразить $D^\beta\eta$ при помощи этих мультипликаторов:

$$D^\beta\eta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^{m_j} R_j\eta.$$

Эту формулу нетрудно проверить, взяв преобразования Фурье от обеих частей равенства. Теперь, воспользовавшись мультипликаторами, чтобы выразить младшие члены, мы получаем следующее уравнение:

$$-\sigma_1(\phi f_2) + \sigma_2(\phi f_1) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j^{m_j}\omega_j = 0, \tag{5.3}$$

где ω_j — функция на $\mathbb{R}^n$, которую можно записать как линейную комбинацию наших мультипликаторов, применённых к произведениям f_j и ϕ или некоторых производных ϕ. Напомним, что операторы σ_1 и σ_2 не содержат мономы вида $\partial_j^{m_j}$ (см. пункт 5.2.1). Таким образом, мы, наконец, можем переписать уранение (5.3) в следующем виде:

$$\sum_{a\cdot\alpha=k} D^\alpha\nu_\alpha = 0, \tag{5.4}$$

где для $\alpha = (0, 0, \ldots, m_j, 0, \ldots, 0)$ (здесь m_j стоит на j-м месте) $\nu_\alpha = \omega_j$, а для остальных индексов α функция ν_α получается из старших членов и является линейной комбинацией функций ϕf_1 и ϕf_2. Возьмём теперь преобразование Фурье левой части этого уравнения и сузим получающееся выражение на множество точек вида $(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_n/a_2})$. Таким образом, мы получаем следующее уравнение:

$$\sum_{a\cdot\alpha=k} \xi_1^{\alpha_1}|\xi_2|^{\frac{k-a_1\alpha_1}{a_2}}\left[(2\pi i)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\hat{\nu}_\alpha(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_n/a_2})\right] = 0.$$

Далее, введём обозначение:

$$h_s(\xi_1, \xi_2) = \sum_{a\cdot\alpha=k,\ \alpha_1=s} (2\pi i)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\hat{\nu}_\alpha(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_n/a_2}).$$

Отметим, что эти функции h_s являются преобразованиями Фурье некоторых функций из L^1. Обозначим эти функции через ρ_s; нас в действительности интересуют их сужения на множество точек вида $(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \dots, |\xi_2|^{a_n/a_2})$. В свою очередь, функции ρ_s являются линейными комбинациями функций ν_α из уравнения (5.4), а потому непрерывно зависят от исходной функции f. Уточним здесь, что h_{m_1} — это сужение $(2\pi i)^{m_1}\widehat{\omega}_1$, где ω_1 определяется в уравнении (5.3). Используя это обозначение, перепишем уравнение (5.4) в виде

$$\sum_{s=0}^{m_1} \xi_1^s |\xi_2|^{\frac{(m_1-s)a_1}{a_2}} h_s(\xi_1, \xi_2) = 0. \tag{5.5}$$

Это уравнение является в точности условием совместимости для разрешимости системы уравнений из предложения 5.1 (см. замечание сразу после предложения 5.1; мы применяем это замечание с параметрами $\theta_j = a_j/a_2$, $\varkappa = a_1/a_2$, $l = m_1$).

Предложение 5.7. *Уравнение* (5.5) *и предложение 5.1 для этих параметров влекут существование функций $\eta_1, \dots, \eta_{m_1}$, определённых в предложении 5.1.*

Напомним читателю, что это простое утверждение (которое можно доказать по индукции) можно найти в статье [35]. Таким образом, воспользовавшись им, мы получаем следующее неравенство:

$$\max_j \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\eta_j(\xi)|^2 |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1}\, d\xi \Big)^{1/2} \lesssim \max \|\rho_s\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \max_{\alpha\cdot a = k} \|\nu_\alpha\|_{L^1}.$$

Таким образом, построение оператора в пространство $L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})$ завершено — наш оператор переводит функцию $f \in \widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)$ в функцию η_j (на данный момент, читатель может считать, что оператор действует в прямую сумму m_1 копий пространства $L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})$; однако, нам понадобится только одна функция η_j, а именно, η_u, где u — число из пункта 5.2.2; мы ещё вернёмся к этому, когда будем проделывать заключительные вычисления). Обозначим построенный нами оператор через s. В результате, у нас имеется следующая диаграмма.

$$\widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{j} \widetilde{C}_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{i} \widetilde{C}_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{g} \widetilde{W}_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{s} L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1}).$$

5.3.3 Построение оператора в пространство $W^{\mathcal{H}}_{1/2}(\mathbb{T}^n)$

Теперь мы построим оператор P, который будет задан на пространстве $\widetilde{C}^{\mathcal{H}}_0(\mathbb{T}^n)^*$.

Рассмотрим пространство $\widetilde{W}^{\mathcal{H}}_2(\mathbb{T}^n)$. Напомним, что мы отождествляем его с подпространством пространства $L^2(\mathbb{T}^n)\oplus\ldots\oplus L^2(\mathbb{T}^n) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} L^2(\mathbb{T}^n)$. Обозначим через P ортогональную проекцию в $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} L^2(\mathbb{T}^n)$ на $\widetilde{W}^{\mathcal{H}}_2(\mathbb{T}^n)$.

Для всякого мультииндекса $l = (l_1,\ldots,l_n)$ и числа $\alpha\in\Lambda$ введём обозначение $Z^l_\alpha = (0,\ldots,0,z_1^{l_1}\ldots z_n^{l_n},0,\ldots,0)\in\bigoplus_{\gamma\in\Lambda} L^2(\mathbb{T}^n)$, где моном стоит на месте с индексом $\alpha\in\Lambda$. Нетрудно описать действие P на этих элементах (которые, очевидно, образуют ортонормированный базис в $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} L^2(\mathbb{T}^n)$).

Лемма 5.1. *Если $l_j = 0$ для некоторого j или если $l_j \not\equiv r_j \pmod{1000}$ для некоторого j, то $P(\phi^\alpha_l) = 0$. Иначе, верна следующая формула:*

$$P(Z^l_\alpha) = \bar\lambda_\alpha\Big(\sum_{\beta\in\Lambda}|\lambda_\beta|^2\Big)^{-1}\cdot(\lambda_\beta z_1^{l_1}\ldots z_n^{l_n})_{\beta\in\Lambda}.$$

Здесь $\lambda_\beta = (2\pi i l_1)^{\beta_1}\ldots(2\pi i l_n)^{\beta_n}$.

Отметим, что первое утверждение леммы очевидно, а формула из второго утверждения проверяется простыми вычислениями (кстати, двумерный аналог этой леммы приведён в работе [12]).

Наша следующая цель — понять, как P действует на пространстве $\widetilde{C}^{\mathcal{H}}_0(\mathbb{T}^n)^*$. Заметим, что пространство $\widetilde{C}^{\mathcal{H}}_0(\mathbb{T}^n)$ можно отождествить с подпространством в прямой сумме $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} C(\mathbb{T}^n)$. Следовательно, мы имеем (здесь через $\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ обозначено пространство комплексных мер конечной вариации на $\mathbb{T}^n$):

$$\widetilde{C}^{\mathcal{H}}_0(\mathbb{T}^n)^* = \Big(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)\Big)/\mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ — аннулятор пространства $\widetilde{C}^{\mathcal{H}}_0(\mathbb{T}^n)$ в $\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} C(\mathbb{T}^n)\Big)^*$. Более конкретно,

$$\mathcal{X} = \Big\{(\mu_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} : \sum_{\alpha\in\Lambda}\int D^\alpha g\, d\bar\mu_\alpha = 0\ \forall g\in\widetilde{C}^{\mathcal{H}}_0(\mathbb{T}^n)\Big\}.$$

Теперь нам надо рассмотреть оператор P_M, являющийся композицией P и оператора свёртки с M-ым ядром Фейера по каждой из n переменных. Обозначим через

Φ_M M-е ядро Фейера на окружности. Определим теперь следующие операторы:

$$P_M(F) = P\big((\Phi_M * \mu_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\big), \quad F \in \widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)^*,$$

где $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ — любой “представитель” функционала F. Это формула имеет смысл, поскольку P — *ортогональный* проектор и если $(\nu_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ лежит в $\mathcal{X}$, то $(\Phi_M * \nu_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ лежит в $\mathcal{X} \cap \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} L^2(\mathbb{T}^n)$ и поэтому аннулируется проектором P. Воспользуемся теперь следующим фактом.

Предложение 5.8. *Операторы $P_M : \widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)^* \to W_{1/2}^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$ равномерно (по M) ограничены.*

Доказательство этого предложения основывается на теории сингулярных интегральных операторов (и мультипликаторов Фурье) со смешанной однородностью, разработанной в статье [22]. Однако, в статье [22] все утверждения доказываются для функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, а не на $\mathbb{T}^n$. Из сформулированной выше леммы мы видим, что компоненты оператора P являются мультипликаторами Фурье и мы можем рассмотреть такие же мультипликаторы на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, то есть мультипликаторы с символами следующего вида:

$$\frac{\bar{\lambda}_\alpha \lambda_\beta}{\sum_{\beta\in\Lambda} |\lambda_\beta|^2}, \quad \text{где } \lambda_\beta = (2\pi i l_1)^{\beta_1} \dots (2\pi i l_n)^{\beta_n}.$$

Здесь $l = (l_1, \dots, l_n)$ — элемент пространства $\mathbb{R}^n$. Нетрудно видеть, что эти функции обладают некоторой (смешанной) однородностью: если мы умножим l_j на c^{a_j} (где $c \in \mathbb{R}_+$), то символм мультипликатора не изменится (поскольку $\sum a_j\beta_j = k$ для всякого $\beta \in \Lambda$). Таким образом, из результатов статьи [22] (см. теорему Хёрмандера–Михлина для мультипликаторов со смешанной однородностью) следует, что соответствующие мультипликаторы Фурье являются операторами слабого типа $(1, 1)$ с равномерно ограниченной нормой. Таким образом, для доказательства предложения 5.8 мы просто можем воспользоваться “принципом пересадки”, который в данном контексте был получен в статье [12] и заключить, что операторы P_M имеют слабый тип $(1, 1)$ с равномерно ограниченной константой.

После того, как мы доказали предложение 5.8, мы получаем диаграммы (5.1) и (5.2) (ввиду того, что оценки равномерны по M, мы будем опускать M в наших обозначениях; в последующих вычислениях мы будем применять P только к очень “хорошим” функциям (тригонометрическим полиномам), а не к мерам).

5.3.4 Заключительные вычисления и противоречие

Теперь мы докажем, что оператор $Pj^*i^*g^*s^*$ — не 2-суммирующий.

Определение функций v_{pq} и описание их образов $sgij(v_{pq})$

Сначала рассмотрим следующую функцию:

$$v_{pq} = z_1^p z_2^q z_3^{\left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right]} \dots z_n^{\left[q^{\frac{a_n}{a_2}}\right]} \in \widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n).$$

Напомним, что, по определению из пункта 5.2.3, то, что $v_{pq} \in \widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$, означает, что p и q делятся на 1000 (и q принадлежит множеству $\mathcal{A}$). Кроме того, мы будем рассматривать только значения q, большие некоторой константы C (которую выберем позже), а также только значения p, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$\frac{\Delta}{2} q^{1/a_2} \leqslant p^{1/a_1} \leqslant \Delta q^{1/a_2}, \tag{5.6}$$

где Δ — это также некоторое большое число, которое мы выберем позже. Нам будет проще работать с элементами единичной нормы в пространстве $C_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$, поэтому мы вычислим величину $\|v_{pq}\|_{C_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)}$. Для всякого оператора D^α нетрудно видеть, что

$$\|D^\alpha v_{pq}\|_{C(\mathbb{T}^n)} \asymp p^{\alpha_1} q^{\alpha_2} \left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right]^{\alpha_3} \dots \left[q^{\frac{a_n}{a_2}}\right]^{\alpha_n}.$$

Будем брать только достаточно большие значения q, так, чтобы выражение $\left[q^{\frac{a_n}{a_2}}\right]$ было не меньше, чем половина величины $q^{\frac{a_n}{a_2}}$. В таком случае, оценим нашу норму:

$$\|D^\alpha v_{pq}\|_{C(\mathbb{T}^n)} \asymp p^{\alpha_1} q^{\alpha_2} q^{\frac{a_3}{a_2}\alpha_3} \dots q^{\frac{a_n}{a_2}\alpha_n} = p^{\alpha_1} q^{\frac{a\cdot\alpha}{a_2}} q^{-\frac{a_1\alpha_1}{a_2}}. \tag{5.7}$$

Наложенные нами условия на p и q означают, что верно соотношение $p^{\alpha_1} q^{-\frac{a_1\alpha_1}{a_2}} \asymp 1$, и, следовательно, учитывая, что $D^\alpha \in \mathcal{H}$, только если $a \cdot \alpha = k$, пользуясь формулой (5.7), мы получаем, что $\|v_{pq}\|_{C_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)} \asymp q^{\frac{k}{a_2}} = q^{m_2}$. Рассмотрим теперь элемент $ij(v_{pq}) \in$

$\widetilde{C}_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)$, и отметим сразу, что $(T_1 v_{pq}, T_2 v_{pq}) = (c'_{pq} v_{pq}, d'_{pq} v_{pq})$. Когда мы применяем старшую часть σ_j оператора T_j к v_{pq}, мы получаем линейную комбинацию функций, чьи нормы в пространстве $C(\mathbb{T}^n)$, согласно формулам (5.6) и (5.7), равны

$$p^{\alpha_1} q^{\frac{a\cdot\alpha}{a_2}} q^{-\frac{a_1\alpha_1}{a_2}} \asymp \Delta^{\alpha_1 a_1} q^{\frac{k}{a_2}}.$$

Будем брать настолько большие значения Δ, чтобы добиться того, что слагаемое с самым большим значением α_1 будет "доминировать" по сравнению с остальными (то есть его норма будет, скажем, в 10 раз превышать сумму их норм). Когда мы применяем некоторый моном D^α из младшей части оператора T_j (это означает, что $a\cdot\alpha$ меньше k), мы получаем функцию, чья норма в $C(\mathbb{T}^n)$ равна, согласно формуле (5.7), величине

$$p^{\alpha_1} q^{\frac{a\cdot\alpha}{a_2}} q^{-\frac{a_1\alpha_1}{a_2}} \asymp q^{\frac{a\cdot\alpha}{a_2}} = o(q^{\frac{k}{a_2}}).$$

Эти вычисления показывают, что, для достаточно больших значений C и Δ одно слагаемое из выражения $T_j v_{pq}$ будет доминировать по сравнению с остальными, и мы получаем: $\|ij(v_{pq})\|_{C^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)} = \max\{|c'_{pq}|, |d'_{pq}|\} \asymp q^{\frac{k}{a_2}}$. Следовательно, мы можем написать: $(T_1 v_{pq}, T_2 v_{pq}) = q^{\frac{k}{a_2}}(c_{pq} v_{pq}, d_{pq} v_{pq})$, где $|c_{pq}|, |d_{pq}| \asymp 1$.

Очевидно, величина $\|gij(v_{pq})\|_{W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^n)}$ также равна $\max\{|c'_{pq}|, |d'_{pq}|\} \asymp q^{\frac{k}{a_2}}$. Рассмотрим теперь элемент $sgij(v_{pq})$. Применим процедуру, описанную в пункте 5.3.2, к $(f_1, f_2) = q^{-\frac{k}{a_2}}(T_1 v_{pq}, T_2 v_{pq}) = (c_{pq} v_{pq}, d_{pq} v_{pq})$. Сохраним обозначения пункта 5.3.2 — ψ, ϕ и u_j, и будем пользоваться уравнениями (5.3) и (5.4).

Далее, мы применяем преобразование Фурье к левой части уравнения (5.3). Ясно, что преобразование Фурье функции ϕv_{pq} (тут мы подразумеваем, что v_{pq} продолжена на $\mathbb{R}^n$ периодически) — это следующая функция:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \psi(\xi_1 - p, \xi_2 - q, \xi_3 - \left[q^{\frac{a_3}{a_2}}\right], \ldots, \xi_n - \left[q^{\frac{a_n}{a_2}}\right]).$$

Далее, рассмотрим сужение этих функций на множество точек вида

$$(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_n/a_2}),$$

и обозначим результат через ψ_{pq}:

$$\psi_{pq}(\xi_1,\xi_2) = \psi(\xi_1 - p, |\xi_2| - q, |\xi_2|^{\frac{a_3}{a_2}} - \big[q^{\frac{a_3}{a_2}}\big], \ldots, |\xi_2|^{\frac{a_n}{a_2}} - \big[q^{\frac{a_n}{a_2}}\big]).$$

Ввиду того, что $a_j \leqslant a_2$ при $j \geqslant 3$, верно неравенство

$$\big||\xi_2|^{a_j/a_2} - \big[q^{a_j/a_2}\big]\big| \leqslant 1 + \big||\xi_2|^{a_j/a_2} - q^{a_j/a_2}\big| \leqslant 1 + ||\xi_2| - q|.$$

Следовательно, $\psi_{pq}(\xi_1,\xi_2) = 1$, если $|\xi_1 - p| \leqslant 5$ и $||\xi_2| - q| \leqslant 5$. С другой стороны, если $\max\{|\xi_1 - p|, ||\xi_2| - q|\} > 20$, то $\psi_{pq}(\xi_1,\xi_2) = 0$. В частности, мы можем заключить (опять же, для достаточно больших значений p и q), что на носителе функции ψ_{pq} верны следующие соотношения (напомним здесь о неравенствах (5.6)):

$$\xi_1 \asymp p \asymp q^{a_1/a_2} \asymp |\xi_2|^{a_1/a_2} \asymp |\xi_2|^{m_2/m_1}. \tag{5.8}$$

Таким образом, для величины символов мультипликаторов R_j на носителе преобразования Фурье функции ψ_{pq} мы имеем следующую формулу:

$$\begin{aligned} |u_j(\xi_1, \xi_2, |\xi_2|^{\frac{a_3}{a_2}}, \ldots, |\xi_2|^{\frac{a_n}{a_2}})| &\asymp \frac{|\xi_1|^{\beta_1}|\xi_2|^{m_2\left(\frac{\beta_2}{m_2}+\ldots+\frac{\beta_n}{m_n}\right)+3m_2}}{|\xi_1|^{4m_1} + |\xi_2|^{4m_2}} \\ &\asymp \frac{|\xi_2|^{m_2\left(\frac{\beta_1}{m_1}+\ldots+\frac{\beta_n}{m_n}\right)+3m_2}}{|\xi_2|^{4m_2}} \asymp |\xi_2|^{m_2\left(-1+\frac{\beta_1}{m_1}+\ldots+\frac{\beta_n}{m_n}\right)} \asymp |\xi_1|^{-\varepsilon}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $\varepsilon = m_1\big(1 - \big(\frac{\beta_1}{m_1} + \ldots + \frac{\beta_n}{m_n}\,\big)\big) > 0$.

Введём теперь обозначение $w_{pq} = q^{-m_2}v_{pq}$, так что верно соотношение $\|w_{pq}\|_{C_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)} \asymp 1$. Наша следующая задача — сосчитать, чему равна функция $sgij(w_{pq})$.

Нас интересует структура функций h_s из системы уравнений в предложении 5.1, с параметрами, о которых шла речь в пункте 5.3.2 (см. предложение 5.7). Для удобства читателя, перепишем формулу, определяющую функцию h_s:

$$h_s(\xi_1,\xi_2) = \sum_{a\cdot\alpha = k,\ \alpha_1 = s} (2\pi i)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\hat{\nu}_\alpha(\xi_1, |\xi_2|, |\xi_2|^{a_3/a_2}, \ldots, |\xi_2|^{a_n/a_2}).$$

Мы видим, что функция h_{m_1} получена из ω_1, см. уравнение (5.3), где определяется ω_j (напомним, что для $\alpha = (0,\ldots,0,m_j,\ldots,0)$ верно равенство $\nu_\alpha = \omega_j$, см. (5.4)), и следовательно $|h_{m_1}(\xi_1,\xi_2)| \lesssim |\xi_1|^{-\varepsilon}$, согласно формуле (5.9) (и, разумеется, $h_{m_1}(\xi)=0$, когда ξ не лежит в носителе функции ψ_{pq}; напомним, что в определении выражения ω_j могут появляться некоторые производные функции ϕ — однако, это не влияет на наши оценки). Далее, напомним, что дифференциальные мономы D^α отсутствуют в операторах σ_1 и σ_2, если α_1 больше, чем u (см. пункт 5.2.2). Таким образом, функции $h_{m_1-1},\dots,h_{u+1}$ равны нулю 0.

Кроме того, нетрудно видеть, что $h_u = d_{pq}\psi_{pq}$. В самом деле, конструкции из пункта 5.2.2 гарантируют, что в уравнении (5.3) мономы D^α с $\alpha_1 = u$ появляются только в слагаемом $-\sigma_1(\phi f_2) = -d_{pq}\sigma_1(\phi v_{pq})$. Вспомним теперь, что коэффициент монома $\xi_1^u\xi_2^{k-a_1u}$ в полиноме $\Pi_1(\xi_1,\xi_2^{a_2},\xi_2^{a_3},\dots,\xi_2^{a_n})$ равен -1.

Теперь решим следующую систему уравнений (которые являются первыми m_1-u+1 уравнениями из предложения 5.1):

$$\begin{cases} & -|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}}\eta_{m_1}(\xi) = h_{m_1}(\xi); \\ \xi_1\eta_{j+1}(\xi) & -|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}}\eta_j(\xi) = 0, \quad j = m_1-1,\dots,u+1; \\ \xi_1\eta_{u+1}(\xi) & -|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}}\eta_u(\xi) = h_u(\xi). \end{cases}$$

Будем решать эти уравнения одно за другим, начиная с первого. Получим:

$$\eta_{m_1}(\xi) = O(|\xi_2|^{-\frac{a_1}{a_2}}|\xi_1|^{-\varepsilon}), \eta_{m_1-1}(\xi) = O(|\xi_2|^{-\frac{a_1}{a_2}}|\xi_1|^{-\varepsilon}), \dots,$$
$$\eta_u(\xi) = |\xi_2|^{-\frac{a_1}{a_2}}(d_{pq}\psi_{pq}(\xi) + O(|\xi_1|^{-\varepsilon})).$$

Кроме того, ещё раз отметим, что функция $\eta_u(\xi)$ может быть отлична от нуля только на носителе функции ψ_{pq}.

Функция η_u — это образ функции w_{pq} под действием s. Чтобы акцентировать внимание на зависимости этой функции от p и q, начиная с этого момента мы будем писать $\eta^{(p,q)}$ вместо η_u.

Норму функции $\eta^{(p,q)}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})$ можно оценить снизу следующим образом (здесь мы пользуемся формулой (5.8)):

$$\begin{aligned}\|\eta^{(p,q)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2;|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\eta^{(p,q)}(\xi)|^2|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1}d\xi\Big)^{1/2}\\ &\gtrsim \Big(\int_{\substack{|\xi_1-p|\leqslant 5\\ ||\xi_2|-q|\leqslant 5}} |\xi_2|^{-2\frac{a_1}{a_2}}|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1}d\xi\Big)^{1/2} \asymp \Big(\int_{\substack{|\xi_1-p|\leqslant 5\\ ||\xi_2|-q|\leqslant 5}} |\xi_1|^{-1}|\xi_2|^{-1}d\xi\Big)^{1/2}\\ &\asymp (p^{-1}q^{-1})^{1/2}.\end{aligned}$$

Похожим образом получается оценка этой нормы сверху:

$$\|\eta^{(p,q)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2;|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})} \lesssim \Big(\int_{\substack{|\xi_1-p|\leqslant 20\\ ||\xi_2|-q|\leqslant 20}} |\xi_1|^{-1}|\xi_2|^{-1}d\xi\Big)^{1/2} \asymp (p^{-1}q^{-1})^{1/2}.$$

Подытоживая, мы приходим к выводу, что образ элемента w_{pq} под действием оператора $sgij$ — это функция $\eta^{(p,q)}$ такая, что $\|\eta^{(p,q)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2;|\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})} \asymp (p^{-1}q^{-1})^{1/2}$. Возьмём теперь функции $(pq)^{1/2}\eta^{(p,q)}$ (получается, что нормы этих функций отделены от нуля и бесконечности). Поскольку носители этих функций не пересекаются, они попарно ортогональны, а потому образуют слабую 2-суммируемую последовательность в $L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})$.

Слабо 2-суммируемая последовательность, чей образ под действием оператора $Pj^*i^*g^*s^*$ не 2-суммируем

Докажем теперь, что последовательность функций $(Pj^*i^*g^*s^*)((pq)^{1/2}\eta^{(p,q)})$ не является 2-суммируемой последовательностью в пространстве $W^{\mathcal{H}}_{1/2}(\mathbb{T}^n)$.

Сначала вычислим элемент $(j^*i^*g^*s^*)((pq)^{1/2}\eta^{(p,q)})$. Рассмотрим следующие мономы:

$$v_{\tilde{p},\tilde{q},s_3,\ldots,s_n} = z_1^{\tilde{p}}z_2^{\tilde{q}}z_3^{s_3}\ldots z_n^{s_n} \in \widetilde{C}^{\mathcal{H}}_0(\mathbb{T}^n).$$

Тригонометрические полиномы плотны в пространстве $\widetilde{C}^{\mathcal{H}}_0(\mathbb{T}^n)$, а потому два элемента пространства $\widetilde{C}^{\mathcal{H}}_0(\mathbb{T}^n)^*$ совпадут, если совпадут их действия на указанные выше мономы. То есть элемент $(j^*i^*g^*s^*)((pq)^{1/2}\eta^{(p,q)})$ определяется следующим равенством (которое должно быть верно для всякой функции $v_{\tilde{p},\tilde{q},s_3,\ldots,s_n}$):

$$\langle v_{\tilde{p},\tilde{q},s_3,\ldots,s_n}, (j^*i^*g^*s^*)(\eta^{(p,q)})\rangle = \langle (sgij)(v_{\tilde{p},\tilde{q},s_3,\ldots,s_n}), \eta^{(p,q)}\rangle. \tag{5.10}$$

Правую часть этой формулы нужно понимать как скалярное произведение в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2; |\xi_2|^{\frac{a_1}{a_2}-1})$.

Функция $(sgij)(v_{\tilde{p},\tilde{q},s_3,\dots,s_n})$ может быть вычислена так же, как и выше. Мы ничего не утверждаем о норме этой функции, но тем не менее можем заключить, что её носитель содержится в множестве

$$\{\xi = (\xi_1, \xi_2) : |\xi_1 - \tilde{p}| \leqslant 20, ||\xi_2| - \tilde{q}| \leqslant 20, |s_j - |\xi_2|^{a_j/a_2}| \leqslant 20,\ 3 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Правая часть формулы (5.10) может быть отлична от нуля, только если пересечение носителей функций $(sgij)(v_{\tilde{p},\tilde{q},s_3,\dots,s_n})$ и $\eta^{(p,q)}$ непусто. Следовательно, если $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ лежит в носителях обеих функций, то $|\xi_1 - p| \leqslant 20$ и $|\xi_1 - \tilde{p}| \leqslant 20$. Поскольку и p, и $\tilde{p}$ делятся на 1000, это означает, что $p = \tilde{p}$. Аналогично получается, что $q = \tilde{q}$.

Далее, мы имеем:

$$\left|s_j - |\xi_2|^{\frac{a_j}{a_2}}\right| \leqslant 20 \quad \text{и} \quad \left|\left[q^{\frac{a_j}{a_2}}\right] - |\xi_2|^{\frac{a_j}{a_2}}\right| \leqslant 20.$$

Эти неравенства влекут оценку $|s_j - \left[q^{\frac{a_j}{a_2}}\right]| \leqslant 40$. Но, поскольку функция $v_{\tilde{p},\tilde{q},s_3,\dots,s_n}$ лежит в пространстве $\widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$, верно соотношение $s_j \equiv \left[q^{\frac{a_j}{a_2}}\right] \pmod{1000}$. Следовательно, $s_j = \left[q^{\frac{a_j}{a_2}}\right]$.

Таким образом, мы видим, что правая часть формулы (5.10) может быть отлична от нуля только для функции

$$v_{p,q,[q^{\frac{a_3}{a_2}}],\dots,[q^{\frac{a_n}{a_2}}]} = v_{pq}.$$

Но для этой функции мы имеем:

$$\left\langle (sgij)v_{pq}, \eta^{(p,q)}\right\rangle = \left\langle q^{\frac{k}{a_2}}(sgij)w_{pq}, \eta^{(p,q)}\right\rangle = \left\langle q^{m_2}\eta^{(p,q)}, \eta^{(p,q)}\right\rangle = \varkappa_{pq}(pq)^{-1}q^{m_2},$$

где $|\varkappa_{pq}| \asymp 1$.

Таким образом, мы доказали, что если мы подействуем элементом $(j^*i^*g^*s^*)(\eta^{(p,q)}) \in \widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)^*$ на любой моном, отличный от v_{pq}, то мы получим ноль, а если мы подействуем им на элемент v_{pq}, то получим $\varkappa_{pq}q^{m_2}(pq)^{-1}$. Теперь мы должны понять, какой набор мер соответствует элементу $(j^*i^*g^*s^*)(\eta^{(p,q)})$.

Набор функций $(D^\alpha v_{pq})_{\alpha\in\Lambda} \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} C(\mathbb{T}^n)$ соответствует элементу $v_{pq} \in \widetilde{C}_0^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}^n)$. Одна из этих функций равна $\partial_1^{m_1} v_{pq} = (2\pi i p)^{m_1} v_{pq}$. Значит, мы можем взять следующий набор $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, соответствующий элементу $(j^* i^* g^* s^*)(\eta^{(p,q)})$:

$$\mu_\alpha = q^{m_2}(2\pi i p)^{-m_1} \varkappa_{pq}(pq)^{-1} v_{pq} \text{ для } \alpha = (m_1, 0, \ldots, 0);$$

$$\mu_\alpha = 0 \text{ для всех остальных } \alpha.$$

Теперь применим проектор P к этому элементу, и вспомним, что у нас есть формула для этого проектора (см. лемму из пункта 5.3.3). Очевидно, в нашем случае все числа λ_β попарно сравнимы (то есть для $\beta, \gamma \in \Lambda$ верно соотношение $\lambda_\beta \asymp \lambda_\gamma$), поскольку, по формуле (5.6), мы имеем:

$$|\lambda_\beta| \asymp p^{\beta_1} q^{\beta_2} q^{\frac{a_3}{a_2}\beta_3} \ldots q^{\frac{a_n}{a_2}\beta_n} \asymp q^{\frac{a\cdot\beta}{a_2}} = q^{m_2}.$$

Следовательно, поскольку $q^{m_2} p^{-m_1} \asymp 1$ (см. формулу (5.8)), верно соотношение

$$\sum_{p,q} \|(P j^* i^* g^* s^*)((pq)^{1/2}\eta^{(p,q)})\|^2_{W^{\mathcal{H}}_{1/2}(\mathbb{T}^n)} \asymp \sum_{p,q} \|(pq)^{-1/2} v_{pq}\|^2_{L^{1/2}} \asymp \sum_{p,q} (pq)^{-1}.$$

Напомним, что мы рассматриваем только большие значения p и q, такие, что $\frac{\Delta}{2} q^{1/a_2} \leqslant p^{1/a_1} \leqslant \Delta q^{1/a_2}$ и $q \in \mathcal{A}$ (и p делится на 1000). Для каждого фиксированного q количество таких чисел p — это величина порядка q^{a_1/a_2} и каждое из них эквивалентно q^{a_1/a_2}. Таким образом, мы можем написать:

$$\sum_{p,q} (pq)^{-1} \asymp \sum_{q\in\mathcal{A}, q>C} q^{-1},$$

а эта сумма расходится (по определению множества $\mathcal{A}$), мы получили противоречие, и теорема доказана.

Заключение

В заключение перечислим ещё раз результаты настоящей диссертации.

1. Установлено наиболее общее описание вида Литтлвуда–Пэли пространства BMO.

2. Доказано неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных систем Виленкина.

3. Получено обобщение неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для системы Уолша на случай функций, принимающих значения в некоторых банаховых решётках.

4. Установлены геометрические свойства пространств гладких функций на торе — в частности, доказано, что в таких пространствах нет локальной безусловной структуры.

Благодарности

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность своему научному руководителю, Сергею Витальевичу Кислякову, за постановку задач и внимание к работе.

Кроме того, автор благодарен всем своим учителям, а также Лаборатории Чебышева и ПОМИ РАН за поддержку и замечательные условия работы.

Список публикаций автора по теме диссертации

[TV1] A. Tselishchev, I. Vasiliev, *Littlewood–Paley characterization of BMO and Triebel–Lizorkin spaces*, Mathematische Nachrichten **293** (2020), 2029–2043.

[T1] А. С. Целищев, *Неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных систем Виленкина*, Матем. сб., **212**:10 (2021), 152–164.

[T2] А. С. Целищев, *О векторнозначном неравенстве Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для функций Уолша*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **503** (2021), 137–154.

[T3] A. Tselishchev, *Absence of local unconditional structure in spaces of smooth functions on the torus of arbitrary dimension*, Studia Mathematica **261** (2021), 207–225.

Список литературы

[1] С. В. Бочкарев, *Ряды Валле-Пуссена в пространствах* BMO, L_1, *и* $H^1(D)$, *и мультипликативные неравенства*, Тр. МИАН, **210** (1995), 41–64.

[2] С. В. Бочкарёв, *Средние Валле Пуссена рядов Фурье для квадратичного спектра и спектров степенной плотности*, УМН **69**:1(415) (2014), 125–162.

[3] И. Васильев, А. Целищев, *Об эквивалентной норме в пространстве* BMO, Зап. научн. сем. ПОМИ **456** (2017), 37–54.

[4] Н. Я. Виленкин, *Об одном классе полных ортонормальных систем*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **11**:4 (1947), 363–400.

[5] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Москва "Наука"(1987).

[6] С. В. Кисляков, *Мартингальные преобразования и равномерно сходящиеся ортогональные ряды*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **141** (1985), 18–38.

[7] С. В. Кисляков, *Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре*, Алгебра и Анализ, **3**:4 (1991), 1–77.

[8] С. В. Кисляков, *Соболевские операторы вложения и неизоморфность некоторых банаховых пространств*, Функц. анализ и его прил., **9**:4 (1975), 22–27.

[9] С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным семейством дифференциальных операторов*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **327** (2005), 78–97.

[10] С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространств гладких функций, порождённых конечным семейством неоднородных дифференциальных операторов*, Препринт ПОМИ, 6/2009.

[11] С. В. Кисляков, Д. В. Парилов, *О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **327** (2005), 98–114.

[12] С. В. Кисляков, Н. Г. Сидоренко, *Отсутствие локальной безусловной структуры в анизотропных пространствах гладких функций*, Сиб. матем. журн., **29**:3 (1988) 64–77.

[13] Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным набором дифференциальных операторов. II*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **333** (2006) 62–65.

[14] Н. Г. Сидоренко, *Неизоморфность некоторых банаховых пространств гладких функций пространству непрерывных функций*, Функц. анализ и его прил., **21**:4 (1987), 169–215.

[15] Г. М. Хенкин, *Отсутствие равномерного гомеоморфизма между пространствами гладких функций от одного и от n переменных ($n \geqslant 2$)*, Матем. сб., **74(116)**:4 (1967), 595–607.

[16] А. С. Целищев, *Отсутствие локальной безусловной структуры в пространствах гладких функций на двумерном торе*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **491** (2020), 153–172.

[17] E. Berkson, T. A. Gillespie and J. L. Torrea, *Vector-valued transference,* Functional Space Theory and Its Applications, Proc. Int. Conf. 13th Academic Symp. Wuhan, 2003 (ed. P. Liu), pp. 1–27 (Burnham: Research Information, 2004).

[18] O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral Representation of Functions and Imbedding Theorems*, Halsted Press, Washington (1978).

[19] J. Bourgain, *Extension of a result of Benedek, Calderón and Panzone*, Ark. Mat. **22**:1 (1984), 91–95.

[20] J. Bourgain, *On square functions on the trigonometric system*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B, **37**:1 (1985), 20–26

[21] A. El Baraka, *Littlewood–Paley characterization for Campanato spaces*, J. Funct. Spaces Appl. **4** (2006), 193–220.

[22] E. B. Fabes and N. M. Rivière, *Singular integrals with mixed homogeneity*, Stud. Math., **27**:1, 19–38 (1966).

[23] J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio De Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Stud., vol. 116. Notas. Math., vol. 104, North-Holland, Amsterdam (1985).

[24] Y. Gordon, D. R. Lewis, *Absolutely summing operators and local unconditional structure*, Acta Math, **133**, 27–48 (1974).

[25] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*. 3 edition. Springer (2014).

[26] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*. 3 edition. Springer (2014).

[27] A. Grothendieck, *Erratum au mémoire: produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955–1956), 117–120.

[28] Yongsheng Han and Dachun Yang, *New characterization of* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *space*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **10** (2004), 95–103.

[29] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, L. Weis, *Analysis in Banach Spaces. Vol. I. Martingales and Littlewood–Paley Theory*, volume 63 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. Springer, Cham (2016).

[30] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, L. Weis, *Analysis in Banach Spaces. Vol. II. Probabilistic methods and operator theory*, volume 67 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. Springer, Cham (2017).

[31] T. P. Hytönen, J. L. Torrea, D. V. Yakubovich, *The Littlewood–Paley–Rubio de Francia property of a Banach space for the case of equal intervals*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **139** (2009), 819–832.

[32] T. P. Hytönen, L. Weis, *Singular convolution integrals with operator-valued kernel*, Math. Z. **255** (2007), 393–425.

[33] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Basic concepts in the geometry of Banach spaces*, in *Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. I*, North-Holland, Amsterdam (2001), 1–84.

[34] S. V. Kislyakov, *There is no local unconditional structure in the space of continuously differentiable functions on the torus*, LOMI Preprint R-1-77, Leningrad, 1977.

[35] S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, and D. M. Stolyarov, *Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate in arbitrary dimension*, J. Funct. Anal, **269**, 3220–3263 (2015).

[36] S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, and D. M. Stolyarov, *Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate*, https://arxiv.org/abs/1209.2078

[37] Pekka Koskela, Dachun Yang and Yuan Zhou, *Pointwise characterizations of Besov and Triebel–Lizorkin spaces and quasiconformal mappings*, Advances in Mathematics, **226**:4 (2011), 3579–3621.

[38] S. Kwapień, A. Pełczyński, *Absolutely summing operators and translation-invariant spaces of functions on compact abelian groups*, Math. Nachr. **94** (1980) 303–340.

[39] M. T. Lacey, *Issues related to Rubio de Francia's Littlewood–Paley inequality*, New York Journal of Mathematics. NYJM Monographs **2**, State University of New York, University at Albany, Albany, NY (2007), 36 pp.

[40] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II. Function spaces.* Results in Mathematics and Related Areas, 97. Springer, Berlin-New York, 1979.

[41] B. Maurey, G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Stud. Math., **58**:1, 45–90 (1976).

[42] P. F. X. Müller, *Isomorphisms between H^1 spaces*, volume 66 of *Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (New Series)*

[Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical Monographs (New Series)]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[43] Camil Muscalu and Wilhelm Schlag, *Classical and multilinear harmonic analysis. Vol. I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 137, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[44] N. N. Osipov, *Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the Walsh system*, Алгебра и анализ, **28**:5 (2016), 236–246.

[45] B. Park, *Fourier multipliers on a vector-valued function space*, https://arxiv.org/abs/1904.12671.

[46] A. Pełczyński, K. Senator, *On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical" Banach spaces and Sobolev-type embedding theorem*, Studia Math. **84** (1986) 169–215.

[47] A. Pietsch, *Operator Ideals*, Elsevier, North-Holland (1980).

[48] G. Pisier, *Martingales in Banach spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 155. Cambridge University Press, Cambridge (2016).

[49] D. Potapov, F. Sukochev, Q. Xu, *On the vector-valued Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality*, Rev. Mat. Iberoamericana **28(3)** (2012), 839–856.

[50] José L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals*, Rev. Mat. Iberoamericana **1**:2 (1985), 1–14.

[51] José L. Rubio de Francia, *Martingale and integral transforms of Banach space valued functions.* In: Probability and Banach Spaces (Zaragoza, 1985): Lecture Notes in Math., vol. 1221, pp. 195–222. Springer (1986).

[52] P. Simon, *Investigations with respect to the Vilenkin system*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., **27** (1984), 87–101.

[53] Chinami Watari, *On generalized Walsh Fourier series*, Tohoku Math. J. (2), **10** (1958), 211–241.

[54] Ferenc Weisz, *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1958**, Springer-Verlag, Berlin (1994).

[55] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, Cambridge University Press (1991).

[56] Wo-Sang Young, *Littlewood–Paley and multiplier theorems for Vilenkin–Fourier series*, Canad. J. Math., **46**:3 (1994), 662–672.