

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института им.
В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

ЗАПОРОЖЕЦ Дмитрий Николаевич

**Нули случайных полиномов, распределение
алгебраических чисел и выпуклые оболочки
случайных процессов**

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Оглавление

Введение	4
1. Введение	4
Глава 1. Вещественные нули случайных полиномов	7
1.1. Введение	7
1.2. Минимальное число вещественных нулей в среднем	10
1.3. Универсальная оценка сверху п.н.	33
1.4. Корреляции вещественных нулей	43
1.5. Средняя площадь нулевой поверхности гауссовского поля	51
Глава 2. Комплексные нули случайных полиномов одной переменной	73
2.1. Введение	73
2.2. Критерий равномерной концентрации нулей около единичной окружности	77
2.3. Коэффициенты с экстремально тяжелыми хвостами	87
2.4. Коэффициенты с логарифмическими хвостами	94
2.5. О распределении нулей случайной аналитической функции	144
Глава 3. Распределение алгебраических чисел	178
3.1. Обозначения и необходимые сведения из теории алгебраических чисел	178
3.2. Введение	179
3.3. Распределение комплексных алгебраических чисел	187
3.4. Корреляция между вещественными сопряженными алгебраическими числами	195
3.5. Распределение дискриминанта полиномов с целочисленными коэффициентами	199

Глава 4. Выпуклые оболочки случайных процессов	204
4.1. Введение	204
4.2. Внутренние объемы соболевских шаров с приложением к броуновским выпуклым оболочкам	211
4.3. Смешанные объемы эллипсоидов и нули гауссовских случайных полей	248
4.4. Средняя ширина правильных многогранников и средний максимум зависимых гауссовских величин	257
4.5. Конические аналоги результатов Судакова и Цирельсона	281
4.6. Выпуклая оболочка многомерного случайного блуждания	293
4.7. Многомерное обобщение результата Спарре Андерсена	311
4.8. Формула включений-исключений для выпуклых оболочек	355
Список литературы	378

Введение

1. Введение

Пусть даны вещественные числа $a < b$. Кривая моментов в пространстве \mathbb{R}^{n+1} , заданная на интервале $[a, b]$, определяется параметрически следующим образом:

$$g(x) := (1, x, x^2, \dots, x^n).$$

Пусть дана линейная функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ вида $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$, где $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда значение функции f на кривой моментов g является полиномом степени n :

$$f(g(x)) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Коническая оболочка кривой g

$$M := \{c \cdot g(x) : c \geq 0, x \in [a, b]\}$$

называется конусом моментов. Обозначим γ сферическую проекцию кривой моментов γ :

$$\gamma(x) := \frac{g(x)}{\|g(x)\|}.$$

Кривая моментов и конус моментов обладают множеством интересных геометрических свойств (см., например, [56, § 9]). Также существует следующая взаимосвязь данных объектов со случайными полиномами. Пусть даны стандартные гауссовские величины $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$. Рассмотрим случайный полином одной переменной

$$G_n(x) := \xi_0 + \xi_1x + \dots + \xi_{n-1}x^{n-1} + \xi_nx^n.$$

Пусть $\mu_{G_n}([a, b])$ обозначает среднее число вещественных нулей полинома G_n в интервале $[a, b]$. Эдельман и Костлан показали (см. [96, раздел 2.2]), что

$$\mathbb{E} \mu_{G_n}([a, b]) = \frac{1}{\pi} \lambda_1(\gamma(x) : x \in [a, b]),$$

где λ_1 обозначает длину кривой. Таким образом, среднее число вещественных нулей случайного полинома в фиксированном интервале совпадает с (нормированной) длиной соответствующего участка проекции кривой моментов на единичную сферу.

Далее, рассмотрим первый внутренний объем (определение см. в § 4.1) выпуклой оболочки кривой моментов

$$V_1(\text{conv}(g(x) : x \in [a, b])),$$

который с точностью до нормировки совпадает со средней шириной. Из общего результата Судакова (см. [32, Предложение 14], а также Главу 4) вытекает, что

$$\mathbb{E} \sup_{x \in [a, b]} G_n(x) = \sqrt{2\pi} V_1(\text{conv}(g(x) : x \in [a, b])).$$

Тем самым, средний супремум случайного полинома G_n на фиксированном интервале совпадает (с точностью до нормировки) со средней шириной соответствующего участка кривой моментов.

Наконец, рассмотрим нулевой конический внутренний объем (определение см. в § 4.1) выпуклой оболочки кривой моментов $v_0(\text{conv}(g([a, b])))$. В Главе 4 получен конический аналог результата Судакова, из которого следует соотношение

$$\mathbb{P}[\inf_{x \in [a, b]} G_n(x) \geq 0] = v_0(\text{conv}(g([a, b]))).$$

Из симметричности гауссовского распределения вытекает, что левая часть равна половине вероятности того, что у полинома G_n в интервале $[a, b]$ нет нулей. Таким образом, данная вероятность определяется нулевым коническим внутренним объемом выпуклой оболочки соответствующего участка кривой моментов.

Вышеизложенные примеры показывают о наличии определенной связи между поведением нулей случайных полиномов (которые изучаются в Главах 1 и 2) с гауссовскими коэффициентами и характеристиками определенных геометрических объектов. Данная связь в расширенной постановке, где вместо

полиномов с гауссовскими коэффициентами рассматриваются общие гауссовские процессы, изучается в Главе 4. Глава 3 посвящена одному интересному приложению теории случайных полиномов: в ней изучается предельное распределение алгебраических чисел фиксированной степени при стремлении высоты к бесконечности (данная задача была поставлена Малером).

Ввиду некоторого разнообразия рассматриваемых вопросов, каждая из глав имеет свое собственное подробное введение, дублировать которое в данном разделе смысла нет.

Автор выражает огромную благодарность своим родителям и своей семье за неоценимую помощь и моральную поддержку во время длительной работы над данной диссертацией. Глубокую признательность автор выражает своему учителю Ильдару Абдулловичу Ибрагимову, без участия которого данная работа никогда бы не началась, а также Василию Ивановичу Бернику, Александру Буфетову, Александру Ивановичу Саханенко и Александру Николаевичу Тихомирову, которые возьмут на себя огромный труд прочтения диссертации и написания отзыва. За множество ценных замечаний редакторского характера автор признателен Андрею Юрьевичу Зайцеву. Автор благодарен всем своим коллегам, совместная работа с которыми позволила получить результаты, вошедшие в диссертацию: Владиславу Высоцкому, Фридриху Гетце, Ильдару Абдулловичу Ибрагимову, Денису Коледе, Гюнтеру Ласту, Александру Литваку, Александру Ильичу Назарову, Евгению Сподареву и, в особенности, Захару Каблучко. И, наконец – но не в последнюю очередь, – особую благодарность автор выражает Галине Казанцевой, прочитавшей рукопись и исправившей множество опечаток.

Глава 1

Вещественные нули случайных полиномов

1.1. Введение

Пусть дан полином $g(x)$ одной вещественной переменной. Обозначим μ_g меру на \mathbb{R} , считающую нули g с учетом их кратности:

$$\mu_g := \sum_{x \in \mathbb{R}: g(x)=0} n_g(x) \delta_x.$$

Здесь $n_g(x)$ обозначает кратность нуля полинома в точке x , и δ_x обозначает единичную массу в точке x .

Пусть дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$, принимающих значение в \mathbb{R} . Рассмотрим случайный полином одной переменной

$$G_n(x) := \xi_0 + \xi_1 x + \dots + \xi_{n-1} x^{n-1} + \xi_n x^n.$$

Основной вопрос, который нас будет интересовать в данной главе, связан с оценкой величины $\mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R})$: сколько вещественных нулей у случайного полинома G_n в среднем?

Первый содержательный ответ на данный вопрос получили Блох и Пойа (см. [73]). Они рассмотрели случай $\mathbb{P}[\xi_i = -1] = \mathbb{P}[\xi_i = 0] = \mathbb{P}[\xi_i = 1] = 1/3$, для которого показали, что для некоторой абсолютной постоянной C при всех n выполнено

$$\mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R}) \leq C \sqrt{n}.$$

Далее Литтлвуд и Оффорд (см. [158–160]) для нормально распределенных, равномерно распределенных на $[-1, 1]$ и равномерно распределенных на $\{-1, 1\}$ величин ξ_i показали, что для некоторой абсолютной постоянной C при всех n

выполнено

$$\frac{C \log n}{(\log \log n)^2} \leq \mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R}) \leq 25(\log n)^2 + 12 \log n.$$

Первый асимптотически точный результат был получен Кацем для нормальных (см. [138]) и равномерно распределенных (см. [139]) случайных величин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R})}{\log n} = \frac{2}{\pi}. \quad (1.1)$$

Впоследствии Ибрагимов и Маслова (см. [12, 13]) обобщили данную формулу на класс случайных величин, распределение которых принадлежит области притяжения нормального закона: для распределений с нулевым средним выполнено соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) | G_n \neq 0]}{\log n} = \frac{2}{\pi}.$$

Для распределений с ненулевым средним половина нулей “исчезает”:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) | G_n \neq 0]}{\log n} = \frac{1}{\pi}.$$

Примерно в это же время Логан и Шепп (см. [163, 164]) показали, что для случайных величин ξ_i с характеристической функцией распределения $e^{-|t|^\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 2$) справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R})}{\log n} = c_\alpha,$$

где константа c_α была ими явно выписана. Эта оценка была распространена Ибрагимовым и Масловой (см. [11]) на класс распределений, принадлежащих области притяжения устойчивого закона.

Шепп предложил следующую гипотезу: для любого невырожденного распределения ξ_0 существуют положительные числа c_1, c_2 , такие что при всех n выполнено

$$c_1 \leq \frac{\mathbb{E} \mu_{G_n}}{\log n} \leq c_2.$$

Нижняя оценка была опровергнута в [7]: было построено невырожденное симметричное распределение коэффициентов, при котором среднее число вещественных нулей G_n ограничено равномерно по $n \in \mathbb{N}$ (а именно, $\mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R}) < 9$).

Возникает естественный вопрос: насколько можно улучшить оценку 9 в этом утверждении? Ответ на него дан в § 1.2 (также см. [10]).

Что касается верхней оценки из гипотезы Шеппа, то вопрос все еще остается открытым.¹ Однако в § 1.3 будет показано, что произвольный случайный полином не может иметь слишком много вещественных нулей с вероятностью единица (также см. [132]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{G_n}(\mathbb{R})}{n} = 0 \quad \text{п.н.} \quad (1.2)$$

Для того, чтобы получить (1.1), Кац вывел явную формулу для среднего числа вещественных нулей случайного полинома с независимыми стандартными гауссовскими коэффициентами на интервале $[a, b]$:

$$\mathbb{E} \mu_{G_n}([a, b]) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(1 - \left[\frac{nx^{n-1}(1-x^2)}{1-x^{2n}} \right]^2 \right) (1-x^2)^{-1} dx. \quad (1.3)$$

Подынтегральное выражение в правой части называется плотностью нулей случайного полинома. Данное понятие может быть обобщено следующим образом.

Распределение точечного процесса может быть описано с помощью его *корреляционных функций* (также известны как *совместные интенсивности*). Напомним, что случайная мера μ называется точечным процессом, если случайная величина $\mu(K)$ является целочисленной для любого компактного множества K (см. [183, § 3.1]), что имеет место для считающей меры нулей μ_{G_n} . По определению (см., например, [129, § 1.2]), корреляционными функциями меры μ_{G_n} являются функции $\rho_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$, где $k = 1, \dots, n$, такие что для любого набора попарно непересекающихся борелевских множеств $B_1, \dots, B_k \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mu_{G_n}(B_i) \right] = \int_{B_1} \dots \int_{B_k} \rho_k(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

¹ В январе 2016 г. вышел препринт работы группы авторов под псевдонимом Кен Сози (см. [204, 205]), в котором доказана справедливость верхней оценки гипотезы Шеппа

Стандартным средством вычисления ρ_k является следующая расширенная формула Каца–Райса (см. [71], [72]):

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \int_{\mathbb{R}^k} |t_1 \dots t_k| D_k(0, t_1, \dots, t_k, x_1, \dots, x_k) dt_1 \dots dt_k, \quad (1.4)$$

где $D_k(\cdot, \cdot, x_1, \dots, x_k)$ обозначает совместную плотность распределения случайных векторов

$$(G_n(x_1), \dots, G_n(x_k)) \quad \text{и} \quad (G'_n(x_1), \dots, G'_n(x_k)).$$

В § 1.4 мы выведем формулу для k -точечной корреляционной функции нулей случайного полинома, коэффициенты которого имеют произвольное абсолютно непрерывное распределение (также см. [119]). В § 1.5 мы обобщим (1.3) на гладкие гауссовские поля (также см. [8]).

1.2. Минимальное число вещественных нулей в среднем

Результаты данного параграфа были получены совместно с А. И. Назаровым.

Для $a, b \geq 0$, таких что $0 < a + b \leq 1$, обозначим $\Theta_{a,b} \subset \Theta$ множество всех распределений с. в. ξ_0 , для которых $\mathbb{P}[\xi_0 > 0] = a$, $\mathbb{P}[\xi_0 < 0] = b$. Также положим $c := \mathbb{P}[\xi_0 = 0] = 1 - a - b$.

Теорема 1. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\inf_{\theta \in \Theta_{a,b}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) | G_n \not\equiv 0] = 1 + \frac{1 - |a - b|}{a + b}. \quad (1.5)$$

Этот параграф посвящен доказательству Теоремы 1 и организован следующим образом. В разделе 1.2.1 доказываются несколько вспомогательных утверждений о полиномах. В разделе 1.2.2 сначала выводятся асимптотические оценки вероятностей некоторых событий, которые потом используются для оценки $\mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R})$ снизу. Для оценки сверху в разделе 1.5.3 применяется модифицированная конструкция из [7]. Совпадение верхней и нижней оценки доказывает теорему. Раздел 1.2.4 содержит несколько простых следствий.

1.2.1. Вспомогательные утверждения о полиномах

Лемма 1. Пусть дан полином $g(t) := a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, $a_0a_m \neq 0$.

1. Число положительных нулей $\mu_g(\mathbb{R}^+)$ оценивается снизу следующим образом:

	$a_0g(1) > 0$	$a_0g(1) < 0$
$a_0a_m > 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^+) \geq 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^+) \geq 2$
$a_0a_m < 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^+) \geq 1$	

2. Число отрицательных нулей $\mu_g(\mathbb{R}^-)$ оценивается снизу следующим образом:

	$a_0g(-1) > 0$	$a_0g(-1) < 0$
$a_0a_m > 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^-) \geq \frac{1}{2}[1 - (-1)^m]$	$\mu_g(\mathbb{R}^-) \geq 1 + \frac{1}{2}[1 + (-1)^m]$
$a_0a_m < 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^-) \geq \frac{1}{2}[1 + (-1)^m]$	$\mu_g(\mathbb{R}^-) \geq 1 + \frac{1}{2}[1 - (-1)^m]$

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из теоремы Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Второе утверждение получается из первого заменой $x \rightarrow -x$. ■

Лемма 2. Пусть дан полином $g(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, причем $|a_m|, |a_0| \geq 1$ и $a_ma_0 > 0$. Если существует коэффициент a_k , такой что $a_ka_0 > 0$ и

$$|a_k| \geq (m \max_{i \neq k} \{|a_i|\})^{2m},$$

то полином не имеет положительных нулей.

Доказательство. Введем обозначение $K := \max_{i \neq k} \{|a_i|\}$. Очевидно, $K \geq 1$.

Представим $g(x)$ в следующем виде:

$$g(x) = (a_0 + a_kx^k + a_mx^m) + \sum_{i \neq 0, k, m} a_ix^i \quad (1.6)$$

(здесь мы предположили, что $k \neq 0, m$; случаи равенства разбираются совершенно аналогично). Для того, чтобы доказать, что g не имеет положительных

нулей, достаточно проверить, что при $x > 0$ выражение в скобках в правой части (1.6) строго больше оставшейся суммы по абсолютной величине. Действительно, при $0 < x \leq (mK)^{-1}$ выполнено

$$|a_0 + a_k x^k + a_m x^m| > |a_0| \geq 1 \geq m \cdot Kx \geq \sum_{i \neq 0, k, m} |a_i| x \geq \left| \sum_{i \neq 0, k, m} a_i x^i \right|;$$

при $(mK)^{-1} \leq x \leq mK$ выполнено

$$|a_0 + a_k x^k + a_m x^m| > |a_k x^k| \geq (mK)^{2m} (mK)^{-k} \geq m \cdot K (mK)^{m-1} \geq \left| \sum_{i \neq 0, k, m} a_i x^i \right|;$$

при $x \geq mK$ выполнено

$$|a_0 + a_k x^k + a_m x^m| > |a_m x^m| \geq x^m \geq m \cdot K x^{m-1} \geq \left| \sum_{i \neq 0, k, m} a_i x^i \right|.$$

■

Лемма 3. Пусть дан полином $g(x) := a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$, $a_0 a_m \neq 0$, с коэффициентами, среди которых есть как положительные, так и отрицательные. Пусть l есть минимальный индекс, для которого выполнено $a_0 a_l < 0$. Тогда

$$\mu_g(\mathbb{R}^+) \leq \mu_{g^{(l)}}(\mathbb{R}^+) + 1,$$

где $g^{(l)}$ обозначает l -ю производную g .

Доказательство. Для удобства изложения будем считать, что $a_0 > 0, a_l < 0$. Пусть s обозначает максимальный индекс, такой что $s < l$ и $a_s \neq 0$ (тем самым, $a_s > 0$). По теореме Ролля

$$\mu_{g^{(s)}}(\mathbb{R}^+) \leq \mu_{g^{(s+1)}}(\mathbb{R}^+) + 1. \quad (1.7)$$

Далее, для любого $i = 0, \dots, s-1$ у $g^{(i)}$ свободный член неотрицателен, а самый младший из ненулевых коэффициентов, за исключением свободного члена, положителен. Поэтому, как легко видеть, между минимальным положительным нулем $g^{(i)}$ (если он есть) и началом координат есть как минимум один нуль

$g^{(i+1)}$. Это выполняется также и при $i = s + 1, \dots, l - 1$, так как в этом случае в начале координат лежит нуль $g^{(i)}$. Следовательно, по теореме Ролля выполнено

$$\mu_{g^{(i)}}(\mathbb{R}^+) \leq \mu_{g^{(i+1)}}(\mathbb{R}^+), \quad i = 0, \dots, s - 1, s + 1, \dots, l - 1. \quad (1.8)$$

Объединение (1.7) и (1.8) доказывает лемму. \blacksquare

Лемма 4. Пусть дан полином $g(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, $a_0a_m \neq 0$, причем все ненулевые коэффициенты удовлетворяют неравенству $|a_i| \geq 1$. Если существует коэффициент a_k , для которого

$$|a_k| \geq ((m!)^m \max_{i \neq k} \{|a_i|\})^{2m}, \quad (1.9)$$

то количество положительных нулей полинома оценивается сверху следующим образом:

	$a_0a_k > 0$	$a_0a_k < 0$
$a_0a_m > 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^+) = 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^+) \leq 2$
$a_0a_m < 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^+) \leq 1$	

Доказательство. При $a_0a_m > 0$, $a_0a_k > 0$ отсутствие положительных нулей непосредственно следует из Леммы 2.

Пусть $a_0a_m < 0$. Можно считать, что $a_0a_k < 0$: в противном случае надо вместо $g(x)$ рассмотреть полином

$$\tilde{g}(x) := a_m + a_{m-1}x + \dots + a_0x^m,$$

после чего воспользоваться очевидным равенством $\mu_g(\mathbb{R}^+) = \mu_{\tilde{g}}(\mathbb{R}^+)$. Обозначим l минимальный индекс, для которого $a_0a_l < 0$. Тогда $1 \leq l \leq k$ и

$$g^{(l)}(x) = \sum_{i=0}^{m-l} \frac{(l+i)!}{i!} a_{l+i} x^i.$$

При $i \neq k - l$ имеем

$$\left((m-l) \frac{(l+i)!}{i!} |a_{l+i}| \right)^{2(m-l)} \leq \left((m!)^m |a_{l+i}| \right)^{2m} \leq |a_k| \leq \frac{k!}{(k-l)!} |a_k|,$$

следовательно, $g^{(l)}$ удовлетворяет условию Леммы 2, и $\mu_{g^{(l)}}(\mathbb{R}^+) = 0$. По Лемме 3 получаем $\mu_g(\mathbb{R}^+) \leq \mu_{g^{(l)}}(\mathbb{R}^+) + 1 = 1$.

Пусть, наконец, $a_0 a_m > 0$, $a_0 a_k < 0$. Снова воспользовавшись введенным обозначением l , при $i \neq k - l$ имеем

$$\left(((m-l)!)^{m-l} \frac{(l+i)!}{i!} |a_{l+i}| \right)^{2(m-l)} \leq \left((m!)^m |a_{l+i}| \right)^{2m} \leq |a_k| \leq \frac{k!}{(k-l)!} |a_k|,$$

следовательно, $g^{(l)}$ удовлетворяет условию настоящей леммы и подпадает под предыдущий, уже доказанный случай, поэтому $\mu_{g^{(l)}}(\mathbb{R}^+) \leq 1$. По Лемме 3 получаем $\mu_g(\mathbb{R}^+) \leq \mu_{g^{(l)}}(\mathbb{R}^+) + 1 \leq 2$. ■

Следствие 1. В условиях Леммы 4 количество вещественных нулей полинома оценивается следующим образом:

	$a_0 a_k > 0$	$a_0 a_k < 0$
$a_0 a_m > 0$	$\mu_g(\mathbb{R}) \leq 1 - \frac{1}{2}(-1)^k [1 + (-1)^m]$	$\mu_g(\mathbb{R}) \leq 3 + \frac{1}{2}(-1)^k [1 + (-1)^m]$
$a_0 a_m < 0$	$\mu_g(\mathbb{R}) \leq 2 - \frac{1}{2}(-1)^k [1 - (-1)^m]$	$\mu_g(\mathbb{R}) \leq 2 + \frac{1}{2}(-1)^k [1 - (-1)^m]$

Доказательство. Применяя Лемму 4 к полиному $G(-x)$, получаем оценку числа отрицательных нулей:

	$a_0 a_k > 0$	$a_0 a_k < 0$
$a_0 a_m > 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^-) \leq 1 - \frac{1}{2}(-1)^k [1 + (-1)^m]$	$\mu_g(\mathbb{R}^-) \leq 1 + \frac{1}{2}(-1)^k [1 + (-1)^m]$
$a_0 a_m < 0$	$\mu_g(\mathbb{R}^-) \leq 1 - \frac{1}{2}(-1)^k [1 - (-1)^m]$	$\mu_g(\mathbb{R}^-) \leq 1 + \frac{1}{2}(-1)^k [1 - (-1)^m]$

Осталось ее объединить с оценкой числа положительных нулей, полученной в лемме (т.к. $a_0 \neq 0$, в начале координат нулей нет). ■

1.2.2. Оценка снизу

Для произвольной случайной величины η определим ее функцию концентрации $Q(\eta; r)$ следующим образом:

$$Q(\eta; r) := \sup_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{P}[a \leq \eta \leq a + r]. \quad (1.10)$$

Если η_1, η_2 являются независимыми случайными величинами, то (см., например, [26, Гл. 3])

$$Q(\eta_1 + \eta_2; r) \leq \min\{Q(\eta_1; r), Q(\eta_2; r)\}. \quad (1.11)$$

Следующий классический результат об оценке функции концентрации суммы независимых случайных величин будет нами использоваться неоднократно.

Теорема 2 (Неравенство Колмогорова–Рогозина). *Пусть даны независимые случайные величины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Для любых $0 < r_j \leq r, j = 1, \dots, n$, выполнено*

$$Q(\eta_1 + \dots + \eta_n; r) \leq \frac{Cr}{\sqrt{\sum_{j=1}^n r_j^2 (1 - Q(\eta_j; r_j))}}, \quad (1.12)$$

где C – абсолютная константа.

Доказательство. См. [28]. ■

Сначала получим асимптотические оценки вероятностей некоторых событий, которые потом будут нами использованы для выведения оценки $\mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R})$ снизу. Для этого нам понадобятся следующие обозначения:

$$S_n^+ := \sum_{i=1}^n \xi_i = G_n(1) - G_n(0),$$

$$S_n^- := \sum_{i=1}^n (-1)^i \xi_i = G_n(-1) - G_n(0).$$

В дальнейшем, не умаляя общности мы будем считать, что все рассматриваемые случайные величины невырождены.

Лемма 5. *Для любого $A > 0$ выполнено*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|S_n^-| < A] = 0; \quad (1.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|S_n^+| < A] = 0. \quad (1.14)$$

Доказательство. Вытекает из (1.11) и (1.12). ■

Лемма 6. *Выполнены следующие соотношения:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_0(\xi_0 + S_{n-1}^-) \leq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0] = 0; \quad (1.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^+) \geq 0] = 0. \quad (1.16)$$

Доказательство. Докажем (1.15). Для этого зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $A > 0$, такое что $\mathbb{P}[|\xi_0| + |\xi_n| \geq A] < \varepsilon$. Получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\xi_0(\xi_0 + S_{n-1}^-) \leq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0] &\leq \mathbb{P}[|S_{n-1}^-| \leq |\xi_0| + |\xi_n|] \\ &= \mathbb{P}[|S_{n-1}^-| \leq |\xi_0| + |\xi_n| \mid |\xi_0| + |\xi_n| \geq A] \mathbb{P}[|\xi_0| + |\xi_n| \geq A] \\ &\quad + \mathbb{P}[|S_{n-1}^-| \leq |\xi_0| + |\xi_n| \mid |\xi_0| + |\xi_n| < A] \mathbb{P}[|\xi_0| + |\xi_n| < A] \\ &\leq \varepsilon + \mathbb{P}[|S_{n-1}^-| < A]. \end{aligned}$$

По Лемме 5 второе слагаемое стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому, в силу произвольности ε , (1.15) доказано. Соотношение (1.16) доказывается аналогично с использованием (1.14). \blacksquare

Лемма 7. *Выполнены следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^+) < 0] \\ \geq \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}^2[\xi_0 > 0] + \mathbb{P}^2[\xi_0 < 0] - |\mathbb{P}^2[\xi_0 > 0] - \mathbb{P}^2[\xi_0 < 0]| \right); \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_n \neq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_n \neq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^-) < 0] = \frac{1}{2} \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n \neq 0]; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_0 \neq 0, \xi_n(\xi_0 + S_n^-) > 0] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_0 \neq 0, \xi_n(\xi_0 + S_n^-) < 0] = \frac{1}{2} \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n \neq 0]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Доказательство. Для доказательства (1.17) зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Используя (1.16), получаем, что при всех достаточно больших n выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^+) < 0] &\geq \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0] \\ &\quad - \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0, \xi_0(\xi_0 + S_n^+) \geq 0] \\ &\geq \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0] - \varepsilon. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 S_{n-1}^+ \leq 0] &= \mathbb{P}[\xi_0 > 0, \xi_n > 0, S_{n-1}^+ \leq 0] + \mathbb{P}[\xi_0 < 0, \xi_n < 0, S_{n-1}^+ \geq 0] \\ &= \mathbb{P}^2[\xi_0 > 0] \mathbb{P}[S_{n-1}^+ \leq 0] + \mathbb{P}^2[\xi_0 < 0] \mathbb{P}[S_{n-1}^+ \geq 0] \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}^2[\xi_0 > 0] + \mathbb{P}^2[\xi_0 < 0] - |\mathbb{P}^2[\xi_0 > 0] - \mathbb{P}^2[\xi_0 < 0]| \right), \end{aligned}$$

таким образом, (1.17) доказано.

Перейдем к доказательству (1.18). Заметим, что, в силу (1.15) и независимости ξ_n от ξ_0 и S_{n-1}^- , соотношение (1.18) равносильно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_0(\xi_0 + S_n^-) < 0] = \frac{1}{2} \mathbb{P}[\xi_0 \neq 0]. \quad (1.20)$$

Для доказательства (1.20) зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем такое $B > 0$, для которого выполнено $\mathbb{P}[|\xi_0| < B] > 1 - \varepsilon$. Если n четно, то S_n^- является симметрично распределенной случайной величиной. Поэтому, в силу (1.13), существует такое N , что при четном $n \geq N - 1$ выполнено $\mathbb{P}[S_n^- > 2B] > 1/2 - \varepsilon$. Если же n нечетно, то, ввиду четности $n - 1$, при $n \geq N$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n^- > B] &= \mathbb{P}[S_{n-1}^- - \xi_n > B] \geq \mathbb{P}[S_{n-1}^- > 2B, \xi_n < B] \\ &\geq \mathbb{P}[S_{n-1}^- > 2B] - \mathbb{P}[\xi_n \geq B] \geq \frac{1}{2} - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым, при любом $n \geq N$ имеем

$$\mathbb{P}[\xi_0 > -B, S_n^- > B] \geq \mathbb{P}[S_n^- > B] - \mathbb{P}[\xi_0 \leq -B] \geq \frac{1}{2} - 3\varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[\xi_0 < 0, \xi_0 + S_n^- > 0] \\
& \geq \mathbb{P}[\xi_0 < 0, \xi_0 + S_n^- > 0 \mid \xi_0 > -B, S_n^- > B] \mathbb{P}[\xi_0 > -B, S_n^- > B] \\
& \geq \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) \mathbb{P}[\xi_0 < 0, \xi_0 + S_n^- > 0 \mid \xi_0 > -B, S_n^- > B] \\
& = \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) \mathbb{P}[\xi_0 < 0 \mid \xi_0 > -B, S_n^- > B].
\end{aligned}$$

В силу независимости ξ_0 и S_n^- ,

$$\mathbb{P}[\xi_0 < 0 \mid \xi_0 > -B, S_n^- > B] = \mathbb{P}[\xi_0 < 0 \mid \xi_0 > -B],$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\xi_0 < 0, \xi_0 + S_n^- > 0] & \geq \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) \mathbb{P}[\xi_0 < 0 \mid \xi_0 > -B] \\
& \geq \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) \left(\mathbb{P}[\xi_0 < 0] - \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Точно так же доказывается, что при всех достаточно больших n

$$\mathbb{P}[\xi_0 > 0, \xi_0 + S_n^- < 0] \geq \left(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\right) \left(\mathbb{P}[\xi_0 > 0] - \varepsilon\right).$$

Складывая эти два неравенства и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_0(\xi_0 + S_n^-) < 0] \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}[\xi_0 \neq 0].$$

Аналогично получается соотношение

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0] \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}[\xi_0 \neq 0].$$

Осталось заметить, что

$$\mathbb{P}[\xi_0(\xi_0 + S_n^-) > 0] + \mathbb{P}[\xi_0(\xi_0 + S_n^-) < 0] \leq \mathbb{P}[\xi_0 \neq 0].$$

Последние три неравенства доказывают (1.20) и, следовательно, (1.18). Соотношение (1.19) доказывается аналогично. ■

Теперь перейдем к доказательству основного утверждения раздела.

Лемма 8. Для любого распределения $\theta \in \Theta_{a,b}$ выполнено

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] \geq 1 + \frac{1 - |a - b|}{a + b}. \quad (1.21)$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем, в соответствии с Леммой 7, такое N , что при $n \geq N$ выполнены соотношения

$$\mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0] \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - |a^2 - b^2|) - \varepsilon \quad (1.22)$$

и

$$\begin{aligned} \left| (a + b)^{-2} \mathbb{P}[\xi_n \neq 0, \xi_0 G_n(-1) > 0] - \frac{1}{2} \right| &< \varepsilon; \\ \left| (a + b)^{-2} \mathbb{P}[\xi_n \neq 0, \xi_0 G_n(-1) < 0] - \frac{1}{2} \right| &< \varepsilon; \\ \left| (a + b)^{-2} \mathbb{P}[\xi_0 \neq 0, \xi_n G_n(-1) > 0] - \frac{1}{2} \right| &< \varepsilon; \\ \left| (a + b)^{-2} \mathbb{P}[\xi_0 \neq 0, \xi_n G_n(-1) < 0] - \frac{1}{2} \right| &< \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Оценим сначала среднее число нулей G_n в предположении, что $\xi_0 \xi_n \neq 0$. Для положительной полуоси, в соответствии с первой таблицей из Леммы 1, при $n \geq N$ получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] &= \mathbb{P}^{-1}[\xi_0 \xi_n \neq 0] \\ &\times (\mathbb{E}[\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) \geq 0] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) \geq 0] \\ &+ \mathbb{E}[\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0] \\ &+ \mathbb{E}[\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid \xi_0 \xi_n < 0] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0]) \\ &\geq (a + b)^{-2} (2 \cdot \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0]). \end{aligned}$$

Применение (1.22) приводит к

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] &\geq (a + b)^{-2} (a^2 + b^2 - |a^2 - b^2| - 2\varepsilon + 2ab) \\ &\geq 1 - \frac{|a - b|}{a + b} - \frac{2\varepsilon}{(a + b)^2}. \end{aligned}$$

Для отрицательной полуоси, в соответствии со второй таблицей из Леммы 1, при $n \geq N$ получаем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^-) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] &\geq \mathbb{P}^{-1}[\xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&\times \left(\mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^-) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(-1) > 0] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) > 0] \right. \\
&+ \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^-) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(-1) < 0] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0] \\
&+ \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^-) \mid \xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(-1) > 0] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(1) > 0] \\
&+ \left. \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^-) \mid \xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(-1) < 0] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(1) < 0] \right) \\
&\geq (a+b)^{-2} \left(\frac{1}{2} (1 - (-1)^n) \cdot \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) > 0] \right. \\
&+ \left(1 + \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \right) \cdot \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 G_n(1) < 0] \\
&+ \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \cdot \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(1) > 0] \\
&+ \left. \left(1 + \frac{1}{2} (1 - (-1)^n) \right) \cdot \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0, \xi_0 G_n(1) < 0] \right) \\
&= (a+b)^{-2} \left(\frac{1}{2} \mathbb{P}[\xi_n \neq 0, \xi_0 G_n(-1) > 0] + \frac{3}{2} \mathbb{P}[\xi_n \neq 0, \xi_0 G_n(-1) < 0] \right. \\
&+ \left. (-1)^n (\mathbb{P}[\xi_0 \neq 0, \xi_n G_n(-1) < 0] - \mathbb{P}[\xi_0 \neq 0, \xi_n G_n(-1) > 0]) \right).
\end{aligned}$$

Применение (1.23) приводит к

$$\mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^-) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] \geq 1 - 4\varepsilon.$$

Откажемся теперь от предположения $\xi_0 \xi_n \neq 0$. Рассмотрим случайные величины

$$\zeta_n := \min\{i = 0, \dots, n : \xi_{n-i} \neq 0\}, \quad \eta_n := \min\{j = 0, \dots, n : \xi_j \neq 0\}.$$

Поскольку при $\eta_n = j$ полином G_n имеет нулевой корень кратности j , при

$n \geq N$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] &\geq \sum_{0 \leq i, j \leq \frac{n-N}{2}} \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid \zeta_n = i, \eta_n = j] \mathbb{P}[\zeta_n = i, \eta_n = j] \\ &= \sum_{0 \leq i, j \leq \frac{n-N}{2}} (\mathbb{E} [\mu_{G_{n-i-j}}(\mathbb{R}^-) + \mu_{G_{n-i-j}}(\mathbb{R}^+) \mid \xi_0 \xi_{n-i-j} \neq 0] + j) c^{i+j} (1-c)^2 \\ &\geq \left(1 - \frac{|a-b|}{a+b} - \frac{2\varepsilon}{(a+b)^2} + 1 - 4\varepsilon\right) \sum_{0 \leq i, j \leq \frac{n-N}{2}} c^{i+j} (1-c)^2 + \sum_{0 \leq i, j \leq \frac{n-N}{2}} j c^{i+j} (1-c)^2. \end{aligned}$$

Поскольку при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{0 \leq i, j \leq \frac{n-N}{2}} c^{i+j} (1-c)^2 \rightarrow 1, \quad (1.24)$$

$$\sum_{0 \leq i, j \leq \frac{n-N}{2}} j c^{i+j} (1-c)^2 \rightarrow \frac{c}{1-c} = \frac{1}{a+b} - 1, \quad (1.25)$$

ввиду произвольности ε приходим к (1.21). \blacksquare

1.2.3. Оценка сверху

Для получения оценки сверху мы будем пользоваться результатами Леммы 4, поэтому нашей первой задачей является построение такого распределения коэффициентов, для которого с большой вероятностью полином G_n будет удовлетворять ее условиям.

Лемма 9. *Если $a \geq b$, то для произвольного $\delta > 0$ существует распределение коэффициентов $\theta_\delta \in \Theta_{a,b}$, такое что при всех n случайный полином G_n обладает следующими двумя свойствами:*

$$\mathbb{P}_{\theta_\delta}[R_n \mid G_n \neq 0] \geq 1 - \frac{\delta}{n}, \quad (1.26)$$

где событие R_n означает, что G_n удовлетворяет условиям Леммы 4;

$$\mathbb{P}_{\theta_\delta}[R'_n \mid A_n] \geq 1 - \frac{\delta}{n}, \quad (1.27)$$

где событие R'_n означает, что у G_n максимальный по модулю коэффициент положителен, а событие A_n – что у G_n есть по крайней мере один положительный коэффициент.

Доказательство. Для построения $\theta_\delta \in \Theta_{a,b}$ мы модифицируем конструкцию из [7]. Рассмотрим вероятностное распределение с дискретным носителем:

$$\mathbb{P}[\xi_0 = q_k] = ap_k, \quad \mathbb{P}[\xi_0 = -r_k] = bp_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

$$0 < q_1 < \dots < q_k < \dots < \infty, \quad 0 < r_1 < \dots < r_k < \dots < \infty$$

и

$$\mathbb{P}[\xi_0 = 0] = c = 1 - a - b.$$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных с.в. $\xi'_1, \dots, \xi'_n, \dots$ с распределением $\mathbb{P}[\xi'_1 = q_k] = p_k, k \in \mathbb{N}$, а также последовательность независимых одинаково распределенных с.в. $\xi''_1, \dots, \xi''_n, \dots$ с распределением $\mathbb{P}[\xi''_1 = r_k] = p_k, k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mu = \mu(n)$ обозначает число положительных коэффициентов у G_n , а $\nu = \nu(n)$ – число отрицательных. Легко видеть, что положительные коэффициенты распределены так же, как ξ'_i , а отрицательные – как $(-\xi''_i)$. Так как для вычисления среднего числа нулей нам важны не сами значения коэффициентов, а их распределение, в дальнейшем мы будем считать, что ξ'_1, \dots, ξ'_μ суть положительные коэффициенты G_n , а $(-\xi''_1), \dots, (-\xi''_\nu)$ – отрицательные (их порядок нам будет не важен).

Для произвольных независимых одинаково распределенных с.в. $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m$ с некоторым счетным положительным носителем $\{s_1, s_2, \dots, s_k, \dots\}$ ($0 < s_1 < \dots < s_k < \dots < \infty$) введем в рассмотрение событие $Q(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m)$, заключающееся в том, что среди них существует ровно одна максимальная, причем она равна некоторому s_l с $l \geq m$. В [7] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ точкам носителя можно приписать такие вероятности, что при всех m будет выполнено

$$\mathbb{P}[Q(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m)] > 1 - \frac{\varepsilon}{m^2}.$$

Следовательно, мы можем задать последовательность p_k таким образом, что при всех m будет выполняться неравенство

$$\mathbb{P}[Q(\xi'_1, \dots, \xi'_m)] = \mathbb{P}[Q(\xi''_1, \dots, \xi''_m)] > 1 - \frac{\varepsilon}{m^2}. \quad (1.28)$$

Рассмотрим строго возрастающую последовательность $l(k) \in \mathbb{N}$ и некоторое $N \in \mathbb{N}$. Положим $N_k := \max\{(k+1)^2, N\}$ и зададим r_k, q_k следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{k+1} &:= \left((N_k!)^{N_k + \frac{1}{2}} r_k \right)^{4N_k^2}, \quad r_1 := 1; \\ q_k &:= \left((N_{l(k)}!)^{N_{l(k)}} r_{l(k)} \right)^{2N_{l(k)}}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Покажем, что при подходящем выборе $l(k)$, N и ε будут выполняться свойства (1.26), (1.27).

Будем считать, что $b > 0$ (случай $b = 0$ разбирается еще проще). Покажем, что существует $N = N(a, b, \delta)$, такое что при $n \geq N$ выполнено

$$\mathbb{P}[\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1] \geq 1 - \frac{\delta}{2n}. \quad (1.30)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}[\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1] &\leq \mathbb{P}[\mu \leq [\sqrt{n}]] + \mathbb{P}[\nu \leq [\sqrt{n}]] \\ &= \sum_{i=0}^{[\sqrt{n}]} a^i (b+c)^{n+1-i} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} + \sum_{j=0}^{[\sqrt{n}]} b^j (a+c)^{n+1-j} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \\ &\leq 2 \sum_{i=0}^{[\sqrt{n}]} (1-b)^{n+1} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \leq 2([\sqrt{n}] + 1)(1-b)^{n+1}(n+1)^{[\sqrt{n}]}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что при $n \rightarrow \infty$ выполнено

$$\left(2([\sqrt{n}] + 1)(1-b)^{n+1}(n+1)^{[\sqrt{n}]} \right) \cdot n \rightarrow 0.$$

Зафиксируем такое N , что при $n \geq N$ выполнено (1.30). Сначала подберем такое ε , при котором выполняется (1.26), а после этого так построим $l(k)$, чтобы

выполнялось (1.27). Определим событие R_n^* следующим образом:

$$R_n^* := \begin{cases} Q(\xi'_1, \dots, \xi'_\mu) \cap Q(\xi''_1, \dots, \xi''_\nu), & \text{если } n < N; \\ Q(\xi'_1, \dots, \xi'_\mu) \cap Q(\xi''_1, \dots, \xi''_\nu) \cap \{\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1\}, & \text{если } n \geq N, \end{cases}$$

где в случае $\mu = 0$ под $Q(\xi'_1, \dots, \xi'_\mu)$ мы подразумеваем достоверное событие (аналогично для ν). В силу (1.28), при $n < N$ имеем

$$\mathbb{P}[R_n^* \mid G_n \neq 0] \geq 1 - 2\varepsilon, \quad (1.31)$$

а при $n \geq N$, учитывая также и (1.30), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[R_n^* \mid G_n \neq 0] &= \mathbb{P}[Q(\xi'_1, \dots, \xi'_\mu) \cap Q(\xi''_1, \dots, \xi''_\nu) \mid \mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1] \quad (1.32) \\ &\times \mathbb{P}[\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1 \mid G_n \neq 0] \geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{([\sqrt{n}] + 1)^2}\right) \mathbb{P}[\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1] \\ &\geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{([\sqrt{n}] + 1)^2}\right) \left(1 - \frac{\delta}{2n}\right) \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{n} - \frac{\delta}{2n}. \end{aligned}$$

Если взять $\varepsilon \leq \min\{\delta/(2N), \delta/4\}$, то, учитывая (1.31) и (1.32), для выполнения (1.26) осталось доказать, что $R_n^* \subset R_n$.

Пусть произошло событие R_n^* . Будем считать, что $\mu, \nu > 0$ (случай, когда все коэффициенты либо неотрицательные, либо неположительные, разбирается еще проще). Тогда существует ровно один максимальный положительный коэффициент и ровно один минимальный отрицательный, равные некоторым $q_{m'}$ и $(-r_{m''})$, причем выполнено $N_{m'}, N_{m''} \geq n$.

Применяя (1.29), нетрудно проверить, что в случае $m'' < l(m') + 1$ условию (1.9) удовлетворяет коэффициент $q_{m'}$, а в случае $m'' \geq l(m') + 1$ – коэффициент $(-r_{m''})$, следовательно, условие Леммы 4 выполнено.

Перейдем к заданию значений $l(k)$. При $b = 0$ выполнено $\mathbb{P}[R'_n \mid A_n] = 1$, поэтому можно считать, что $b > 0$. Если мы выберем настолько большое $l(1)$, что будет выполнено

$$\mathbb{P}[\max\{\xi''_1, \dots, \xi''_N\} < q_1] \geq 1 - \varepsilon,$$

то при $n < N$ получим

$$\mathbb{P}[R'_n \mid A_n] \geq \mathbb{P}[\max\{\xi''_1, \dots, \xi''_N\} < \xi'_1] \geq \mathbb{P}[\max\{\xi''_1, \dots, \xi''_N\} < q_1] \geq 1 - \varepsilon. \quad (1.33)$$

Пусть теперь $n \geq N$. Выберем последовательность $l(k)$ настолько быстро растущей, чтобы было выполнено

$$\mathbb{P}[\max\{\xi''_1, \dots, \xi''_{k^2}\} < q_k] \geq 1 - \frac{\varepsilon}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.34)$$

Тогда при $i \geq [\sqrt{n}] + 1, j \leq n$ будет верна оценка

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[\max\{\xi'_1, \dots, \xi'_i\} > \max\{\xi''_1, \dots, \xi''_j\}] \\ & \geq \mathbb{P}[\max\{\xi'_1, \dots, \xi'_{[\sqrt{n}]+1}\} > \max\{\xi''_1, \dots, \xi''_n\}] \\ & \geq \mathbb{P}[\max\{\xi'_1, \dots, \xi'_{[\sqrt{n}]+1}\} \geq q_{[\sqrt{n}]+1}, \max\{\xi''_1, \dots, \xi''_n\} < q_{[\sqrt{n}]+1}] \\ & \geq \mathbb{P}[Q(\xi'_1, \dots, \xi'_{[\sqrt{n}]+1}), \max\{\xi''_1, \dots, \xi''_{\{[\sqrt{n}]+1\}^2}\} < q_{[\sqrt{n}]+1}] \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{n}, \end{aligned}$$

которая при $n \geq N$ с учетом (1.30) дает

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[R'_n \mid A_n] & \geq \mathbb{P}[R'_n \mid \mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1] \mathbb{P}[\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1 \mid A_n] \\ & \geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{n}\right) \mathbb{P}[\mu, \nu \geq [\sqrt{n}] + 1] \geq \left(1 - \frac{2\varepsilon}{n}\right) \left(1 - \frac{\delta}{2n}\right) \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{n} - \frac{\delta}{2n}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

В силу малости выбранного выше ε , соотношения (1.33) и (1.35) влекут (1.27), тем самым лемма доказана. \blacksquare

Требуемая нам оценка сверху

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] \leq 1 + \frac{1 - |a - b|}{a + b}$$

в случае $a \geq b$ вытекает из следующей леммы. Если же $a < b$, то достаточно вместо $G_n(x)$ рассмотреть полином $(-G_n(x))$.

Лемма 10. Для распределения θ_δ , удовлетворяющего (1.26) и (1.27), при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо следующее неравенство:

$$\mathbb{E}_{\theta_\delta}[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] \leq 1 + \frac{1 - (a - b)}{a + b} + \frac{5}{a^2} \delta. \quad (1.36)$$

Доказательство.

Обозначим $\tau = \tau(n)$ номер максимального по модулю коэффициента из $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ и воспользуемся введенными в формулировке предыдущей леммы обозначениями событий R_n, R'_n и A_n . Оценим сначала среднее число нулей G_n при условии $\xi_0\xi_n \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid \xi_0\xi_n \neq 0] &= \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0] \mathbb{P}[A_n^c \mid \xi_0\xi_n \neq 0] \\ &\quad + \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid A_n, \xi_0\xi_n \neq 0] \mathbb{P}[A_n \mid \xi_0\xi_n \neq 0]. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Здесь и далее для произвольного события A мы обозначаем A^c событие, противоположное A . Оценим отдельно первое и второе математические ожидания в правой части.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0] &= \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid R_n, A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0] \mathbb{P}[R_n \mid A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0] \\ &\quad + \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid R_n^c, A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0] \mathbb{P}[R_n^c \mid A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0]. \end{aligned}$$

Заметим, что $[A_n^c, R_n, \xi_0\xi_n \neq 0] \subset [\xi_0, \xi_n, \xi_\tau < 0]$, поэтому, используя следствие к Лемме 4 и оценку $\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \leq n$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0] &\leq \mathbb{E} \left[1 - \frac{1}{2}(-1)^\tau(1 + (-1)^n) \mid R_n, A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0 \right] \\ &\quad \times \mathbb{P}[R_n \mid A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0] + n \cdot \mathbb{P}[R_n^c \mid A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0] \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2}M_n \right) + n\mathbb{P}[R_n^c \mid A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0], \end{aligned} \quad (1.38)$$

где

$$M_n := -\mathbb{E} [(-1)^\tau(1 + (-1)^n) \mid R_n, A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0] \mathbb{P}[R_n \mid A_n^c, \xi_0\xi_n \neq 0].$$

Далее, разобьем событие $\{\xi_0\xi_n \neq 0\}$ на четыре:

$$\{\xi_0\xi_n \neq 0\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4,$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \{\xi_0 > 0, \xi_n > 0\}, & \Sigma_2 &:= \{\xi_0 < 0, \xi_n < 0\}, \\ \Sigma_3 &:= \{\xi_0 > 0, \xi_n < 0\}, & \Sigma_4 &:= \{\xi_0 < 0, \xi_n > 0\}. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&= \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_1 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_2 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_3 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_4 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid (R_n \cap R'_n)^c, A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \mathbb{P}[(R_n \cap R'_n)^c \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0].
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\xi_\tau > 0$ при условии R'_n , воспользуемся неравенством $\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \leq n$ для оценки пятого слагаемого правой части и следствием к Лемме 4 для оценки первых четырех:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] &\leq n \cdot \mathbb{P}[(R_n \cap R'_n)^c \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \tag{1.39} \\
&+ \mathbb{E} \left[1 - \frac{1}{2} (-1)^\tau (1 + (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1 \right] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_1 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ \mathbb{E} \left[3 + \frac{1}{2} (-1)^\tau (1 + (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2 \right] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_2 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ \mathbb{E} \left[2 - \frac{1}{2} (-1)^\tau (1 - (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3 \right] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_3 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ \mathbb{E} \left[2 + \frac{1}{2} (-1)^\tau (1 - (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4 \right] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_4 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&= 1 \cdot \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_1 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] + 3 \cdot \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_2 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ 2 \cdot \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_3 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] + 2 \cdot \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_4 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ n \cdot \mathbb{P}[(R_n \cap R'_n)^c \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] + \frac{1}{2} M'_n,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M'_n &:= -\mathbb{E} [(-1)^\tau (1 + (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_1 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ \mathbb{E} [(-1)^\tau (1 + (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_2 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&- \mathbb{E} [(-1)^\tau (1 - (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_3 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
&+ \mathbb{E} [(-1)^\tau (1 - (-1)^n) \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4] \mathbb{P}[R_n, R'_n, \Sigma_4 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0].
\end{aligned}$$

Покажем, что имеют место неравенства

$$M_n, M'_n \leq 0. \quad (1.40)$$

Доказательство первого неравенства будет фактически содержаться в доказательстве второго, коим мы и ограничимся. Из соображений симметрии нетрудно видеть, что для любого события U из σ -алгебры, порожденной ξ_0, ξ_n , выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau = 1 \mid R_n, R'_n, A_n, U] &= \mathbb{P}[\tau = 2 \mid R_n, R'_n, A_n, U] \\ &= \dots = \mathbb{P}[\tau = n - 1 \mid R_n, R'_n, A_n, U], \end{aligned}$$

что влечет

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} [(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, U] \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}[\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, U] + \mathbb{P}[\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, U] \\ \quad - \mathbb{P}[\tau = 1 \mid R_n, R'_n, A_n, U], & n - \text{четное}, \\ \mathbb{P}[\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, U] - \mathbb{P}[\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, U], & n - \text{нечетное}. \end{cases} \end{aligned}$$

Положим $U = \Sigma_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1] &= \mathbb{P}[\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1] \\ &\geq \mathbb{P}[\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, \xi_0 > 0] \\ &= \mathbb{P}[\tau = 1 \mid R_n, R'_n, A_n, \xi_0 > 0] \\ &\geq \mathbb{P}[\tau = 1 \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1], \end{aligned}$$

поэтому при четном n

$$\mathbb{E} [(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_1] \geq 0.$$

Положим $U = \Sigma_2$. Тогда

$$\mathbb{P}[\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2] = \mathbb{P}[\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2] = 0,$$

поэтому при четном n

$$\mathbb{E} [(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_2] \leq 0.$$

Положим $U = \Sigma_3$. Тогда

$$\mathbb{P}[\tau = n \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3] = 0,$$

поэтому при нечетном n

$$\mathbb{E}[(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_3] \geq 0.$$

Положим $U = \Sigma_4$. Тогда

$$\mathbb{P}[\tau = 0 \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4] = 0,$$

поэтому при нечетном n

$$\mathbb{E}[(-1)^\tau \mid R_n, R'_n, A_n, \Sigma_4] \leq 0.$$

Объединяя полученные четыре неравенства, получаем $M'_n \leq 0$.

Соотношения (1.37), (1.38) и (1.39), с учетом только что доказанного (1.40), дают

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] &\leq (1 + n \cdot \mathbb{P}[R_n^c \mid A_n^c, \xi_0 \xi_n \neq 0]) \cdot \mathbb{P}[A_n^c \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] \quad (1.41) \\ &+ \left(1 \cdot \mathbb{P}[R_n, R'_n, \xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \right. \\ &+ 3 \cdot \mathbb{P}[R_n, R'_n, \xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\ &+ 2 \cdot \mathbb{P}[R_n, R'_n, \xi_0 > 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\ &+ 2 \cdot \mathbb{P}[R_n, R'_n, \xi_0 < 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\ &\left. + n \cdot \mathbb{P}[(R_n \cap R'_n)^c \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \right) \cdot \mathbb{P}[A_n \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] \\ &\leq \mathbb{P}[A_n^c \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] + n \mathbb{P}[R_n^c] \\ &+ \left(2 - \mathbb{P}[R_n, R'_n, \xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \right. \\ &+ \mathbb{P}[R_n, R'_n, \xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\ &\left. + n \cdot \mathbb{P}[(R_n \cap R'_n)^c \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \right) \cdot \mathbb{P}[A_n \mid \xi_0 \xi_n \neq 0]. \end{aligned}$$

Учитывая вытекающее из (1.26) и (1.27) неравенство

$$\mathbb{P}[(R_n \cap R'_n)^c \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \leq \frac{2\delta}{n \mathbb{P}[A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0]} \leq \frac{2\delta}{na^2},$$

а также соотношения

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[R_n, R'_n, \xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
& \geq \mathbb{P}[\xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] - \mathbb{P}[(R_n \cap R'_n)^c \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
& \geq \mathbb{P}[\xi_0 > 0, \xi_n > 0 \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] - \mathbb{P}[(R_n \cap R'_n)^c \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
& = \frac{a^2}{(a+b)^2} - \mathbb{P}[(R_n \cap R'_n)^c \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0]
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[R_n, R'_n, \xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] & \leq \mathbb{P}[\xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid A_n, \xi_0 \xi_n \neq 0] \\
& \leq \mathbb{P}[\xi_0 < 0, \xi_n < 0 \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] = \frac{b^2}{(a+b)^2},
\end{aligned}$$

из (1.41) получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid \xi_0 \xi_n \neq 0] & \leq 2 - \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(a+b)^2} + \delta + \frac{2\delta}{a^2} + \frac{2\delta}{na^2} \\
& \leq 2 - \frac{a-b}{a+b} + \frac{5}{a^2}\delta.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Теперь можно получить оценку в общем случае. Напомним, что величины ζ_n, η_n были введены в конце доказательства Леммы 8. Имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] & = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid \zeta_n = i, \eta_n = j] \mathbb{P}[\zeta_n = i, \eta_n = j] \\
& \leq \sum_{0 \leq i, j < \infty} (\mathbb{E}_\theta[\mu_{G_{n-i-j}}(\mathbb{R}) \mid \xi_0 \xi_{n-i-j} \neq 0] + j) c^{i+j} (1-c)^2.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись (1.42) и, как и в оценке снизу, соотношениями (1.24), получаем требуемое неравенство. \blacksquare

1.2.4. Заключительные замечания

Рассмотрим произвольное подмножество $\Lambda_0 \subset \Lambda$, где

$$\Lambda := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a + b \leq 1\}.$$

Объединяя соотношения (1.5) по всевозможным $(a, b) \in \Lambda_0$, получим

$$\inf_{\theta \in \Theta(\Lambda_0)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] = 1 + \inf_{(a,b) \in \Lambda_0} \frac{1 - |a - b|}{a + b}, \quad (1.43)$$

где $\Theta(\Lambda_0) := \bigcup_{(a,b) \in \Lambda_0} \Theta_{a,b}$.

Пример 1. Пусть $\Lambda_0 = \Lambda$. В этом случае $\Theta(\Lambda_0) = \Theta$, и (1.43) принимает вид

$$\inf_{\theta \in \Theta} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] = 1.$$

Пример 2. Если $\Lambda_0 = \{(a, b) \in \Lambda : a + b = 1 - c\}$, где $0 \leq c < 1$, то мы получаем

$$\inf_{\theta \in \Theta_c} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] = \frac{1}{1 - c},$$

где Θ_c есть семейство всех невырожденных распределений с весом c в начале координат.

Пример 3. Пусть $\Lambda_0 = \{(a, b) \in \Lambda : a = b\}$. Тогда $\Theta(\Lambda_0) = \Theta'$ есть семейство всех невырожденных распределений с равными мерами положительной и отрицательной полуосей, и мы имеем

$$\inf_{\theta \in \Theta'} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] = 2. \quad (1.44)$$

Покажем, что соотношение (1.44) можно усилить. Именно,

$$\inf_{\theta \in \Theta^*} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\theta[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] = 2,$$

где Θ^* обозначает класс всех невырожденных *симметричных* распределений.

Доказательство. Поскольку $\Theta^* \subset \Theta'$, достаточно получить оценку сверху. Для этого рассмотрим распределение θ_δ , построенное в Лемме 9, в случае $a = 1$. Если его симметрично продолжить на отрицательную полуось и нормировать двойкой до вероятностного, то при этом у случайного полинома коэффициенты домножатся на ± 1 случайным образом. Так как в условии Леммы 4 участвуют лишь абсолютные значения коэффициентов полинома, то полученное таким образом симметричное распределение θ_δ^* по-прежнему будет удовлетворять (1.26).

Следовательно, для него выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) &= \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid R_n] \mathbb{P}[R_n] + \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid R_n^c] \mathbb{P}[R_n^c] \\ &\leq \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid R_n] \mathbb{P}[R_n] + \delta. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Напомним, что τ обозначает максимальный по модулю коэффициент. Имеем:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid R_n] \mathbb{P}[R_n] \\ &= \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_\tau > 0, R_n] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_\tau > 0, R_n] \\ &+ \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid \xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_\tau < 0, R_n] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_\tau < 0, R_n] \\ &+ \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid \xi_0 \xi_n < 0, R_n] \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0, R_n]. \end{aligned}$$

Применяя Лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \mid R_n] \mathbb{P}[R_n] &\leq 0 \cdot \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_\tau > 0, R_n] \\ &+ 2 \cdot \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_\tau < 0, R_n] + 1 \cdot \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0, R_n] \\ &\leq 2\mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_\tau < 0] + \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0] \\ &\leq 2\mathbb{P}[\xi_0 \xi_n > 0, \xi_0 \xi_1 < 0] + \mathbb{P}[\xi_0 \xi_n < 0] = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

что с учетом (1.45) дает

$$\mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R}^+) \leq 1 + \delta.$$

Поскольку для симметричных распределений среднее число положительных нулей полинома совпадает со средним числом отрицательных, мы приходим к оценке

$$\mathbb{E} \mu_{G_n}(\mathbb{R}) \leq 2 + 2\delta,$$

которая завершает доказательство. ■

Пример 4. Если в предыдущем примере к распределению θ_δ^* добавить атом в начале координат (нормировав при этом соответствующим образом), то можно аналогично получить соотношение

$$\inf_{\theta \in \Theta_c^*} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_\theta [\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \mid G_n \neq 0] = 1 + \frac{1}{1-c}, \quad 0 \leq c < 1,$$

где Θ_c^* обозначает класс всех симметричных распределений с весом c в начале координат.

1.3. Универсальная оценка сверху п.н.

Результаты данного параграфа были получены совместно с И. А. Ибрагимовым.

Мы докажем усиленную версию оценки (1.2), которая нам понадобится при исследовании поведения комплексных нулей в Главе 2.

Теорема 3. *Для некоторого фиксированного целого числа r рассмотрим набор из r невырожденных вероятностных распределений. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\eta_k\}_{k=0}^\infty$ с распределениями из этого набора. Обозначим*

$$G_n(x) := \sum_{k=0}^n \eta_k x^k.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{G_n}(\mathbb{R})}{n} = 0 \quad \text{п.н.}$$

1.3.1. Доказательство Теоремы 3

Сначала мы сведем задачу подсчета числа вещественных нулей G_n к задаче подсчета перемен знака в последовательности производных $\{G_n^{(j)}(1)\}_{j=0}^n$.

Рассмотрим последовательность вещественных чисел $\{a_j\}_{j=0}^n$. Обозначим $Z(\{a_j\})$ число перемен знака в последовательности $\{a_j\}$, которое определим следующим образом. Сначала мы исключим из последовательности все нулевые члены. После этого мы считаем число соседних членов разного знака.

Для произвольного полинома g степени n положим $Z_g(x) := Z(\{g^{(j)}(x)\})$, т.е. число перемен знака в последовательности $g(x), g'(x), \dots, g^{(n)}(x)$.

Лемма 11 (Теорема Бюдана-Фурье). *Рассмотрим полином g , такой что $g(a), g(b) \neq 0$ для каких-то $a < b$. Тогда*

$$\mu_g([a, b]) \leq Z_g(a) - Z_g(b).$$

Более того, разница между $Z_g(a) - Z_g(b)$ и $\mu_g([a, b])$ является четным числом.

Доказательство. См., например, [20, глава 9]. ■

Следствие 2. *Справедливо неравенство*

$$\mu_g([1, \infty)) \leq Z_g(1).$$

Доказательство. Неравенство следует из Теоремы Бюдана-Фурье и того факта, что для всех достаточно больших x знак $g^{(j)}(x)$ совпадает со знаком старшего коэффициента. ■

Следствие 3. *Функция $Z_p(x)$ не возрастает.*

Вернемся к случайному полиному G_n . Начиная с этого момента и до конца доказательства мы будем для простоты опускать у полинома G_n индекс n .

Сначала мы покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} Z_G(1)}{n} = 0. \quad (1.46)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $\alpha \in (0, 1/2)$. Так как среди распределений $\{\eta_j\}$ лишь конечное число различных, существует $K = K(\varepsilon)$, такое что

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}^1} \mathbb{P}\{|\eta_j| \geq K\} \leq \varepsilon. \quad (1.47)$$

Рассмотрим подмножество I множества $\{0, 1, \dots, n\}$, состоящее из индексов j , таких что $[\alpha n] \leq j \leq [(1 - \alpha)n]$ и $|\eta_j| < K$. Положим

$$G_1(x) := \sum_{j \in I} \eta_j x^j, \quad G_2(x) := G(x) - G_1(x).$$

Обозначим τ_j индикатор события $\{|g_1^{(k)}(1)| \geq |g_2^{(k)}(1)|\}$ и χ_j — индикатор события $\{|\eta_j| \geq K\}$.

Лемма 12. *Рассмотрим вещественные числа a_1, a_2, b_1, b_2 . Если $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) < 0$ и $a_2 b_2 \geq 0$, то тогда либо $|a_1| \geq |a_2|$, либо $|b_1| \geq |b_2|$.*

Доказательство. Очевидно. ■

Из Леммы 12 следует, что

$$Z_g(1) = Z_{g_1+g_2}(1) \leq Z_{g_2}(1) + 2 \sum_{j=0}^n \tau_j \leq Z_{g_2}(1) + 2\alpha n + 2 + 2 \sum_{j=[\alpha n]}^{[(1-\alpha)n]} \tau_j.$$

Из монотонности функции $Z_{g_2}(x)$ мы заключаем, что

$$Z_{g_2}(1) \leq Z_{g_2}(0) \leq \sum_{j=0}^n \chi_j.$$

Следовательно,

$$Z_g(1) \leq 2\alpha n + 2 + \sum_{j=0}^n \chi_j + 2 \sum_{j=[\alpha n]}^{[(1-\alpha)n]} \tau_j. \quad (1.48)$$

Из (1.5.3) следует, что $\mathbb{E} \chi_j = \mathbb{P}[|\eta_j| \geq K] \leq \varepsilon$. Поэтому

$$\mathbb{E} Z_g(1) \leq 2\alpha n + 2 + \varepsilon(n+1) + 2\mathbb{E} \sum_{j=[\alpha n]}^{[(1-\alpha)n]} \tau_j. \quad (1.49)$$

Оценим теперь $\mathbb{E} \tau_j$. Заметим, что $g^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^n \eta_l A_{k,l} x^{l-k}$, где $A_{k,l} := l(l-1)\cdots(l-k+1)$. Зафиксируем целое k , такое что $\alpha n \leq k \leq (1-\alpha)n$. Если $n-1 \geq j \geq k$, то

$$A_{k,j} \leq (1-\alpha)A_{k,j+1},$$

что влечет

$$A_{k,j} \leq A_{k,[(1-\alpha)n]} (1-\alpha)^{[(1-\alpha)n]-j}$$

для всех $\alpha n \leq k \leq j \leq (1-\alpha)n$. Следовательно,

$$|g_1^{(k)}(1)| = \left| \sum_{j \in J, j \geq k} \eta_j A_{k,j} \right| \leq K A_{k,[(1-\alpha)n]} \sum_{j=0}^{[(1-\alpha)n]} (1-\alpha)^j \leq \frac{K}{\alpha} A_{k,[(1-\alpha)n]},$$

что влечет

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \tau_k &= \mathbb{P} \left[|g_1^{(k)}(1)| \geq |g_2^{(k)}(1)| \right] \leq \mathbb{P} \left[|g_1^{(k)}(1)| \geq |g_1^{(k)}(1) + g_2^{(k)}(1)| - |g_1^{(k)}(1)| \right] \\ &= \mathbb{P} \left[|g^{(k)}(1)| \leq 2|g_1^{(k)}(1)| \right] \leq \mathbb{P} \left[|g^{(k)}(1)| \leq \frac{2K}{\alpha} A_{k,[(1-\alpha)n]} \right]. \end{aligned}$$

Напомним, что $Q(\eta; r)$ обозначает функцию концентрации случайной величины η ; см. (1.10). Из (1.11) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \tau_k &\leq \mathbb{P} \left[\frac{|g^{(k)}(1)|}{A_{k,[(1-\alpha)n]}} \leq \frac{2K}{\alpha} \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[\frac{g^{(k)}(1)}{A_{k,[(1-\alpha)n]}} \leq \frac{2K}{\alpha} \right] \leq Q \left(\frac{g^{(k)}(1)}{A_{k,[(1-\alpha)n]}}; \frac{2K}{\alpha} \right) \\ &= Q \left(\sum_{j=k}^n \frac{A_{k,j}}{A_{k,[(1-\alpha)n]}} \eta_j; \frac{2K}{\alpha} \right) \leq Q \left(\sum_{j=[(1-\alpha)n]}^n \frac{A_{k,j}}{A_{k,[(1-\alpha)n]}} \eta_j; \frac{2K}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Для того, чтобы оценить правую часть (1.50), воспользуемся неравенством Колмогорова-Рогозина; см (1.12). Так как среди распределений $\{\eta_j\}$ лишь конечное число различных, получаем

$$\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) := \inf_{j \in \mathbb{Z}^1} \left\{ 1 - Q \left(\frac{2K}{\alpha}; \eta_j \right) \right\} > 0.$$

Подставляя $h = h_j = 2K/\alpha$ в (1.12) и используя (1.50), приходим к

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \tau_k &\leq C \cdot \left(\sum_{j=[(1-\alpha)n]}^n \left[1 - Q \left(\frac{A_{k,j}}{A_{k,[(1-\alpha)n]}} \eta_j; \frac{2K}{\alpha} \right) \right] \right)^{-1/2} \\ &\leq C \cdot \left(\sum_{j=[(1-\alpha)n]}^n [1 - Q(\eta_j)]; \frac{2K}{\alpha} \right)^{-1/2} \leq \frac{C}{\sqrt{\delta \alpha n}}. \end{aligned}$$

Объединяя это с (1.49), имеем

$$\mathbb{E} Z_G(1) \leq 2\alpha n + 2 + \varepsilon(n+1) + \frac{2C}{\sqrt{\delta(\varepsilon, \alpha)} \alpha} n^{1/2}.$$

Так как α, ε произвольные числа, мы получаем (1.46), что вместе со следствием к Лемме 11 приводит нас к

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \mu_G([1, \infty))}{n} = 0.$$

Рассматривая случайные полиномы $g(1/x)$ и $g(-x)$, можно получить аналогичные оценки для $\mathbb{E} \mu_G([0, 1])$ и $\mathbb{E} \mu_G((-\infty, 0))$. Таким образом, мы получаем утверждение теоремы в среднем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \mu_G(\mathbb{R})}{n} = 0.$$

Чтобы доказать сходимость п.н., мы оценим вероятности больших уклонений для сумм $\sum \chi_j$ и $\sum \tau_j$. Элементарные рассуждения и применение неравенства Бернштейна (см., например, [26]) приводят к

$$\mathbb{P} \left[\left| \sum_{j=0}^n \chi_j \right| > 2(n+1)\varepsilon \right] \leq 2e^{-n\varepsilon/8}. \quad (1.51)$$

Анализ поведения $\sum \tau_j$ несколько более сложный.

Мы будем использовать следующее обозначение: для любых положительных функций f_1, f_2 мы пишем $f_1 \ll f_2$, если существует абсолютная константа C , такая что $f_1 \leq Cf_2$ в области определения этих функций.

Лемма 13. *Существует константа c , зависящая только от α, ε и от распределений $\{\eta_j\}$, такая что*

$$\mathbb{E} \tau_k \leq cn^{-2}$$

для всех $\alpha n \leq k \leq (1-\alpha)n$.

Доказательство. В (1.50) было показано, что

$$\mathbb{E} \tau_k \leq Q \left(\sum_{j=[(1-\alpha)n]}^n \frac{A_{k,j}}{A_{k,[1-\alpha)n}} \eta_j; \frac{2K}{\alpha} \right). \quad (1.52)$$

Чтобы оценить функцию концентрации в правой части, нам понадобится следующий результат Эссеена (см., например, [26]). Пусть дана случайная величина η с характеристической функцией $f(t)$. Тогда

$$Q(\eta; r) \ll \max\{r, T^{-1}\} \int_{-T}^T |f(t)| dt$$

равномерно по $T > 0$.

Подставляя $T = \alpha/(KA_{k,[1-\alpha)n})$ и применяя (1.52), мы получаем

$$\mathbb{E} \tau_k \ll \frac{1}{T} \int_{-T}^T \prod_{j=[(1-\alpha)n]}^n |f_j(A_{kj}t)| dt,$$

где $f_j(t)$ обозначает характеристическую функцию η_j . Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \tau_k &\ll \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(\prod_{j=[(1-\alpha)n]}^n |f_j(A_{kj}t)|^2 \right)^{1/2} dt \\ &\ll \frac{1}{T} \int_{-T}^T \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=[(1-\alpha)n]}^n (1 - |f(A_{kj}t)|^2) \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=[(1-\alpha)n]}^n \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(A_{kj}tx)) \mathcal{P}_j(dx) \right) dt, \end{aligned}$$

где \mathcal{P}_j обозначает распределение симметризованной η_j , т.е. распределение $\eta_j - \eta'_j$, где η'_j является независимой копией η_j .

Среди $\{\mathcal{P}_j\}_{(1-\alpha)n \leq j \leq n}$ не более r различных распределений. Поэтому существуют распределение \mathcal{P} и подмножество $J \subset \{j : (1-\alpha)n \leq j \leq n\}$, такие что $|J| \geq n\alpha/r$ и $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}$ для всех $j \in J$. В дальнейшем \sum' будет обозначать суммирование по всем индексам j из J . Итак, мы имеем

$$\mathbb{E} \tau_k \ll \frac{1}{T} \int_{-T}^T \exp \left(-\frac{1}{2} \sum'_{j=[(1-\alpha)n]}^n \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(A_{kj}tx)) \mathcal{P}(dx) \right) dt.$$

Выберем $\delta > 0$, такое что $\gamma := \mathcal{P}[x : |x| > \delta] > 0$. Так как подынтегральное выражение неотрицательно, получаем

$$\mathbb{E} \tau_k \ll \frac{1}{T} \int_{-T}^T \exp \left(-\frac{1}{2} \sum'_{j=[(1-\alpha_r)n]}^n \int_{|x|>\delta} (1 - \cos(A_{kj}tx)) \mathcal{P}(dx) \right) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T e^{-\beta n + s(t)} dt,$$

где $\alpha_r := \alpha(2r-1)/(2r)$, $\beta := |J \cap \{j : (1-\alpha_r)n \leq j \leq n\}|/(2n)$ и

$$s(t) := \frac{1}{2} \int_{|x|>\delta} \sum'_{j=[(1-\alpha_r)n]}^n \cos(A_{kj}tx) \mathcal{P}(dx).$$

Положим $\alpha := \alpha\gamma/(4r)$ и рассмотрим $\Lambda_1 := [t \in [-T, T] : |s(t)| < \alpha n/2]$ и $\Lambda_2 := [-T, T] \setminus \Lambda_1$. Так как $|J| \geq n\alpha/r$, из определения β мы получаем $\beta \geq \alpha$.

Поэтому

$$\mathbb{E} \tau_k \ll e^{-\alpha n/2} + \frac{\lambda_1(\Lambda_2)}{T}, \quad (1.53)$$

где λ_1 обозначает меру Лебега на прямой.

Оценим $\lambda_1(\Lambda_2)$. Из неравенств Чебышева и Гельдера следует, что

$$\lambda_1(\Lambda_2) \leq \frac{16}{\alpha^4 n^4} \int_{-T}^T |s(t)|^4 dt \leq \frac{1}{\alpha^4 n^4} \int_{|x|>\delta} d\mathcal{P} \int_{-T}^T \left| \sum'_{j=[(1-\alpha_r)n]}^n \cos(A_{kj}tx) \right|^4 dt. \quad (1.54)$$

Положим

$$S(x) := \int_{-T}^T \left| \sum'_{j=[(1-\alpha_r)n]}^n \cos(A_{kj}tx) \right|^4 dt$$

и предположим для простоты, что $r = 1$, т.е. $\alpha_r = \alpha/2$, $\Sigma = \Sigma'$ и суммирование берется по всем j . Общий случай рассматривается аналогичным образом.

Имеем:

$$\begin{aligned} S(x) = & \int_{-T}^T \left(\sum_{j_1} \cos^4(A_{kj_1}tx) + \sum_{j_1 \neq j_2} \cos^3(A_{kj_1}tx) \cos(A_{kj_2}tx) \right. \\ & + \sum_{j_1 \neq j_2} \cos^2(A_{kj_1}tx) \cos^2(A_{kj_2}tx) \\ & + \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3} \cos^2(A_{kj_1}tx) \cos(A_{kj_2}tx) \cos(A_{kj_3}tx) \\ & \left. + \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_4} \cos(A_{kj_1}tx) \cos(A_{kj_2}tx) \cos(A_{kj_3}tx) \cos(A_{kj_4}tx) \right) dt. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Первые три слагаемых в (1.55) легко оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-T}^T \left(\sum_{j_1} \cos^4(A_{kj_1}tx) + \sum_{j_1 \neq j_2} \cos^3(A_{kj_1}tx) \cos(A_{kj_2}tx) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{j_1 \neq j_2} \cos^2(A_{kj_1}tx) \cos^2(A_{kj_2}tx) \right) dt \right| \ll Tn^2. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Следующие два слагаемых имеют схожий способ оценивания. Мы рассмотрим только последнее слагаемое. Из формулы $\cos y = (e^{iy} + e^{-iy})/2$ легко следует,

что

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-T}^T \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_4} \cos(A_{kj_1} tx) \cos(A_{kj_2} tx) \cos(A_{kj_3} tx) \cos(A_{kj_4} tx) dt \right| \quad (1.57) \\
& \ll \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_4} \min (T, |x|^{-1} |\pm A_{kj_1} \pm A_{kj_2} \pm A_{kj_3} \pm A_{kj_4}|^{-1}) \\
& \ll \sum_{j_1 > j_2 > j_3 > j_4} \min \left(T, |x|^{-1} A_{kj_1}^{-1} \left| 1 - \frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_3}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_4}}{A_{kj_1}} \right|^{-1} \right).
\end{aligned}$$

Суммирование во второй строчке происходит по всем возможным комбинациям знаков.

Рассмотрим разбиение множества индексов $\{j = (j_1, j_2, j_3, j_4) : j_1 > j_2 > j_3 > j_4\} = K_1 \cup K_2$, где

$$K_1 := \left\{ j : j_1 - j_2 \leq \frac{10}{\alpha}, j_1 - j_3 \leq \frac{10}{\alpha} |\log \alpha| \right\}$$

и K_2 является дополнением K_1 . Очевидно, $|K_1| \ll n^2 |\log \alpha| / \alpha^2$. Поэтому

$$\sum_{j \in K_1} \min \left(T, |x|^{-1} A_{kj_1}^{-1} \left| 1 - \frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_3}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_4}}{A_{kj_1}} \right|^{-1} \right) \ll \frac{T n^2 |\log \alpha|}{\alpha^2}. \quad (1.58)$$

Теперь рассмотрим

$$\sum_{j \in K_2} A_{kj_1}^{-1} \left| 1 - \frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_3}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_4}}{A_{kj_1}} \right|^{-1}.$$

Полагая $p = j_1 - j_2$, мы получаем

$$\begin{aligned}
\frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} &= \frac{(j_1 - p) \cdots (j_1 - p - k + 1)}{j_1 \cdots (j_1 - k + 1)} \\
&= \left(1 - \frac{p}{j_1} \right) \cdots \left(1 - \frac{p}{j_1 - k + 1} \right) \leq \exp \left[-p \sum_{l=j_1-k+1}^{j_1} \frac{1}{l} \right].
\end{aligned}$$

Так как для любого целого положительного l выполнено

$$\frac{1}{l} > \log \left(1 + \frac{1}{l} \right) = \log(l+1) - \log l,$$

мы приходим к

$$\sum_{l=j_1-k+1}^{j_1} \frac{1}{l} > \log(j_1 + 1) - \log(j_1 - k + 1) = -\log\left(1 - \frac{k}{j_1 + 1}\right).$$

Принимая во внимание $\alpha n \leq k \leq (1 - \alpha)n$ и $(1 - \alpha/2)n \leq j_1 \leq n$ и используя неравенство

$$-\log(1 - t) \geq t, \quad t \in [0, 1],$$

получаем

$$\sum_{l=j_1-k+1}^{j_1} \frac{1}{l} \geq \frac{\alpha n}{n+1} \geq \frac{1}{2}\alpha,$$

что влечет

$$\frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} \leq \exp\left(-\frac{\alpha}{2}p\right) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(j_1 - j_2)\right). \quad (1.59)$$

Если $j \in K_2$ и $j_1 - j_2 > 10/\alpha$, то

$$\frac{A_{kj_4}}{A_{kj_1}} \leq \frac{A_{kj_3}}{A_{kj_1}} \leq \frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} \leq e^{-5} < \frac{1}{4},$$

откуда вытекает

$$1 - \frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_3}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_4}}{A_{kj_1}} \geq \frac{1}{4}. \quad (1.60)$$

Предположим теперь, что $j \in K_2$ и $j_1 - j_3 > 10|\log \alpha|/\alpha$. Используя (1.59) и $\alpha \in (0, 1/2)$, мы приходим к

$$1 - \frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} \geq 1 - e^{-\alpha/2} \geq \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) \geq \frac{7}{16}\alpha.$$

Далее, (1.59) также выполнено для j_3 . Поэтому

$$\frac{A_{kj_4}}{A_{kj_1}} \leq \frac{A_{kj_3}}{A_{kj_1}} \leq \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(j_1 - j_3)\right] \leq \exp\left[-\frac{10}{2}|\log \alpha|\right] \leq \alpha^5 \leq \frac{1}{16}\alpha.$$

Таким образом,

$$1 - \frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_3}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_4}}{A_{kj_1}} \geq \frac{5}{16}\alpha. \quad (1.61)$$

Из (1.60) и (1.61) следует, что

$$\sum_{j \in K_2} A_{kj_1}^{-1} \left| 1 - \frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_3}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_4}}{A_{kj_1}} \right|^{-1} \ll \frac{1}{\alpha} \sum_j A_{kj_1}^{-1}.$$

Принимая во внимание структуру множества индексов $\{j\}$, имеем

$$\sum_j A_{kj_1}^{-1} \leq \frac{(\alpha n)^4}{A_{k,[(1-\alpha/2)n]}},$$

следовательно,

$$\sum_{j \in K_2} A_{kj_1}^{-1} \left| 1 - \frac{A_{kj_2}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_3}}{A_{kj_1}} - \frac{A_{kj_4}}{A_{kj_1}} \right|^{-1} \ll \frac{\alpha^3 n^4}{A_{k,[(1-\alpha/2)n]}}. \quad (1.62)$$

Объединяя (1.55), (1.56), (1.57), (1.58) и (1.62), мы получаем

$$S(x) \ll Tn^2 + \frac{Tn^2 |\log \alpha|}{\alpha^2} + \frac{\alpha^3 n^4}{|x| A_{k,[(1-\alpha/2)n]}}.$$

Применяя это к (1.54), приходим к

$$\lambda_1(\Lambda_2) \ll \frac{T}{\alpha^4 n^2} + \frac{T |\log \alpha|}{\alpha^2 \alpha^4 n^2} + \frac{\alpha^3}{\alpha^4 \delta A_{k,[(1-\alpha/2)n]}}.$$

Из (1.53) следует, что

$$\mathbb{E} \tau_k \ll e^{-\alpha n/2} + \frac{1}{\alpha^4 n^2} + \frac{|\log \alpha|}{\alpha^2 \alpha^4 n^2} + \frac{\alpha^3}{T \alpha^4 \delta A_{k,[(1-\alpha/2)n]}}.$$

Вспоминая, что $T = \alpha / (K A_{k,[(1-\alpha)n]})$, мы получаем

$$\mathbb{E} \tau_k \ll e^{-\alpha n/2} + \frac{1}{\alpha^4 n^2} + \frac{|\log \alpha|}{\alpha^2 \alpha^4 n^2} + \frac{\alpha^2 K A_{k,[(1-\alpha)n]}}{\alpha^4 \delta A_{k,[(1-\alpha/2)n]}}.$$

Из (1.59) следует, что

$$\frac{A_{k,[(1-\alpha)n]}}{A_{k,[(1-\alpha/2)n]}} \leq e^{-\alpha^2 n/4}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E} \tau_k \ll e^{-\alpha n/2} + \frac{1}{\alpha^4 n^2} + \frac{|\log \alpha|}{\alpha^2 \alpha^4 n^2} + \frac{\alpha^2 K}{\alpha^4 \delta} e^{-\alpha^2 n/4}.$$

Вспоминая, что $\alpha = \gamma \alpha / 4$, имеем

$$\mathbb{E} \tau_k \ll e^{-\gamma \alpha n/8} + \frac{1}{\gamma^4 \alpha^4 n^2} + \frac{|\log \alpha|}{\gamma^4 \alpha^6 n^2} + \frac{K}{\gamma^4 \alpha^2 \delta} e^{-\alpha^2 n/4}.$$

Так как K задается ε , а γ, δ задаются распределениями $\{\eta_j\}$, Лемма 13 доказана. ■

Теперь мы готовы завершить доказательство Теоремы 3. Из (1.48) следует, что

$$M_n(1, \infty) \leq 2\alpha n + 2 + \sum_{j=0}^n \chi_j + 2 \sum_{j=[\alpha n]}^{[(1-\alpha)n]} \tau_j. \quad (1.63)$$

Применяя Лемму 13 и неравенство Чебышева, получаем

$$\mathbb{P} \left[\sum_{k=[\alpha n]}^{[(1-\alpha)n]} \tau_k > n^{3/4} \right] \leq \frac{\sum_{j=[\alpha n]}^{[(1-\alpha)n]} \mathbb{E} \tau_k}{n^{3/4}} \leq c_1 n^{-5/4}. \quad (1.64)$$

Далее, из (1.51) следует, что существует константа $c_2 > 0$, зависящая только от ε , такая что

$$\mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^n \chi_j > 2\varepsilon n \right] \leq c_2 n^{-2}. \quad (1.65)$$

Объединяя (1.63), (1.64) и (1.65), приходим к

$$\mathbb{P} \left[M_n(1, \infty) > 2\alpha n + 2 + 2n^{3/4} + 2\varepsilon n \right] \leq c_1 n^{-5/4} + c_2 n^{-2}.$$

Рассматривая случайные полиномы $G(1/x)$ и $G(-x)$, можно получить аналогичные оценки для $\mu_G([0, 1])$ и $\mu_G((-\infty, 0))$. Поэтому существуют положительные константы c'_1, c'_2 , такие что

$$\mathbb{P} \left[M_n > 2\alpha n + 2 + 2n^{3/4} + 2\varepsilon n \right] \leq c'_1 n^{-5/4} + c'_2 n^{-2}.$$

Из леммы Бореля-Кантелли следует, что с вероятностью единица существует только конечное число таких n , что $M_n > 2\alpha n + 2 + 2n^{3/4} + 2\varepsilon n$. Так как α, ε произвольно малы,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = 0 \quad \text{п.н.}$$

Теорема 3 доказана.

1.4. Корреляции вещественных нулей

Результаты данного параграфа были получены совместно с Ф. Гетце и Д. Коледой.

В этом параграфе мы по-прежнему полагаем коэффициенты $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ независимыми, однако не обязательно одинаково распределенными. Также мы предполагаем, что ξ_i имеет плотность распределения f_i , где $i = 0, 1, \dots, n$. С вероятностью единица, все нули G простые. Как обычно, μ_{G_n} обозначает эмпирическую меру нулей G :

$$\mu = \sum_{x:G_n(x)=0} \delta_x,$$

где δ_x обозначает единичную массу в точке x . Распределение меры μ_{G_n} может быть описано с помощью ее *корреляционных функций* (также известны как *совместные интенсивности*). Напомним (см., например, [129]), что корреляционными функциями меры μ_{G_n} являются функции $\rho_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$, где $k = 1, \dots, n$, такие что для любого набора попарно непересекающихся борелевских множеств $B_1, \dots, B_k \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mu_{G_n}(B_i) \right] = \int_{B_1} \dots \int_{B_k} \rho_k(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

Методы, изложенные в данном параграфе, могут быть применимы к более общему случаю, когда коэффициенты случайного полинома имеют произвольную совместную плотность распределения. Однако для простоты мы рассматриваем только случай независимых коэффициентов.

1.4.1. Формулировка главных результатов

Мы начнем с обозначений. Положим

$$\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Обозначим элементарные симметрические функции следующим образом:

$$\sigma_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq k} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_i}, & \text{если } 0 \leq i \leq k, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $V(\mathbf{x})$ обозначает матрицу Вандермонда

$$V(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & \dots & x_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Чтобы сформулировать первый результат, рассмотрим случайную функцию $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \dots, \eta_{k-1})^\top : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$:

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) := -V^{-1}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \sum_{j=k}^n \xi_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum_{j=k}^n \xi_j x_k^j \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

Теорема 4. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned} \rho_k(\mathbf{x}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j|^{-1} \\ &\times \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \left| \sum_{j=0}^{k-1} j \eta_j(\mathbf{x}) x_i^{j-1} + \sum_{j=k}^n j \xi_j x_i^{j-1} \right| \prod_{i=0}^{k-1} f_i(\eta_i(\mathbf{x})) \right]. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Теорема 4 была сформулирована в [6] без подробного доказательства.

Функцию $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ можно явно выразить через функции Шура. Напомним, что для произвольного разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ длины $\leq k$ функция Шура $S_\lambda(\mathbf{x})$ определяется как

$$S_\lambda(\mathbf{x}) := \frac{\det(x_i^{\lambda_{k-j+1}+j-1})_{1 \leq i, j \leq k}}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i)}.$$

Предложение 1. *Для всех $i = 1, \dots, k$ выполнено*

$$\eta_i(\mathbf{x}) = (-1)^{k-i} \sum_{j=k}^n \xi_j S_{\lambda_{ij}}(\mathbf{x}),$$

где разбиение λ_{ij} задается как

$$\lambda_{ij} := (j - k + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_i).$$

Описание базовых свойств функций Шура можно найти в [165, § 1.3].

Сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 5. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned} \rho_k(\mathbf{x}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j| \\ &\times \int_{\mathbb{R}^{n-k+1}} \prod_{i=0}^n f_i \left(\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{k-i+j} \sigma_{k-i+j}(\mathbf{x}) t_j \right) \prod_{i=1}^k \left| \sum_{j=0}^{n-k} t_j x_i^j \right| dt_0 \dots dt_{n-k}. \end{aligned}$$

Следствие 4. *При $k = n$ получаем*

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \int_{-\infty}^{\infty} |t|^n \prod_{i=0}^n f_i \left((-1)^{n-i} \sigma_{n-i}(\mathbf{x}) t \right) dt. \quad (1.68)$$

1.4.2. Равномерно распределенные коэффициенты

В алгебраической теории чисел случайные полиномы с независимыми равномерно распределенными коэффициентами представляют особый интерес (см. Главу 3, а также [140], [121], [119], [120]). Применим Теорему 5 к этому случаю.

Пусть

$$f_i := \frac{1}{2} \mathbb{1}[-1, 1], \quad i = 0, \dots, n.$$

По Теореме 5 получаем

$$\rho_k(\mathbf{x}) = 2^{-n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j| \int_{D_{\mathbf{x}}} \prod_{i=1}^k \left| \sum_{j=0}^{n-k} t_j x_i^j \right| dt_0 \dots dt_{n-k},$$

где область интегрирования $D_{\mathbf{x}}$ определена как

$$D_{\mathbf{x}} := \left\{ (t_0, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k+1} : \max_{0 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{i-j} \sigma_{i-j}(\mathbf{x}) t_j \right| \leq 1 \right\}.$$

В частности,

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \frac{2^{-n}}{n+1} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|}{(\max_{0 \leq i \leq n} |\sigma_i(\mathbf{x})|)^{n+1}}.$$

1.4.3. n -точечная корреляционная функция

Из свойств корреляционных функций (см., например, [129]) следует, что

$$\mathbb{E} [\mu_{G_n}(\mathbb{R})(\mu_{G_n}(\mathbb{R}) - 1) \dots (\mu_{G_n}(\mathbb{R}) - n + 1)] = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Так как $\mu_{G_n}(\mathbb{R}) \leq n$, мы можем вычислить вероятность того, что все нули G_n вещественны:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mu_{G_n}(\mathbb{R}) = n] &= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \int_{-\infty}^{\infty} |t|^n \prod_{i=0}^n f_i \left((-1)^{n-i} \sigma_{n-i}(\mathbf{x}) t \right) dt d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Эта формула была получена ранее в [5].

Вычислим ρ_n для некоторых конкретных распределений.

Гауссовское распределение

Пусть

$$f_i(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}} \exp\left(-\frac{t^2}{2v_i}\right), \quad i = 0, \dots, n.$$

Используя формулу для n -го абсолютного момента гауссовского распределения и применяя (1.68), получаем

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(2\pi)^{n/2} v_0 \dots v_n} \left(\sum_{i=0}^n \frac{\sigma_{n-i}^2(\mathbf{x})}{v_i^2} \right)^{-(n+1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

В частности, при $v_0 = \dots = v_n$ имеем

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(2\pi)^{n/2}} \left(\sum_{i=0}^n \sigma_{n-i}^2(\mathbf{x}) \right)^{-(n+1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

Экспоненциальное распределение

Пусть

$$f_i(t) := \exp(-t) \mathbb{1}\{t \geq 0\}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Тогда с вероятностью единица G_n не имеет положительных вещественных нулей. Следовательно, $\rho_n(\mathbf{x}) > 0$ только если \mathbf{x} лежит в отрицательном ортанте \mathbb{R}_-^k . В этом случае $(-1)^i \sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0$, и после элементарных преобразований (1.68)

приводит к

$$\rho_n(\mathbf{x}) = n! \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i(\mathbf{x}) \right)^{-(n+1)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \mathbb{1}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_-^k\}.$$

Используя элементарное тождество

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i),$$

получаем

$$\rho_n(\mathbf{x}) = n! \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)^{n+1}} \mathbb{1}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_-^k\}.$$

1.4.4. Доказательство Теоремы 4

Очевидно, что $G_n(x_1) = \dots = G_n(x_k) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & \dots & x_k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (1.69)$$

что эквивалентно

$$\begin{pmatrix} x_1^k & x_1^{k+1} & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^k & x_k^{k+1} & \dots & x_k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = -V(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись (1.66), получаем, что (1.69) равносильно

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Пусть $J_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x})$ обозначает матрицу Якоби функции $\boldsymbol{\eta}$ в точке \mathbf{x} .

Лемма 14.

$$\det J_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}) = - \frac{\prod_{i=1}^k \left(\sum_{j=0}^{k-1} j \eta_j(\mathbf{x}) x_i^{j-1} + \sum_{j=k}^n j \xi_j x_i^{j-1} \right)}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i)}.$$

Доказательство. Дифференцируя

$$V(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x}) = - \begin{pmatrix} x_1^k & x_1^{k+1} & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^k & x_k^{k+1} & \dots & x_k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x})J_\eta(\mathbf{x}) + \text{diag} \left(\sum_{j=0}^{k-1} j\eta_j(\mathbf{x})x_1^{j-1}, \dots, \sum_{j=0}^{k-1} j\eta_j(\mathbf{x})x_k^{j-1} \right) \\ = - \text{diag} \left(\sum_{j=k}^n j\xi_j x_1^{j-1}, \dots, \sum_{j=k}^n j\xi_j x_k^{j-1} \right). \end{aligned}$$

Переносим второй член из левой части в правую и используя

$$\det V(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i),$$

приходим к требуемому соотношению. ■

Лемма 15 (Формула коплощади). Пусть дана область $B \subset \mathbb{R}^k$. Рассмотрим липшицеву функцию $u : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ и L^1 -функцию $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Имеет место соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^k} \#\{\mathbf{x} \in B : u(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\} h(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_B |\det J_u(\mathbf{x})| h(u(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

где $J_u(\mathbf{x})$ – матрица Якоби функции $u(\mathbf{x})$.

Доказательство. См. [103]. ■

Пусть дан набор попарно непересекающихся борелевских множеств $B_1, \dots, B_k \subset \mathbb{R}$. Обозначим $B := B_1 \times \dots \times B_k \subset \mathbb{R}^k$. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mu_{G_n}(B_i) \right] &= \mathbb{E} \#\{\mathbf{x} \in B : \eta(\mathbf{x}) = (\xi_0, \dots, \xi_{k-1})\} \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^k} \#\{\mathbf{x} \in B : \eta(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\} f_0(y_0) \dots f_{k-1}(y_{k-1}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Применяя Лемму 15 и Теорему Фубини к правой части, получаем

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mu_{G_n}(B_i) \right] = \int_B \mathbb{E} |\det J_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x})| f_0(\eta_0(\mathbf{x})) \dots f_{k-1}(\eta_{k-1}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Для завершения доказательства Теоремы 4 осталось применить Лемму 14.

1.4.5. Доказательство Теоремы 5

Доказательство теоремы основано на идеях из [16, стр. 58–59] и [140, Леммы 5 и 6].

Теорема 4 утверждает, что

$$\begin{aligned} \rho_k(\mathbf{x}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq k} |x_j - x_i|^{-1} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^{n-k+1}} \prod_{i=1}^k \left| \sum_{j=0}^n j a_j x_i^{j-1} \right| \prod_{i=0}^n f_i(a_i) da_k da_{k+1} \dots da_n, \end{aligned} \quad (1.70)$$

где a_0, \dots, a_{k-1} являются функциями от a_k, \dots, a_n и x_1, \dots, x_k :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = -V^{-1}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \sum_{j=k}^n a_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum_{j=k}^n a_j x_k^j \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Равенство (1.71) означает, что x_1, x_2, \dots, x_k являются нулями полинома $\sum_{j=0}^n a_j x^j$. Следовательно, существует единственный полином $\sum_{j=0}^{n-k} b_j x^j$, такой что

$$\sum_{j=0}^n a_j x^j = \prod_{i=1}^k (x - x_i) \left(\sum_{j=0}^{n-k} b_j x^j \right) = \left(\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \sigma_{k-j}(\mathbf{x}) x^j \right) \left(\sum_{j=0}^{n-k} b_j x^j \right). \quad (1.72)$$

Соотношение (1.72) однозначно определяет переменные a_0, \dots, a_n через \mathbf{x} и b_0, \dots, b_{n-k} :

$$a_i = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{k-i+j} \sigma_{k-i+j}(\mathbf{x}) b_j. \quad (1.73)$$

Таким образом, мы можем сделать замену переменных в (1.70), заменяя a_k, \dots, a_n их выражениями через \mathbf{x} и b_0, \dots, b_{n-k} из (1.73). Матрица Якоби замены является треугольной с единицами на диагонали. Следовательно, ее определитель равен единице.

Дифференцируя (1.72) в точке x_i , получаем

$$\sum_{j=0}^n j a_j x_i^{j-1} = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) (b_{n-k} x_i^{n-k} + \dots + b_1 x_i + b_0), \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.74)$$

Для завершения доказательства осталось подставить (1.73) и (1.79) в (1.70).

1.4.6. Доказательство Предложения 1

Для $0 \leq i \leq k-1$ и $j \geq k$ обозначим $V_{ij}^*(\mathbf{x})$ матрицу, полученную из $V(\mathbf{x})$ заменой i -го столбца на $(x_1^j, \dots, x_k^j)^\top$:

$$V_{ij}^*(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{r-1} & x_1^j & x_1^{r+1} & \dots & x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & \dots & x_k^{r-1} & x_k^j & x_k^{r+1} & \dots & x_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Применяя правило Крамера, получаем

$$\eta_r(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\det V(\mathbf{x})} \sum_{j=k}^n \xi_j \det V_{ij}^*(\mathbf{x}).$$

Тривиальное соотношение

$$\frac{V_{ij}^*(\mathbf{x})}{\det V(\mathbf{x})} = (-1)^{k-i-1} S_{\lambda_{ij}}(\mathbf{x})$$

заканчивает доказательство.

1.5. Средняя площадь нулевой поверхности гауссовского поля

Результаты данного параграфа были получены совместно с И. А. Ибрагимовым.

Для произвольного измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^d$ обозначим $\lambda_k(A)$ его меру Хаусдорфа размерности k . В частности, λ_d совпадает с объемом (мерой Лебега), а если граница множества ∂A достаточно регулярна, то $\lambda_{d-1}(\partial A)$ является площадью поверхности границы (периметром) множества A .

Пусть задано некоторое компактное множество $F \subset \mathbb{R}^d$ с границей ∂F конечной площади $\lambda_{d-1}(\partial F) < \infty$. Рассмотрим случайное гауссовское поле $G(\mathbf{x}) : F \rightarrow \mathbb{R}$ с математическим ожиданием $m(\mathbf{x})$ и дисперсией $\sigma^2(\mathbf{x})$. Мы всегда будем предполагать, что $\sigma(\mathbf{x}) > 0$ при всех $\mathbf{x} \in F$ и с вероятностью единица $G \in \mathcal{C}^1(F)$. Из теоремы о дифференцировании математического ожидания по параметру (см. [19, § 4.5]) и суммируемости супремума непрерывного гауссовского поля на компакте (см. [153]) следует, что $m, \sigma \in \mathcal{C}^1(F)$. Обозначим G'_i, σ'_i частные производные G, σ по i -й координате. Символ ∇ означает градиент функции (вектор частных производных).

Рассмотрим множество нулей поля G

$$G^{-1}(0) := \{x \in F : G(\mathbf{x}) = 0\}.$$

С вероятностью единица $G^{-1}(0)$ является $(d-1)$ -мерным гладким компактным подмногообразием в \mathbb{R}^d или, другими словами, гладкой компактной поверхностью.

Нас интересует вычисление средней площади поверхности $G^{-1}(0)$. Под площадью мы понимаем меру Хаусдорфа λ_{d-1} размерности $d-1$. В случае $d=1$ мера λ_0 означает число элементов множества (возможно бесконечное).

Если мы заменим G на G/σ , поверхность $G^{-1}(0)$ не изменится, поэтому можно считать, что $\sigma \equiv 1$. Мы покажем, что

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_F e^{-m^2(\mathbf{x})/2} \mathbb{E} \|\nabla G(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}. \quad (1.75)$$

Для этого нам понадобится вывести вспомогательную формулу, вычисляющую площадь поверхности, порожденной нулями неслучайного гладкого поля $g(\mathbf{x})$:

$F \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lambda_{d-1}(g^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_F \cos[ug(\mathbf{x})] \|\nabla g(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}. \quad (1.76)$$

Напомним, от F мы требуем компактность и $\lambda_{d-1}(\partial F) < \infty$.

Теорема 6. Пусть $g \in \mathcal{C}^1(F)$ и выполнены условия

- (a) $\lambda_{d-1}((\nabla g)^{-1}(0)) < \infty$;
- (b) $\lambda_{d-1}(g^{-1}(0) \cap \partial F) = 0$.

Тогда верна формула (1.76).

Замечание 1. Из доказательства теоремы видно, что условие (b) можно опустить, при этом (1.76) примет вид

$$\lambda_{d-1}(g^{-1}(0)) - \frac{1}{2} \lambda_{d-1}[g^{-1}(0) \cap \partial F] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_F \cos[ug(\mathbf{x})] \|\nabla g(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}.$$

В дальнейшем данное обобщение нам не понадобится.

Теорема 7. Пусть $G \in \mathcal{C}^1(F)$ п.н. и выполнены условия

- (a') $\mathbb{E} \lambda_{d-1}\left(\left(\nabla \frac{G}{\sigma}\right)^{-1}(0)\right) < \infty$;
- (b') $\sigma(\mathbf{x}) > 0$ при всех $\mathbf{x} \in F$.

Тогда

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_F \exp\left(-\frac{m^2(\mathbf{x})}{2\sigma^2(\mathbf{x})}\right) \mathbb{E} \left\| \nabla \frac{G(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})} \right\| d\mathbf{x}. \quad (1.77)$$

Доказательства теорем приведены в разделе 1.5.3. Раздел 1.5.2 содержит вспомогательные утверждения технического характера. В разделе 1.5.1 приведены примеры, которые можно вывести из Теоремы 7.

1.5.1. Примеры применения Теоремы 7

Формула коплощади

Пример 5. Пусть функция g удовлетворяет условиям Теоремы 6. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{d-1}(g^{-1}(u)) du = \int_F \|\nabla g(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}. \quad (1.78)$$

Доказательство. Рассмотрим $G(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) - \xi$, где ξ – гауссовская с.в. с $\mathbb{E} \xi = 0$ и $\text{Var} \xi = \sigma^2$. В этом случае (1.77) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{d-1}(g^{-1}(u)) e^{-u^2/(2\sigma^2)} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_F e^{-g^2(\mathbf{x})/(2\sigma^2)} \frac{\|\nabla g(\mathbf{x})\|}{\sigma} d\mathbf{x}.$$

Чтобы получить (1.78), осталось домножить обе части на $\sqrt{2\pi\sigma^2}$ и устремить σ к ∞ , применив теорему Леви о монотонной сходимости. ■

Соотношение (1.78), называемое “формулой коплощади”, было получено Г. Федерером в [103] (также см. Лемму 15).

Центрированное гауссовское поле

Обозначим \mathbb{S}^{d-1} единичную $(d-1)$ -мерную сферу с поверхностной мерой λ_{d-1} .

Пример 6. Если G удовлетворяет условиям Теоремы 7 и $m(\mathbf{x}) \equiv 0$, то

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_F d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{\langle \mathbf{s}, \Sigma(\mathbf{x})\mathbf{s} \rangle} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}), \quad (1.79)$$

где $\Sigma(\mathbf{x})$ обозначает ковариационную матрицу вектора $\nabla \frac{G(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})}$.

Доказательство. Следует из Леммы 22 (см. раздел 1.5.2), примененной к (1.77). ■

Замечание 2. Соотношение (1.79) очевидным образом переносится на случай $m(\mathbf{x}) \equiv u$, $\sigma(\mathbf{x}) \equiv 1$:

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_F e^{-u^2/2} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{\langle \mathbf{s}, \Sigma(\mathbf{x})\mathbf{s} \rangle} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}). \quad (1.80)$$

Следствие 5. В условиях Примера 6,

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_F d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sigma^{-1} \left(\sum_{i,j=1}^d (\mathbb{E} G'_i G'_j - \sigma'_i \sigma'_j) \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j \right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}). \quad (1.81)$$

Доказательство. Следует из того, что Σ имеет вид

$$\Sigma = \left(\frac{\mathbb{E} G'_i G'_j - \sigma'_i \sigma'_j}{\sigma^2} \right)_{i,j=1}^d.$$

■

Линейное гауссовское поле

Пример 7. Пусть $G(\mathbf{x}) := \langle h(\mathbf{x}), \xi \rangle$, где $h = (h^1, \dots, h^n)^\top : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ – векторная функция класса $\mathcal{C}^1(F)$ и ξ – n -мерный центрированный гауссовский вектор с единичной ковариационной матрицей. Тогда

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_F d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \|J_{\frac{h}{\|h\|}}(\mathbf{x})\mathbf{s}\| \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}), \quad (1.82)$$

где $J_{\frac{h}{\|h\|}}$ обозначает $n \times d$ -матрицу Якоби отображения $h/\|h\|$.

Доказательство. Следует из (1.79), так как в этом случае $\Sigma = J_{\frac{h}{\|h\|}}^\top J_{\frac{h}{\|h\|}}$. ■

Замечание 3. Если рассмотреть центрированный гауссовский вектор ξ с произвольной ковариационной матрицей Λ , то $\Sigma = J_{\frac{h}{\|h\|}}^\top \Lambda J_{\frac{h}{\|h\|}}$ и (1.79) принимает вид

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_F d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{\langle J_{\frac{h}{\|h\|}}(\mathbf{x})\mathbf{s}, \Lambda J_{\frac{h}{\|h\|}}(\mathbf{x})\mathbf{s} \rangle} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}).$$

При $d = 1$ данная формула была получена А. Эдельманом и Э. Костланом в [96, Теорема 3.1].

Следствие 6. Пусть в условиях Примера 7 ранг $J_{\frac{h}{\|h\|}}$ равен k . Обозначим $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ ненулевые сингулярные числа матрицы $J_{\frac{h}{\|h\|}}$, т.е. положительные

квадратные корни из собственных значений матрицы $J_{\frac{h}{\|h\|}} J_{\frac{h}{\|h\|}}^\top$. Тогда

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_F d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{j=1}^k \sigma_j(\mathbf{x}) \mathbf{s}_j^2 \right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}).$$

Доказательство. Из курса линейной алгебры известно (см., например, [33, § 7.3]), что матрица $J_{\frac{h}{\|h\|}}$ может быть представлена в следующей сингулярной форме: $J_{\frac{h}{\|h\|}} = VQW$, где V, W – ортогональные матрицы размера $n \times n$ и $d \times d$. Матрица Q размера $n \times d$ является диагональной, причем на диагонали стоят сингулярные числа матрицы $J_{\frac{h}{\|h\|}}$. Имеем:

$$\|J_{\frac{h}{\|h\|}} s\| = \|VQW s\| = \|QW s\|.$$

Осталось подставить это в (1.82) и сделать ортогональную замену переменной $\mathbf{s}' = W\mathbf{s}$. ■

Представим $\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0))$ в несколько иной форме, которая понадобится нам в дальнейшем.

Пример 8. В условиях Примера 7 выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \\ &\times \int_F d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{i,j=1}^d \frac{\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle}{\|h\|^4} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j \right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}), \end{aligned} \quad (1.83)$$

где

$$h'_i := \left(\frac{\partial h^1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial h^n}{\partial x_i} \right)^\top.$$

Доказательство. Имеем:

$$\sigma = \|h\|, \quad \mathbb{E} G'_i G'_j = \langle h'_i, h'_j \rangle, \quad \sigma'_i = \|h\|^{-1} \langle h, h'_i \rangle.$$

Осталось применить (1.81). ■

Нули случайного полинома.

Пример 9. Пусть $G(x) := \xi_0 + \xi_1 x + \dots + \xi_n x^n$, $x \in F \subset \mathbb{R}$, где $\{\xi_i\}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда

$$\mathbb{E} \lambda_0(G^{-1}(0)) = \frac{1}{\pi} \int_F \frac{[A_n(x)C_n(x) - B_n^2(x)]^{1/2}}{A_n(x)} dx,$$

где

$$A_n(x) := \sum_{j=0}^n x^{2j}, \quad B_n(x) := \sum_{j=0}^n j x^{2j-1}, \quad C_n(x) := \sum_{j=0}^n j^2 x^{2j-2}.$$

Доказательство. Следует из (1.83). ■

Данная формула была получена М. Кацем в [138]. В качестве следствия он получил асимптотическое соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \lambda_0(G^{-1}(0))}{\log n} = \frac{2}{\pi}$$

для $F = [-\infty, \infty]$.

Случайная алгебраическая поверхность.

Пример 10. Пусть $G(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha}$, где $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – мультииндекс, суммирование ведется по всем α , таким что $0 \leq \alpha_j \leq n$, а ξ_{α} – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_F d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{i=1}^d \frac{A_n(x_i)C_n(x_i) - B_n^2(x_i)}{A_n^2(x_i)} \mathbf{s}_i^2 \right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}). \quad (1.84)$$

Доказательство. В обозначениях Примера 7 имеем

$$\|h(\mathbf{x})\|^2 = \sum_{\alpha} \mathbf{x}^{2\alpha} = \prod_{k=1}^d A_n(x_k),$$

$$\langle h(\mathbf{x}), h'_i(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \|h(\mathbf{x})\|^2 = B_n(x_i) \prod_{k \neq i} A_n(x_k)$$

и

$$\langle h'_i(\mathbf{x}), h'_j(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{\alpha} \alpha_i \mathbf{x}^{\alpha - \epsilon_i} \alpha_j \mathbf{x}^{\alpha - \epsilon_j} = \begin{cases} B_n(x_i) B_n(x_j) \prod_{k \neq i, j} A_n(x_k) & \text{при } i \neq j, \\ C_n(x_i) \prod_{k \neq i} A_n(x_k) & \text{при } i = j, \end{cases}$$

где ϵ_i – мультииндекс, у которого на i -м месте стоит единица, а на остальных – нули. Из этих равенств вытекает, что при $i \neq j$

$$\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle = 0$$

и при $i = j$

$$\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle = \|h\|^4 \frac{A_n(x_i) C_n(x_i) - B_n^2(x_i)}{A_n^2(x_i)}.$$

Осталось применить (1.83). ■

Формула (1.84) была получена Ибрагимовым и Подкорытовым в [14]. В качестве следствия они вывели асимптотическое соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0))}{\log n} = \frac{\lambda_{d-1}(F \cap \Gamma)}{\pi},$$

где

$$\Gamma := \bigcup_{j=1}^d \{\mathbf{x} : |x_j| = 1\},$$

в предположении $\lambda_{d-1}(\partial F \cap \Gamma) = 0$.

Случайная поверхность Костлана-Шуба-Смэйла.

Пример 11. Рассмотрим $G(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha}$, при этом суммирование ведется по всем неотрицательным α , таким что $\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq n$, ξ_{α} – независимые гауссовские случайные величины с $\mathbb{E} \xi_{\alpha} = 0$ и $\text{Var} \xi_{\alpha} = \binom{n}{\alpha}$, где

$$\binom{n}{\alpha} := \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_d! (n - \alpha_1 - \dots - \alpha)!}.$$

Тогда

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \sqrt{n} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_F \frac{d\mathbf{x}}{1 + \|\mathbf{x}\|^2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{1 + \|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle^2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}).$$

Доказательство.

В обозначениях Примера 7 имеем

$$\|h(\mathbf{x})\|^2 = \sum_{\alpha} \binom{n}{\alpha} \mathbf{x}^{2\alpha} = \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^n,$$

$$\langle h(\mathbf{x}), h'_i(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \|h(\mathbf{x})\|^2 = n x_i \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-1}.$$

При $i \neq j$

$$\begin{aligned} \langle h'_i(\mathbf{x}), h'_j(\mathbf{x}) \rangle &= \sum_{\alpha} \binom{n}{\alpha} \alpha_i \mathbf{x}^{\alpha - \epsilon_i} \alpha_j \mathbf{x}^{\alpha - \epsilon_j} \\ &= n(n-1) x_i x_j \sum_{\alpha} \binom{n-2}{\alpha - \epsilon_i - \epsilon_j} \mathbf{x}^{2\alpha - 2\epsilon_i - 2\epsilon_j} = n(n-1) x_i x_j \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-2} \end{aligned}$$

и при $i = j$

$$\begin{aligned} \langle h'_i(\mathbf{x}), h'_j(\mathbf{x}) \rangle &= \sum_{\alpha} \binom{n}{\alpha} \alpha_i \mathbf{x}^{\alpha - \epsilon_i} \alpha_i \mathbf{x}^{\alpha - \epsilon_i} \\ &= \sum_{\alpha} \binom{n}{\alpha} \alpha_i \mathbf{x}^{2\alpha - 2\epsilon_i} + \sum_{\alpha} \binom{n}{\alpha} \alpha_i (\alpha_i - 1) \mathbf{x}^{2\alpha - 2\epsilon_i} \\ &= n \sum_{\alpha} \binom{n-1}{\alpha - \epsilon_i} \mathbf{x}^{2\alpha - 2\epsilon_i} + n(n-1) x_i^2 \sum_{\alpha} \binom{n-2}{\alpha - 2\epsilon_i} \mathbf{x}^{2\alpha - 4\epsilon_i} \\ &= n \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-1} + n(n-1) x_i^2 \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Из этих равенств вытекает, что при $i \neq j$

$$\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle = -n \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{2n-2} x_i x_j$$

и при $i = j$

$$\|h\|^2 \langle h'_i, h'_j \rangle - \langle h, h'_i \rangle \langle h, h'_j \rangle = n \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{2n-2} \left(1 + \sum_{k \neq i}^d x_k^2\right).$$

Следовательно, из (1.83) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \sqrt{n} \int_F \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{-1} d\mathbf{x} \\ &\times \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(-\sum_{i \neq j}^d x_i x_j s_i s_j + \sum_{i=1}^d \left(1 + \sum_{k \neq i}^d x_k^2\right) s_i^2\right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \sqrt{n} \int_F (1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{-1} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{1 + \|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle^2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}). \end{aligned}$$

■

Замечание 4. Таким образом,

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = C_F \sqrt{n},$$

где C_F зависит только от F и d . В [198] М. Шуб и С. Смейл получили аналогичный результат для числа нулей системы из d полиномов.

Следствие 7. При $d = 1$ получаем

$$\mathbb{E} \lambda_0(G^{-1}(0)) = \sqrt{n} \int_F \frac{dx}{\pi(1+x^2)}.$$

Данное соотношение было получено Э. Костланом в [149].

Случайная тригонометрическая поверхность

Пример 12. Рассмотрим

$$G(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha} [\xi_{\alpha} \cos \langle \alpha, \mathbf{x} \rangle + \eta_{\alpha} \sin \langle \alpha, \mathbf{x} \rangle],$$

где суммирование ведется по всем α , таким что $0 \leq \alpha_j \leq n$, $\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{4\pi^{(d+1)/2}} \lambda_d(F) n \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left((s_1 + \dots + s_d)^2 + \frac{n+2}{3n}\right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}).$$

Доказательство. В обозначениях Примера 7 имеем

$$\|h(\mathbf{x})\|^2 = (n+1)^d, \quad \langle h(\mathbf{x}), h'_i(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \|h(\mathbf{x})\|^2 = 0$$

и

$$\langle h'_i(\mathbf{x}), h'_j(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{\alpha} \alpha_i \alpha_j = \begin{cases} (n+1)^{d-2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 & \text{при } i \neq j, \\ (n+1)^{d-1} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Осталось применить (1.83). ■

Следствие 8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0))}{n} = c_d \lambda_d(F),$$

где c_d зависит только от размерности d .

Следствие 9. При $d = 1$ получаем

$$\mathbb{E} \lambda_0(G^{-1}(0)) = \frac{1}{\pi} \lambda_1(F) \sqrt{\frac{n(2n+1)}{6}}.$$

Данная формула была получена К. Кволсом в [178].

Множества уровней однородного гауссовского поля

Пример 13. Пусть $G(\mathbf{x})$ является однородным гауссовским полем со спектральной мерой ν и удовлетворяет условиям Теоремы 6. Для простоты мы предполагаем $m(\mathbf{x}) \equiv 0$ и $\sigma(\mathbf{x}) \equiv 1$. Тогда

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(u)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \lambda_d(F) e^{-u^2/2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{s}, \mathbf{z} \rangle^2 \nu(d\mathbf{z}) \right)^{1/2} \lambda_{d-1}(ds).$$

Доказательство. По теореме о спектральном представлении

$$\mathbb{E} G(\mathbf{x})G(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle} \nu(d\mathbf{z}).$$

Продифференцируем дважды и подставим $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$:

$$\mathbb{E} G'_i(0)G'_j(0) = \int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j \nu(d\mathbf{z}).$$

Применяя (1.80) к $G(\mathbf{x}) - u$, получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(u)) &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} e^{-u^2/2} \lambda_d(F) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{i,j=1}^d s_i s_j \int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j \nu(d\mathbf{z}) \right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d+1)/2}} \lambda_d(F) e^{-u^2/2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{s}, \mathbf{z} \rangle^2 \nu(d\mathbf{z}) \right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}).\end{aligned}$$

■

Следствие 10. *Имеет место неравенство*

$$\frac{1}{\pi} \gamma_1 e^{-u^2/2} \lambda_d(F) \leq \mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) \leq \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \gamma_2 e^{-u^2/2} \lambda_d(F),$$

где

$$\gamma_k := \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{z}\|^k \nu(d\mathbf{z}) \right)^{1/k}.$$

Доказательство. Используя неравенство Йенсена, теорему Фубини и Лемму 17 (см. раздел 1.5.2), получаем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{s}, \mathbf{z} \rangle^2 \nu(d\mathbf{z}) \right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) &\geq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) \int_{\mathbb{R}^d} |\langle \mathbf{s}, \mathbf{z} \rangle| \nu(d\mathbf{z}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nu(d\mathbf{z}) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle \mathbf{s}, \mathbf{z} \rangle| \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \|\mathbf{z}\| \nu(d\mathbf{z}) = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \gamma_1.\end{aligned}$$

С другой стороны, из неравенства Коши следует $\|\langle \mathbf{s}, \mathbf{z} \rangle\| \leq \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|$, поэтому

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{s}, \mathbf{z} \rangle^2 \nu(d\mathbf{z}) \right)^{1/2} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) \leq \lambda_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{z}\|^2 \nu(d\mathbf{z}) \right)^{1/2} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \gamma_2.$$

■

Следствие 11. *При $d = 1$ получаем*

$$\mathbb{E} \lambda_0(G^{-1}(u)) = \frac{\gamma_2}{\pi} e^{-u^2/2} \lambda_1(F).$$

Данная формула была получена С. Райсом в [184].

1.5.2. Вспомогательные леммы

По формуле Крофтона², чтобы вычислить $(d-1)$ -мерную меру Хаусдорфа гладкого $(d-1)$ -мерного подмногообразия A , надо спроецировать его на $(d-1)$ -мерную линейную гиперплоскость, взять меру Лебега (с учетом кратности проекции) и усреднить по всем таким проекциям, нормировав соответствующим образом:

$$\lambda_{d-1}(A) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d-1)/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(ds) \int_{\mathbf{s}^\perp} \lambda_0(\{\mathbf{s}_y^\perp\}^\perp \cap A) d\mathbf{y}, \quad (1.85)$$

где \mathbf{s}^\perp – линейная гиперплоскость, ортогональная единичному вектору $\mathbf{s} \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\{\mathbf{s}_y^\perp\}^\perp$ – прямая, ортогональная \mathbf{s}^\perp и проходящая через точку $\mathbf{y} \in \mathbf{s}^\perp$.

Введем обозначения, которые нам понадобятся в данном разделе. Пусть

$$M := \sup_{R>0} \left| \int_{-R}^R \frac{\sin u}{u} du \right|.$$

Из Леммы 16 (см. ниже) следует, что $M < \infty$. Обозначим ω_k площадь k -мерной сферы:

$$\omega_k := \lambda_k(\mathbb{S}^k) = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

Предполагается, что функция g на протяжении всего параграфа удовлетворяет условиям Теоремы 6. Обозначим g'_s частную производную g по направлению $\mathbf{s} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Лемма 16. *Для всех $t \in \mathbb{R}$*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tu}{u} du = \text{sign } t. \quad (1.86)$$

Доказательство. См., например, [4, Гл. 11]. ■

Лемма 17. *Для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle| \lambda_{d-1}(ds) = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \|\mathbf{x}\|. \quad (1.87)$$

² Более детально данные вопросы рассматриваются в § 4.1, в частности см. (4.2)

Доказательство. Содержательным является случай $\mathbf{x} \neq 0$. Рассмотрим произвольное борелевское множество A , лежащее в линейной гиперплоскости \mathbf{x}^\perp , такое что $\lambda_{d-1}(A) = \|\mathbf{x}\|$. Применим формулу (1.85). Нетрудно видеть, что подынтегральное выражение $\int_{\mathbf{s}^\perp} \lambda_0(\{\mathbf{s}_y^\perp\}^\perp \cap A) dy$ является площадью проекции множества A на линейную гиперплоскость \mathbf{s}^\perp . С другой стороны, при проекции множества из одной гиперплоскости на другую его площадь умножается на модуль косинуса угла между гиперплоскостями, поэтому

$$\int_{\mathbf{s}^\perp} \lambda_0(\{\mathbf{s}_y^\perp\}^\perp \cap A) dy = \lambda_{d-1}(A) \cdot |\langle \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|, \mathbf{s} \rangle| = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle|.$$

Подставляя данное равенство в (1.85) и заменяя $\lambda_{d-1}(A)$ на $\|\mathbf{x}\|$, получаем (1.87). ■

Следующая лемма является результатом, сформулированным и доказанным М. Кацем (см., например, [15, Гл. 1]).

Лемма 18. Пусть функция одной переменной $f(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет конечное число стационарных точек (где производная обращается в ноль). Тогда число нулей функции $f(t)$ на $[a, b]$ определяется формулой

$$\lambda_0(f^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_a^b \cos(uf(t)) |f'(t)| dt. \quad (1.88)$$

При подсчете $\lambda_0(f^{-1}(0))$ нуль, совпадающий с a или b , считается за “полнуля”.

Замечание 5. Данное утверждение очевидным образом распространяется на случай объединения конечного числа отрезков. В этом виде мы его будем использовать в дальнейшем.

Доказательство. Для удобства читателя мы приводим доказательство из [15].

Обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ стационарные точки f :

$$a = \alpha_0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq \alpha_{k+1} = b.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(uf(t))|f'(t)|dt &= \sum_{j=0}^k \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \cos(uf(t))|f'(t)|dt \\ &= \sum_{j=0}^k \left(\pm \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \cos(uf(t))f'(t)dt \right) = \sum_{j=0}^k \left(\pm \frac{\sin(uf(\alpha_{j+1})) - \sin(uf(\alpha_j))}{u} \right). \end{aligned}$$

Знак “+” выбирается для участков, где f возрастает, знак “-” – где f убывает.

Таким образом, применяя (1.86), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_a^b \cos(uf(t))|f'(t)|dt &= \sum_{j=0}^k \left(\pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(uf(\alpha_{j+1})) - \sin(uf(\alpha_j))}{u} du \right) \\ &= \sum_{j=0}^k \left(\pm \frac{\text{sign } f(\alpha_{j+1}) - \text{sign } f(\alpha_j)}{2} \right) \\ &= \lambda_0(f^{-1}(0)). \end{aligned}$$

■

Лемма 19. Пусть функция одной переменной $f(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет k стационарных точек. Тогда равномерно по

$R > 0$

$$\left| \int_{-R}^R du \int_a^b \cos(uf(t))|f'(t)|dt \right| \leq 2M(k+1).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 18 имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R}^R du \int_a^b \cos(uf(t))|f'(t)|dt \right| &= \left| \sum_{j=0}^k \left(\pm \int_{-R}^R \frac{\sin(uf(\alpha_{j+1})) - \sin(uf(\alpha_j))}{u} du \right) \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^k \pm \left(\int_{-Rf(\alpha_{j+1})}^{Rf(\alpha_{j+1})} \frac{\sin u}{u} du - \int_{-Rf(\alpha_j)}^{Rf(\alpha_j)} \frac{\sin u}{u} du \right) \right| \\ &\leq 2(k+1) \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_{-t}^t \frac{\sin u}{u} du \right| = 2M(k+1). \end{aligned}$$

■

Следствие 12. Если $[a, b]$ заменить множеством H , состоящим из объединения l отрезков, то равномерно по $R > 0$

$$\left| \int_{-R}^R du \int_H \cos(uf(t)) |f'(t)| dt \right| \leq 2M(k+l). \quad (1.89)$$

Лемма 20. Имеет место следующее неравенство:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(g'_s{}^{-1}(0)) \lambda_{d-1}(ds) \leq \omega_{d-1} \lambda_{d-1}((\nabla g)^{-1}(0)) + \omega_{d-2} \lambda_d(F).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(g'_s{}^{-1}(0)) \lambda_{d-1}(ds) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(ds) \int_F \mathbb{1}\{g'_s(y) = 0\} \lambda_{d-1}(dy) \\ &\leq \omega_{d-1} \lambda_{d-1}((\nabla g)^{-1}(0)) + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(ds) \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} \mathbb{1}\{g'_s(y) = 0\} \lambda_{d-1}(dy). \end{aligned}$$

Осталось оценить второе слагаемое. Если $\nabla g(\mathbf{y}) \neq 0$, то множество $S(\mathbf{y}) := \{\mathbf{s} \in \mathbb{S}^{d-1} : g'_s(\mathbf{y}) = 0\}$ лежит в единичной гиперсфере сферы \mathbb{S}^{d-1} , ортогональной $\nabla g(\mathbf{y})$. Следовательно, $\lambda_{d-2}(S(\mathbf{y})) \leq \omega_{d-2}$, и используя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(ds) \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} \mathbb{1}\{g'_s(\mathbf{y}) = 0\} \lambda_{d-1}(d\mathbf{y}) \\ &= \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{1}\{f'_s(x) = 0\} \lambda_{d-2}(ds) = \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} \lambda_{d-2}(S(\mathbf{y})) d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{F \setminus (\nabla g)^{-1}(0)} \omega_{d-2} d\mathbf{x} = \omega_{d-2} \lambda_d(F). \end{aligned}$$

■

Лемма 21. При всех $R > 0$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(ds) \int_{\{\langle \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle = 0\}} d\mathbf{y} \left| \int_{-R}^R du \int_{\{\mathbf{y} + t\mathbf{s} \in F\}} \cos(ug(\mathbf{y} + t\mathbf{s})) |g'_t(\mathbf{y} + t\mathbf{s})| dt \right| \\ &\leq 2M \left(\omega_{d-1} \lambda_{d-1}((\nabla g)^{-1}(0)) + \omega_{d-2} \lambda_d(F) + \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \lambda_{d-1}(\partial F) \right) \quad (1.90) \end{aligned}$$

u

$$\left| \int_{-R}^R du \int_F \cos(ug(\mathbf{x})) \|\nabla g(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \right| \leq M \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{(d-1)/2}} \times \left(\omega_{d-1} \lambda_{d-1}[(\nabla f)^{-1}(0)] + \omega_{d-2} \lambda_d(F) + \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \lambda_{d-1}(\partial F) \right). \quad (1.91)$$

Доказательство. Обозначим $k(\mathbf{s}, \mathbf{y})$ число нулей $g'_t(\mathbf{y} + t\mathbf{s})$ (возможно бесконечное) на множестве $\{t : \mathbf{y} + t\mathbf{s} \in F\}$ и $l(\mathbf{s}, \mathbf{y})$ – число отрезков, из которых состоит это множество (если множество не является объединением конечного числа отрезков, полагаем $l(\mathbf{s}, \mathbf{y}) := \infty$). Из (1.89) получаем

$$\left| \int_{-R}^R du \int_{\{t: \mathbf{y}+t\mathbf{s} \in F\}} \cos(ug(\mathbf{y} + t\mathbf{s})) |g'_t(\mathbf{y} + t\mathbf{s})| dt \right| \leq 2M \left(k(\mathbf{s}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{s}, \mathbf{y}) \right). \quad (1.92)$$

Если мы спроецируем множество $g'_s{}^{-1}(0)$ на гиперплоскость $\{\mathbf{y} : \langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$, то $k(\mathbf{s}, \mathbf{y})$ будет равняться кратности полученной проекции в точке \mathbf{y} . При проекции мера не увеличивается, поэтому

$$\int_{\{\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle = 0\}} k(\mathbf{s}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq \lambda_{d-1}(g'_s{}^{-1}(0)),$$

что по Лемме 20 влечет

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) \int_{\{\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle = 0\}} k(\mathbf{s}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq \omega_{d-1} \lambda_{d-1}((\nabla g)^{-1}(0)) + \omega_{d-2} \lambda_d(F). \quad (1.93)$$

Далее, применив формулу Крэфтона к границе F , имеем

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) \int_{\{\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle = 0\}} 2l(\mathbf{s}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \lambda_{d-1}(\partial F). \quad (1.94)$$

Объединение (1.92), (1.93) и (1.94) приводит к (1.90).

Докажем (1.91). Из (1.87) имеем

$$\|\nabla g(\mathbf{x})\| = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d-1)/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle \nabla g(\mathbf{x}), \mathbf{s} \rangle| \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}).$$

Следовательно, по теореме Фубини

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-R}^R du \int_F \cos(ug(\mathbf{x})) \|\nabla g(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \right| = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d-1)/2}} \\ & \times \left| \int_{-R}^R du \int_F d\mathbf{x} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \cos(ug(\mathbf{x})) |\langle \nabla g(\mathbf{x}), s \rangle| \lambda_{d-1}(ds) \right| = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d-1)/2}} \\ & \times \left| \int_{Sd} \lambda_{d-1}(ds) \int_{\{\langle s, \mathbf{y} \rangle = 0\}} d\mathbf{y} \int_{-R}^R du \int_{\{\mathbf{x} + ts \in F\}} \cos(ug(\mathbf{y} + ts)) |g'_t(\mathbf{y} + ts)| dt \right|. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось применить (1.90). ■

Лемма 22. Пусть дан n -мерный центрированный гауссовский вектор ξ с ковариационной матрицей Σ . Тогда

$$\mathbb{E} \|\xi\| = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi^{d/2}}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{\langle \mathbf{s}, \Sigma \mathbf{s} \rangle} \lambda_{d-1}(ds)$$

Доказательство. Из (1.87) и теоремы Фубини имеем

$$\mathbb{E} \|\xi\| = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2\pi^{(d-1)/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E} |\langle \xi, \mathbf{s} \rangle| \lambda_{d-1}(ds).$$

Далее,

$$\mathbb{E} |\langle \xi, \mathbf{s} \rangle| = \mathbb{E} |\mathcal{N}(0, 1)| \sqrt{\text{Var} \langle \xi, \mathbf{s} \rangle} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sqrt{\langle \mathbf{s}, \Sigma \mathbf{s} \rangle},$$

что завершает доказательство. ■

1.5.3. Доказательства теорем

Доказательство. [Доказательство Теоремы 6] Используя (1.85) и Лемму 18, получаем

$$\begin{aligned}
\lambda_{d-1}(g^{-1}(0)) &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{4\pi^{(d+1)/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) \int_{\{\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle = 0\}} d\mathbf{y} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{\{\mathbf{y} + t\mathbf{s} \in F\}} \cos(ug(\mathbf{y} + t\mathbf{s})) |g'_t(\mathbf{y} + t\mathbf{s})| dt \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{4\pi^{(d+1)/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) \int_{\{\langle \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle = 0\}} d\mathbf{y} \\
&\quad \times \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R du \int_{\{\mathbf{y} + t\mathbf{s} \in F\}} \cos(ug(\mathbf{y} + t\mathbf{s})) |g'_t(\mathbf{y} + t\mathbf{s})| dt.
\end{aligned}$$

Из (1.90), условия (b) и выбора F следует, что мы можем применить теорему Лебега:

$$\begin{aligned}
\lambda_{d-1}(g^{-1}(0)) &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{4\pi^{(d+1)/2}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(d\mathbf{s}) \int_{\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle = 0\}} d\mathbf{y} \\
&\quad \times \int_{-R}^R du \int_{\{\mathbf{x} + t\mathbf{s} \in F\}} \cos(ug(\mathbf{x} + t\mathbf{s})) |g'_t(\mathbf{x} + t\mathbf{s})| dt.
\end{aligned}$$

Так как все области интегрирования конечномерны, а интегрируемые функции ограничены, можно применить теорему Фубини:

$$\begin{aligned}
\lambda_{d-1}(g^{-1}(0)) &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{4\pi^{(d+1)/2}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R du \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(ds) \int_{\{\langle x, s \rangle = 0\}} dy \\
&\times \int_{\{\mathbf{x} + ts \in F\}} \cos(ug(\mathbf{x} + ts)) |g'_t(\mathbf{x} + ts)| dt \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{4\pi^{(d+1)/2}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R du \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(ds) \int_F \cos(ug(\mathbf{x})) |\langle \nabla g(\mathbf{x}), s \rangle| d\mathbf{x} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{4\pi^{(d+1)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}(ds) \int_F \cos(ug(\mathbf{x})) |\langle \nabla g(\mathbf{x}), s \rangle| d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось применить Лемму 17. ■

Перейдем к доказательству второй теоремы.

Доказательство. [Доказательство Теоремы 7] Применим теорему 6. Для этого покажем, что с вероятностью единица для G выполнены условия (a), (b). Из (a') очевидным образом следует, что (a) выполнено п.н. Далее, учитывая (b') и $\lambda_{d-1}(\partial F) < \infty$, по теореме Фубини имеем

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}[G^{-1}(0) \cap \partial F] = \mathbb{E} \int_{\partial F} \mathbb{1}\{G(\mathbf{y}) = 0\} \lambda_{d-1}(d\mathbf{y}) = \int_{\partial F} \mathbb{P}\{G(\mathbf{y}) = 0\} \lambda_{d-1}(d\mathbf{y}) = 0,$$

что влечет выполнение (b) п.н.

Докажем сначала теорему для случая $\sigma \equiv 1$. Из (1.76) получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) &= \mathbb{E} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_F \cos(uG(\mathbf{x})) \|\nabla G(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R du \int_F \cos(uG(\mathbf{x})) \|\nabla G(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Из (1.91), условия (а') и выбора F следует, что применима теорема Лебега:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_{-R}^R du \int_F \cos(uG(\mathbf{x})) \|\nabla G(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_F d\mathbf{x} \int_{-R}^R \mathbb{E} \left[\cos(uG(\mathbf{x})) \|\nabla G(\mathbf{x})\| \right] du.\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы применили теорему Фубини, что законно, так как выполнено

$$|\cos(uG(\mathbf{x}))| \|\nabla G(\mathbf{x})\| \leq \|\nabla G(\mathbf{x})\| \leq \sum_{j=1}^d |G'_j(\mathbf{x})|$$

и

$$\mathbb{E} \int_{-R}^R du \int_F \sum_{j=1}^d |G'_j(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq 2R \lambda_d(F) \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \sup_{x \in F} |G'_j(\mathbf{x})| < \infty.$$

Конечность правой части следует из суммируемости супремума непрерывного гауссовского поля на компакте (см. [153]).

Продифференцировав $\sigma^2 \equiv 1$, получаем

$$\frac{\partial(\mathbb{E} G^2)}{\partial x_i} - 2\mathbb{E} G \frac{\partial(\mathbb{E} G)}{\partial x_i} = 0,$$

следовательно, по теореме о дифференцировании математического ожидания по параметру (см. [19, §4.5]) выполнено

$$\mathbb{E} G G'_i = \frac{1}{2} \mathbb{E} \frac{\partial G^2}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mathbb{E} G^2)}{\partial x_i} = \mathbb{E} G \frac{\partial(\mathbb{E} G)}{\partial x_i} = \mathbb{E} G \mathbb{E} G'_i,$$

т.е. G не коррелирует с компонентами вектора ∇G , что в гауссовском случае равносильно независимости. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} (\cos(uG(\mathbf{x})) \|\nabla G(\mathbf{x})\|) &= \mathbb{E} \cos(uG(\mathbf{x})) \mathbb{E} \|\nabla G(\mathbf{x})\| \\ &= \operatorname{Re} \mathbb{E} e^{iuG(\mathbf{x})} \mathbb{E} \|\nabla G(\mathbf{x})\| \\ &= \operatorname{Re} e^{i u m(\mathbf{x}) - u^2/2} \mathbb{E} \|\nabla G(\mathbf{x})\| \\ &= \cos(u m(\mathbf{x})) e^{-u^2/2} \mathbb{E} \|\nabla G(\mathbf{x})\|,\end{aligned}$$

что влечет

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_F \mathbb{E} \|\nabla G(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \int_{-R}^R \cos(um(\mathbf{x})) e^{-u^2/2} du.$$

Используя теорему Лебега и формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(um(\mathbf{x})) e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi} \operatorname{Re} \mathbb{E} e^{im(\mathbf{x})\mathcal{N}(0,1)} = \sqrt{2\pi} e^{-m^2(\mathbf{x})/2},$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_F \mathbb{E} \|\nabla G(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \cos(um(\mathbf{x})) e^{-u^2/2} du \quad (1.95) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_F e^{-m^2(\mathbf{x})/2} \mathbb{E} \|\nabla G(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Случай $\sigma \equiv 1$ разобран. Чтобы перейти к общему случаю, рассмотрим поле G/σ . Оно имеет единичную дисперсию, и множество его нулей совпадает с множеством нулей исходного, поэтому для завершения доказательства осталось применить (1.95) к G/σ . ■

Глава 2

Комплексные нули случайных полиномов одной переменной

2.1. Введение

В данной главе нас будет интересовать поведение нулей случайных полиномов на всей комплексной плоскости. Пусть дан полином $g(z)$ одной комплексной переменной. Обозначим μ_g меру на \mathbb{C} , считающую нули g с учетом их кратности:

$$\mu_g := \sum_{z \in \mathbb{C}: g(z)=0} n_g(z) \delta(z).$$

Здесь $n_g(z)$ обозначает кратность нуля полинома в точке z , и $\delta(z)$ обозначает единичную массу в точке z .

Пусть дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$, принимающих значения в \mathbb{C} . Рассмотрим случайный полином одной комплексной переменной

$$G_n(z) := \xi_0 + \xi_1 z + \dots + \xi_{n-1} z^{n-1} + \xi_n z^n. \quad (2.1)$$

Как ведет себя случайная мера μ_{G_n} при $n \rightarrow \infty$? Для описания ее поведения нам понадобится понятие сходимости случайных вероятностных мер.

Борелевская мера μ на польском пространстве X называется локально конечной, если $\mu(A) < \infty$ для любого компактного подмножества $A \subset X$. Последовательность μ_n локально конечных мер на X грубо сходится к локально конечной мере μ , если для любой непрерывной функции $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi(z) \mu_n(dz) = \int_X \varphi(z) \mu(dz). \quad (2.2)$$

Если μ_n и μ вероятностные меры, грубая сходимость эквивалентна слабой сходимости, для которой (2.2) должно выполняться для всех непрерывных ограниченных φ . В дальнейшем под сходимостью локально конечных мер мы будем всегда понимать грубую (слабую для вероятностных мер) сходимость.

Последовательность случайных мер μ_n сходится к случайной мере μ по вероятности (соответственно, п.н., по распределению), если (2.2) выполняется по вероятности (соответственно, п.н., по распределению) для всех непрерывных φ с компактным носителем.

Задача о распределении комплексных нулей случайного полинома возникла в работе Хаммерсли (см. [126]). Первый результат об асимптотическом поведении комплексных нулей G_n получили Шпаро и Шур (см. [37]). Для $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим функцию

$$f(t) := \left[\underbrace{\log^+ \log^+ \dots \log^+ t}_{m+1} \right]^{1+\varepsilon} \cdot \prod_{k=1}^m \underbrace{\log^+ \log^+ \dots \log^+ t}_k,$$

где $\log^+ s := \max(0, \log s)$. Пусть \mathbb{T} обозначает единичную окружность в \mathbb{C} :

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

В [37] было показано, что если для некоторых $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}^+$

$$\mathbb{E} f(|\xi_0|) < \infty,$$

то последовательность мер $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ слабо сходится по вероятности к равномерному вероятностному распределению на \mathbb{T} при $n \rightarrow \infty$.

Данный результат будет усилен в § 2.2 (также см. [132]). Будет показана эквивалентность следующих утверждений:

(1) Последовательность мер $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ слабо сходится п.н. к равномерному вероятностному распределению на \mathbb{T} при $n \rightarrow \infty$.

(2) $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$.

Более того, будет показано, что для любого невырожденного распределения ξ_0 аргументы нулей распределены асимптотически равномерно с вероятностью единица.

Шепп и Вандербей (см. [195]) рассмотрели случай вещественнозначных гауссовских стандартных коэффициентов и показали, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \mu_{G_n} \left(\left\{ z \in \mathbb{C} : 1 - \frac{\delta}{n} \leq |z| \leq 1 + \frac{\delta}{n} \right\} \right) = \frac{1 + e^{-2\delta}}{1 - e^{-2\delta}} - \frac{1}{\delta}.$$

Ибрагимов и Зейтуни (см. [133]) обобщили данный результат на случай произвольного распределения из области притяжения α -устойчивого закона:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \mu_{G_n} \left(\left\{ z \in \mathbb{C} : 1 - \frac{\delta}{n} \leq |z| \leq 1 + \frac{\delta}{n} \right\} \right) = \frac{1 + e^{-\alpha\delta}}{1 - e^{-\alpha\delta}} - \frac{2}{\alpha\delta}. \quad (2.3)$$

Интересно рассмотреть, что происходит при $\alpha \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1 + e^{-\alpha\delta}}{1 - e^{-\alpha\delta}} - \frac{2}{\alpha\delta} \right) = 0,$$

и естественным ограничением на распределение коэффициентов будет условие того, что хвост является медленно меняющейся функцией. В этом случае (2.3) принимает вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \mu_{G_n} \left(\left\{ z \in \mathbb{C} : 1 - \frac{\delta}{n} \leq |z| \leq 1 + \frac{\delta}{n} \right\} \right) = 0.$$

Данный результат (в несколько более сильной форме) доказан в Теореме 11 из § 2.3 (также см. [223]).

В отличие от концентрации вблизи единичной окружности, существуют случайные полиномы с совершенно иным асимптотическим поведением комплексных нулей. В [7] был приведен пример случайного полинома с независимыми одинаково распределенными коэффициентами, у которого в среднем $n/2 + o(1)$ комплексных нулей концентрируется около начала координат и столько же нулей уходят на бесконечность при $n \rightarrow \infty$. Теорема 12 из § 2.3 (также см. [223]) обобщает данный результат: показано, что если распределение случайной величины $\log(1 + \log(1 + |\xi_0|))$ имеет медленно меняющийся хвост, то

нули G_n асимптотически равномерно концентрируются около двух окружностей с центрами в начале координат. Окружности имеют радиусы $|\xi_0/\xi_\tau|^{1/\tau}$ и $|\xi_\tau/\xi_n|^{1/(n-\tau)}$, где ξ_τ обозначает максимальный по модулю коэффициент.

Как ведут себя нули, когда хвост ξ_0 находится между двумя описанными выше случаями? В § 2.4 (также см. [136]) будет рассмотрен класс распределений, который в определенном смысле непрерывно соединяет эти два случая. Мы изучим переход от концентрации к деконцентрации нулей путем рассмотрения коэффициентов с хвостами вида $L(\log |t|)(\log |t|)^{-\alpha}$, где $\alpha \geq 0$ и L является медленно меняющейся функцией. Асимптотическая структура комплексных и вещественных нулей G_n будет описана в терминах наименьшей вогнутой мажоранты пуассоновского точечного процесса на $[0, 1] \times (0, \infty)$ с интенсивностью $\alpha v^{-(\alpha+1)} dudv$.

В § 2.5 рассматривается случайная аналитическая функция вида

$$G_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k f_{k,n} z^k,$$

где $f_{k,n}$ являются неслучайными комплексными коэффициентами. Предполагая, грубо говоря, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log f_{[tn],n} = u(t),$$

где $u(t)$ – некоторая функция, мы покажем, что мера $\frac{1}{n} \mu_{G_n}$ слабо сходится к некоторой неслучайной мере μ , описание которой будет дано в терминах преобразования Лежандра-Фенхеля функции u . Предельная мера универсальна, т.е. не зависит от распределения ξ_0 . Данный результат будет применен к нескольким ансамблям случайных аналитических функций, включая ансамбли, соответствующие трем двумерным геометрическим моделям постоянной кривизны. Также мы выведем аналог матричного кругового закона для случайных полиномов.

2.2. Критерий равномерной концентрации нулей около единичной окружности

Результаты данного параграфа были получены совместно с И. А. Ибрагимовым.

2.2.1. Введение

Как и выше, мы рассматриваем последовательность случайных полиномов с независимыми одинаково распределенными коэффициентами:

$$G_n(z) := \xi_0 + \xi_1 z + \cdots + \xi_{n-1} z^{n-1} + \xi_n z^n.$$

Мы всегда предполагаем, что $\mathbb{P}[\xi_0 = 0] < 1$.

Для a, b , таких что $0 \leq a < b \leq \infty$, обозначим

$$R_n(a, b) := \mu_{G_n}(\{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq b\})$$

и для α, β , таких что $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, обозначим

$$S_n(\alpha, \beta) := \mu_{G_n}(\{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \arg z \leq \beta\}).$$

Таким образом, $\frac{1}{n}R_n$ и $\frac{1}{n}S_n$ задают эмпирические распределения модулей нулей и их аргументов.

В этом параграфе мы изучим предельные распределения R_n, S_n при $n \rightarrow \infty$.

Результаты какого типа можно ожидать? Для начала заметим (строгое доказательство будет дано ниже), что если $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$, то при $|z| < 1$ с вероятностью единица

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(z) = G(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k.$$

Обозначим $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ открытый круг радиуса $r > 0$ с центром в нуле. Обозначим $\mathbb{D} := \mathbb{D}_1$ единичный круг. Пусть λ обозначает меру Лебега на \mathbb{C} .

Функция $G(z)$ аналитична внутри единичного круга \mathbb{D} . Поэтому при любом $\delta > 0$ она имеет только конечное число нулей в круге $\mathbb{D}_{1-\delta}$. С другой стороны, среднее число нулей в области $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/(1-\delta)\}$ такое же (это легко показать, если рассмотреть случайный полином $z^n G(1/z)$). Поэтому можно ожидать, что при достаточно слабых ограничениях на коэффициенты полинома его нули концентрируются около единичной окружности \mathbb{T} и мера $\frac{1}{n}R_n$ сходится к дельта-мере в точке 1. Также из соображений симметрии можно ожидать, что аргументы нулей асимптотически равномерно распределены. Ниже мы приводим условия, при которых это выполнено.

Для простоты мы предполагаем, что $\mathbb{P}[\xi_0 = 0] = 0$. Для того, чтобы рассмотреть общий случай, достаточно аналогичным образом изучить поведение нулей при событиях

$$\{\max\{i = 0, \dots, n : \xi_i \neq 0\} = k, \min\{j = 0, \dots, n : \xi_j \neq 0\} = l\}.$$

Теорема 8. *Последовательность эмпирических мер $\frac{1}{n}R_n$ сходится к дельта-мере в точке 1 с вероятностью единица тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty. \quad (2.4)$$

Другими словами, (2.4) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы любого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}R_n(1 - \delta, 1 + \delta) = 1 \quad \text{п.н.} \quad (2.5)$$

Мы также покажем, что если (2.4) не выполнено, то эмпирическая мера нулей не сходится ни к какому распределению.

Теорема 9. *Предположим, что (2.4) выполнено. Тогда с вероятностью единица эмпирическая мера $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ сходится к равномерной вероятностной мере на \mathbb{T} .*

Теорема 10. *С вероятностью единица эмпирическая мера $\frac{1}{n}S_n$ сходится к равномерному распределению, т.е.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(\alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \quad \text{п.н.}$$

для любого α, β , таких что $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$.

Заметим, что в Теореме 10 не накладывается никаких дополнительных условий на последовательность $\{\xi_k\}$.

2.2.2. Доказательство Теоремы 8

Сначала установим достаточность (2.4). Зафиксируем $\delta \in (0, 1)$. Докажем, что радиус сходимости ряда

$$G(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k \quad (2.6)$$

равен единице с вероятностью единица.

Возьмем $\rho > 0$, такое что $\mathbb{P}[|\xi_0| > \rho] > 0$. По лемме Бореля-Кантелли мы получаем, что с вероятностью единица последовательность $\{\xi_k\}$ содержит бесконечно много ξ_k , таких что $|\xi_k| > \rho$. Поэтому радиус сходимости ряда (2.6) не превышает 1 почти наверное.

С другой стороны, для любой неотрицательной случайной величины η выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[\eta \geq k] \leq \mathbb{E} \eta \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[\eta \geq k]. \quad (2.7)$$

Поэтому (2.4) влечет

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[|\xi_k| \geq e^{\gamma k}] < \infty$$

для любой положительной константы γ . Из леммы Бореля-Кантелли следует, что с вероятностью единица $|\xi_k| < e^{\gamma k}$ для всех достаточно больших k . Таким образом, согласно формуле Коши-Адамара (см., например, [22, Гл. 4]), радиус сходимости ряда (2.6) не меньше 1 почти наверное.

Следовательно, с вероятностью единица G является аналитической функцией внутри единичного круга \mathbb{D} . Поэтому если $0 \leq a < b < 1$, то $R(a, b) < \infty$, где

$$R(a, b) := \mu_G(\{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq b\}).$$

Из теоремы Гурвица следует (см., например, [22, Гл. 8]), что с вероятностью единица $R_n(0, 1 - \delta) \leq R(0, 1 - \delta/2)$ для всех достаточно больших n . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} R_n(0, 1 - \delta) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Чтобы завершить доказательство соотношения (2.5), осталось показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} R_n(1 + \delta, \infty) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Другими словами, нам надо доказать, что $\mathbb{P}[A] = 0$, где A является событием, означающим, что существует $\varepsilon > 0$, такое что для бесконечного числа значений n

$$R_n(1 + \delta, \infty) \geq \varepsilon n.$$

Пусть B является событием, означающим, что G аналитична внутри единичного круга \mathbb{D} . Для $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\zeta_m := \sup_{k \in \mathbb{Z}^+} |\xi_k e^{-k/m}|.$$

Рассмотрим события $C_m := \{\zeta_m < \infty\}$. Выше было показано, что $\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C_m] = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, чтобы получить $\mathbb{P}[A] = 0$, достаточно показать, что $\mathbb{P}[ABC_m] = 0$ для некоторого m .

Зафиксируем некоторое m , точное значение которого выберем позже. Предположим, что произошло событие ABC_m . Пронумеруем нули полинома G_n в порядке возрастания их абсолютных значений:

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \cdots \leq |z_n|.$$

Зафиксируем произвольное число $C > 1$ (точное значение будет выбрано позже). Рассмотрим индексы i, j , такие что

$$\begin{aligned} |z_i| < 1 - \delta/C, \quad |z_{i+1}| \geq 1 - \delta/C, \\ |z_j| \leq 1 + \delta, \quad |z_{j+1}| > 1 + \delta. \end{aligned}$$

Если $|z_1| \geq 1 - \delta/C$, то $i = 0$; если $|z_n| \leq 1 + \delta$, то $j = n$.

Легко видеть, что если

$$|z| < \min \left(1, \frac{|\xi_0|}{n \times \max_{k=1, \dots, n} |\xi_k|} \right),$$

то

$$|\xi_0| > |\xi_1 z| + |\xi_2 z^2| + \dots + |\xi_n z^n|.$$

Поэтому такое z не может быть нулем полинома G_n . Принимая во внимание, что произошло событие C_m , мы получаем нижнюю оценку для абсолютных значений нулей при всех достаточно больших n :

$$|z_1| \geq \min \left(1, \frac{|\xi_0|}{n \times \max_{k=1, \dots, n} |\xi_k|} \right) \geq \frac{|\xi_0|}{n \zeta_m e^{n/m}} \geq |\xi_0| \zeta_m^{-1} e^{-2n/m}.$$

Следовательно, для всех достаточно больших n и всех целых l , удовлетворяющих $j + 1 \leq l \leq n$, выполнено

$$\begin{aligned} |z_1 \dots z_l| &= |z_1 \dots z_i| |z_{i+1} \dots z_j| |z_{j+1} \dots z_l| \\ &\geq |\xi_0|^i \zeta_m^{-i} e^{-2ni/m} \left(1 - \frac{\delta}{C} \right)^{j-i} (1 + \delta)^{l-j}. \end{aligned}$$

Так как произошло событие A , для всех достаточно больших n выполнено $n - j \geq n\varepsilon$. Поэтому если l удовлетворяет $n - \sqrt{n} \leq l \leq n$, то для бесконечного числа значений n выполнены неравенства $j + 1 \leq l \leq n$ и $l - j \geq n\varepsilon/2$. По теореме Гурвица, $i \leq R_n(0, 1 - \delta/C) \leq R(0, 1 - \delta/(2C))$ для всех достаточно больших n . Поэтому для бесконечного числа значений n выполнено

$$|z_1 \dots z_l| \geq \left(\frac{|\xi_0|}{\zeta_m} \right)^{R(0, 1 - \delta/(2C))} e^{-2nR(0, 1 - \delta/(2C))/m} \left(1 - \frac{\delta}{C} \right)^n (1 + \delta)^{n\varepsilon/2}.$$

Выберем C настолько большим, чтобы выполнялось

$$\left(1 - \frac{\delta}{C}\right) (1 + \delta)^{\varepsilon/2} > 1.$$

Далее, зафиксировав значение C , выберем такое m , что

$$b := e^{-2R(0,1-\delta/(2C))/m} \left(1 - \frac{\delta}{C}\right) (1 + \delta)^{\varepsilon/2} > 1.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|\xi_0|}{\zeta_m}\right)^{R(0,1-\delta/(2C))/n} = 1,$$

существует случайная величина $a > 1$, такая что для бесконечного числа значений n выполнено

$$|z_1 \dots z_l| \geq \left(\frac{|\xi_0|}{\zeta_m}\right)^{R(0,1-\delta/(2C))} b^n = \left(b \left(\frac{|\xi_0|}{\zeta_m}\right)^{R(0,1-\delta/(2C))/n}\right)^n \geq a^n.$$

С другой стороны, из неравенства $n - \sqrt{n} \leq l$ и теоремы Виета следует, что

$$|z_{l+1} \dots z_n| \geq \binom{n}{n - \sqrt{n}}^{-1} \left| \sum_{i_1 < \dots < i_{n-l}} z_{i_1} \dots z_{i_{n-l}} \right| = \binom{n}{n - \sqrt{n}}^{-1} \frac{|\xi_l|}{|\xi_n|}.$$

Объединяя эти два неравенства, получаем, что для бесконечного числа значений n выполнено

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_0|}{|\xi_n|} = |z_1 \dots z_n| &\geq a^n \binom{n}{n - \sqrt{n}}^{-1} \frac{|\xi_l|}{|\xi_n|} \\ &\geq c_1 a^n \frac{(\sqrt{n})^{\sqrt{n} + \frac{1}{2}} (n - \sqrt{n})^{n - \sqrt{n} + \frac{1}{2}}}{n^{n + \frac{1}{2}}} \frac{|\xi_l|}{|\xi_n|} \\ &\geq c_2 a^n (\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \frac{|\xi_l|}{|\xi_n|} \\ &\geq c_3 \exp\left(n \log a - \frac{\sqrt{n} \log n}{2} - \sqrt{n}\right) \frac{|\xi_l|}{|\xi_n|} \geq e^{\alpha n} \frac{|\xi_l|}{|\xi_n|}, \end{aligned}$$

где α является положительной случайной величиной. Домножая левую и правую части на $|\xi_n|$, приходим к

$$ABC_m \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i,$$

где D_i является событием, означающим, что $|\xi_0| > e^{n/i} \max_{n-\sqrt{n} \leq l \leq n} |\xi_l|$ для бесконечного числа значений n .

Для завершения доказательства достаточно показать, что $\mathbb{P}[D_i] = 0$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Имея в виду применить лемму Бореля-Кантелли, рассмотрим следующие события:

$$H_{in} := \left\{ |\xi_0| > e^{n/i} \max_{n-\sqrt{n} \leq l \leq n} |\xi_l| \right\}.$$

Выбирая такое $\theta > 0$, что $\mathbb{P}[|\xi_0| \leq \theta] = F(\theta) < 1$, имеем

$$H_{in} \subset \left\{ |\xi_0| > \theta e^{n/i} \right\} \cup \left\{ \max_{n-\sqrt{n} \leq l \leq n} |\xi_l| \leq \theta \right\},$$

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[H_{in}] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|\xi_0| > \theta e^{n/i}] + \sum_{n=1}^{\infty} (F(\theta))^{\sqrt{n}} < \infty,$$

что по лемме Бореля-Кантелли приводит к $\mathbb{P}[D_i] = 0$.

Докажем импликацию (2.5) \Rightarrow (2.4) от противного. Предположим, что (2.4) не выполнено, т.е.

$$\mathbb{E} \log(1 + |\xi_o|) = \infty.$$

Из (2.7) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|\xi_n| \geq e^{\gamma n}] = \infty \quad (2.8)$$

для произвольного положительного γ . Для $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим событие F_k , означающее что $|\xi_n| \geq e^{kn}$ для бесконечного числа значений n . Применяя (4.70) и лемму Бореля-Кантелли, получаем, что $\mathbb{P}[F_k] = 1$ и, следовательно, $\mathbb{P}[\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k] = 1$. Это приводит к

$$\mathbb{P} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} |\xi_n|^{1/n} = \infty \right] = 1.$$

Поэтому с вероятностью единица для бесконечного числа n выполнено

$$|\xi_n|^{1/n} > \max_{i=0, \dots, n-1} |\xi_i|^{1/i}, \quad |\xi_n|^{1/n} > \frac{3}{\varepsilon}, \quad |\xi_0| < 2^{n-1},$$

где $\varepsilon > 0$ является произвольной фиксированной величиной. Зафиксируем одно из таких n . Предположим, что $|z| \geq \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} |\xi_0 + \xi_1 z + \cdots + \xi_{n-1} z^{n-1}| &\leq 2^{n-1} + |\xi_n z^n|^{1/n} + |\xi_n z^n|^{2/n} + \cdots + |\xi_n z^n|^{(n-1)/n} \\ &= \frac{2^n}{2} - 1 + \frac{|\xi_n z^n| - 1}{|\xi_n^{1/n} z| - 1} \\ &\leq \frac{|\xi_n^{1/n} z|^n}{2} - 1 + \frac{|\xi_n z^n| - 1}{(3/\varepsilon) \times \varepsilon - 1} < |\xi_n z^n|. \end{aligned}$$

Таким образом, с вероятностью единица для бесконечного числа значений n все нули полинома G_n расположены в круге \mathbb{D}_ε , где ε является произвольной положительной константой. Это означает, что (2.5) не выполняется для любого $\delta \in (0, 1)$.

2.2.3. Доказательство Теоремы 9

Теорема 9 сразу же вытекает из Теоремы 8 и Теоремы 10. Однако дополнительное предположение (2.4) значительно упрощает доказательство.

Пусть дан набор последовательностей чисел из отрезка $[0, 1]$:

$$\{a_{11}\}, \{a_{12}, a_{22}\}, \dots, \{a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}\}, \dots$$

Мы говорим, что $\{a_{jn}\}$ равномерно распределены на $[0, 1]$, если для любых $0 \leq a < b \leq 1$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_{jn} \in [a, b]\}}{n} = b - a.$$

Данное определение является незначительным обобщением понятия равномерно распределенной последовательности (см., например, [25, Гл. 1]). Нетрудно видеть, что критерий Вейля (см. там же) справедлив и в этом случае:

Набор последовательностей $\{a_{jn}, j = 1, \dots, n\}$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно распределен тогда и только тогда, когда для всех $l = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{2\pi i l a_{jn}} = 0.$$

Обозначим $z_{jn} = r_{jn}e^{i\theta_{jn}}$, $j = 1, \dots, n$, нули полинома G_n , где $r_{jn} = |z_{jn}|$, $\theta_{jn} = \arg z_{jn}$, $0 \leq \theta_{jn} < 2\pi$. Асимптотическая равномерность аргументов равносильна тому, что набор последовательностей $\{\theta_{jn}/(2\pi)\}$ равномерно распределен. Поэтому, согласно критерию Вейля, достаточно показать, что для любого $l = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{il\theta_{jn}} = 0 \quad \text{п.н.}$$

Для простоты предположим, что $\xi_0 \neq 0$. Рассмотрим случайный полином

$$\tilde{G}_n(z) := \xi_n + \xi_{n-1}z + \dots + \xi_1 z^{n-1} + \xi_0 z^n.$$

Его нулями являются числа z_{kn}^{-1} . Применяя формулы Ньютона (см., например, [20, Гл. 11]), имеем

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{z_{jn}^l} = \varphi_l \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_l}{\xi_0} \right),$$

где $\varphi_l(x_1, \dots, x_l)$ являются полиномами, не зависящими от n . (Например, $\varphi_1(x) = -x$). Следовательно,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{-il\theta_{jn}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{-il\theta_{jn}} \left(1 - \frac{1}{r_{jn}^l} \right) + \frac{\varphi_l}{n}. \quad (2.9)$$

Как было показано в доказательстве Теоремы 8, при $|z| < 1$ полиномы $G_n(z)$ сходятся п.н. к аналитической функции $G(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k$. Так как $\xi_0 \neq 0$, существует случайная величина ρ , такая что функция G не имеет нулей в круге \mathbb{D}_ρ , и при этом $\mathbb{P}[\rho > 0] = 1$. Следовательно, существует случайная величина N , такая что при $n \geq N$ полином G_n не имеет нулей в круге \mathbb{D}_ρ , при этом $\mathbb{P}[N < \infty] = 1$. Рассмотрим $\gamma > 0$. Из (2.9) следует, что

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{il\theta_{jn}} \right| \leq (l+1) \frac{\gamma}{(1-\gamma)^l} + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \#\{j : |r_{jn} - 1| > \gamma, j = 1, \dots, n\} + \frac{\varphi_l}{n}.$$

По Теореме 8 имеем, что второй член в правой части стремится к нулю п.н. при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{il\theta_{jn}} = 0 \quad \text{п.н.,}$$

что завершает доказательство.

2.2.4. Доказательство Теоремы 10

Рассмотрим целые числа p, q_1, q_2 , такие что $0 \leq q_1 < q_2 < p - 1$. Положим $\varphi_j := q_j/p$, $j = 1, 2$, и оценим $S_n = S_n(2\pi\varphi_1, 2\pi\varphi_2)$. Очевидно, $S_n = \lim_{R \rightarrow \infty} S_{nR}$, где

$$S_{nR} := \mu_{G_n}(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, 2\pi\varphi_1 \leq \arg z \leq 2\pi\varphi_2\}).$$

Из принципа аргумента (см., например, [22, Гл. 8]) следует, что $2\pi S_{nR}$ совпадает с изменением $\arg G_n(z)$ при обходе z границы A_R . Граница состоит из дуги

$$\Gamma_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, 2\pi\varphi_1 \leq \arg z \leq 2\pi\varphi_2\}$$

и двух интервалов

$$L_j := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq R, \arg z = \pi\varphi_j\}, \quad j = 1, 2.$$

Легко проверить, что если R достаточно большое, то изменение $\arg G_n(z)$ при обходе Γ_R равно $n(\varphi_2 - \varphi_1) + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Если z обходит некоторый подынтервал интервала L_j и при этом изменение аргумента $\arg G_n(z)$ превышает π , то функция $|G_n| \cos(\arg G_n)$ имеет по крайней мере один нуль в этом подынтервале. Из Теоремы 3 (см. § 1.3) следует, что с вероятностью единица число вещественных нулей полинома

$$g_{n,j}(x) := \sum_{k=0}^n x^k \operatorname{Re}(\xi_k e^{2\pi i k \varphi_j}) = \sum_{k=0}^n x^k \eta_{k,j}$$

равно $o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому изменение аргумента $\arg G_n(z)$ при обходе z интервала L_j тоже равно $o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(2\pi\varphi_1, 2\pi\varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{п.н.}$$

Множество точек вида $e^{2\pi i q/p}$ всюду плотно на единичной окружности \mathbb{T} . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(\alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \quad \text{п.н.}$$

при любых α, β , таких что $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$.

2.3. Коэффициенты с экстремально тяжелыми хвостами

Результаты данного параграфа были получены совместно с Ф. Гетце.

Как и в предыдущем параграфе, мы для простоты предполагаем, что $\mathbb{P}[\xi_0 = 0] = 0$. Для того, чтобы рассмотреть общий случай, достаточно аналогичным образом изучить поведение нулей при событиях

$$\{\max\{i = 0, \dots, n : \xi_i \neq 0\} = k, \min\{j = 0, \dots, n : \xi_j \neq 0\} = l\}.$$

Теорема 11. *Если распределение $|\xi_0|$ имеет медленно меняющийся хвост, то для любого $\delta > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\mu_{G_n} \left(\left\{ z \in \mathbb{C} : 1 - \frac{\delta}{n} \leq |z| \leq 1 + \frac{\delta}{n} \right\} \right) = 0 \right] = 1.$$

Рассмотрим индекс $\tau = \tau_n \in \{0, \dots, n\}$, такой что $|\xi_\tau| \geq |\xi_j|$ при $j = 0, \dots, n$. Если он не единственный, возьмем минимальный. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ обозначают комплексные корни системы уравнений

$$z^\tau + \frac{\xi_0}{\xi_\tau} = 0, \quad z^{n-\tau} + \frac{\xi_\tau}{\xi_n} = 0.$$

Теорема 12. *Если распределение $\log(1 + \log(1 + |\xi_0|))$ имеет медленно меняющийся хвост, то для любого $\varepsilon \in (0, 1)$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[F_n(\varepsilon)] = 1,$$

где $F_n(\varepsilon)$ является событием, означающим, что нули z_1, \dots, z_n полинома G_n можно перенумеровать таким образом, что будет выполнено

$$|z_k - w_k| < \frac{\varepsilon}{n} |w_k|$$

при $k = 1, \dots, n$.

В следующем разделе мы докажем несколько вспомогательных лемм, после чего будут приведены доказательства теорем.

2.3.1. Вспомогательные леммы

В данном разделе значок \sum_j будет всегда обозначать суммирование по всем j из диапазона $\{0, 1, \dots, n\}$. Если под знаком суммирования находятся дополнительные условия, подразумевается, что они применяются ко всем j из диапазона $\{0, 1, \dots, n\}$. Первая лемма является классическим результатом, принадлежащим Пелле.

Лемма 23. Пусть дан полином $g(z) := \sum_j a_j z^j$ степени n . Предположим, что для некоторого $k = 1, \dots, n-1$ вспомогательный полином вещественной переменной

$$\tilde{g}(x) := \sum_{j \neq k} |a_j| x^j - |a_k| x^k$$

имеет ровно два положительных нуля R и r , $R > r$. Тогда g имеет ровно k нулей внутри окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ и ровно $n - k$ нулей вне окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

Доказательство. См., например, [180]. ■

Следующая лемма взята из [27].

Лемма 24. Пусть в комплексной плоскости дана область D , граница которой состоит из конечного числа гладких дуг. Пусть функции f, h аналитичны в некоторой окрестности B . Если ни при каком значении вещественного параметра t из интервала $a \leq t \leq b$ функция $f + th$ не обращается в ноль на границе D , то число нулей этой функции, лежащих внутри D , не зависит от t при $a \leq t \leq b$.

Доказательство. См. [27, Приложение 1]. ■

Лемма 25. Рассмотрим унитарный полином степени n с комплексными коэффициентами $g(z) := \sum_j a_j z^j$, такой что $a_n = 1, a_0 \neq 0$. Зафиксируем некоторое $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и обозначим w_1, \dots, w_{n-k} корни уравнения $z^{n-k} + a_k =$

0. Положим

$$A_k := \sum_{j \neq k} |a_j|.$$

Если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$A_k \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \left(\frac{\varepsilon}{n + \varepsilon}\right)^{n-k} |a_k|^{1/(n-k)}, \quad (2.10)$$

то g имеет ровно $n - k$ нулей z_1, \dots, z_{n-k} вне единичной окружности и эти нули можно пронумеровать так, чтобы для $j = 1, \dots, n - k$ выполнялось

$$|z_j - w_j| \leq \frac{\varepsilon}{n} |w_j|.$$

Доказательство. Мы покажем, что утверждение Леммы 25 выполняется для семейства полиномов

$$g_t(z) := z^n + a_k z^k + t \sum_{j \neq k, n} a_j z^j, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

В частности,

$$g_0(z) = z^n + a_k z^k, \quad g_1(z) = g(z).$$

Применим Лемму 23, чтобы оценить модули нулей g_t . Рассмотрим вспомогательный полином вещественной переменной

$$\tilde{g}_t(z) := x^n - |a_k| x^k + t \sum_{j \neq k, n} |a_j| x^j.$$

Выполнено $\tilde{g}_t(0), \tilde{g}_t(\infty) > 0$, и из (2.10) следует, что $\tilde{g}_t(1) < 1$. Согласно правилу знаков Декарта, \tilde{g}_t имеет не более двух положительных нулей. Поэтому \tilde{g}_t имеет ровно два положительных корня r_t и R_t , таких что

$$0 < r_t < 1 < R_t. \quad (2.11)$$

Покажем теперь, что

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) |a_k|^{1/(n-k)} \leq R_t \leq |a_k|^{1/(n-k)}. \quad (2.12)$$

Так как $\tilde{g}_t(R_t) = 0$, имеем

$$R_t^{n-k} + t \sum_{j \neq k, n} |a_j| R_t^{j-k} = |a_k|, \quad (2.13)$$

что доказывает правую часть (2.12).

Левую часть будем доказывать от противного. Предположим, напротив, что

$$R_t < \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) |a_k|^{1/(n-k)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_t^{n-k} + t \sum_{j \neq k, n} |a_j| R_t^{j-k} &< \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^{n-k} |a_k| + A_k R_t^{n-k-1} \\ &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^{n-k} |a_k| + A_k \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^{n-k-1} |a_k|^{1-\frac{1}{n-k}} \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^{n-k} |a_k| + \frac{A_k}{|a_k|^{1/(n-k)}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^{n-k-1} |a_k|. \end{aligned}$$

Из (2.10) следует, что

$$\frac{A_k}{|a_k|^{1/(n-k)}} \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_t^{n-k} + t \sum_{j \neq k, n} |a_j| R_t^{j-k} &< \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^{n-k} |a_k| + \frac{\varepsilon}{n} \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^{n-k-1} |a_k| \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^{n-k-1} |a_k| \leq |a_k|, \end{aligned}$$

что противоречит (2.13). Таким образом, (2.12) доказано.

Из (2.11), (2.12) и Леммы 23 следует, что k нулей g_t лежат внутри окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, а оставшиеся $n - k$ - вне окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = (1 - \varepsilon/n)|a_k|^{1/(n-k)}\}$ при всех $t \in [0, 1]$.

Пусть z_0 является нулем g_t из второй группы, т.е.

$$|z_0| > \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) |a_k|^{1/(n-k)}. \quad (2.14)$$

Имеем

$$|z_0^n + a_k z_0^k| = t \cdot \left| \sum_{j \neq k, n} a_j z_0^j \right| \leq A_k z_0^{n-1},$$

что ведет к

$$\prod_{j=1}^{n-k} |z_0 - w_j| \leq A_k |z_0|^{n-k-1}.$$

Следовательно, существует индекс l , такой что

$$|z_0 - w_l| \leq \left(\frac{A_k}{|z_0|} \right)^{1/(n-k)} |z_0|.$$

Объединяя это с (2.10) и (2.14), получаем

$$\begin{aligned} |z_0 - w_l| &< \left(\frac{A_k}{(1 - \varepsilon/n) |a_k|^{1/(n-k)}} \right)^{1/(n-k)} |z_0| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n + \varepsilon} |z_0| \leq \frac{\varepsilon}{n + \varepsilon} |w_l| + \frac{\varepsilon}{n + \varepsilon} |z_0 - w_l|, \end{aligned}$$

что приводит к

$$|z_0 - w_l| < \frac{\varepsilon}{n} |w_l| = \frac{\varepsilon}{n} |a_k|^{1/(n-k)}.$$

Мы доказали, что все нули g_t из второй группы лежат в $\cup_{m=1}^{n-k} B_m$, где $B_m := \{z \in \mathbb{C} : |z - w_m| < \varepsilon |w_m|/n\}$. Так как $\varepsilon/n < \sin(\pi/(n-k))$, множества B_1, \dots, B_{n-k} попарно не пересекаются. Поэтому g_t не обращается в ноль на границе B_m при всех $t \in [0, 1], m = 1, \dots, n-k$. Чтобы завершить доказательство, остается проверить, что в каждом B_m лежит ровно один нуль g_t . Это, очевидно, выполнено при $t = 0$. Поэтому, по Лемме 3.20, это также верно для всех $t \in [0, 1]$. ■

Лемма 26. Пусть даны неотрицательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\{\eta_j\}_{j=0}^{\infty}$. Положим

$$S_n := \sum_j \eta_j, \quad M_n := \max\{\eta_j\}_{j=0}^n.$$

(а) Распределение η_0 имеет медленно меняющийся хвост тогда и только тогда, когда

$$\frac{M_n}{S_n} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

(b) Распределение η_0 имеет бесконечное математическое ожидание тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - M_n}{n} = \infty, \quad \text{н.н.}$$

Доказательство. Для (a) см. [90], для (b) см. [145]. ■

Лемма 27. Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n \geq 0$ и $\varepsilon > 0$. Если для некоторого $k = 1, \dots, n-1$ выполнено

$$\prod_{j \neq k} (1 + a_j)^{2n^2} \leq 1 + a_k$$

и

$$a_k \geq 2(1 - \varepsilon)^{-4n^2/(4n-1)} \varepsilon^{-4n^3/(4n-1)} (n + \varepsilon)^{4n^3/(4n-1)}, \quad (2.15)$$

тогда

$$\sum_{j \neq k} a_j + 1 \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \left(\frac{\varepsilon}{n + \varepsilon}\right)^{n-k} a_k^{1/(n-k)}.$$

Доказательство. Так как $1 + \sum_{j \neq k} a_j \leq \prod_{j \neq k} (1 + a_j)$, достаточно показать, что

$$(2a_k)^{1/(2n)^2} \leq (1 - \varepsilon) \left(\frac{\varepsilon}{n + \varepsilon}\right)^n a_k^{1/n},$$

что, в свою очередь, равносильно (2.15). ■

2.3.2. Доказательство теоремы 11

По Лемме 26 (a), для любого $\delta > 0$ выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = 1$, где

$$A_n := \left\{ |\xi_\tau| > e^\delta \sum_{j \neq \tau} |\xi_j| \right\}.$$

Рассмотрим вспомогательный полином вещественной переменной

$$\tilde{G}(x) := \sum_{j \neq \tau} |\xi_j| x^j - |\xi_\tau| x^\tau.$$

Пусть произошло событие A_n . Если $1 \leq x \leq e^{\delta/n}$, то

$$|\xi_\tau x^\tau| > e^\delta \sum_{j \neq \tau} |\xi_j| \geq x^n \sum_{j \neq \tau} |\xi_j| \geq \left| \sum_{j \neq \tau} x^j \xi_j \right|.$$

Если $e^{-\delta/n} \leq x \leq 1$, то

$$|\xi_\tau x^\tau| \geq e^{-\delta} |\xi_\tau| > \sum_{j \neq \tau} |\xi_j| \geq \left| \sum_{j \neq \tau} x^j \xi_j \right|.$$

Поэтому \tilde{G} не имеет вещественных нулей в интервале $[e^{-\delta/n}, e^{\delta/n}]$. Далее, $\tilde{G}(0) > 0, \tilde{G}(\infty) > 0$ и $\tilde{G}(1) < 0$. По правилу знаков Декарта, \tilde{G} имеет не более двух положительных нулей. Поэтому \tilde{G} имеет ровно два положительных нуля r и R , такие что

$$0 < r < e^{-\delta/n} < e^{\delta/n} < R.$$

По Лемме 23, G имеет ровно τ нулей внутри окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = e^{-\delta/n}\}$ и $n - \tau$ нулей вне окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = e^{\delta/n}\}$. Следовательно, событие A_n влечет $R_n(e^{-\delta/n}, e^{\delta/n}) = 0$, что завершает доказательство.

2.3.3. Доказательство теоремы 12

Рассмотрим события

$$A_n := \left\{ \prod_{j \neq \tau} \left(1 + \frac{|\xi_j|}{|\xi_n|} \right)^{2n^2} \leq 1 + \frac{|\xi_\tau|}{|\xi_n|} \right\}$$

и

$$B_n := \left\{ \frac{|\xi_\tau|}{|\xi_n|} \geq 2(1 - \varepsilon)^{-4n^2/(4n-1)} \varepsilon^{-4n^3/(4n-1)} (n + \varepsilon)^{4n^3/(4n-1)} \right\}.$$

Так как распределение $\log(1 + \log(1 + |\xi_0|))$ имеет медленно меняющийся хвост, из Леммы 26 (а) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[4 \cdot \sum_{j \neq \tau} \log(1 + \log(1 + |\xi_j|)) \leq \log(1 + \log(1 + |\xi_\tau|)) \right] = 1,$$

что влечет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left(\sum_{j \neq \tau} \log(1 + |\xi_j|) \right)^4 \leq \log(1 + |\xi_\tau|) \right] = 1. \quad (2.16)$$

Так как $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) = \infty$, из Леммы 26 (b) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j \neq \tau} \log(1 + |\xi_j|) = \infty \quad \text{п.н.},$$

что вместе с (2.16) приводит к

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[n^3 \cdot \sum_{j \neq \tau} \log(1 + |\xi_j|) \leq \log(1 + |\xi_\tau|) \right] = 1$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\log(1 + |\xi_\tau|) \geq n^4] = 1.$$

Так как для любого $\delta > 0$ существует $T > 0$, такое что $\mathbb{P}[T^{-1} < |\xi_n| < T] > 1 - \delta$, последние два неравенства приводят к

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] = 1.$$

По Лемме 27, если произошло событие $A_n \cap B_n$, то полином $G_n/|\xi_n|$ удовлетворяет условиям Леммы 25. Таким образом, мы доказали утверждение теоремы для нулей G_n , лежащих вне единичной окружности. Оставшиеся нули рассматриваются путем введения вспомогательного полинома

$$G_n^*(z) := z^n G(1/z) = \sum_j \xi_j z^{n-j},$$

у которого z_0 является нулем тогда и только тогда, когда z_0^{-1} является нулем полинома G_n .

2.4. Коэффициенты с логарифмическими хвостами

Результаты данного параграфа были получены совместно с З. Каблучко.

2.4.1. Формулировка основных результатов

Обозначения

Приведем список обозначений, которые будут использоваться только на протяжении текущего параграфа.

Пусть дано комплексное число $z = |z|e^{i \arg z}$ и пусть $a \in \mathbb{R}$. Введем обозначение

$$z^{\langle a \rangle} := |z|^a e^{i \arg z}.$$

В данном параграфе нам будет удобно ввести специальное обозначение \mathcal{Z}_n для набора нулей (посчитанных с учетом кратности) случайного полинома G_n .

Введение

Как было показано в § 2.2, при условии конечности логарифмического момента коэффициентов, нули случайного полинома концентрируются около единичной окружности. Противоположный случай, когда $\log(1 + \log(1 + |\xi_0|))$ имеет медленно меняющийся хвост, был описан в предыдущем параграфе. В данном параграфе мы изучим класс распределений коэффициентов, который соединяет два описанных выше случая.

Мы предполагаем, что для некоторого $\alpha \geq 0$ функция

$$\bar{F}(t) := \mathbb{P}[\log |\xi_0| > t] \quad \text{правильно меняется на } +\infty \text{ с показателем } -\alpha. \quad (2.17)$$

Класс таких распределений включает в себя распределения как с конечным ($\alpha > 1$), так и бесконечным ($\alpha < 1$) логарифмическими моментами. Мы опишем то, как концентрация нулей около единичной окружности исчезает, когда α приближается к 1 сверху, а также поведение нулей, когда нет концентрации ($\alpha < 1$).

Случай $\alpha = +\infty$ формально соответствует степенным хвостам, изученным в [195], [133]. Нули концентрируются около единичной окружности, но, кроме этого, не видно никакой глобальной структуры. Мы покажем, что как только α становится конечным, распределение нулей становится высоко организованным (см. рис. 2.1). Нули “застывают” на случайном наборе окружностей с центрами в начале координат. Радиусы окружностей и распределение нулей по окружностям случайны, однако распределение нулей на каждой окружности равномерно по аргументу. Пока α остается больше 1, логарифмический момент конечен и окружности приближаются к единичной окружности со скоростью $n^{1/\alpha-1}$ (не считая медленно меняющегося коэффициента), что согласовывается с результатом из § 2.2. Заметим также, что когда α близко к $+\infty$, эта ско-

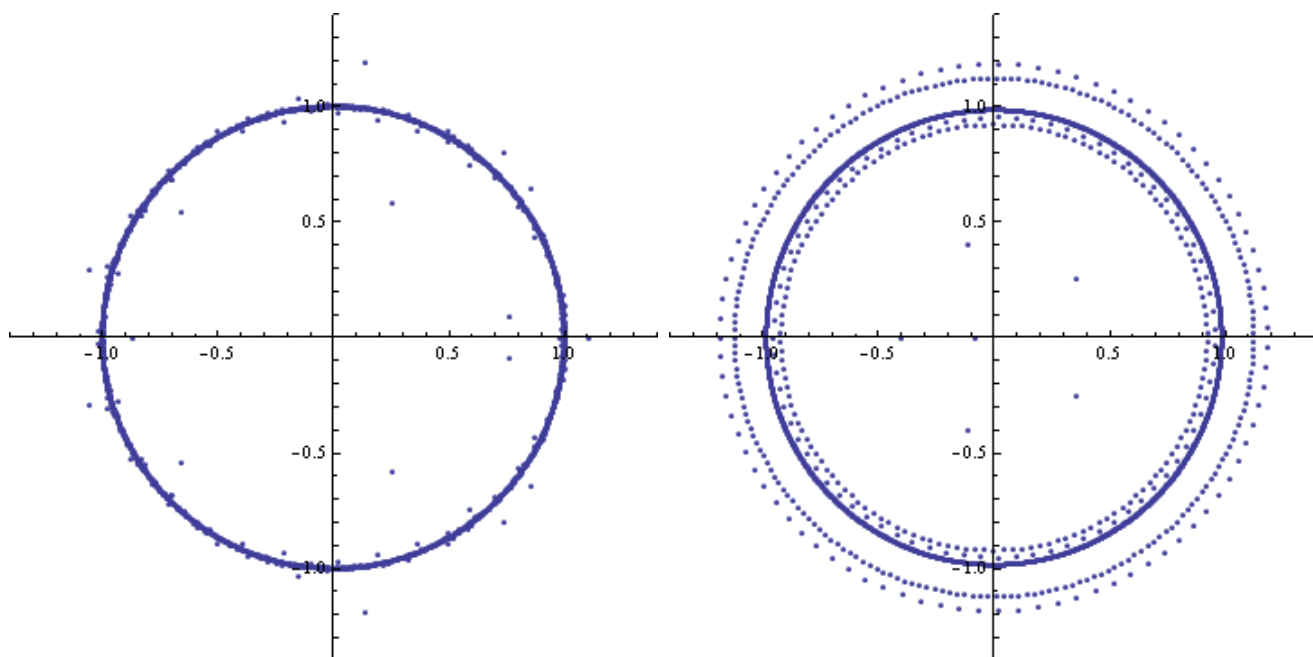


Рис. 2.1. Нули случайного полинома степени $n = 2000$, чьи (вещественные) коэффициенты а) стандартные нормальные, б) такие что $\mathbb{P}[\log \xi_0 > t] = 1/t^2$ при $t \geq 1$.

рость близка к скорости $1/n$, наблюдаемой в (2.3). Когда α становится 1, мы наблюдаем переход от конечного логарифмического момента к бесконечному. Мы покажем, что если $\bar{F}(t) \sim c/t$ при $t \rightarrow +\infty$, то эмпирическая мера нулей G_n слабо сходится (без нормализации) к случайной вероятностной мере, сконцентрированной на бесконечном числе окружностей со случайными радиусами. Впервые нули перестают концентрироваться около единичной окружности. Когда α становится меньше 1, окружности разделяются на две группы, приближающиеся к 0 и к ∞ со скоростями $\pm n^{1/\alpha-1}$ на логарифмической шкале. Число окружностей, которое было бесконечным при $\alpha \geq 1$, становится конечным при $\alpha < 1$ и убывает до 2 при $\alpha \rightarrow 0$. При $\alpha = 0$ нули расположены только на двух окружностях, расположенных очень близко к 0 и к ∞ , в соответствии с результатами предыдущего параграфа, которые мы усилим в данном. При $\alpha = 0$ эмпирическая мера нулей становится почти неслучайной: единственный параметр, который остается случайным при $n \rightarrow \infty$ – это пропорция числа нулей, близких к 0 (или к ∞), которая равномерна на $[0, 1]$.

Если случайные величины ξ_i вещественнозначны, мы также изучим вещественные нули G_n . Для некоторого конкретного семейства распределений, удовлетворяющих (2.17) с $\alpha > 1$, Шепп и Фарахманд (см. [194]) показали, что среднее число нулей G_n асимптотически эквивалентно $c(\alpha) \log n$, где $c(\alpha) := \frac{2\alpha-2}{2\alpha-1}$. Когда α убывает от $+\infty$ до 1, функция $c(\alpha)$ убывает от 1 до 0. Мы дополним этот результат, показав, что при $\alpha \in (0, 1)$ число вещественных нулей у подпоследовательности G_{n_k} имеет предел по распределению при $n_k \rightarrow \infty$, где n_k – подпоследовательность либо четных, либо нечетных индексов. Это означает что при $\alpha \in (0, 1)$ полином G_n имеет, грубо говоря, $O(1)$ вещественных нулей. В заключение, мы докажем, что при $\alpha = 0$ число вещественных нулей G_n асимптотически может принимать только значения $0, \dots, 4$, и вычислим вероятности этих значений.

Комплексные нули

Следующая теорема дает описание структуры комплексных нулей G_n . Как обычно, δ_z обозначает единичную массу в z . Нам понадобятся нормализующие последовательности a_n, b_n , такие что

$$\bar{F}(a_n) \sim \frac{1}{n} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad b_n = \frac{n}{a_n}. \quad (2.18)$$

Теорема 13. *Если условие (2.17) выполнено при некотором $\alpha > 0$, то при $n \rightarrow \infty$ последовательность случайных вероятностных мер на $\bar{\mathbb{C}}$*

$$\frac{1}{n} \sum_{z \in Z_n} \delta_{z^{(b_n)}}$$

сходится по распределению к случайной вероятностной мере Π_α , с вероятностью единица являющейся выпуклой комбинацией не более чем счетного числа равномерных мер, сконцентрированных на окружностях с центрами в начале координат.

При $\alpha \geq 1$ выполняется условие $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$, что, в соответствии с

Теоремой 9, означает концентрацию нулей около единичной окружности. В следующем следствии дана скорость сходимости нулей к единичной окружности.

Следствие 13. *Если $\alpha \geq 1$, то при $n \rightarrow \infty$ последовательность случайных вероятностных мер на \mathbb{R}*

$$\frac{1}{n} \sum_{z \in \mathcal{Z}_n} \delta_{b_n(|z|-1)}$$

сходится по распределению к случайной п.н. атомической вероятностной мере на \mathbb{R} .

В случае, когда $\bar{F}(t) \sim c/t$ при $t \rightarrow +\infty$, где $c > 0$, условие $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$ не выполняется, концентрация нулей около единичной окружности отсутствует. В этом случае из Теоремы 13 вытекает следующий результат.

Следствие 14. *Пусть $\bar{F}(t) \sim c/t$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда последовательность случайных вероятностных мер $\frac{1}{n} \sum_{z \in \mathcal{Z}_n} \delta_z$ сходится по распределению к некоторой нетривиальной случайной вероятностной мере на \mathbb{C} .*

Перейдем к описанию случайной вероятностной меры Π_α . Пусть

$$\rho := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{(U_k, V_k)}$$

обозначает пуассоновский точечный процесс на $[0, 1] \times (0, \infty)$ с мерой интенсивности $\alpha v^{-(\alpha+1)} du dv$. Введем в рассмотрение *наименьшую вогнутую мажоранту* (в дальнейшем просто *мажоранта*) процесса ρ (см. рис. 2.2): функцию $\mathfrak{C}_\rho : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, определяемую как

$$\mathfrak{C}_\rho(t) := \inf_f f(t), \quad t \in [0, 1],$$

где инфимум берется по множеству всех вогнутых функций $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, таких что $f(U_k) \geq V_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Конструктивно наименьшая вогнутая мажоранта \mathfrak{C}_ρ может быть описана следующим образом. Пусть (X_0, Y_0) обозначает единственный с вероятностью единица атом ρ , имеющий максимальную

вторую координату Y_0 среди всех атомов ρ . Рассмотрим горизонтальную прямую, проходящую через (X_0, Y_0) . Начнем вращать эту прямую вокруг (X_0, Y_0) *по часовой стрелке*, пока она не коснется какого-то атома (X_1, Y_1) , отличного от (X_0, Y_0) . Теперь продолжим вращать эту прямую по часовой стрелке вокруг атома (X_1, Y_1) , пока она не коснется какого-то атома (X_2, Y_2) , отличного от (X_1, Y_1) . Продолжим вращать прямую вокруг (X_2, Y_2) и т.д. Процедура заканчивается, если через некоторое время прямая коснется точки $(1, 0)$. (Как мы увидим позже, это случается с вероятностью единица тогда и только тогда, когда $\alpha \in (0, 1)$). В противном случае, процедура повторяется бесконечно долго. Аналогично, мы можем начать с горизонтальной прямой, проходящей через (X_0, Y_0) , и вращать ее *против часовой стрелки*, получая последовательность точек $(X_{-1}, Y_{-1}), (X_{-2}, Y_{-2}), \dots$. Теперь соединим отрезками последовательные точки (X_k, Y_k) и (X_{k+1}, Y_{k+1}) . Кусочно-линейный путь, построенный таким образом, является графиком мажоранты \mathfrak{C}_ρ . Точки (X_k, Y_k) называются *вершинами* мажоранты, интервалы $[X_k, X_{k+1}]$ называются *линейными интервалами* мажоранты. Таким образом, наименьшая вогнутая мажоранта \mathfrak{C}_ρ является кусочно-линейной функцией с не более чем счетным числом линейных интервалов. Запишем \mathfrak{C}_ρ в следующем виде:

$$\mathfrak{C}_\rho(t) = S_k - R_k t, \quad t \in [X_k, X_{k+1}]. \quad (2.19)$$

Предельная случайная вероятностная мера Π_α из Теоремы 13 может быть описана следующим образом. Для $r > 0$ пусть Λ_r означает равномерную вероятностную меру на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Тогда

$$\Pi_\alpha = \sum_k (X_{k+1} - X_k) \Lambda_{\exp(R_k)},$$

где (конечная или бесконечная) сумма берется по всем линейным интервалам $[X_k, X_{k+1}]$ мажоранты \mathfrak{C}_ρ . Таким образом, Теорема 13 утверждает, что нули G_n асимптотически концентрируются на случайных окружностях, соответствующих линейным интервалам мажоранты. Радиусы этих случайных окружностей

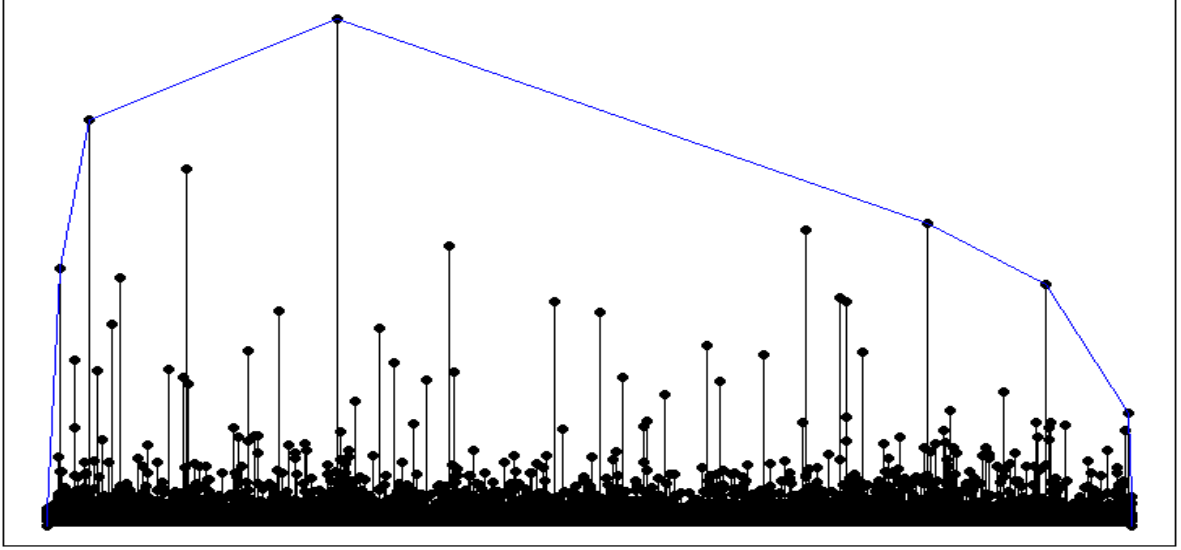


Рис. 2.2. Наименьшая вогнутая мажоранта пуассоновского точечного процесса ρ на $[0, 1] \times (0, \infty)$ с интенсивностью $\alpha v^{-(\alpha+1)} du dv$, где $\alpha = 2$.

равны $\exp(R_k)$. Предельная масса нулей на любой отдельно взятой окружности пропорциональна длине соответствующего интервала линейности.

Следующий результат описывает поведение комплексных нулей G_n в случае $\alpha = 0$. Предположим, что функция

$$\bar{F}(t) := \mathbb{P}[\log |\xi_0| > t] \quad \text{медленно меняется на } +\infty. \quad (2.20)$$

Мы покажем, что в этом случае с вероятностью, близкой к единице, комплексные нули G_n расположены на двух концентрических окружностях, радиус одной из которых близок к 0 а другой – к $+\infty$. Пусть τ_n обозначает индекс максимального по модулю коэффициента G_n . Обозначим $w_{1n}, \dots, w_{\tau_n n}$ корни уравнения $\xi_{\tau_n} z^{\tau_n} + \xi_0 = 0$ и $w_{(\tau_n+1)n}, \dots, w_{nn}$ – корни уравнения $\xi_n z^{n-\tau_n} + \xi_{\tau_n} = 0$.

Теорема 14. *Предположим, что выполнено (2.20) и $\xi_0 \neq 0$ п.н. Зафиксируем произвольное $A > 0$. Тогда вероятность того, что следующие три утверждения выполняются одновременно, стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$:*

1. τ_n однозначно определено;
2. можно перенумеровать нули z_{1n}, \dots, z_{nn} полинома G_n так, чтобы выполнялось

$$|z_{kn} - w_{kn}| < e^{-n^A} |w_{kn}|, \quad 1 \leq k \leq n;$$

3. выполнено $|w_{kn}| < e^{-n^A}$ при $1 \leq k \leq \tau_n$ и $|w_{kn}| > e^{n^A}$ при $\tau_n < k \leq n$.

Следствие 15. Если выполнено условие (2.20), то эмпирическая мера $\frac{1}{n} \sum_{z \in Z_n} \delta_z$ как случайная вероятностная мера на $\bar{\mathbb{C}}$ слабо сходится к $U\delta(0) + (1 - U)\delta(\infty)$, где U равномерно распределена на $[0, 1]$.

Свойства мажоранты

В этом разделе мы изучим некоторые свойства мажоранты \mathfrak{E}_ρ . Отметим, что случайные выпуклые оболочки, аналогичные \mathfrak{E}_ρ , встречаются в литературе (см. [167]). Следующее предложение нам неоднократно понадобится в дальнейшем.

Предложение 2. Пусть L_α обозначает число линейных интервалов \mathfrak{E}_ρ . Если $\alpha \in (0, 1)$, то $L_\alpha < \infty$ п.н. Если $\alpha \geq 1$, то $L_\alpha = \infty$ п.н. Более того, в этом случае любая окрестность 0 (также как и любая окрестность 1) с вероятностью единица содержит бесконечно много линейных интервалов мажоранты \mathfrak{E}_ρ . Более того, $\lim_{k \rightarrow -\infty} R_k = -\infty$ и $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k = +\infty$ п.н.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество D_ε всех пар $(x, y) \in [0, 1] \times (0, \infty)$, таких что $y > \varepsilon x$. Интегрируя интенсивность процесса ρ по D_ε , получаем, что $\rho(D_\varepsilon) = \infty$ п.н. тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 1$. Если $\alpha \in (0, 1)$, над прямой $y > \varepsilon x$ находится только конечное число точек, поэтому мажоранта \mathfrak{E}_ρ имеет корректно определенный первый линейный интервал, выходящий из $(0, 0)$. С другой стороны, если $\alpha \geq 1$, такого первого

линейного интервала не существует, следовательно, существует бесконечно много линейных интервалов в любой окрестности 0. Из соображений симметрии, то же верно для точки 1. ■

Нахождение распределения L_α в случае $\alpha \in (0, 1)$ является открытой (и, по-видимому, сложной) задачей. В следующей теореме вычисляется математическое ожидание L_α в терминах модулярной константы $C(\beta)$, введенной Барнсом в [54]. Обозначим $\psi(z) := \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ логарифмическую производную гамма-функции. В [54] показано, что для любого $\beta > 0$ существует предел

$$C(\beta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{m=1}^n \psi(m\beta) - \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta} \right) \log(n\beta) + n \right\}. \quad (2.21)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 15. При $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \neq 1/2$, выполнено

$$\mathbb{E} L_\alpha = 2 + \frac{2 - 2\alpha}{2\alpha - 1} \left(1 - 2C(1 - \alpha) + \frac{\log(1 - \alpha) - \alpha\gamma}{1 - \alpha} \right). \quad (2.22)$$

При $\alpha = 1/2$ соотношение интерпретируется в смысле непрерывного предельного перехода.

Мы получим представление $\mathbb{E} L_\alpha$ в виде определенного интеграла, см. (2.84) ниже. Используя это представление, возможно вычислить значение $\mathbb{E} L_\alpha$ для любого рационального α . Приведем несколько примеров:

α	0	1/4	1/3	1/2	2/3	3/4	1
$\mathbb{E} L_\alpha$	2	$\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \right) \pi$	$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$	$\frac{3}{2} + \frac{\pi^2}{8}$	$2 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$	$2 + \frac{\pi}{2}$	$+\infty$

Значения при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ понимаются как односторонние пределы. В качестве следствия имеем $L_\alpha \rightarrow 2$ по распределению при $\alpha \downarrow 0$. Этот результат также вытекает из следующей теоремы.

Теорема 16. При $\alpha \in (0, 1)$ выполнено $\mathbb{P}[L_\alpha = 2] = 1 - \alpha$.

Вещественные нули

Предположим теперь, что коэффициенты полинома $G_n(z) = \sum_{k=0}^n \xi_k z^k$ являются независимыми одинаково распределенными *вещественнозначными* случайными величинами. Пусть \mathcal{R}_n обозначает набор вещественных нулей G_n и $N_n := \#\mathcal{R}_n$ обозначает число вещественных нулей. Для некоторого конкретного семейства распределений, удовлетворяющих (2.17) с $\alpha > 1$, Шепп и Фарахманд (см. [194]) показали, что среднее число нулей G_n асимптотически эквивалентно $c(\alpha) \log n$, где $c(\alpha) := \frac{2\alpha-2}{2\alpha-1}$. В следующей теореме будет описано асимптотическое поведение нулей G_n при $n \rightarrow \infty$ для всех $\alpha > 0$.

Напомним обозначение $z^{(a)} := |z|^a \operatorname{sgn}(z)$, где $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. Рассмотрим точечный процесс Υ_n на \mathbb{R} , определенный как

$$\Upsilon_n := \sum_{z \in \mathcal{R}_n} \delta_{z^{(bn)}}.$$

Кроме свойства (2.17), мы также предполагаем, что существует следующий предел:

$$c := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}[\xi_0 > t]}{\mathbb{P}[|\xi_0| > t]} \in [0, 1]. \quad (2.23)$$

Теорема 17. *Предположим, что для некоторого $\alpha > 0$ выполнены (2.17) и (2.23). Обозначим $p := \mathbb{P}[\xi_0 > 0]$ и предположим, что $\xi_0 \neq 0$ п.н.*

1. *При $\alpha \geq 1$ точечный процесс Υ_n слабо сходится к некоторому точечному процессу $\Upsilon_{\alpha,c}$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
2. *При $\alpha \in (0, 1)$ точечный процесс Υ_{2n} (соответственно, Υ_{2n+1}) слабо сходится к некоторому точечному процессу $\Upsilon_{\alpha,c,p}^+$ (соответственно, $\Upsilon_{\alpha,c,p}^-$) на $[-\infty, +\infty]$ и на \mathbb{R} .*

Несколько техническое описание процессов $\Upsilon_{\alpha,c}$, $\Upsilon_{\alpha,c,p}^\pm$ мы отложим до раздела 2.4.6. Напомним, что из Теоремы 13 следует, что комплексные нули G_n асимптотически концентрируются на множестве окружностей. Каждая окружность пересекает вещественную ось в 2 точках. Мы покажем, что только лишь

эти точки (с некоторой погрешностью) могут быть вещественными нулями G_n с некоторыми вероятностями. При $\alpha \in (0, 1)$ точечный процесс $\Upsilon_{\alpha,c,p}^\pm$ п.н. имеет конечное число атомов, тогда как при $\alpha \geq 1$ атомы точечного процесса $\Upsilon_{\alpha,c}$ п.н. аккумулируются в ± 0 и $\pm \infty$ (что согласуется с Предложением 2). Так как отображение, присваивающее конечной считающей мере на $[-\infty, \infty]$ ее общую массу, непрерывно (локально постоянно) в слабой топологии, мы приходим к следующему утверждению о числе вещественных нулей G_n .

Следствие 16. *Предположим, что $\alpha \in (0, 1)$ и выполнены условия (2.17) и (2.23). Пусть $\xi_0 \neq 0$ п.н. Тогда последовательность $\{N_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (соответственно, $\{N_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$) сходится по распределению к некоторой случайной величине $N_{\alpha,c,p}^+$ (соответственно, $N_{\alpha,c,p}^-$).*

Замечание 6. Ожидания $\mathbb{E} N_{\alpha,c,p}^+$ и $\mathbb{E} N_{\alpha,c,p}^-$ могут быть вычислены в терминах характеристик процессов $\Upsilon_{\alpha,c,p}^\pm$, описанных в разделе 2.4.6:

$$\mathbb{E} N_{\alpha,c,p}^+ = \mathbb{E} N_{\alpha,c,p}^- = \left(2c(1-c) + \frac{1}{2} \right) (\mathbb{E} L_\alpha - 2) + 2(p+c-2pc) + 1.$$

Например, если распределение ξ_0 симметрично, то оба математических ожидания равны $\mathbb{E} L_\alpha$. В качестве гипотезы мы предполагаем, что в Следствии 16 имеет место L^1 -сходимость.

Замечание 7. Поведение N_n в случае $\alpha = 1$ является открытым вопросом. При $\alpha = 1$ результат из [194] формально превращается в $\mathbb{E} N_n = o(\log n)$. В то же время, $\Upsilon_{1,c}$ п.н. имеет бесконечно много атомов, поэтому $\mathbb{E} N_n$ должно быть неограниченным. Естественно предположить, что при $\alpha = 1$ выполнено $\mathbb{E} N_n \sim K \log \log n$ для некоторого $K > 0$.

В заключение, мы исследуем число вещественных нулей G_n в случае $\alpha = 0$.

Теорема 18. *Предположим, что выполнены условия (2.20) и (2.23), и пусть $\xi_0 \neq 0$ п.н. Положим $p := \mathbb{P}[\xi_0 > 0]$. Тогда последовательность $\{N_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ слабо сходится к случайной величине $N_{0,c,p}^+$, и последовательность $\{N_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$*

слабо сходится к случайной величине $N_{0,c,p}^-$, которые определены следующим образом:

$$\mathbb{P}[N_{0,c,p}^+ = m] = \begin{cases} \frac{1}{2}(cp^2 + (1-c)(1-p)^2), & m = 0, \\ \frac{1}{2} + p(1-p), & m = 2, \\ \frac{1}{2}(c(1-p)^2 + (1-c)p^2), & m = 4; \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\mathbb{P}[N_{0,c,p}^- = m] = \begin{cases} 1 - p - c + 2pc, & m = 1, \\ p + c - 2pc, & m = 3. \end{cases} \quad (2.25)$$

Замечание 8. Если распределение ξ_0 симметрично, $N_{0,1/2,1/2}^+$ принимает значения 0, 2, 4 с вероятностями $1/8, 3/4, 1/8$ и $N_{0,1/2,1/2}^-$ принимает значения 1, 3 с вероятностями $1/2, 1/2$.

Замечание 9. Для фиксированного $p \in [0, 1]$ выполнено

$$\min_{c \in [0,1]} \mathbb{E} N_{0,c,p}^+ = \min_{c \in [0,1]} \mathbb{E} N_{0,c,p}^- = 1 + 2 \min(p, 1 - p).$$

В § 1.2 было показано (см. Теорему 1), что данная величина является минимальным средним числом вещественных нулей случайного полинома.

Возникновение мажоранты

Рассмотрим сумму $c_1 e^{nx_1} + \dots + c_d e^{nx_d}$, где $x_i > 0$ и $c_i \in \mathbb{C}$. Если n большое и сумма обнуляется, то естественно предположить, что это случилось в результате того, что два члена, скажем $c_k e^{nx_k}$ и $c_l e^{nx_l}$, компенсировали друг друга, а остальные члены сильно меньше этих двоих. Мы покажем, что если выполнено условие (2.17), то с большой вероятностью похожая ситуация наблюдается и с полиномом $G_n(z) = \sum_{j=0}^n \xi_j z^j$: число $z \in \mathbb{C}$ является нулем G_n , если ровно два члена, скажем $\xi_k z^k$ и $\xi_l z^l$, компенсируют друг друга, а остальные члены являются величинами меньшего порядка. Геометрически это означает, что точки $(k, \log |\xi_k|)$ и $(l, \log |\xi_l|)$ являются соседними вершинами наименьшей выпуклой мажоранты множества $\{(j, \log |\xi_j|) : j = 0, \dots, n\}$. Ненулевые корни уравнения

$\xi_k z^k + \xi_l z^l = 0$ образуют правильный многоугольник, вписанный в окружность, радиус которой равен минус экспоненте наклона прямой, соединяющей точки $(k, \log |\xi_k|)$ и $(l, \log |\xi_l|)$. Рассматривая объединение таких окружностей по всем сегментам мажоранты, мы, в сущности, получаем все нули G_n . Чтобы найти предельную форму мажоранты при $n \rightarrow \infty$, мы воспользуемся следующим предложением, хорошо известным в теории экстремальных величин (см. [183, Следствие 4.19(ii)]).

Предложение 3. *Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_0, ξ_1, \dots , удовлетворяющих условию (2.17). Тогда в пространстве локально конечных считающих мер на $[0, 1] \times (0, \infty]$ последовательность мер*

$$\rho_n := \sum_{k=0}^n \delta_{\left(\frac{k}{n}, \frac{\log |\xi_k|}{a_n}\right)}$$

сходится в среднем к

$$\rho := \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(U_i, V_i)}.$$

Здесь ρ является пуассоновским точечным процессом на $[0, 1] \times (0, \infty)$ с интенсивностью $\alpha v^{-(\alpha+1)} du dv$. Мы неявно полагаем, что точки, для которых выполняется $\log |\xi_k| \leq 0$, не учитываются в ρ_n .

Статья Шепша и Фарахманда (см. [194]) является единственной работой, где рассматриваются случайные полиномы с коэффициентами, удовлетворяющими (2.17). Метод, использованный ими (метод характеристических функций) совершенно отличен от нашего подхода, основанного на мажорантах. Нам неизвестно, могут ли результаты из [194] быть получены (или усилены) с помощью нашего метода. Также стоит упомянуть, что наименьшая вогнутая мажоранта возникает в теории целых функций (см. [216, стр. 28]). Например, Харди (см. [127]) показал, что нули неслучайной целой функции $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^3} / (k^3)!$ имеют круговую структуру, которая аналогична структуре нулей полинома G_n при условии (2.17). Собственные значения случайных матриц с независимыми

одинаково распределенными элементами с тяжелыми хвостами были изучены в [75].

2.4.2. Основная лемма

Следующая лемма играет ключевую роль в нашем доказательстве. Рассмотрим (неслучайный) полином $g(z) := \sum_{j=0}^n a_j z^j$ с комплексными коэффициентами. Предположим, что точки $(k, \log |a_k|)$ и $(l, \log |a_l|)$, где $0 \leq k < l \leq n$, являются соседними вершинами в наименьшей вогнутой мажоранте множества $\{(j, \log |a_j|) : j = 0, \dots, n\}$. Это означает, что для некоторых $s, r \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\log |a_k| = s - kr, \quad \log |a_l| = s - lr, \quad h := \min_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k, l}} (s - jr - \log |a_j|) > 0. \quad (2.26)$$

Мы полагаем, что никакие три точки мажоранты не лежат на одной прямой. Отметим, что h измеряет промежуток между прямой, проходящей через точки $(k, \log |a_k|)$, $(l, \log |a_l|)$, и точками, лежащими ниже этой прямой.

Лемма 28. *Если $\delta > 0$ такое, что $ne^{\delta n - h} < 1 - e^{-\delta}$, то в кольце*

$$\{z \in \mathbb{C} : e^{r-\delta} < |z| < e^{r+\delta}\}$$

находится ровно $l - k$ нулей g . Далее, если ζ такое, что $2ne^{2\delta n - h} < \zeta < \frac{\pi}{l-k}$, то множество

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : e^{r-\delta} < |z| < e^{r+\delta}, \quad \left| \arg z - \frac{\varphi + 2\pi m}{l-k} \right| \leq \zeta \right\}, \quad (2.27)$$

где $\varphi = \arg(-a_k/a_l)$, содержит ровно один нуль g для каждого $m = 1, \dots, l-k$.

Расстояние между аргументами комплексных чисел мы понимаем в смысле геодезического расстояния на единичной окружности. Также мы полагаем, что для индекса j всегда выполнено $0 \leq j \leq n$.

Доказательство.

Мы докажем усиленный вариант леммы: покажем, что утверждение верно для семейства полиномов

$$g_t(z) := a_k z^k + a_l z^l + t \sum_{j \neq k, l} a_j z^j, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Заметим, что $g_0(z) = a_k z^k + a_l z^l$ и $g_1(z) = g(z)$. Рассмотрим $z \in \mathbb{C}$, такое что $|z| = e^{r-\delta}$. Из (2.26) следует, что

$$t \left| \sum_{j \neq k, l} a_j z^j \right| \leq \sum_{j \neq k, l} e^{s-jr-h} e^{j(r-\delta)} < n e^{s-h}.$$

С другой стороны, из (2.26) также вытекает

$$|a_k z^k + a_l z^l| \geq |a_k z^k| - |a_l z^l| = e^s e^{-\delta k} (1 - e^{-\delta(l-k)}) > e^{s-\delta n} (1 - e^{-\delta}).$$

Так как $n e^{\delta n - h} < 1 - e^{-\delta}$, всюду на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = e^{r-\delta}\}$ выполнено

$$|a_k z^k + a_l z^l| > t \left| \sum_{j \neq k, l} a_j z^j \right|. \quad (2.28)$$

Поэтому из теоремы Руше следует, что полином g_t имеет ровно k нулей в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq e^{r-\delta}\}$.

Теперь рассмотрим $z \in \mathbb{C}$, такое что $|z| = e^{r+\delta}$. Имеем

$$\left| \sum_{j \neq k, l} a_j z^j \right| \leq \sum_{j \neq k, l} e^{s-jr-h} e^{j(r+\delta)} < n e^{s-h+\delta n}. \quad (2.29)$$

С другой стороны,

$$|a_k z^k + a_l z^l| \geq |a_l z^l| - |a_k z^k| = e^s e^{\delta l} (1 - e^{\delta(k-l)}) > e^s (1 - e^{-\delta}).$$

Поэтому неравенство (2.28) также верно всюду на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = e^{r+\delta}\}$. Опять применяя теорему Руше, получаем, что полином g_t имеет ровно l нулей в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq e^{r+\delta}\}$. Следовательно, полином g_t имеет ровно $l - k$ нулей в кольце $\{z \in \mathbb{C} : e^{r-\delta} \leq |z| \leq e^{r+\delta}\}$.

Покажем теперь, что эти $l - k$ нулей расположены примерно в той же позиции, что и ненулевые корни уравнения $a_l z^l + a_k z^k = 0$. Пусть z_0 является

нулем g_t , удовлетворяющим $e^{r-\delta} \leq |z_0| \leq e^{r+\delta}$. Рассуждая как в (2.29), мы получаем

$$\left| a_l z_0^l + a_k z_0^k \right| = \left| \sum_{j \neq k, l} a_j z_0^j \right| < n e^{s-h+\delta n}. \quad (2.30)$$

Напомним, что $\varphi = \arg(-a_k/a_l)$. Аргументы ненулевых корней уравнения $a_l z^l + a_k z^k = 0$ равны $\frac{\varphi+2\pi m}{l-k}$, где $m = 1, \dots, l-k$, а их модули равны e^r . Положим

$$\varsigma := \min_{m=1, \dots, l-k} \left| \arg z_0 - \frac{\varphi + 2\pi m}{l-k} \right|.$$

Заметим, что $\varsigma \in [0, \frac{\pi}{l-k}]$ по определению. Тогда

$$\left| \arg(a_l z_0^l) - \arg(-a_k z_0^k) \right| = \left| \arg z_0^{l-k} - \varphi \right| = (l-k)\varsigma.$$

Из неравенства $|z_1 - z_2| \geq 2|z_1| \sin(|\arg z_1 - \arg z_2|/2)$, выполненного при $|z_1| \leq |z_2|$, и из неравенства $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, выполненного при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, мы получаем

$$\left| a_l z_0^l + a_k z_0^k \right| \geq 2e^{s-\delta l} \sin\left(\frac{(l-k)\varsigma}{2}\right) \geq \frac{1}{2}e^{s-\delta n}\varsigma. \quad (2.31)$$

Из (2.30) и (2.31) вытекает $\varsigma < 2ne^{2\delta n-h}$ и, следовательно, $\varsigma < \zeta$. Поэтому нуль z_0 полинома g_t , такой что $e^{r-\delta} \leq |z_0| \leq e^{r+\delta}$, содержится в множестве вида (2.27) для некоторого $m = 1, \dots, l-k$. Для завершения доказательства остается показать, что каждое множество (2.27) содержит ровно один нуль g_t . Так как $\zeta < \frac{\pi}{l-k}$, все множества попарно не пересекаются. Полином g_t не обращается в ноль на их границах. Поэтому из принципа аргумента следует, что число нулей g_t в любом множестве (2.27) является непрерывной функцией от $t \in [0, 1]$ и, следовательно, константой. Каждое множество (2.27) содержит ровно один нуль g_0 и, следовательно, ровно один нуль g_t . \blacksquare

2.4.3. Наименьшая вогнутая мажоранта и слабая сходимость

Предложение 3 устанавливает сходимость точечных процессов ρ_n , сформированных логарифмами коэффициентов случайных полиномов G_n , к предельному пуассоновскому точечному процессу ρ . Из этого факта мы выведем слабую

сходимость определенных функционалов от ρ_n к этим же функционалам от ρ . Для этого мы воспользуемся следующей хорошо известной теоремой о непрерывном отображении (см. [182, стр. 152] или [69, стр. 30]).

Предложение 4. *Рассмотрим отображение $F : M_1 \rightarrow M_2$ между двумя метрическими пространствами (M_1, d_1) и (M_2, d_2) . Пусть X_n является последовательностью M_1 -значных случайных величин, слабо сходящейся к некоторой M_1 -значной случайной величине X . Если*

$$\mathbb{P}[F \text{ разрывно в } X] = 0,$$

то $F(X_n)$ слабо сходится к $F(X)$ на (M_2, d_2) .

Для того, чтобы применить Предложение 4, нам потребуется доказать п.н.-сходимость рассматриваемых функционалов. Это является целью данного раздела.

Введем некоторые обозначения. Пусть \mathfrak{M} обозначает множество всех локально конечных считающих мер μ на $[0, 1] \times (0, \infty]$, таких что $\mu([0, 1] \times \{\infty\}) = 0$. Оснастим \mathfrak{M} топологией грубой сходимости. Каждая мера $\mu \in \mathfrak{M}$ может быть представлена в форме $\mu = \sum_i \delta_{(u_i, v_i)}$, где i пробегает некоторое не более чем счетное множество индексов и $u_i \in [0, 1]$, $v_i \in (0, \infty)$. Число атомов μ в множестве $[0, 1] \times [\varepsilon, \infty)$ конечно для любого $\varepsilon > 0$, но атомы μ могут иметь предельные точки в множестве $[0, 1] \times \{0\}$.

Наименьшая вогнутая мажоранта меры $\mu \in \mathfrak{M}$ – это функция $\mathfrak{C}_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, определенная как $\mathfrak{C}_\mu(t) := \inf_f f(t)$, где инфимум берется по всем вогнутым функциям $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, таким что $f(u_i) \geq v_i$ для всех i . Запишем кусочно линейную функцию \mathfrak{C}_μ в виде

$$\mathfrak{C}_\mu(t) = s_k - r_k t, \quad t \in [x_k, x_{k+1}], \quad (2.32)$$

где k пробегает конечный или бесконечный подынтервал \mathbb{Z} . Положим $y_k := \mathfrak{C}_\mu(x_k)$. Интервалы $[x_k, x_{k+1}]$ (называемые линейными интервалами мажоранты) выбираются таким образом, чтобы точки (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}) являлись

атомами μ и чтобы на отрезке, соединяющем эти две точки, не было других атомов. Зафиксируем некоторое маленькое $\kappa \in (0, 1/2)$. Для считающей меры $\mu \in \mathfrak{M}$ определим индексы $q' = q'_\kappa(\mu)$ и $q'' = q''_\kappa(\mu)$ с помощью условий $x_{q'} \leq \kappa < x_{q'+1}$ и $x_{q''-1} < 1 - \kappa \leq x_{q''}$.

Обозначим \mathfrak{M}_1 множество всех считающих мер $\mu \in \mathfrak{M}$ со следующими свойствами:

1. 0 и 1 являются предельными точками для линейных интервалов \mathfrak{C}_μ ;
2. $\mu(L) \leq 2$ для любой прямой $L \subset \mathbb{R}^2$;
3. ни один из атомов μ не имеет первую координату, равную κ или $1 - \kappa$.

Заметим, что любая мера $\mu \in \mathfrak{M}_1$ имеет только простые атомы. Обозначим \mathfrak{N} пространство всех конечных мер на \mathbb{R} , оснащенное топологией грубой сходимости. Пусть $V_k(\mu)$ является подмножеством $[0, 1] \times [0, \infty)$, состоящим из $[0, 1] \times \{0\}$ вместе со всеми атомами μ , за исключением (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}) .

Лемма 29. *Следующие отображения непрерывны на \mathfrak{M}_1 :*

1. $\Psi_1 : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, определяемое как $\Psi_1(\mu) := \sum_{k=q'}^{q''-1} (x_{k+1} - x_k) \delta_{r_k}$;
2. $H_1 : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемое как $H_1(\mu) := \min\{s_k - r_k u - v\}$, минимум берется по всем $q' \leq k < q''$ и $(u, v) \in V_k(\mu)$;
3. $L_1 : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемое как $L_1(\mu) := \min_{q' \leq k < q''} (x_{k+1} - x_k)$.

Доказательство. Пусть последовательность мер $\{\mu_n\}$ из \mathfrak{M} сходится к $\mu \in \mathfrak{M}_1$ в грубой топологии на $[0, 1] \times (0, \infty]$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$, такое что $2\varepsilon < \min_{q' \leq k < q''} \{s_k, s_k - r_k\}$. Из определения \mathfrak{M}_1 следует, что минимум строго положителен. Обозначим (u_l, v_l) , где $1 \leq l \leq t$, все атомы μ (исключая вершины \mathfrak{C}_μ), такие что $v_l > \varepsilon$. Так как $\mu_n \rightarrow \mu$, мы можем найти (см. [182, Предложение 3.13]) атомы μ_n , которые обозначим (x_{kn}, y_{kn}) (где $q' \leq k \leq q''$) и (u_{ln}, v_{ln})

(где $1 \leq l \leq m$), такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{kn}, y_{kn}) = (x_k, y_k), \quad q' \leq k \leq q'', \quad (2.33)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{ln}, v_{ln}) = (u_l, v_l), \quad 1 \leq l \leq m. \quad (2.34)$$

Далее, из грубой сходимости на $[0, 1] \times (0, \infty]$ следует, что для всех достаточно больших n у меры μ_n не существует других атомов, у которых вторая координата превышает 2ε . Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ и для всех $q' \leq k < q''$ выполнено

$$r_{kn} := -\frac{y_{(k+1)n} - y_{kn}}{x_{(k+1)n} - x_{kn}} \rightarrow r_k, \quad s_{kn} := y_{kn} + r_{kn}x_{kn} \rightarrow s_k. \quad (2.35)$$

В частности, для всех достаточно больших n , всех $q' \leq k < q''$ и всех $1 \leq l \leq m$ выполнено

$$s_{kn} - r_{kn}u_{ln} > v_{ln}, \quad \inf_{u \in [0,1]} (s_{kn} - r_{kn}u) > 2\varepsilon.$$

Следовательно, для всех достаточно больших n отрезок, соединяющий точки (x_{kn}, y_{kn}) и $(x_{(k+1)n}, y_{(k+1)n})$, принадлежит мажоранте μ_n для всех $q' \leq k < q''$. Также выполнено $x_{q'n} < \kappa < x_{(q'+1)n}$ и $x_{(q''-1)n} < 1 - \kappa < x_{q''n}$.

Используя (2.33), (2.34), (2.35) и устремляя $\varepsilon \downarrow 0$, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} H_1(\mu_n) = H_1(\mu)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} L_1(\mu_n) = L_1(\mu)$. Это доказывает непрерывность H_1 и L_1 на \mathfrak{M}_1 . Чтобы доказать непрерывность Ψ_1 , заметим, что для любой непрерывной ограниченной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} f d\Psi_1(\mu_n) = \sum_{k=q'}^{q''-1} (x_{(k+1)n} - x_{kn}) f(r_{kn}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=q'}^{q''-1} (x_{k+1} - x_k) f(r_k).$$

Таким образом, $\Psi_1(\mu_n) \rightarrow \Psi_1(\mu)$ слабо, что доказывает непрерывность Ψ_1 . \blacksquare

Следующая лемма потребуется для доказательства нашего главного результата при $\alpha \in (0, 1)$. Пусть \mathfrak{M}_0 обозначает множество всех ненулевых считающих мер $\mu \in \mathfrak{M}$ со следующими свойствами:

1. число линейных интервалов \mathfrak{E}_μ конечно, и $\mathfrak{E}_\mu(0) = \mathfrak{E}_\mu(1) = 0$;

2. $\bar{\mu}(L) \leq 2$ для любой прямой $L \subset \mathbb{R}^2$, где $\bar{\mu} := \mu + \delta(0, 0) + \delta(1, 0)$;
3. у всех атомов μ первая координата не совпадает с κ и с $1 - \kappa$.

Лемма 30. *Следующие отображения непрерывны на \mathfrak{M}_0 :*

1. $\Psi_0 : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, задаваемое как $\Psi_0(\mu) := \sum_k (x_{k+1} - x_k) \delta_{r_k}$, где сумма берется по всем линейным интервалам $[x_k, x_{k+1}]$ мажоранты \mathfrak{E}_μ ;
2. $H_0 : \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$, задаваемое как $H_0(\mu) := \min\{s_k - r_k u - v\}$, где минимум берется по $q' < k < q'' - 1$ и $(u, v) \in V_k(\mu)$;
3. $L_0 : \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$, задаваемое как $L_0(\mu) := \min_{q' < k < q'' - 1} (x_{k+1} - x_k)$.

Замечание 10. На самом деле, Ψ_0 непрерывно на всем \mathfrak{M} , но нам это не требуется. Минимум по пустому множеству равен $+\infty$.

Доказательство. Пусть последовательность мер $\{\mu_n\}$ из \mathfrak{M} сходится грубо к $\mu \in \mathfrak{M}_0$. Мажоранта \mathfrak{E}_μ является кусочно линейной функцией. Ее график есть ломаная, вершины которой мы обозначим (x_k, y_k) , где $p' \leq k \leq p''$ и $(x_{p'}, y_{p'}) = (0, 0)$, $(x_{p''}, y_{p''}) = (1, 0)$. При $p' < k < p''$ точка (x_k, y_k) является атомом μ . Обозначим (u_l, v_l) , где $1 \leq l \leq m$, все атомы μ (исключая те, которые являются вершинами мажоранты), обладающие свойством $v_l > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – такое число, что $2\varepsilon < \min_{p' < k < p'' - 1} \{s_k, s_k - r_k\}$. Минимум берется по множеству линейных интервалов мажоранты, исключая первый и последний интервалы. Если мажоранта состоит всего из двух интервалов, то минимум равен $+\infty$. Из грубой сходимости $\mu_n \rightarrow \mu$ следует (см. [182, Предложение 3.13]), что у меры μ_n есть атомы (x_{kn}, y_{kn}) (где $p' < k < p''$) и (u_{ln}, v_{ln}) (где $1 \leq l \leq m$), такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{kn}, y_{kn}) = (x_k, y_k), \quad p' < k < p'', \quad (2.36)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{ln}, v_{ln}) = (u_l, v_l), \quad 1 \leq l \leq m. \quad (2.37)$$

Более того, если n достаточно большое, у μ_n нет других атомов со второй координатой, превышающей 2ε . Следовательно, для всех $p' < k < p'' - 1$ при $n \rightarrow \infty$ выполнено

$$r_{kn} := -\frac{y_{(k+1)n} - y_{kn}}{x_{(k+1)n} - x_{kn}} \rightarrow r_k, \quad s_{kn} := y_{kn} + r_{kn}x_{kn} \rightarrow s_k. \quad (2.38)$$

Из вогнутости следует, что $s_k - r_k u_l > v_l$ при всех $p' < k < p'' - 1$ и $1 \leq l \leq m$. Таким образом, для всех достаточно больших n

$$s_{kn} - r_{kn} u_{ln} > v_{ln}, \quad \inf_{u \in [0,1]} (s_{kn} - r_{kn} u) > 2\varepsilon.$$

Это означает, что для всех достаточно больших n отрезок, соединяющий (x_{kn}, y_{kn}) и $(x_{(k+1)n}, y_{(k+1)n})$, принадлежит мажоранте μ_n при всех $p' < k < p'' - 1$. Кроме того, $x_{q'n} < \kappa < x_{(q'+1)n}$ и $x_{(q''-1)n} < 1 - \kappa < x_{q''n}$.

Из (2.36), (2.37), (2.38) следует, что $H_0(\mu_n) \rightarrow H_0(\mu)$ и $L_0(\mu_n) \rightarrow L_0(\mu)$ при $n \rightarrow \infty$. Это доказывает непрерывность H_0 и L_0 на \mathfrak{M}_0 . Для доказательства непрерывности Ψ_0 достаточно показать, что для любой непрерывной ограниченной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f d\Psi_0(\mu_n) = \int_{\mathbb{R}} f d\Psi_0(\mu). \quad (2.39)$$

Из (2.36) и (2.38) мы приходим к

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p' < k < p'' - 1} (x_{(k+1)n} - x_{kn}) f(r_{kn}) = \sum_{p' < k < p'' - 1} (x_{k+1} - x_k) f(r_k). \quad (2.40)$$

Что касается аппроксимации первого и последнего интервалов \mathfrak{C}_μ , то здесь надо действовать более аккуратно. Обозначим (x_{kn}, y_{kn}) , где $k \leq p'+1$, вершины мажоранты μ_n (пронумерованные слева направо), такие что $x_{kn} \leq x_{(p'+1)n}$. Отметим, что число таких вершин, вообще говоря, произвольно и может быть бесконечным. Так как первый интервал мажоранты μ соединяет $(0, 0)$ и $(x_{p'+1}, y_{p'+1})$, все точки (u_{ln}, v_{ln}) , где $1 \leq l \leq m$, расположены ниже прямой, проходящей через $(0, 0)$ и $(x_{(p'+1)n}, y_{(p'+1)n})$ при достаточно больших n . Поэтому при достаточно

больших n у μ_n нет атомов, лежащих выше прямой, проходящей через $(0, 2\varepsilon)$ и $(x_{(p'+1)n}, y_{(p'+1)n})$. Следовательно,

$$r_{p'n} := -\frac{y_{(p'+1)n} - y_{p'n}}{x_{(p'+1)n} - x_{p'n}} \in \left[-\frac{y_{(p'+1)n} - 2\varepsilon}{x_{(p'+1)n}}, -\frac{y_{(p'+1)n}}{x_{(p'+1)n}} \right], \quad x_{p'n} < 2\varepsilon \frac{y_{(p'+1)n}}{x_{(p'+1)n}}.$$

Мы получаем, что $r_{p'n} \rightarrow r_{p'}$ при $n \rightarrow \infty$. Вклад линейных интервалов слева от $x_{p'n}$ может быть оценен следующим образом: при больших n

$$\sum_{k < p'} (x_{(k+1)n} - x_{kn}) f(r_{kn}) \leq x_{p'n} \|f\|_{\infty} \leq 4\varepsilon \frac{y_{p'+1}}{x_{p'+1}} \|f\|_{\infty}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть взят сколь угодно маленьким, мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq p'} (x_{(k+1)n} - x_{kn}) f(r_{kn}) = x_{p'+1} f(r_{p'}). \quad (2.41)$$

Аналогичные рассуждения применимы к части мажоранты μ_n , расположенной справа от $(x_{(p''-1)n}, y_{(p''-1)n})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq p''-1} (x_{(k+1)n} - x_{kn}) f(r_{kn}) = (1 - x_{p''-1}) f(r_{p''-1}). \quad (2.42)$$

Объединяя (2.40), (2.41) и (2.42), получаем (2.39). ■

В доказательстве теорем мы часто рассматриваем некоторое “хорошее” событие $E_n(\kappa)$, при наступлении которого возможно локализовать нули G_n . Следующая лемма будет использоваться в данных рассуждениях.

Лемма 31. *Рассмотрим случайные величины $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и S , заданные на одном вероятностном пространстве. Предположим, что для каждого $\kappa > 0$ заданы события $\{E_n(\kappa)\}_{n \in \mathbb{N}}$ и случайные величины $\{S_n(\kappa)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $S(\kappa)$, такие что*

1. $S_n(\kappa) \rightarrow S(\kappa)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$;
2. $S(\kappa) \rightarrow S$ по распределению при $\kappa \downarrow 0$;
3. $\lim_{\kappa \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n(\kappa)] = 1$;
4. $|S_n(\kappa) - S_n| < m_n(\kappa)$ на $E_n(\kappa)$, где $\lim_{\kappa \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} m_n(\kappa) = 0$.

Тогда $S_n \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной функцией с компактным носителем. Обозначим $C := \|f\|_\infty$. Рассмотрим некоторое $\varepsilon > 0$. Мы можем выбрать $\kappa = \kappa(\varepsilon) > 0$, такое что

$$|\mathbb{E} f(S(\kappa)) - \mathbb{E} f(S)| < \varepsilon, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^c(\kappa)] < \varepsilon, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} m_n(\kappa) < \varepsilon. \quad (2.43)$$

Здесь $E_n^c(\kappa)$ обозначает дополнение к $E_n(\kappa)$. Зафиксировав κ , выберем $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такое что при всех $n > n_0$

$$|\mathbb{E} f(S_n(\kappa)) - \mathbb{E} f(S(\kappa))| < \varepsilon, \quad \mathbb{P}[E_n^c(\kappa)] < 2\varepsilon, \quad m_n(\kappa) < 2\varepsilon. \quad (2.44)$$

Обозначая $\omega_f(\delta) := \sup_{|z_1 - z_2| \leq \delta} |f(z_1) - f(z_2)|$ модуль непрерывности f , получаем

$$|\mathbb{E} f(S_n) - \mathbb{E} f(S_n(\kappa))| \leq \omega_f(m_n(\kappa)) + 2C\mathbb{P}[E_n^c(\kappa)] \leq \omega_f(2\varepsilon) + 4C\varepsilon. \quad (2.45)$$

Устремляя $\varepsilon \downarrow 0$ в (2.43), (2.44), (2.45), приходим к $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} f(S_n) = \mathbb{E} f(S)$. ■

2.4.4. Доказательство Теоремы 13

Обозначения

Пусть ξ_0, ξ_1, \dots являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, удовлетворяющими (2.17). Рассмотрим наименьшую вогнутую мажоранту \mathfrak{C}_n множества $\{(k, \log |\xi_k|) : k = 0, \dots, n\}$, при этом мы исключаем из рассмотрения точки с $\log |\xi_k| \leq 0$. По определению, $\mathfrak{C}_n(t) := \inf_f f(t)$ для всех $t \in [0, n]$, где инфимум берется по множеству всех вогнутых функций $f : [0, n] \rightarrow [0, \infty)$, таких что $f(k) \geq \log |\xi_k|$ при $k = 0, \dots, n$. Мы будем называть \mathfrak{C}_n мажорантой полинома G_n . Обозначим вершины мажоранты \mathfrak{C}_n (слева направо) $(k_{in}, \log_+ |\xi_{k_{in}}|)$, где $0 \leq i \leq d_n$ и $k_{0n} = 0$, $k_{d_n n} = n$. На интервале $[k_{in}, k_{(i+1)n}]$ мажоранта является линейной функцией, которую мы запишем в виде

$$\mathfrak{C}_n(t) = S_{in} - R_{int}, \quad t \in [k_{in}, k_{(i+1)n}], \quad 0 \leq i < d_n. \quad (2.46)$$

Далее, обозначим ρ пуассоновский точечный процесс на $[0, 1] \times (0, \infty)$ с интенсивностью $\alpha v^{-(\alpha+1)} dudv$. Мажоранту ρ обозначим \mathfrak{C}_ρ . Как и в разделе 2.4.1, обозначим вершины \mathfrak{C}_ρ , пронумерованные слева направо, (X_k, Y_k) . Из Предложения 2 следует, что с вероятностью единица в случае $\alpha \geq 1$ индекс k принимает значения из \mathbb{Z} , в случае $\alpha \in (0, 1)$ индекс k лежит в $p' \leq k \leq p''$, где p', p'' п.н. являются конечными случайными величинами и $(X_{p'}, Y_{p'}) = (0, 0)$, $(X_{p''}, Y_{p''}) = (1, 0)$. На каждом интервале $[X_k, X_{k+1}]$ мажоранта \mathfrak{C}_ρ является линейной функцией, записанной в форме

$$\mathfrak{C}_\rho(t) = S_k - R_k t, \quad t \in [X_k, X_{k+1}]. \quad (2.47)$$

В основном нас будут интересовать “главные” части мажорант \mathfrak{C}_n и \mathfrak{C}_ρ : зафиксируем некоторое маленькое $\kappa \in (0, 1/2)$ и рассмотрим (зависящие от κ) индексы $0 \leq q'_n < q''_n \leq d_n$ и $q' < q''$, такие что

$$k_{q'_n n} \leq \kappa n < k_{(q'_n+1)n}, \quad k_{(q''_n-1)n} < (1 - \kappa)n \leq k_{q''_n n}, \quad (2.48)$$

$$X_{q'} \leq \kappa < X_{q'+1}, \quad X_{q''-1} < 1 - \kappa \leq X_{q''}. \quad (2.49)$$

В доказательстве Теоремы 13 будет удобнее рассматривать логарифмы нулей G_n , а не сами нули. Мы докажем следующую слабую сходимость вероятностных мер на пространстве $E = [-\infty, \infty] \times [0, 2\pi]$:

$$\frac{1}{n} \sum_{z \in \mathcal{Z}_n} \delta_{(b_n \log |z|, \arg z)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \sum_k (X_{k+1} - X_k) \nu_{R_k}, \quad (2.50)$$

где ν_r обозначает меру Лебега на $\{r\} \times [0, 2\pi]$, нормированную до вероятностной меры. Сумма в правой части берется по всем линейным интервалам $[X_k, X_{k+1}]$ мажоранты \mathfrak{C}_ρ . Чтобы увидеть, что Теорема 13 вытекает из (2.50), отметим, что отображение $F : E \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, заданное как $F(r, \varphi) = e^{r+i\varphi}$, является непрерывным и, следовательно, порождает слабо непрерывное отображение между соответствующими вероятностными мерами (см. [182, Предложение 3.18]). Из Предложения 4 следует, что мы можем применить F к обеим частям (2.50),

что доказывает Теорему 13. Итак, пусть $f : E \rightarrow [0, \infty)$ является непрерывной функцией. Для доказательства Теоремы 13 достаточно показать, что

$$S_n := \frac{1}{n} \sum_{z \in \mathcal{Z}_n} f(b_n \log |z|, \arg z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sum_k (X_{k+1} - X_k) \bar{f}(R_k) =: S, \quad (2.51)$$

где $\bar{f} : [-\infty, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ определена как $\bar{f}(r) := \int_E f d\nu_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) d\varphi$.

Нам потребуется рассмотреть отдельно случаи $\alpha \geq 1$ и $\alpha \in (0, 1)$. Основное отличие заключается в том, что в первом случае линейные интервалы мажоранты \mathfrak{C}_ρ аккумулируются в 0 и 1, тогда как во втором случае мы имеем корректно определенные первый и последний линейные интервалы \mathfrak{C}_ρ . Эти интервалы нельзя игнорировать и требуется рассматривать отдельно. Данное обстоятельство делает случай $\alpha \in (0, 1)$ несколько сложнее.

Доказательство в случае $\alpha \geq 1$

Следующая лемма утверждает, что с вероятностью, близкой к единице, мажоранта G_n обладает некоторыми “хорошими” свойствами. В частности, присутствует некоторый зазор между мажорантой и точками, лежащими ниже мажоранты. Рассмотрим множество $W_{in} \subset [0, n] \times [0, \infty)$, состоящее из $[0, n] \times \{0\}$ и точек $(k, \log_+ |\xi_k|)$ для всех $0 \leq k \leq n$, таких что $k \neq k_{in}, k_{(i+1)n}$.

Лемма 32. *Зафиксируем достаточно маленькое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим событие*

$E_n := E_n^1 \cap E_n^2$, где

$$E_n^1 := \left\{ \min_{q'_n \leq i < q''_n} \min_{(u,v) \in W_{in}} (S_{in} - R_{in}u - v) > n^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} \right\}, \quad (2.52)$$

$$E_n^2 := \left\{ \min_{q'_n \leq i < q''_n} (k_{(i+1)n} - k_{in}) > \sqrt{n} \right\}. \quad (2.53)$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n] = 1$.

Доказательство. Из Предложения 3 следует, что точечный процесс $\rho_n := \sum_{k=0}^n \delta_{(\frac{k}{n}, \frac{\log |\xi_k|}{a_n})}$ слабо сходится к ρ на \mathfrak{M} , при этом мы игнорируем точки с

$\log |\xi_k| \leq 0$. Вспомним определение функционалов H_1 и L_1 из Леммы 29. За счет масштабирования мы имеем

$$H_1(\rho_n) = \frac{1}{a_n} \min_{q'_n \leq i < q''_n} \min_{(u,v) \in W_{in}} (S_{in} - R_{in}u - v),$$

$$L_1(\rho_n) = \frac{1}{n} \min_{q'_n \leq i < q''_n} (k_{(i+1)n} - k_{in}).$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}[E_n^1] = \mathbb{P}[H_1(\rho_n) > a_n^{-1} n^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}], \quad \mathbb{P}[E_n^2] = \mathbb{P}[L_1(\rho_n) > n^{-1/2}].$$

Из Леммы 29 и Предложения 4 (которые применимы, т.к. $\mathbb{P}[\rho \in \mathfrak{M}_1] = 1$ при $\alpha \geq 1$) вытекает, что $H_1(\rho_n) \rightarrow H_1(\rho)$ и $L_1(\rho_n) \rightarrow L_1(\rho)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что $H_1(\rho) > 0$ и $L_1(\rho) > 0$ п.н. Более того, из (2.17) и (2.18) вытекает, что $a_n > n^{\frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{2}}$ при больших n . Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n] = 1$. ■

В следующей лемме мы локализуем большинство нулей G_n при условии наступления события E_n .

Лемма 33. *Если наступило событие E_n , то при всех $q'_n \leq i < q''_n$ и $1 \leq m \leq k_{(i+1)n} - k_{in}$ существует ровно один нуль G_n , лежащий в множестве*

$$Z_{i,m}(n) := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\log |z| - R_{in}| < \delta_n, \left| \arg z - \frac{\varphi_{in} + 2\pi m}{k_{(i+1)n} - k_{in}} \right| < \delta_n \right\},$$

где $\delta_n := \exp(-n^{\frac{1}{\alpha} - 2\varepsilon})$ и $\varphi_{in} := \arg(-\xi_{k_{in}}/\xi_{k_{(i+1)n}})$. Данные множества не пересекаются, и в кольце

$$\{z \in \mathbb{C} : R_{q'_n n} - \delta_n \leq \log |z| < R_{(q''_n - 1)n} + \delta_n\}$$

нет других нулей.

Доказательство. Пусть произошло событие E_n . Очевидно, что при этом не может выполняться $q'_n = 0$ и $\log |\xi_0| \leq 0$, а также не может выполняться $q''_n = d_n$ и $\log |\xi_n| \leq 0$. Из (2.52) следует, что условия Леммы 28 выполнены для полинома G_n с $k = k_{in}$, $l = k_{(i+1)n}$, $\delta = \zeta = \delta_n$ при всех $q'_n \leq i < q''_n$. Поэтому каждое множество $Z_{i,m}(n)$ содержит ровно один нуль G_n . Более того, из доказательства Леммы 28 следует, что ровно $k_{q'_n n}$ нулей G_n лежат в круге $\{z \in \mathbb{C} : \log |z| < R_{q'_n n} - \delta_n\}$

и ровно $k_{q''_n}$ нулей – в круге $\{z \in \mathbb{C} : \log |z| < R_{(q''_n-1)n} + \delta_n\}$. Следовательно, ровно $k_{q''_n} - k_{q'_n}$ нулей лежат в кольце $\{z \in \mathbb{C} : R_{q'_n} - \delta_n \leq \log |z| < R_{(q''_n-1)n} + \delta_n\}$, что совпадает с числом различных $Z_{i,m}(n)$. Остается показать, что множества $Z_{i,m}(n)$ не пересекаются. Для этого достаточно показать, что $R_{(i+1)n} - R_{in} > 3\delta_n$ при всех $q'_n \leq i < q''_n - 1$. Имеем:

$$(k_{(i+2)n} - k_{(i+1)n})(R_{(i+1)n} - R_{in}) = S_{in} - R_{in}k_{(i+2)n} - \log |\xi_{k_{(i+2)n}}| > n^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}.$$

Так как $k_{(i+2)n} - k_{(i+1)n} \leq n$, отсюда вытекает требуемое. \blacksquare

Нам требуется показать, что $S_n \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$, см. (2.51). Определим случайные величины $S_n(\kappa)$ и $S(\kappa)$, приближающие S_n и S , следующим образом:

$$S_n(\kappa) := \frac{1}{n} \sum_{q'_n \leq i < q''_n} (k_{(i+1)n} - k_{in}) \bar{f}(b_n R_{in}),$$

$$S(\kappa) := \sum_{q' \leq i < q''} (X_{i+1} - X_i) \bar{f}(R_i).$$

Пусть $\omega_f(\delta) := \sup_{|z_1 - z_2| \leq \delta} |f(z_1) - f(z_2)|$, где $\delta > 0$, обозначает модуль непрерывности функции f .

Лемма 34. *Если произошло событие E_n , то*

$$|S_n - S_n(\kappa)| \leq \omega_f(10/\sqrt{n}) + 2\kappa \|f\|_\infty.$$

Доказательство. Мы всегда предполагаем, что событие E_n произошло. Рассмотрим некоторое $q'_n \leq i < q''_n$. По Лемме 33, полином G_n имеет ровно один нуль $z_{i,m}(n)$, лежащий в множестве $Z_{i,m}(n)$, где $1 \leq m \leq \Delta_{in}$ и $\Delta_{in} = k_{(i+1)n} - k_{in}$. Обозначим \mathcal{Z}_{in} конечное множество $\{z_{i,m}(n) : 1 \leq m \leq \Delta_{in}\}$. Из (2.53) вытекает $\Delta_{in} > \sqrt{n}$. Из определения $Z_{i,m}(n)$ в Лемме 33 мы получаем, что

$$\left| f(b_n \log |z_{i,m}(n)|, \arg z_{i,m}(n)) - \frac{\Delta_{in}}{2\pi} \int_{\frac{\varphi_{in} + 2\pi m - \pi}{\Delta_{in}}}^{\frac{\varphi_{in} + 2\pi m + \pi}{\Delta_{in}}} f(b_n R_{in}, \varphi) d\varphi \right|$$

меньше, чем $\omega_f(10/\sqrt{n})$. Суммируя по $1 \leq m \leq \Delta_{in}$, мы приходим к

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{z \in \mathcal{Z}_{in}} f(b_n \log |z|, \arg z) - \Delta_{in} \bar{f}(b_n R_{in}) \right| \leq \frac{\Delta_{in}}{n} \omega_f(10/\sqrt{n}). \quad (2.54)$$

Пусть \mathcal{Z}_n^* обозначает множество нулей (посчитанных с учетом кратности) полинома G_n , не лежащих в $\cup_{q'_n \leq i < q''_n} \mathcal{Z}_{in}$. Число нулей в \mathcal{Z}_n^* равно $n - k_{q''_n} + k_{q'_n}$, что, учитывая (2.48), не превышает $2kn$. Следовательно,

$$\frac{1}{n} \sum_{z \in \mathcal{Z}_n^*} f(b_n \log |z|, \arg z) \leq 2\kappa \|f\|_\infty. \quad (2.55)$$

Суммируя (2.54) по всем $q'_n \leq i < q''_n$ и применяя (2.55), получаем требуемое неравенство. \blacksquare

Лемма 35. *Справедлива сходимость $S_n(\kappa) \rightarrow S(\kappa)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Из Предложения 3 следует, что точечный процесс $\rho_n := \sum_{k=0}^n \delta_{\left(\frac{k}{n}, \frac{\log |\xi_k|}{a_n}\right)}$ слабо сходится к ρ на \mathfrak{M} . По Лемме 29 и Предложению 4 (которые применимы, т.к. $\mathbb{P}[\rho \in \mathfrak{M}_1] = 1$ при $\alpha \geq 1$) мы получаем, что $\Psi_1(\rho_n)$ слабо сходится (как случайная конечная мера на \mathbb{R}) к $\Psi_1(\rho)$. Это означает, что $\int_{\mathbb{R}} \bar{f} d\Psi_1(\rho_n)$ сходится по распределению к $\int_{\mathbb{R}} \bar{f} d\Psi_1(\rho)$, что равносильно утверждению леммы. \blacksquare

Теперь мы готовы завершить доказательство Теоремы 13 в случае $\alpha \geq 1$. Напомним, что по Лемме 32 выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n] = 1$. Очевидно, $S(\kappa) \rightarrow S$ при $\kappa \downarrow 0$ п.н. и, следовательно, по распределению. По Лемме 31 (условия которой были проверены выше) мы получаем, что $S_n \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$. Это доказывает (2.51).

Доказательство в случае $\alpha \in (0, 1)$

Этот случай несколько сложнее, поскольку нам надо анализировать поведение первого и последнего интервалов мажоранты G_n отдельно. Предположим,

что $\xi_0 \neq 0$ п.н. Рассмотрим индексы $0 < \tau_n \leq n$, $0 \leq \theta_n < n$ (для определенности, мы выбрали наименьшие возможные значения), такие что

$$\frac{\log |\xi_{\tau_n}|}{\tau_n} = \max_{k=1, \dots, n} \frac{\log |\xi_k|}{k}, \quad \frac{\log |\xi_{\theta_n}|}{n - \theta_n} = \max_{k=0, \dots, n-1} \frac{\log |\xi_k|}{n - k}.$$

Напомним, что $W_{in} \subset [0, n] \times [0, +\infty)$ обозначает множество, состоящее из $[0, n] \times \{0\}$ вместе с точками $(k, \log_+ |\xi_k|)$ для всех $0 \leq k \leq n$, таких что $k \neq k_{in}, k_{(i+1)n}$.

Лемма 36. Для достаточно маленьких $\varepsilon > 0$ и $\kappa \in (0, 1/2)$ рассмотрим событие $E_n := \bigcap_{i=1}^6 E_n^i$, где

$$E_n^1 := \left\{ \min_{0 < i < d_n - 1} \min_{(u,v) \in W_{in}} (S_{in} - R_{in}u - v) > n^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} \right\}, \quad (2.56)$$

$$E_n^2 := \left\{ \min_{0 \leq i < d_n} (k_{(i+1)n} - k_{in}) > \sqrt{n} \right\}, \quad (2.57)$$

$$E_n^3 := \left\{ \min_{j \neq 0, \tau_n} \left(\frac{\log |\xi_{\tau_n}|}{\tau_n} - \frac{\log_+ |\xi_j|}{j} \right) > n^{\frac{1}{\alpha} - 1 - \varepsilon} \right\}, \quad (2.58)$$

$$E_n^4 := \left\{ \min_{j \neq n, \theta_n} \left(\frac{\log |\xi_{\theta_n}|}{n - \theta_n} - \frac{\log_+ |\xi_j|}{n - j} \right) > n^{\frac{1}{\alpha} - 1 - \varepsilon} \right\}, \quad (2.59)$$

$$E_n^5 := \{\tau_n > \kappa n, \theta_n < (1 - \kappa)n\}, \quad (2.60)$$

$$E_n^6 := \{|\log |\xi_0|| < n^\varepsilon, |\log |\xi_n|| < n^\varepsilon\}. \quad (2.61)$$

Тогда $\lim_{\kappa \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n] = 1$ для любого $\varepsilon > 0$.

Замечание 11. Событие E_n^1 означает, что все интервалы мажоранты, кроме первого и последнего, отделимы от точек ниже мажоранты. Для первого и последнего интервалов свойство отделимости содержится в событиях E_n^3 и E_n^4 .

Замечание 12. Мы увидим, что если произошло событие $E_n^3 \cap E_n^6$, то отрезок, соединяющий точки $(0, \log_+ |\xi_0|)$ и $(\tau_n, \log |\xi_{\tau_n}|)$ является первым интервалом мажоранты G_n . Вообще говоря, этот отрезок не обязательно является первым, например, если значение $\log_+ |\xi_0|$ очень большое. Аналогично, событие $E_n^4 \cap E_n^6$ означает, что отрезок, соединяющий точки $(\theta_n, \log |\xi_{\theta_n}|)$ и $(n, \log_+ |\xi_n|)$, является последним интервалом мажоранты G_n . Следовательно, $q'_n = 0$ и $q''_n = d_n$ при наступлении события $\bigcap_{i=3}^6 E_n^i$.

Доказательство. [Доказательство Леммы 36.] Начнем с рассмотрения E_n^3 . Пусть $\tilde{\rho}$ является пуассоновским точечным процессом на $(0, \infty)$ с интенсивностью $\frac{\alpha}{1-\alpha}v^{-(\alpha+1)}dv$. Мы докажем, что справедлива следующая слабая сходимость точечных процессов на $(0, \infty]$:

$$\tilde{\rho}_n := \sum_{k=1}^n \delta_{\left(\frac{b_n \log |\xi_k|}{k}\right)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \tilde{\rho}. \quad (2.62)$$

Как обычно, мы предполагаем, что члены с $\log |\xi_k| \leq 0$ игнорируются. Напомним (см. (2.18)), что $\bar{F}(a_n) \sim 1/n$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим некоторое $t > 0$. Из (2.17) и хорошо известной теоремы о равномерной сходимости правильно меняющихся функций следует, что равномерно по $\kappa n \leq k \leq n$ выполнено

$$\mathbb{P} \left[\frac{b_n \log |\xi_k|}{k} > t \right] = \bar{F} \left(\frac{kt a_n}{n} \right) \sim n^{\alpha-1} k^{-\alpha} t^{-\alpha}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.63)$$

Чтобы оценить члены с $1 \leq k \leq \kappa n$, воспользуемся следующей оценкой Поттера (см. [70, Теорема 1.5.6]): для любого маленького $\delta > 0$ выполнено $\bar{F}(x)/\bar{F}(y) \leq 2(x/y)^{-\alpha-\delta}$ при достаточно больших $x < y$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[\kappa n]} \mathbb{P} \left[\frac{b_n \log |\xi_k|}{k} > t \right] &= \sum_{k=1}^{[\kappa n]} \bar{F} \left(\frac{kt a_n}{n} \right) \\ &\leq 2\bar{F}(\kappa t a_n) \sum_{k=1}^{[\kappa n]} \left(\frac{\kappa n}{k} \right)^{\alpha+\delta} < C \kappa^{1-\alpha} t^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Используя (2.63) и (2.64) при $\kappa \downarrow 0$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left[\frac{b_n \log |\xi_k|}{k} > t \right] = \frac{1}{(1-\alpha)} t^{-\alpha}. \quad (2.65)$$

Из этого вытекает (2.62). Так как слабая сходимость точечных процессов в (2.62) влечет (см. Предложение 4) слабую сходимость соответствующих верхних порядковых статистик, получаем

$$\min_{j \neq 0, \tau_n} \left\{ b_n \left(\frac{\log |\xi_{\tau_n}|}{\tau_n} - \frac{\log_+ |\xi_j|}{j} \right) \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \tilde{V}_1 - \tilde{V}_2,$$

где \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 являются двумя наибольшими точками $\tilde{\rho}$. Так как $b_n^{-1} > n^{\frac{1}{\alpha}-1-\frac{\varepsilon}{2}}$ при больших n и $\tilde{V}_1 > \tilde{V}_2$ п.н., получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^3] = 1$. Из соображений симметрии, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^4] = 1$.

Рассмотрим событие E_n^5 . Из (2.62) и (2.64) следует, что для любого $t > 0$ и достаточно больших n выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_n \leq \kappa n] &\leq \mathbb{P}\left[\max_{k=1, \dots, n} \frac{b_n \log |\xi_k|}{k} \leq t\right] + \mathbb{P}\left[\max_{k=1, \dots, [\kappa n]} \frac{b_n \log |\xi_k|}{k} > t\right] \\ &< 2 \exp\left\{-\frac{1}{1-\alpha} t^{-\alpha}\right\} + C \kappa^{1-\alpha} t^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Полагая $t^\alpha = \kappa^{(1-\alpha)/2}$ и устремляя $\kappa \downarrow 0$, получаем $\lim_{\kappa \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\tau_n \leq \kappa n] = 0$. Из соображений симметрии, $\lim_{\kappa \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^5] = 1$. Так как мы предположили, что $\xi_0 \neq 0$ п.н., получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^6] = 1$.

Для того, чтобы двигаться дальше, нам надо доказать Замечание 12. Обозначим $s = \log_+ |\xi_0|$ и $s - \tau_n r = \log |\xi_{\tau_n}|$. Если произошло событие $E_n^3 \cap E_n^6$, то для любого $1 \leq j \leq n$, $j \neq \tau_n$, выполнено

$$s - jr - \log |\xi_j| = j \left(\frac{\log |\xi_{\tau_n}|}{\tau_n} - \frac{\log |\xi_j|}{j} - s \left(\frac{1}{\tau_n} - \frac{1}{j} \right) \right) > n^{\frac{1}{\alpha}-1-\varepsilon} - 2n^\varepsilon > 0.$$

Это доказывает требуемое.

Перейдем к событиям E_n^1 и E_n^2 . Из Предложения 3 следует, что точечный процесс $\rho_n := \sum_{k=0}^n \delta_{\left(\frac{k}{n}, \frac{\log |\xi_k|}{a_n}\right)}$ слабо сходится к ρ . Вспомним определение функционалов H_1 и L_1 из Леммы 29. За счет масштабирования, мы имеем

$$\begin{aligned} H_0(\rho_n) &= \frac{1}{a_n} \min_{q'_n < i < q''_n - 1} \min_{(u,v) \in W_{in}} (S_{in} - R_{in}u - v), \\ L_0(\rho_n) &= \frac{1}{n} \min_{q'_n < i < q''_n - 1} (k_{(i+1)n} - k_{in}). \end{aligned}$$

Как было отмечено в Замечании 12, при наступлении события $\cap_{i=3}^6 E_n^i$ мы имеем $q'_n = 0$ и $q''_n = d_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E_n^1] &\geq \mathbb{P}[H_0(\rho_n) > a_n^{-1} n^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}] - (1 - \mathbb{P}[\cap_{i=3}^6 E_n^i]), \\ \mathbb{P}[E_n^2] &\geq \mathbb{P}[L_0(\rho_n) > n^{-1/2}] - (1 - \mathbb{P}[\cap_{i=3}^6 E_n^i]). \end{aligned}$$

По Лемме 30 и Предложению 4 (которые применимы, т.к. $\mathbb{P}[\rho \in \mathfrak{M}_0] = 1$ при $\alpha \in (0, 1)$), мы имеем $H_0(\rho_n) \rightarrow H_0(\rho)$ и $L_0(\rho_n) \rightarrow L_0(\rho)$ слабо на $[0, \infty]$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что $H_0(\rho) > 0$ и $L_0(\rho) > 0$ п.н. и $a_n > n^{\frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{2}}$ при больших n . Также мы показали, что вероятность события $\bigcap_{i=3}^6 E_n^i$ может быть сделана сколь угодно близкой к 1 соответствующим выбором маленького κ и большого n . Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^2] = 1$, что и требовалось. ■

В следующей лемме мы изолируем все нули G_n при условии наступления события E_n . Будет удобно модифицировать определение наклонов мажоранты G_n . Рассмотрим R'_{0n} , такое что $\log |\xi_0| - R'_{0n} k_{1n} = \log |\xi_{k_{1n}}|$. Это корректно, так как $\xi_0 \neq 0$ п.н. Заметим, что если $\log |\xi_0| < 0$, то R'_{0n} отличается от R_{0n} . Если произошло E_n , то

$$|R_{0n} - R'_{0n}| \leq \tau_n^{-1} |\log |\xi_0|| < n^{2\varepsilon-1}. \quad (2.66)$$

Аналогичным образом можно определить $R'_{(d_n-1)n}$. Для всех $0 < i < d_n - 1$ положим $R'_{in} := R_{in}$.

Лемма 37. *Если произошло событие E_n , то для всех $0 \leq i < d_n$ и $1 \leq m \leq k_{(i+1)n} - k_{in}$ ровно один нуль G_n лежит в множестве*

$$Z_{i,m}(n) := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\log |z| - R'_{in}| < \delta_n, \left| \arg z - \frac{\varphi_{in} + 2\pi m}{k_{(i+1)n} - k_{in}} \right| < \delta_n \right\},$$

где $\varphi_{in} := \arg(-\xi_{k_{in}}/\xi_{k_{(i+1)n}})$ и $\delta_n := \exp(-n^{\frac{1}{\alpha}-1-3\varepsilon})$. Данные множества попарно не пересекаются, и у G_n нет других нулей.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $i = 0$. Положим $s := \log |\xi_0|$ (что корректно, т.к. $\xi_0 \neq 0$ п.н.) и $r = R'_{0n}$. Заметим, что по Замечанию 12 наступление E_n влечет $\tau_n = k_{1n}$. Имея в виду применить Лемму 28 с $k = 0$, $l = \tau_n$, оценим $h := \min_{j \neq 0, \tau_n} (s - jr - \log |\xi_j|)$. Событие E_n влечет

$$\min_{j \neq 0, \tau_n} \frac{s - jr - \log |\xi_j|}{j} = \min_{j \neq 0, \tau_n} \left(\frac{\log |\xi_{\tau_n}|}{\tau_n} - \frac{\log |\xi_j|}{j} - s \left(\frac{1}{\tau_n} - \frac{1}{j} \right) \right) > n^{\frac{1}{\alpha}-1-2\varepsilon},$$

из чего следует $h > n^{\frac{1}{\alpha}-1-2\varepsilon}$. Чтобы доказать лемму для $i = 0$, применим Лемму 28 с $k = 0$, $l = \tau_n$ и $\delta = \zeta = \delta_n$. Случай $i = d_n - 1$ рассматривается аналогично. Случай $0 < i < d_n - 1$ следует из Леммы 28, примененной к полиному

G_n с $k = k_{in}$, $l = k_{(i+1)n}$ и $\delta = \zeta = \delta_n$: ее условия выполнены при наступлении события E_n , см. (2.56).

Осталось доказать, что множества $Z_{i,m}(n)$ попарно не пересекаются. Достаточно показать, что E_n влечет $R'_{(i+1)n} - R'_{in} > 3\delta_n$ при всех $0 \leq i < d_n$.

Имеем:

$$(k_{(i+2)n} - k_{(i+1)n})(R_{(i+1)n} - R_{in}) = S_{in} - R_{in}k_{(i+2)n} - \log_+ |\xi_{k_{(i+2)n}}|. \quad (2.67)$$

При $i \neq 0, d_n - 1$ из (2.56) следует, что правая часть может быть оценена снизу числом $n^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}$. Требуемое следует из $k_{(i+2)n} - k_{(i+1)n} \leq n$. Используя (2.67), мы получаем, что при $i = 0$ выполнено

$$\frac{k_{2n} - k_{1n}}{k_{2n}}(R_{1n} - R_{0n}) = \frac{\log |\xi_{\tau_n}|}{\tau_n} - \frac{\log |\xi_{k_{2n}}|}{k_{2n}} - \log_+ |\xi_0| \left(\frac{1}{\tau_n} - \frac{1}{k_{2n}} \right) > n^{\frac{1}{\alpha} - 1 - 2\varepsilon},$$

где последнее неравенство следует из (2.58), (2.61). Поэтому $R_{1n} - R_{0n} > n^{\frac{1}{\alpha} - 1 - 2\varepsilon}$.

Вспоминая (2.66), мы приходим к $R'_{1n} - R'_{0n} > 3\delta_n$. Случай $i = d_n - 1$ рассматривается аналогично. \blacksquare

Напомним, что, согласно (2.51), нам требуется доказать, что $S_n \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$. Зададим случайную величину S_n^* , приближающую S_n , следующим образом:

$$S_n^* := \frac{1}{n} \sum_{0 \leq i < d_n - 1} (k_{(i+1)n} - k_{in}) \bar{f}(b_n R_{in}).$$

Лемма 38. *Если произошло событие E_n , то $|S_n^* - S_n| < \omega_f(n^{-\varepsilon})$.*

Доказательство. Предположим, что E_n произошло. Рассмотрим некоторое $0 \leq i < d_n$. Обозначим $\Delta_{in} := k_{(i+1)n} - k_{in}$. По Лемме 37, полином G_n имеет единственный нуль $z_{i,m}(n)$ в множестве $Z_{i,m}(n)$ при каждом $1 \leq m \leq \Delta_{in}$. Обозначим \mathcal{Z}_{in} конечное множество $\{z_{i,m}(n) : 1 \leq m \leq \Delta_{in}\}$. Из (2.57) следует, что $\Delta_{in} > \sqrt{n}$. По определению множества $Z_{i,m}(n)$, для каждого $1 \leq m \leq \Delta_{in}$ величина

$$\left| f(b_n \log |z_{i,m}(n)|, \arg z_{i,m}(n)) - \frac{\Delta_{in}}{2\pi} \int_{\frac{\varphi_{in} + 2\pi m - \pi}{\Delta_{in}}}^{\frac{\varphi_{in} + 2\pi m + \pi}{\Delta_{in}}} f(b_n R_{in}, \varphi) d\varphi \right|$$

меньше, чем $\omega_f(n^{-\varepsilon})$. При $i = 0$ и $i = d_n - 1$ для доказательства этой оценки требуется использовать (2.66). Суммируя по $1 \leq m \leq \Delta_{in}$, получаем

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{z \in \mathcal{Z}_{in}} f(b_n \log |z|, \arg z) - \Delta_{in} \bar{f}(b_n R_{in}) \right| \leq \frac{\Delta_{in}}{n} \omega_f(n^{-\varepsilon}).$$

Суммируя теперь по $0 \leq i < d_n$, получаем требуемое. \blacksquare

Лемма 39. *Имеет место сходимость $S_n^* \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Из Предложения 3 следует, что точечный процесс $\rho_n := \sum_{k=0}^n \delta_{\left(\frac{k}{n}, \frac{\log |\xi_k|}{a_n}\right)}$ слабо сходится к ρ . По Лемме 30 и Предложению 4 (которые применимы, т.к. $\mathbb{P}[\rho \in \mathfrak{M}_0] = 1$ при $\alpha \in (0, 1)$), мы имеем, что $\Psi_0(\rho_n)$ слабо сходится (как случайная вероятностная мера на \mathbb{R}) к $\Psi_0(\rho)$. Следовательно, $\int_{\mathbb{R}} \bar{f} d\Psi_0(\rho_n)$ сходится по распределению к $\int_{\mathbb{R}} \bar{f} d\Psi_0(\rho)$, что и требовалось доказать. \blacksquare

Теперь доказательство Теоремы 13 в случае $\alpha \in (0, 1)$ можно завершить следующим образом. По Лемме 31 с $S_n(\kappa) = S_n^*$ и $S(\kappa) = S$ мы получаем, что $S_n \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$. Это доказывает (2.51).

Теперь избавимся от предположения $\xi_0 \neq 0$ п.н. Пусть вероятность $\mathbb{P}[\xi_0 \neq 0]$ строго положительна. Пусть ξ_{l_n} (соответственно, ξ_{n-m_n}) обозначает первый (соответственно, последний) ненулевой коэффициент G_n . При фиксированных $l, m \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим условное распределение $\mathbb{P}_{l,m}^n$ случайных величин ξ_k , $l \leq k \leq n - m$ при условии, что $l_n = l$, $m_n = m$. Эти величины условно независимы и, исключая первую и последнюю величины, одинаково распределены. Легко видеть, что вышеприведенное доказательство применимо к полиному $\sum_{k=l}^{n-m} \xi_k z^k$, распределенному в соответствии с $\mathbb{P}_{l,m}^n$. Так как это справедливо для всех $l, m \in \mathbb{N}_0$, доказательство завершено.

2.4.5. Доказательство Теоремы 14

Напомним, что случайная величина $\tau_n \in \{0, \dots, n\}$ определяется условием $M_n := \max_{k=0, \dots, n} \log |\xi_k| = \log |\xi_{\tau_n}|$. Грубо говоря, если выполнено усло-

вие (2.20), то максимум M_n с вероятностью, близкой к 1, много больше остальных членов $\log |\xi_k|$, $1 \leq k \leq n$. Мажоранта множества $\{(j, \log |\xi_j|) : j = 0, \dots, n\}$ с большой вероятностью состоит из двух отрезков, соединяющих крайние точки $(0, \log_+ |\xi_0|)$ и $(n, \log_+ |\xi_n|)$ с максимумом $(\tau_n, \log |\xi_{\tau_n}|)$. Нули G_n группируются около двух окружностей, соответствующих этим отрезкам. Докажем это строго. Подразумевается, что для индекса k всегда выполнено $0 \leq k \leq n$. Мы можем всегда считать, что индекс τ_n определен однозначно, так как вероятность этого события стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$ (см. [90]).

Лемма 40. При $\kappa \in (0, 1/2)$, $A > 0$ рассмотрим событие $E_n = \cap_{i=1}^4 E_n^i$, где

$$\begin{aligned} E_n^1 &:= \left\{ \min_{k \neq 0, \tau_n} \left(\frac{M_n}{\tau_n} - \frac{\log |\xi_k|}{k} \right) > n^{2A} \right\}, \\ E_n^2 &:= \left\{ \min_{k \neq \tau_n, n} \left(\frac{M_n}{\tau_n} - \frac{\log |\xi_k|}{n-k} \right) > n^{2A} \right\}, \\ E_n^3 &:= \{\kappa n < \tau_n < (1-\kappa)n\}, \\ E_n^4 &:= \{|\log |\xi_0|| < n^A, M_n > n^{2A+1}, |\log |\xi_n|| < n^A\}. \end{aligned}$$

Тогда для любого $A > 0$ выполнено $\lim_{\kappa \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n] = 1$.

Доказательство. Из соображений симметрии, τ_n/n сходится при $n \rightarrow \infty$ к равномерному распределению, что приводит к $\lim_{\kappa \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^3] = 1$. Из [90, Теорема 3.2] следует, что условие (2.20) влечет

$$\frac{1}{M_n} \max_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq \tau_n}} \log |\xi_k| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P} \left[\max_{\substack{\kappa n \leq k < n \\ k \neq \tau_n}} \frac{\log |\xi_k|}{k} > \frac{M_n}{2n} \right] \leq \mathbb{P} \left[\max_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq \tau_n}} \log |\xi_k| > \frac{\kappa}{2} M_n \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.68)$$

Положим $c_n := \inf\{s : \bar{F}(s) \leq 1/(\sqrt{\kappa n})\}$. Тогда из [182, стр. 15–16] следует, что $\bar{F}(c_n) \sim 1/(\sqrt{\kappa n})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n/n = \infty$. Воспользуемся оценкой Поттера для медленно меняющихся функций (см. [70, Теорема 1.5.6]): для любого маленького

$\delta > 0$ выполнено $\bar{F}(x)/\bar{F}(y) \leq 2(x/y)^{-\alpha-\delta}$ при достаточно больших $x < y$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\max_{1 \leq k \leq \kappa n} \frac{\log |\xi_k|}{k} > \frac{M_n}{2n} \right] &\leq \sum_{1 \leq k \leq \kappa n} \bar{F} \left(\frac{k}{2n} c_n \right) + \mathbb{P} [M_n < c_n] \\ &< \frac{3}{\sqrt{\kappa n}} \sum_{1 \leq k \leq \kappa n} \left(\frac{2n}{k} \right)^{1/4} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\kappa n}} \right)^{n+1} \\ &< C(\kappa^{1/4} + e^{-1/(2\sqrt{\kappa})}). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Так как \bar{F} убывает медленнее, чем любая степень n , приходим к

$$\mathbb{P} \left[\frac{M_n}{2n} > n^{2A} \right] = 1 - (1 - \bar{F}(2n^{2A+1}))^{n+1} > 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2.70)$$

Объединяя (2.68), (2.69) и (2.70) и устремляя $\kappa \downarrow 0$, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^1] = 1$.

Из соображений симметрии, также имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^2] = 1$. Также из (2.70) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n^4] = 1$. \blacksquare

Доказательство. [Доказательство Теоремы 14] В дальнейшем мы всегда подразумеваем, что произошло событие E_n . Корни уравнения $\xi_{\tau_n} z^{\tau_n} + \xi_0 = 0$, которые мы обозначим $w_{1n}, \dots, w_{\tau_n n}$, удовлетворяют соотношению

$$|w_{kn}| = (|\xi_0|/|\xi_{\tau_n}|)^{1/\tau_n} = e^{(\log |\xi_0| - M_n)/\tau_n} < e^{-n^A}, \quad 1 \leq k \leq \tau_n.$$

Аналогично, корни уравнения $\xi_n z^{n-\tau_n} + \xi_{\tau_n} = 0$, которые мы обозначим $w_{(\tau_n+1)n}, \dots, w_{nn}$, удовлетворяют соотношению

$$|w_{kn}| = (|\xi_{\tau_n}|/|\xi_n|)^{1/(n-\tau_n)} = e^{(M_n - \log |\xi_n|)/(n-\tau_n)} > e^{n^A}, \quad \tau_n < k \leq n.$$

Выберем $s, r \in \mathbb{R}$ так, чтобы выполнялось $s = \log |\xi_0|$ и $s - r\tau_n = \log |\xi_{\tau_n}| = M_n$.

Чтобы применить Лемму 28 с $k = 0$, $l = \tau_n$, требуется оценить $h := \min_{k \neq 0, \tau_n} (s - rk - \log |\xi_k|)$. По определению E_n ,

$$\min_{k \neq 0, \tau_n} \frac{s - rk - \log |\xi_k|}{k} = \min_{k \neq 0, \tau_n} \left(\frac{M_n}{\tau_n} - \frac{\log |\xi_k|}{k} + s \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\tau_n} \right) \right) > n^{\frac{3}{2}A}.$$

Следовательно, $h > n^{\frac{3}{2}A}$ и условия Леммы 28 выполнены при $k = 0$, $l = \tau_n$ и $\delta = \zeta = e^{-n^A}$. Поэтому при каждом $1 \leq k \leq \tau_n$ множество

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |\log |z| - r| \leq e^{-n^A}, |\arg z - \arg w_{kn}| \leq e^{-n^A} \right\}$$

содержит ровно один нуль z_{kn} полинома G_n . Следовательно,

$$|z_{kn} - w_{kn}| < 10\delta e^r = 10e^{-n^A}|w_{kn}|, \quad 1 \leq k \leq \tau_n.$$

Из соображений симметрии, аналогичное неравенство выполнено при $\tau_n < k \leq n$. ■

2.4.6. Доказательство Теоремы 17 и Теоремы 18

Предельный точечный процесс

Сначала мы дадим строгое описание процессов $\Upsilon_{\alpha,c}$ и $\Upsilon_{\alpha,c,p}^\pm$. Пусть ρ является пуассоновским точечным процессом на $[0, 1] \times (0, \infty)$ с интенсивностью $\alpha v^{-(\alpha+1)} du dv$ и мажорантой \mathfrak{C}_ρ , подробности см. в разделе 2.4.1. Напомним, что вершины \mathfrak{C}_ρ обозначены (X_k, Y_k) . При $\alpha \geq 1$ индекс k принимает значения в \mathbb{Z} , в то время как при $\alpha \in (0, 1)$ выполнено $p' \leq k \leq p''$ и $(X_{p'}, Y_{p'}) = (0, 0)$, $(X_{p''}, Y_{p''}) = (1, 0)$. Рассмотрим независимые случайные величины σ_k, π_k , принимающие значения в $\{-1, 1\}$ (соответствующие вершинам (X_k, Y_k) мажоранты \mathfrak{C}_ρ за исключением граничных вершин $(0, 0)$ и $(1, 0)$ в случае $\alpha \in (0, 1)$), такие что

$$\mathbb{P}[\sigma_k = 1] = c, \quad \mathbb{P}[\pi_k = 1] = 1/2.$$

В случае $\alpha \in (0, 1)$ мы накладываем дополнительные граничные условия:

1. $\pi_{p'} = 1$;
2. $\pi_{p''} = 1$ в определении $\Upsilon_{\alpha,c,p}^+$ и $\pi_{p''} = -1$ в определении $\Upsilon_{\alpha,c,p}^-$;
3. $\mathbb{P}[\sigma_{p'} = 1] = \mathbb{P}[\sigma_{p''} = 1] = p$.

Рассмотрим случайные величины ε_k^+ и ε_k^- , соответствующие линейным интервалам $[X_k, X_{k+1}]$ мажоранты \mathfrak{C}_ρ , заданные как

$$\varepsilon_k^+ = \mathbb{1}_{\{\sigma_k \neq \sigma_{k+1}\}}, \quad \varepsilon_k^- = \mathbb{1}_{\{\sigma_k \pi_k \neq \sigma_{k+1} \pi_{k+1}\}}. \quad (2.71)$$

Тогда предельные процессы $\Upsilon_{\alpha,c}$ и $\Upsilon_{\alpha,c,p}^{\pm}$ определены следующим образом:

$$\Upsilon_{\alpha,c(p)}^{(\pm)} := \sum_k \varepsilon_k^+ \delta_{e^{R_k}} + \sum_k \varepsilon_k^- \delta_{-e^{R_k}}, \quad (2.72)$$

где сумма берется по всем линейным интервалам мажоранты \mathfrak{C}_ρ , а R_k является наклоном k -го отрезка \mathfrak{C}_ρ со знаком минус, как и в (2.19). Перейдем к доказательству Теоремы 17.

Доказательство в случае $\alpha \geq 1$

Докажем, что имеет место следующая слабая сходимость процессов на $E := \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$:

$$\sum_{z \in \mathcal{R}_n} \delta_{(b_n \log |z|, \text{sgn } z)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \sum_k \varepsilon_k^+ \delta_{(R_k, 1)} + \sum_k \varepsilon_k^- \delta_{(R_k, -1)}, \quad (2.73)$$

где сумма в правой части берется по всем линейным интервалам мажоранты \mathfrak{C}_ρ . Теорема 17 в случае $\alpha \geq 1$ следует из соотношения (2.73). В самом деле, отображение $F : E \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, заданное как $F(r, \sigma) := \sigma e^r$, непрерывно и прообразы компактов компактны. По [182, Предложение 3.18], оно индуцирует непрерывное в грубой топологии отображение между пространствами локально конечных считающих мер на E и $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Используя Предложение 4, мы можем применить это отображение к обеим частям (2.73), что докажет Теорему 17 при $\alpha \geq 1$. Обозначим \mathcal{R}_n^+ (соответственно, \mathcal{R}_n^-) множество положительных (соответственно, отрицательных) вещественных нулей G_n , посчитанных с учетом кратности. Пусть $f^+, f^- : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ являются непрерывными функциями с носителями, лежащими в $[-A, A]$. Рассмотрим случайные величины S_n и S , определенные как

$$S_n := \sum_{z \in \mathcal{R}_n^+} f^+(b_n \log z) + \sum_{z \in \mathcal{R}_n^-} f^-(b_n \log |z|), \quad (2.74)$$

$$S := \sum_k \varepsilon_k^+ f^+(R_k) + \sum_k \varepsilon_k^- f^-(R_k), \quad (2.75)$$

где сумма в (2.75) берется по всем линейным интервалам мажоранты \mathfrak{C}_ρ . Чтобы доказать (2.73), достаточно показать, что $S_n \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$. Фактически мы можем дополнительно предположить, что f^+ и f^- липшецевы, т.е. $|f^\pm(z_1) - f^\pm(z_2)| < L|z_1 - z_2|$ для некоторого $L > 0$ и всех $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Сначала мы локализуем вещественные нули G_n при наступлении некоторого “хорошего” события. Будем использовать обозначения из раздела 2.4.4. Зафиксируем $\kappa \in (0, 1/2)$ и будем использовать обозначения для индексов q'_n и q''_n из (2.48). Рассмотрим событие E_n , определенное в Лемме 32. Также нам потребуется другое “хорошее” событие F_n . Следующая лемма утверждает, что его вероятность близка к единице.

Лемма 41. *Рассмотрим событие $F_n := \{b_n R_{q'_n} < -2A\} \cap \{b_n R_{(q''_n-1)_n} > 2A\}$. Тогда $\lim_{\kappa \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[F_n] = 1$.*

Доказательство. Напомним (см. раздел 2.4.3), что \mathfrak{M} является пространством локально конечных считающих мер на $[0, 1] \times (0, \infty]$, не имеющих атомов на $[0, 1] \times \{\infty\}$. Для меры $\mu \in \mathfrak{M}$ обозначим $[x_{q'}, x_{q'+1}]$ единственный линейный интервал мажоранты \mathfrak{C}_μ , такой что $x_{q'} \leq \kappa < x_{q'+1}$. Обозначим $r_{q'}$ наклон соответствующего отрезка \mathfrak{C}_μ со знаком минус. Рассмотрим отображение $T_\kappa : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$, определенное как $T_\kappa(\mu) := r_{q'}$. Тогда такие же рассуждения, как и в Лемме 29, показывают, что T_κ непрерывно на \mathfrak{M}_1 (см. (2.35)). Применяя Предложение 3 и Предложение 4 и учитывая, что $T_\kappa(\rho_n) = b_n R_{q'_n}$, мы получаем, что для любого $\kappa > 0$ имеет место сходимость $b_n R_{q'_n} \rightarrow T_\kappa(\rho)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$. Из Предложения 2 следует, что $T_\kappa(\rho) \rightarrow -\infty$ п.н. при $\kappa \downarrow 0$. Следовательно, $\lim_{\kappa \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[b_n R_{q'_n} < -2A] = 1$, и лемма вытекает из соображений симметрии. \blacksquare

В следующей лемме мы предположим, что наступило событие $E_n \cap F_n$, что даст нам представление о местонахождении вещественных нулей G_n , лежащих в интервале $[-A, A]$. Напомним, что вершины мажоранты G_n обозначены (слева направо) $(k_{in}, \log_+ |\xi_{k_{in}}|)$, где $0 \leq i \leq d_n$ и $k_{0n} = 0$, $k_{d_n n} = n$. Мы уже зна-

ем, что каждому линейному интервалу $[k_{in}, k_{(i+1)n}]$ мажоранты соответствует “окружность” комплексных нулей полинома G_n , расположенных приблизительно около ненулевых нулей полинома $\xi_{k_{in}} z^{k_{in}} + \xi_{k_{(i+1)n}} z^{k_{(i+1)n}}$. Чтобы локализовать вещественные нули G_n , нам надо следить за двумя вещами: знаками коэффициентов $\xi_{k_{in}}, \xi_{k_{(i+1)n}}$ и отношением между индексами $k_{in}, k_{(i+1)n}$. Обозначим

$$\varepsilon_{in}^+ := \mathbb{1}\{\operatorname{sgn}(\xi_{k_{in}}) \neq \operatorname{sgn}(\xi_{k_{(i+1)n}})\}, \quad (2.76)$$

$$\varepsilon_{in}^- := \mathbb{1}\{(-1)^{k_{in}} \operatorname{sgn}(\xi_{k_{in}}) \neq (-1)^{k_{(i+1)n}} \operatorname{sgn}(\xi_{k_{(i+1)n}})\}. \quad (2.77)$$

Следующая лемма показывает, что ε_{in}^+ (соответственно, ε_{in}^-) является индикатором присутствия вещественного нуля G_n около $e^{R_{in}}$ (соответственно, $-e^{R_{in}}$).

Лемма 42. *Если произошло событие E_n , то для каждого $q'_n \leq i < q''_n$, такого что $\varepsilon_{in}^+ = 1$ (соответственно, $\varepsilon_{in}^- = 1$), существует ровно один положительный (соответственно, отрицательный) вещественный нуль полинома G_n , такой что $|\log |z| - R_{in}| \leq \exp(-n^{\frac{1}{\alpha}-2\varepsilon})$. Более того, если произошло событие F_n , то среди всех вещественных нулей G_n , удовлетворяющих $b_n \log |z| \in [-A, A]$, нет других, кроме как описанных выше.*

Доказательство. Мы будем использовать обозначения Леммы 33. Напомним, что если произошло событие E_n , то для любого $q'_n \leq i < q''_n$ и $1 \leq m \leq k_{(i+1)n} - k_{in}$ существует ровно один комплексный нуль $z_{i,m}(n)$ полинома G_n в множестве $Z_{i,m}(n)$. Пусть $\varepsilon_{in}^+ = 1$ для некоторого $q'_n \leq i < q''_n$. Тогда $\varphi_{in} = 0$ в Лемме 33. Полагая $m := k_{(i+1)n} - k_{in}$, мы получаем, что $z := z_{i,m}(n)$ удовлетворяет $|\log |z| - R_{in}| < \delta_n$ и $|\arg z| < \delta_n$. Так как коэффициенты G_n вещественны, нуль z тоже фактически должен быть вещественным (и положительным). Иначе у нас бы была пара сопряженных комплексных нулей, лежащих в множестве $Z_{i,m}(n)$. Аналогично, если $\varepsilon_{in}^- = 1$ для некоторого $q'_n \leq i < q''_n$, то все вещественные отрицательные нули имеют вид $z_{i,m}(n)$ с соответствующим m . Из Леммы 33 следует, что все вещественные нули, лежащие в множестве $\{z \in \mathbb{C} : R_{q'_n n} - \delta_n \leq \log |z| \leq R_{(q''_n-1)n} + \delta_n\}$, имеют вышеприведенный вид. Для завершения

доказательства заметим, что данное множество содержит множество $\{z \in \mathbb{C} : -A \leq b_n \log |z| \leq A\}$, если наступило F_n . ■

Аппроксимируем случайные величины S_n и S случайными величинами $S_n(\kappa)$ и $S(\kappa)$, заданными как

$$S_n(\kappa) := \sum_{q'_n < i < q''_n - 1} (\varepsilon_{in}^+ f^+(b_n R_{in}) + \varepsilon_{in}^- f^-(b_n R_{in})), \quad (2.78)$$

$$S(\kappa) := \sum_{q' < i < q'' - 1} (\varepsilon_i^+ f^+(R_i) + \varepsilon_i^- f^-(R_i)). \quad (2.79)$$

Лемма 43. *Если произошло событие $E_n \cap F_n$, то $|S_n - S_n(\kappa)| < 1/n$.*

Доказательство. Напомним, что f^+ и f^- являются липшецевыми функциями с константой, не превосходящей L , и с носителями в $[-A, A]$. Из Леммы 42 и определения F_n следует, что если произошло событие $E_n \cap F_n$, то

$$\left| \sum_{z \in \mathcal{R}_n^+} f^+(b_n \log z) - \sum_{i=0}^{d_n-1} \varepsilon_{in}^+ f^+(b_n R_{in}) \right| \leq L d_n b_n \exp(-n^{\frac{1}{\alpha}-2\varepsilon}) \leq \frac{1}{2n}.$$

Аналогичное неравенство справедливо для отрицательных нулей, и доказательство завершено. ■

Следующее предложение описывает предельную структуру коэффициентов. Пусть $\tilde{\mathfrak{M}}$ обозначает пространство локально конечных мер на $[0, 1] \times (0, \infty] \times \{-1, 1\}^2$, не имеющих атомов на $[0, 1] \times \{\infty\} \times \{-1, 1\}^2$. Оснастим $\tilde{\mathfrak{M}}$ топологией грубой сходимости. Каждый элемент $\tilde{\mu} \in \tilde{\mathfrak{M}}$ может быть представлен в виде $\tilde{\mu} = \sum_i \delta_{(u_i, v_i, \varsigma_i, \varpi_i)}$, где $\mu = \sum_i \delta_{(u_i, v_i)} \in \mathfrak{M}$ является проекцией $\tilde{\mu}$ на \mathfrak{M} , и $(\varsigma_i, \varpi_i) \in \{-1, 1\}^2$ является меткой в точке (u_i, v_i) .

Предложение 5. *Пусть ξ_0, ξ_1, \dots являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, удовлетворяющими (2.17) и (2.23). Тогда имеет место следующая слабая сходимость в пространстве $\tilde{\mathfrak{M}}$:*

$$\tilde{\rho}_n := \sum_{k=0}^n \delta_{\left(\frac{k}{n}, \frac{\log |\xi_k|}{a_n}, \text{sgn } \xi_k, (-1)^k\right)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(U_i, V_i, \varsigma_i, \varpi_i)} =: \tilde{\rho}. \quad (2.80)$$

При этом $\rho := \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(U_i, V_i)}$ является пуассоновским точечным процессом на $[0, 1] \times (0, \infty)$ с интенсивностью $\alpha v^{-(\alpha+1)} du dv$ и, независимо от него, ς_i, ϖ_i являются случайными величинами, принимающими значения в $\{-1, 1\}$, такими что $\mathbb{P}[\varsigma_i = 1] = c$ и $\mathbb{P}[\varpi_i = 1] = 1/2$. Члены с $\log |\xi_k| \leq 0$ игнорируются.

Доказательство. Обозначим $\xi_k^+ := \xi_k \mathbb{1}_{\xi_k > 0}$ и $\xi_k^- := |\xi_k| \mathbb{1}_{\xi_k \leq 0}$. Заметим, что из (2.17), (2.18) и (2.23) следует, что

$$\mathbb{P} \left[\frac{\log \xi_k^+}{a_n} > t \right] \sim \frac{c}{nt^\alpha}, \quad \mathbb{P} \left[\frac{\log \xi_k^-}{a_n} > t \right] \sim \frac{1-c}{nt^\alpha}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Зафиксируем $(\varsigma, \varpi) \in \{-1, 1\}^2$. Рассмотрим только коэффициенты ξ_k со знаком ς и четностью ϖ . Из Предложения 3 следует, что точечный процесс

$$\tilde{\rho}_n(\varsigma, \varpi) := \sum_{k=0}^n \delta_{\left(\frac{k}{n}, \frac{\log |\xi_k|}{a_n}\right)} \mathbb{1}_{\{\text{sgn}(\xi_k) = \varsigma, (-1)^k = \varpi\}}$$

слабо сходится к пуассоновскому точечному процессу с интенсивностью

$$\begin{cases} (\alpha/2)cv^{-(\alpha+1)} du dv, & \text{если } \varsigma = 1; \\ (\alpha/2)(1-c)v^{-(\alpha+1)} du dv, & \text{если } \varsigma = -1. \end{cases}$$

Объединяя по всем четырем возможным вариантам (ς, ϖ) , получаем требуемое.

■

Нам надо перейти от сходимости коэффициентов к сходимости процессов вещественных нулей. Рассмотрим меру $\tilde{\mu} \in \tilde{\mathfrak{M}}$, проекцией которой является $\mu \in \mathfrak{M}$. Обозначим вершины мажоранты μ слева направо точками (x_k, y_k) . Пусть r_k обозначает наклон мажоранты μ на интервале $[x_k, x_{k+1}]$ со знаком минус. Зафиксируем $\kappa \in (0, 1/2)$ и определим индексы q' и q'' условиями $x_{q'} \leq \kappa < x_{q'+1}$ и $x_{q''-1} < 1 - \kappa \leq x_{q''}$. Для $q' < k < q''$ обозначим $(\sigma_k, \pi_k) \in \{-1, 1\}^2$ метку, соответствующую вершине (x_k, y_k) . Обозначим $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ множество всех мер $\tilde{\mu} \in \tilde{\mathfrak{M}}$, таких что $\mu \in \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ определено в разделе 2.4.3. Пусть \mathfrak{P} обозначает пространство локально конечных считающих мер на \mathbb{R} , оснащенное топологией грубой сходимости. Определим отображение $\Phi_1 : \tilde{\mathfrak{M}} \rightarrow \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ следующим

образом:

$$\Phi_1(\tilde{\mu}) := \left(\sum_{q' < k < q''-1} \mathbb{1}_{\sigma_k \neq \sigma_{k+1}} \delta_{(r_k)}, \sum_{q' < k < q''-1} \mathbb{1}_{\sigma_k \pi_k \neq \sigma_{k+1} \pi_{k+1}} \delta_{(r_k)} \right).$$

Лемма 44. *Отображение Φ_1 непрерывно на $\tilde{\mathfrak{M}}_1$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\tilde{\mu}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{\mathfrak{M}}$ сходится грубо к $\tilde{\mu} \in \tilde{\mathfrak{M}}_1$. Это влечет грубую сходимость соответствующих проекций: $\mu_n \rightarrow \mu \in \mathfrak{M}_1$. Рассуждая так же, как и в доказательстве Леммы 29 (и используя те же обозначения), мы приходим к следующему заключению. Существуют точки (x_{kn}, y_{kn}) , $q' \leq k \leq q''$, являющиеся вершинами мажоранты μ_n , такие что $(x_{kn}, y_{kn}) \rightarrow (x_k, y_k)$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, выполнено $x_{q'n} < \kappa < x_{(q'+1)n}$ и $x_{(q''-1)n} < 1 - \kappa < x_{q''n}$ при достаточно больших n . Также, вспоминая обозначения из (2.35), имеем $r_{kn} \rightarrow r_k$ при $n \rightarrow \infty$. В заключение получаем, что сходимость $\tilde{\mu}_n \rightarrow \tilde{\mu}$ означает, что для достаточно больших n метка (σ_{kn}, π_{kn}) , соответствующая (x_{kn}, y_{kn}) , совпадает с меткой (σ_k, π_k) , соответствующей (x_k, y_k) , при всех $q' \leq k \leq q''$. Это влечет сходимость $\Phi_1(\tilde{\mu}_n) \rightarrow \Phi_1(\tilde{\mu})$ при $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, непрерывность. ■

Лемма 45. *Имеет место сходимость $S_n(\kappa) \rightarrow S(\kappa)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Из Предложения 5 следует, что $\tilde{\rho}_n \rightarrow \tilde{\rho}$ слабо на $\tilde{\mathfrak{M}}$. Рассмотрим отображение $I : \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{R}$, определенное как $I(\nu^+, \nu^-) := \int_{\mathbb{R}} f^+ d\nu^+ + \int_{\mathbb{R}} f^- d\nu^-$. Очевидно, I непрерывно на \mathfrak{M}_1 . По Лемме 44, отображение $I \circ \Phi_1 : \tilde{\mathfrak{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Из Предложения 4 (которое применимо, т.к. $\mathbb{P}[\tilde{\rho} \in \tilde{\mathfrak{M}}_1] = 1$ при $\alpha \geq 1$), имеем, что $I(\Phi_1(\tilde{\rho}_n)) \rightarrow I(\Phi_1(\tilde{\rho}))$ по распределению при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать. ■

Доказательство Теоремы 17 в случае $\alpha \geq 1$ может быть завершено следующим образом. Очевидно, имеет место сходимость $S(\kappa) \rightarrow S$ п.н. при $\kappa \downarrow 0$. Остальные условия Леммы 31 были проверены выше. Применяя Лемму 31, получаем $S_n \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство в случае $\alpha \in (0, 1)$

Мы покажем, что имеет место слабая сходимость точечных процессов в (2.73), в этот раз на пространстве $E = [-\infty, +\infty] \times \{-1, 1\}$, предполагая, что n является либо четным, либо нечетным, и величины $\varepsilon_k^+, \varepsilon_k^-$ из правой части (2.73) заданы в соответствии с этим выбором (см. граничные условия из раздела 2.4.6). Пусть $f^+, f^- : [-\infty, \infty] \rightarrow [0, \infty)$ являются непрерывными функциями, такими что $|f^\pm(z_1) - f^\pm(z_2)| < L|z_1 - z_2|$ при всех $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Используя обозначения из (2.74) и (2.75), достаточно показать, что $S_n \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$. Следующая лемма локализует все нули G_n , если произошло “хорошее” событие.

Лемма 46. *Если произошло событие E_n , определенное в Лемме 36, тогда для любого $0 \leq i < d_n$, такого что $\varepsilon_{in}^+ = 1$ (соответственно, $\varepsilon_{in}^- = 1$), существует ровно один положительный (соответственно, отрицательный) вещественный нуль z полинома G_n , такой что $|\log |z| - R'_{in}| \leq \exp(-n^{\frac{1}{\alpha}-1-3\varepsilon})$. Более того, у G_n нет других нулей.*

Доказательство. Следует из (37) (см. доказательство Леммы 42). ■

Зафиксируем $\kappa \in (0, 1/2)$ и определим случайные величины $S_n(\kappa)$ и $S(\kappa)$ так же, как и в (2.78), (2.79), но суммирование будем производить по $q'_n \leq k < q''_n$ и $q' \leq k < q''$.

Лемма 47. *Если произошло событие E_n , то $|S_n - S_n(\kappa)| < 1/\sqrt{n}$.*

Доказательство. Из Замечания 12 следует, что $q'_n = 0$ и $q''_n = d_n$ при наступлении E_n . Остальное следует из Леммы 46, липшецевости функций f^+ и f^- и соотношения (2.66). ■

Нам надо вывести из сходимости коэффициентов в Предложении 5 сходимость вещественных нулей. В этот раз нам надо заботиться о первом и последнем коэффициентах случайного полинома G_n . Положим $\mathbb{K} := \tilde{\mathfrak{M}} \times \{-1, 1\}^2$. Каждый элемент \mathbb{K} может быть представлен в виде $(\tilde{\mu}, \sigma', \sigma'')$, где $\tilde{\mu} \in \tilde{\mathfrak{M}}$ и

$(\sigma', \sigma'') \in \{-1, 1\}^2$. Величины σ' и σ'' хранят знаки первого и последнего коэффициентов G_n . Как и выше, вершины мажоранты μ считаются слева направо и обозначаются (x_k, y_k) , а индексы q' и q'' заданы условиями $x_{q'} \leq \kappa < x_{q'+1}$ и $x_{q''-1} < 1 - \kappa \leq x_{q''}$. При $q' < k < q''$ (неравенства строгие) обозначим $(\sigma_k, \pi_k) \in \{-1, 1\}^2$ метку, соответствующую вершине (x_k, y_k) . Нам потребуется следующее граничное условие: определим $(\sigma_{q'}, \pi_{q'}) := (\sigma', 1)$ и положим $(\sigma_{q''}, \pi_{q''}) := (\sigma'', 1)$ (если мы доказываем сходимость Υ_{2n}) или $(\sigma_{q''}, \pi_{q''}) := (\sigma'', -1)$ (если мы доказываем сходимость Υ_{2n+1}). Пусть \mathbb{K}_0 обозначает множество всех $(\tilde{\mu}, \sigma', \sigma'') \in \mathbb{K}$, таких что проекция μ меры $\tilde{\mu}$ удовлетворяет $\mu \in \mathfrak{M}_0$. Пространство $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ определено в разделе 2.4.3. Пусть \mathfrak{Q} обозначает пространство конечных считающих мер на $[-\infty, \infty]$, оснащенное топологией грубой сходимости. Рассмотрим отображение $\Phi_0 : \mathbb{K} \rightarrow \mathfrak{Q} \times \mathfrak{Q}$, заданное как

$$\Phi_0(\tilde{\mu}, \sigma', \sigma'') := \left(\sum_{k=q'}^{q''-1} \mathbb{1}_{\sigma_k \neq \sigma_{k+1}} \delta(r_k), \sum_{k=q'}^{q''-1} \mathbb{1}_{\sigma_k \pi_k \neq \sigma_{k+1} \pi_{k+1}} \delta(r_k) \right).$$

Лемма 48. *Отображение Φ_0 непрерывно на \mathbb{K}_0 .*

Доказательство. Пусть последовательность мер $(\tilde{\mu}_n, \sigma'_n, \sigma''_n)$ из \mathbb{K} сходится грубо к $(\tilde{\mu}, \sigma', \sigma'') \in \mathbb{K}_0$. Это означает, что для достаточно больших n выполнено $\sigma'_n = \sigma'$ и $\sigma''_n = \sigma''$. Также $\tilde{\mu}_n \rightarrow \tilde{\mu}$ грубо. Следовательно, имеет место следующая грубая сходимость соответствующих проекций: $\mu_n \rightarrow \mu$. Так же, как и в доказательстве Леммы 30, мы получаем следующие результаты. Существуют точки (x_{kn}, y_{kn}) , $q' < k < q''$, являющиеся вершинами мажоранты меры μ_n , такие что $(x_{kn}, y_{kn}) \rightarrow (x_k, y_k)$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, $x_{q'n} < \kappa < x_{(q'+1)n}$ и $x_{(q''-1)n} < 1 - \kappa < x_{q''n}$ для достаточно больших n . Также при тех же обозначениях, что и в (2.35), выполнено $r_{kn} \rightarrow r_k$ при $n \rightarrow \infty$. Из $\tilde{\mu}_n \rightarrow \tilde{\mu}$ следует, что при достаточно больших n метка (σ_{kn}, π_{kn}) , соответствующая (x_{kn}, y_{kn}) , совпадает с меткой (σ_k, π_k) , соответствующей (x_k, y_k) , при всех $q' < k < q''$. Аналогичное утверждение выполнено при $k = q'$ и $k = q''$. Это приводит к $\Phi_0(\tilde{\mu}_n, \sigma'_n, \sigma''_n) \rightarrow \Phi_0(\tilde{\mu}, \sigma', \sigma'')$ при $n \rightarrow \infty$. ■

Лемма 49. *Выполнено $S_n(\kappa) \rightarrow S(\kappa)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Из Предложения 5 следует, что $\tilde{\rho}_n \rightarrow \tilde{\rho}$ слабо на \mathfrak{M} . Сумма в (2.80) берется от 1 до $n - 1$. Следовательно, $(\tilde{\rho}_n, \text{sgn } \xi_0, \text{sgn } \xi_n)$ как случайный элемент в \mathbb{K} слабо сходится к $(\tilde{\rho}, \sigma', \sigma'')$, где σ' и σ'' являются независимыми (и независимыми от $\tilde{\rho}$) случайными величинами, принимающими значения в $\{-1, 1\}$, равномерно распределенными с $\text{sgn } \xi_0$. По Лемме 48 и Предложению 4 (которые применимы, т.к. $\mathbb{P}[(\tilde{\rho}, \sigma', \sigma'') \in \mathbb{K}_0] = 1$ при $\alpha \in (0, 1)$), мы имеем, что $\Phi_0(\tilde{\rho}_n, \text{sgn } \xi_0, \text{sgn } \xi_n)$ сходится как случайный элемент в $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{Q}$ к $\Phi_0(\tilde{\rho}, \sigma', \sigma'')$ при $n \rightarrow \infty$. Интегрируя f^+ и f^- по компонентам $\Phi_0(\tilde{\rho}_n, \text{sgn } \xi_0, \text{sgn } \xi_n)$ и $\Phi_0(\tilde{\rho}, \sigma', \sigma'')$, мы приходим к требуемому результату. ■

Доказательство Теоремы 17 в случае $\alpha \in (0, 1)$ может быть завершено следующим образом. Очевидно, мы имеем $S(\kappa) \rightarrow S$ п.н. при $\kappa \downarrow 0$. Остальные условия Леммы 31 проверены выше. Применяя Лемму 31, получаем $S_n \rightarrow S$ по распределению при $n \rightarrow \infty$. Доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 18

Из Теоремы 14 следует, что если произошло E_n , определенное в Лемме 40, то число вещественных нулей G_n совпадает с числом вещественных корней уравнения

$$(\xi_{\tau_n} z^{\tau_n} + \xi_0) (\xi_n z^{n-\tau_n} + \xi_{\tau_n}) = 0. \quad (2.81)$$

Число вещественных решений (2.81) зависит либо от четности чисел $0, \tau_n, n$, либо от знака коэффициентов $\xi_0, \xi_{\tau_n}, \xi_n$. Нетрудно показать, что $(-1)^{\tau_n}$ и $\text{sgn } \xi_{\tau_n}$ становятся асимптотически независимыми и что $\mathbb{P}[(-1)^{\tau_n} = 1] \rightarrow 1/2$ и $\mathbb{P}[\text{sgn } \xi_{\tau_n} = 1] \rightarrow c$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрение всех возможных случаев приводит к (2.24) и (2.25).

2.4.7. Доказательство Теоремы 15 и Теоремы 16

Доказательство Теоремы 15

Пусть ρ является пуассоновским точечным процессом с интенсивностью $\nu(dudv) := \alpha v^{-(\alpha+1)} dudv$ на $E = [0, 1] \times (0, \infty)$, где $\alpha \in (0, 1)$. Вычислим математическое ожидание L_α , обозначающее число отрезков мажоранты ρ . Обозначим ρ_{\neq}^2 множество упорядоченных пар различных атомов точечного процесса ρ . Для $P_1, P_2 \in E$ рассмотрим индикаторную функцию $f_\rho(P_1, P_2)$, принимающую значение 1 тогда и только тогда, когда не существует точек пуассоновского процесса, лежащих выше прямой, проходящей через P_1 и P_2 . Учитывая первый и последний отрезки мажоранты ρ по отдельности, получаем $\mathbb{E} L_\alpha = 2 + I_\alpha/2$, где

$$I_\alpha = \mathbb{E} \left[\sum_{(P_1, P_2) \in \rho_{\neq}^2} f_\rho(P_1, P_2) \right].$$

Вычислим I_α . Применяя формулу Сливняка-Меке (см. [193, Следствие. 3.2.3]), получаем

$$I_\alpha = \int_{E^2} \mathbb{E} [f_\rho(P_1, P_2)] \nu(dP_1) \nu(dP_2).$$

Обозначая $P_1 := (x_1, y_1)$, $P_2 := (x_2, y_2)$, приходим к

$$I_\alpha = \alpha^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E} [f_\rho(P_1, P_2)] y_1^{-\alpha-1} y_2^{-\alpha-1} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2.$$

Вероятность события, означающего, что у ρ нет точек, лежащих выше прямой $P_1 P_2$, является ненулевой, если только $P_1 P_2$ пересекает обе вертикальные стороны E . Следовательно,

$$I_\alpha = 2\alpha^2 \int \int_{X \times Y} \mathbb{E} [f_\rho(P_1, P_2)] y_1^{-\alpha-1} y_2^{-\alpha-1} dy_1 dy_2 dx_1 dx_2,$$

где

$$X := \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < x_2 < 1\}$$

и

$$Y = Y_{x_1, x_2} := \{(y_1, y_2) \in (0, \infty)^2 : y_1 x_2 - y_2 x_1 > 0, \quad y_2 - y_1 + y_1 x_2 - y_2 x_1 > 0\}.$$

Заменяем величины y_1, y_2 величинами

$$r := -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad u := 1 + \frac{y_2 - y_1}{y_1 x_2 - y_2 x_1}.$$

Имеем $(y_1, y_2) \in Y$ тогда и только тогда, когда $(r, u) \in (-\infty, 0) \times (1, \infty)$ или $(r, u) \in (0, \infty) \times (0, 1)$. Обратная трансформация задается формулой

$$y_1 = r \left(\frac{1}{1-u} - x_1 \right), \quad y_2 = r \left(\frac{1}{1-u} - x_2 \right).$$

Якобиан преобразования $(r, u) \mapsto (y_1, y_2)$ равен $r(x_2 - x_1)/(1-u)^2$. Обозначим $\tilde{f}_\rho(u, r) := f_\rho((x_1, y_1(u, r)), (x_2, y_2(u, r)))$. Из соображений симметрии, достаточно рассмотреть только случай $r > 0, u \in (0, 1)$. Действительно, рассмотрение только случая $r > 0$ означает, что мы ограничиваемся только отрезками мажоранты с положительным наклоном. Применяя формулу замены переменных, получаем

$$\begin{aligned} I_\alpha &= 4\alpha^2 \int_0^\infty \int_0^1 \int_X \mathbb{E}[\tilde{f}_\rho(u, r)] \\ &\quad \times r^{-2\alpha-1} \left(\frac{1}{1-u} - x_1 \right)^{-\alpha-1} \left(\frac{1}{1-u} - x_2 \right)^{-\alpha-1} \frac{x_2 - x_1}{(1-u)^2} dx_1 dx_2 du dr. \end{aligned}$$

Далее, по определению пуассоновского точечного процесса,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{f}_\rho(u, r)] &= \exp \left(- \int_{\{(x,y) \in E: y \geq -rx + \frac{r}{1-u}\}} \alpha y^{-(\alpha+1)} dy dx \right) \\ &= \exp \left(- \int_0^1 \left(-rx + \frac{r}{1-u} \right)^{-\alpha} dx \right) \\ &= \exp \left(- \frac{r^{-\alpha}}{(1-\alpha)(1-u)^{1-\alpha}} \right). \end{aligned} \tag{2.82}$$

Интеграл $J := \int_X (c - x_1)^\beta (c - x_2)^\beta (x_2 - x_1) dx_1 dx_2$, где $c > 1$, может быть вычислен, используя соотношение $(x_2 - x_1) = (c - x_1) - (c - x_2)$. Имеем:

$$J = \begin{cases} \frac{c^{2\beta+3} - (c-1)^{2\beta+3} - (2\beta+3)c^{\beta+1}(c-1)^{\beta+1}}{(\beta+1)(\beta+2)(2\beta+3)}, & \text{если } \beta \neq -1, -3/2, -2, \\ -4 \ln\left(\frac{c}{c-1}\right) + \frac{4}{\sqrt{c(c-1)}}, & \text{если } \beta = -3/2. \end{cases} \quad (2.83)$$

В случае $\alpha \neq 1/2$ воспользуемся (2.82) и (2.83), чтобы получить

$$I_\alpha = \frac{4\alpha}{(1-\alpha)(2\alpha-1)} \int_0^\infty \int_0^1 r^{-2\alpha-1} \exp\left(-\frac{r^{-\alpha}}{(1-\alpha)} \frac{1-u^{1-\alpha}}{(1-u)^{1-\alpha}}\right) \\ \times (1-u)^{2\alpha-3} [1 - u^{1-2\alpha} - (1-2\alpha)u^{-\alpha}(1-u)] dudr.$$

В случае $\alpha = 1/2$, объединяя (2.82) с (2.83), получаем

$$I_\alpha = 4 \int_0^\infty \int_0^1 r^{-2} \exp\left(-2r^{-1/2} \frac{1-u^{1/2}}{(1-u)^{1/2}}\right) (1-u)^{-2} [u^{-1/2}(1-u) + \ln u] dudr.$$

В обоих случаях, применяя формулу $\int_0^\infty r^{-2\alpha-1} e^{-cr^{-\alpha}} dr = (c^2\alpha)^{-1}$, приходим к

$$\mathbb{E} L_\alpha = \begin{cases} 2 + \frac{2(1-\alpha)}{(2\alpha-1)} \int_0^1 \frac{1-u^{1-2\alpha} - (1-2\alpha)u^{-\alpha}(1-u)}{(1-u)(1-u^{1-\alpha})^2} du, & \text{если } \alpha \neq 1/2, \\ 2 + \int_0^1 \frac{u^{-1/2}(1-u) + \ln u}{(1-u)(1-u^{1/2})^2} du, & \text{если } \alpha = 1/2. \end{cases} \quad (2.84)$$

Замечание 13. Вторая строчка является пределом первой строчки при $\alpha \rightarrow 1/2$, так что $\mathbb{E} L_\alpha$ зависит от α непрерывно. Если $\alpha = p/q \neq 1/2$ рационально, подстановка $v = u^{1/q}$ сводит интеграл в (2.84) к интегралу от рациональной функции, который может быть вычислен (см. таблицу в разделе 2.4.1). Численные методы дают основание полагать, что $\mathbb{E} L_\alpha$ возрастает по $\alpha \in (0, 1)$.

В оставшейся части доказательства мы вычислим интеграл в правой части (2.84) в терминах модулярной константы Барнса. Пусть

$$K_\alpha := \int_0^1 \frac{1 - u^{1-2\alpha} - (1-2\alpha)u^{-\alpha}(1-u)}{(1-u)(1-u^{1-\alpha})^2} du.$$

Положим $\beta := 1 - \alpha$. Вспомним, что $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ является логарифмической производной Гамма-функции. Используя формулы $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^\infty u^n$ и

$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right)$ (см. [57, § 1.7]), мы получаем, что для каждого $m > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{m\beta} \frac{1-u^{1-2\alpha}}{1-u} du &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u^{n+m\beta} (1-u^{1-2\alpha}) du \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+m\beta} - \frac{1}{n+(m+2)\beta} \right) - \frac{1}{(m+2)\beta} \\ &= \psi((m+2)\beta) - \psi(m\beta) - \frac{1}{m\beta}. \end{aligned}$$

При $m = 0$ значение интеграла равно $\psi(2\beta) + \gamma$, где $\gamma := -\psi(1)$ есть постоянная Эйлера – Маскерони (см. [57, п. 1.7.2]). Применяя разложение $\frac{1}{(1-u)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)u^m$, получаем $K_\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$, где

$$\begin{aligned} S_N &:= \sum_{m=1}^N (m+1) \left(\psi((m+2)\beta) - \psi(m\beta) - \frac{1}{m\beta} \right) - (N+1) \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} + \psi(2\beta) + \gamma \\ &= -2 \sum_{m=1}^N \psi(m\beta) + (N+1)\psi((N+2)\beta) + N\psi((N+1)\beta) - 2N \\ &\quad - \sum_{m=1}^N \frac{1}{m\beta} + \gamma - \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Второе равенство следует из элементарного преобразования телескопической суммы. Используя асимптотическое разложение $\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$ при $z \rightarrow \infty$, получаем

$$S_N = -2 \sum_{m=1}^N \psi(m\beta) + (2N+1) \log(\beta N) - 2N - \frac{1}{\beta} \log N + 1 - \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha} + o(1).$$

Сравнивая это с (2.21), приходим к

$$K_\alpha = 1 - 2C(1-\alpha) + \frac{\log(1-\alpha)}{1-\alpha} - \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}.$$

Подставляя это в (2.84), завершаем доказательство Теоремы 15.

Доказательство Теоремы 16

Докажем, что $\mathbb{P}[L_\alpha = 2] = 1 - \alpha$. Для точки $P \in E = [0, 1] \times (0, \infty)$ пусть $g_\rho(P)$ обозначает индикатор следующего события: не существует атомов

ρ , лежащих выше прямых, соединяющих P с точками $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Тогда

$$\mathbb{P}[L_\alpha = 2] = \mathbb{E} \left[\sum_{P \in \text{supp } \rho} g_\rho(P) \right].$$

По формуле Сливняка-Меке (см. [193, Следствие 3.2.3]),

$$\mathbb{P}[L_\alpha = 2] = \int_E \mathbb{E}[g_\rho(P)] \nu(dP) = \alpha \int_0^1 \int_0^\infty \mathbb{E}[g_\rho(x, y)] y^{-(\alpha+1)} dy dx. \quad (2.85)$$

Интенсивность пуассоновского процесса ρ , проинтегрированного по множеству $\{(u, v) \in E : u \in [0, x], v > yu/x\}$, равна

$$\int_0^x \int_{yu/x}^\infty \alpha v^{-(\alpha+1)} dudv = \int_0^x \left(\frac{yu}{x}\right)^{-\alpha} du = \frac{1}{1-\alpha} xy^{-\alpha}.$$

Из соображений симметрии, интенсивность ρ , проинтегрированная по множеству $\{(u, v) \in E : u \in [x, 1], v > y(u-1)/(x-1)\}$, равна $\frac{1}{1-\alpha}(1-x)y^{-\alpha}$. Следовательно,

$$\mathbb{E}[g_\rho(x, y)] = \exp\left(-\frac{1}{(1-\alpha)y^\alpha}\right).$$

Подставляя это в (2.85), получаем $\mathbb{P}[L_\alpha = 2] = 1 - \alpha$.

2.5. О распределении нулей случайной аналитической функции

Результаты данного параграфа были получены совместно с Э. Каблучко.

2.5.1. Введение

Формулировка задачи

Помимо простейших случайных полиномов вида (2.1) (см. § 2.1), в литературе существует множество других замечательных ансамблей случайных полиномов (в общем случае, случайных аналитических функций). Обычно эти

ансамбли характеризуются инвариантными свойствами по отношению к определенным группам преобразований и имеют следующий вид:

$$G_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k f_{k,n} z^k,$$

где ξ_0, ξ_1, \dots , как и прежде, суть независимые одинаково распределенные случайные величины, а $f_{k,n}$ – комплексные неслучайные коэффициенты. Целью данного параграфа является изучение поведения нулей G_n асимптотически при $n \rightarrow \infty$. Мы покажем, что при некоторых достаточно слабых ограничениях на коэффициенты $f_{k,n}$ последовательность случайных мер $\frac{1}{n} \mu_{G_n}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к некоторой предельной неслучайной мере μ . Предельная мера μ является *универсальной*, т.е. не зависящей от распределения коэффициентов ξ_k (см. рис. 2.3). Универсальность интенсивно изучалась в контексте случайных матриц (см., например, [213]). В литературе по случайным полиномам обычно рассматривается гауссовское распределение коэффициентов, т.к. в этом случае возможны явные вычисления (см., например, [66, 74, 96, 102, 126, 129, 195–197, 202, 203]). Единственным ансамблем случайных полиномов, для которого универсальность хорошо изучена, является рассмотренный в предыдущих параграфах данной главы ансамбль (2.1) (также см. [37, 45, 132, 133]). Для случайных полиномов было получено несколько результатов о *локальной универсальности* распределения нулей (см. [72, 154, 196, 197]). Целью данного параграфа является установление универсальности на *глобальной шкале*.

Данный параграф организован следующим образом. В разделах 2.5.2–2.5.2 мы сформулируем наши результаты для некоторых конкретных ансамблей случайных полиномов. Все они являются частными случаями общей Теоремы 25, формулировка которой, ввиду некоторой сложности, отложена до раздела 2.5.2. Доказательства представлены в разделах 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5.

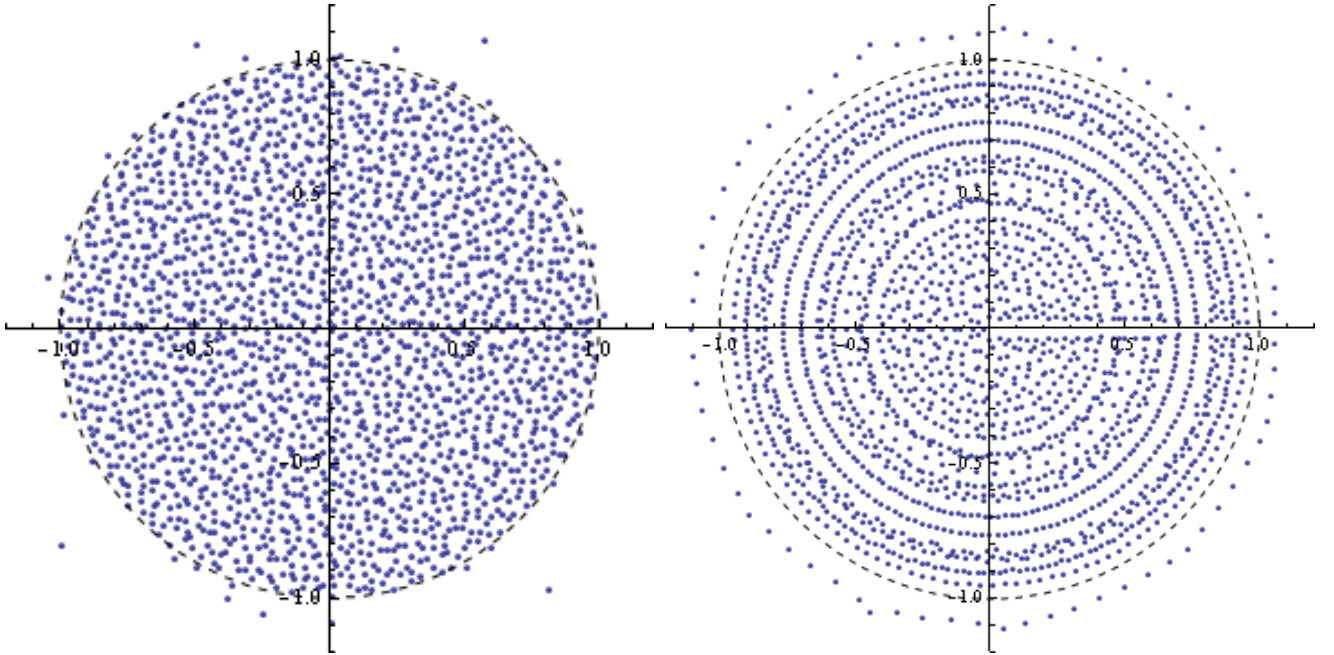


Рис. 2.3. Нули случайного полинома Вейля $\mathbf{W}_n(z) = \sum_{k=0}^n \xi_k \frac{z^k}{\sqrt{k!}}$ степени $n = 2000$. Нули поделены на \sqrt{n} . Слева: комплексные нормальные коэффициенты. Справа: вещественные коэффициенты с $\mathbb{P}[\log |\xi_k| > t] = t^{-4}$ при $t > 1$. В обоих случаях предельное распределение нулей равномерно в единичном круге.

2.5.2. Формулировка результатов

Три инвариантных ансамбля

Напомним, что $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ обозначает открытый круг радиуса $r > 0$ с центром в нуле, $\mathbb{D} := \mathbb{D}_1$, и λ обозначает меру Лебега на \mathbb{C} .

Зафиксируем параметр $\alpha > 0$. Начнем с рассмотрения следующих трех ансамблей случайных аналитических функций (см., например, [129, 203] и рисунок 2.4):

$$\mathbb{F}_n(z) := \begin{cases} \sum_{k=0}^n \xi_k \left(\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \right)^\alpha z^k, & (\text{эллиптическая модель, } n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \left(\frac{n^k}{k!} \right)^\alpha z^k, & (\text{плоская модель, } n > 0, z \in \mathbb{C}), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \left(\frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \right)^\alpha z^k, & (\text{гиперболическая модель, } n > 0, z \in \mathbb{D}). \end{cases}$$

Заметим, что в эллиптическом случае \mathbb{F}_n является случайным полиномом степени n , в плоском случае – случайной аналитической функцией, тогда как в гиперболическом случае – случайной аналитической функцией, определенной

в единичном круге \mathbb{D} .

В частном случае, когда $\alpha = 1/2$ и ξ_k являются комплекснозначными стандартными гауссовскими величинами с плотностью распределения

$$z \mapsto \pi^{-1} \exp\{-|z|^2\}$$

относительно меры Лебега на \mathbb{C} , нули этих аналитических функций обладают интересными свойствами (см. [129, 203]). А именно, в плоском случае распределение нулей \mathbb{F}_n инвариантно относительно движений плоскости \mathbb{C} . В эллиптическом (соответственно, гиперболическом) случае, распределение нулей \mathbb{F}_n инвариантно относительно изометрий римановой сферы $\bar{\mathbb{C}}$ (соответственно, единичного круга \mathbb{D}), сохраняющих сферическую метрику постоянной положительной кривизны (соответственно, гиперболическую метрику постоянной отрицательной кривизны). Таким образом, данные три ансамбля соответствуют трем двумерным геометрическим моделям постоянной кривизны. Если $\alpha = 1/2$ и ξ_k являются комплекснозначными стандартными гауссовскими величинами, математическое ожидание числа нулей \mathbb{F}_n , лежащих в борелевском множестве B , может быть явно вычислено:

$$\mathbb{E} [\mu_{\mathbb{F}_n}(B)] = \begin{cases} \frac{n}{\pi} \int_B (1 + |z|^2)^{-2} \lambda(dz), & (\text{эллиптическая модель, } B \subset \mathbb{C}), \\ \frac{n}{\pi} \lambda(B), & (\text{плоская модель, } B \subset \mathbb{C}), \\ \frac{n}{\pi} \int_B (1 - |z|^2)^{-2} \lambda(dz), & (\text{гиперболическая модель, } B \subset \mathbb{D}). \end{cases}$$

Следующая теорема устанавливает универсальность предельного распределения нулей \mathbb{F}_n .

Теорема 19. *Рассмотрим невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_0, ξ_1, \dots , такие что $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$. При $n \rightarrow \infty$ последовательность случайных мер $\frac{1}{n} \mu_{\mathbb{F}_n}$ сходится по вероятности к*

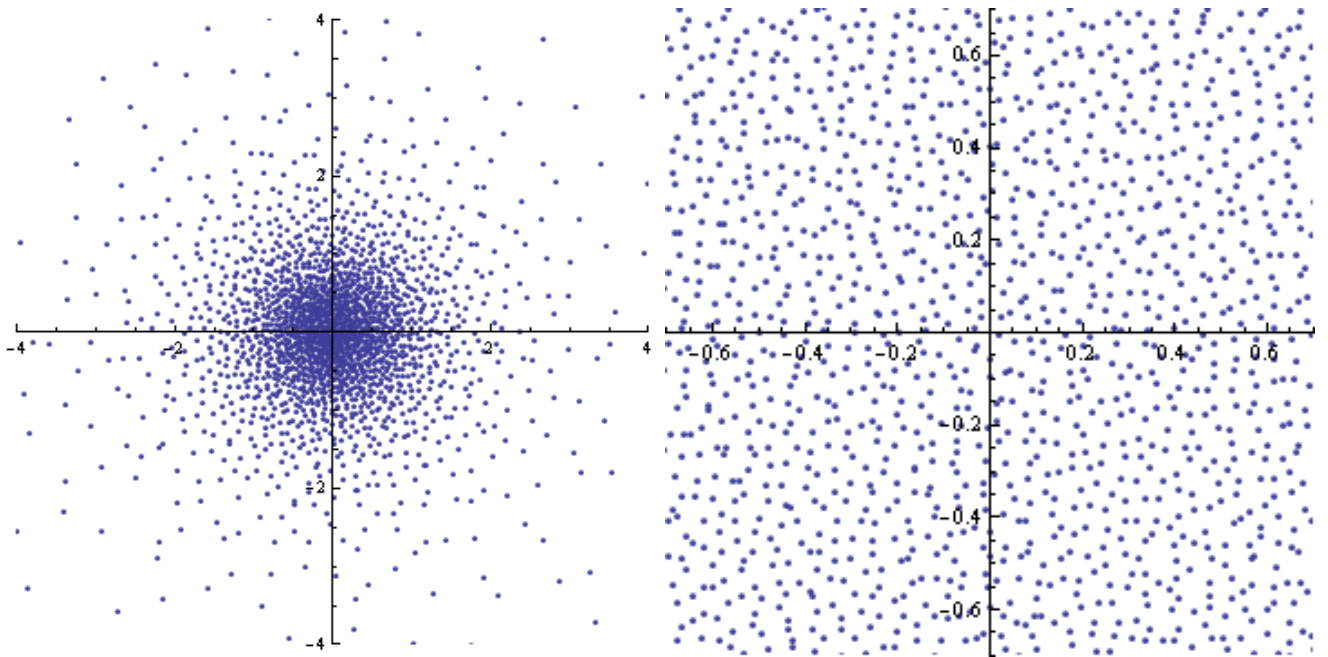


Рис. 2.4. Нули в эллиптической (слева) и плоской (справа) моделях с $\alpha = 1/2$ и $n = 2000$. Коэффициенты комплексные нормальные.

неслучайной мере с плотностью ρ_α по отношению к мере Лебега, где

$$\rho_\alpha(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi\alpha} |z|^{\frac{1}{\alpha}-2} (1 + |z|^{\frac{1}{\alpha}})^{-2}, & (\text{эллиптическая модель, } z \in \mathbb{C}), \\ \frac{1}{2\pi\alpha} |z|^{\frac{1}{\alpha}-2}, & (\text{плоская модель, } z \in \mathbb{C}), \\ \frac{1}{2\pi\alpha} |z|^{\frac{1}{\alpha}-2} (1 - |z|^{\frac{1}{\alpha}})^{-2}, & (\text{гиперболическая модель, } z \in \mathbb{D}). \end{cases}$$

Случайные полиномы Литтлвуда-Оффорда

Далее мы рассмотрим ансамбль случайных полиномов, представленный Литтлвудом и Оффордом (см. [158, 159]), который имеет отношение к плоской модели. Начнем с мотивировки. Пусть ξ_0, ξ_1, \dots являются невырожденными независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Пусть дана последовательность w_0, w_1, \dots . Рассмотрим случайный полином

$$\mathbf{W}_n(z) := \sum_{k=0}^n \xi_k w_k z^k. \quad (2.86)$$

При $w_k = 1$ мы получаем полином Каца, для которого имеет место концентрация нулей около единичной окружности. Следующий результат показывает, что

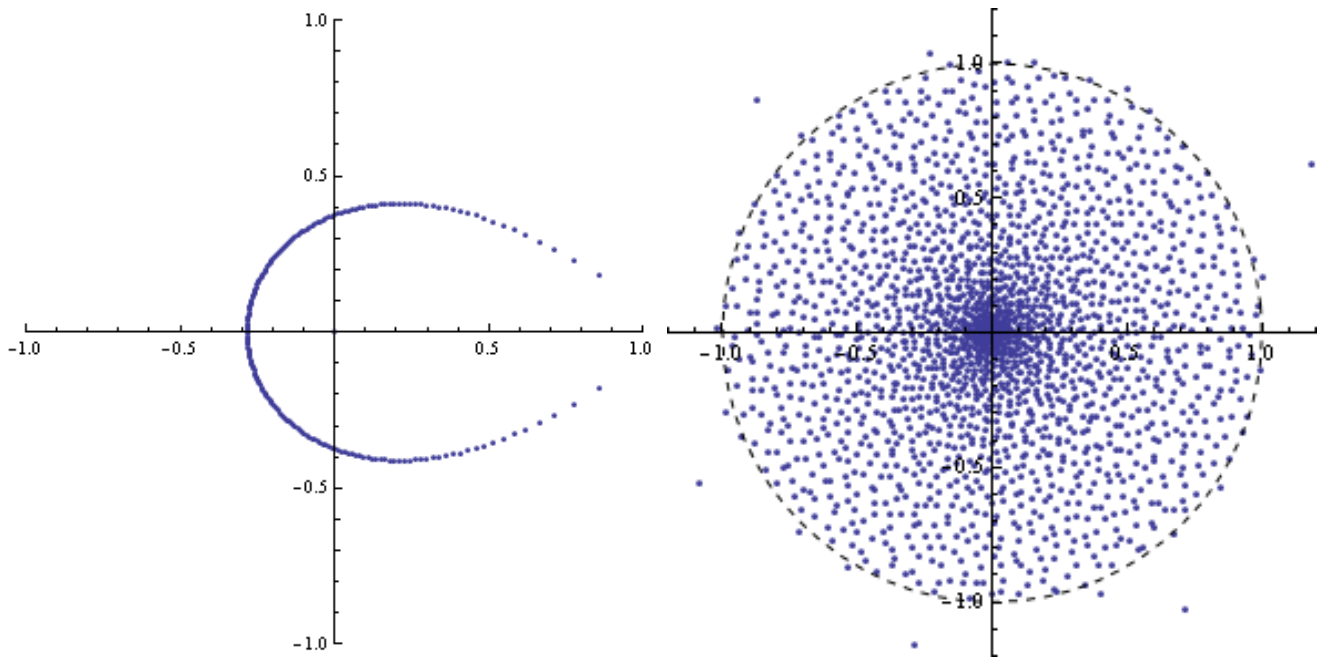


Рис. 2.5. Слева: нули полинома Сеге $s_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ степени $n = 200$. Справа: нули случайного полинома Литтлвуда-Оффорда $\mathbf{W}_n(z) = \sum_{k=0}^n \xi_k \frac{z^k}{k!}$ степени $n = 2000$ с комплексными нормальными коэффициентами. Нули поделены на n .

структура нулей не сильно отличается от случая полинома Каца, если последовательность w_k не слишком быстро растет или убывает.

Теорема 20. *Рассмотрим невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_0, ξ_1, \dots , такие что $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log |w_k| = w$ для некоторой постоянной $w \in \mathbb{R}$, то последовательность случайных мер $\frac{1}{n} \mu_{\mathbf{W}_n}$ сходится по вероятности к равномерному распределению на окружности радиуса e^{-w} с центром в нуле.*

Нам бы хотелось построить пример, в котором нет концентрации около окружности. Очевидно, последовательность $\log |w_k|$ должна расти или убывать быстрее линейной. Естественным кажется рассмотрение случая, в котором $\log |w_k|$ пропорционально $-k \log k$. Более строго: будем предполагать, что выполнено

$$\log |w_k| = -\alpha(k \log k - k) - \beta k + o(k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.87)$$

где $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$ некоторые параметры. Частными случаями являются поли-

НОМЫ

$$\mathbf{W}_n^{(1)}(z) := \sum_{k=0}^n \frac{\xi_k}{(k!)^\alpha} z^k, \quad \mathbf{W}_n^{(2)}(z) := \sum_{k=0}^n \frac{\xi_k}{k^{\alpha k}} z^k, \quad \mathbf{W}_n^{(3)}(z) := \sum_{k=0}^n \frac{\xi_k}{\Gamma(\alpha k + 1)} z^k.$$

Семейство $\mathbf{W}_n^{(1)}$ изучалось Литтлвудом и Оффордом (см. [158, 159]) в одной из ранних работ по случайным полиномам. Их интересовало число вещественных нулей. Следующая теорема описывает поведение комплексных нулей \mathbf{W}_n .

Теорема 21. *Рассмотрим невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_0, ξ_1, \dots , такие что $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$. Пусть w_0, w_1, \dots является последовательностью комплексных чисел, удовлетворяющих (2.87). С вероятностью 1, последовательность случайных мер $\frac{1}{n} \mu_{\mathbf{W}_n}(e^\beta n^\alpha \cdot)$ сходится к неслучайной вероятностной мере с плотностью*

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi\alpha} |z|^{\frac{1}{\alpha}-2} \mathbb{1}_{z \in \mathbb{D}} \quad (2.88)$$

относительно меры Лебега на \mathbb{C} .

Замечание 14. Мера $\mu_{\mathbf{W}_n}(e^\beta n^\alpha \cdot)$ считает точки вида $\frac{z}{e^\beta n^\alpha}$, где z – нуль \mathbf{W}_n .

Для так называемых *полиномов Вейля* $\mathbf{W}_n(z) := \sum_{k=0}^n \xi_k \frac{z^k}{\sqrt{k!}}$ с $\alpha = 1/2$ и $\beta = 0$ предельное распределение равномерно на \mathbb{D} ; см. рис. 2.3. Этот результат является аналогом известного кругового закона для распределения собственных значений неэрмитовых случайных матриц с независимыми одинаково распределенными элементами (см. [76, 213]). Форрестер и Хоннер (см. [110]) сформулировали без доказательства круговой закон для полиномов Вейля и обсудили сходства и различия между матричным и полиномиальным случаями (также см. [151]). Аналогия между случайными матрицами и полиномами Вейля не просто совпадение предельных распределений. Обе модели тесно связаны с теорией логарифмического потенциала на \mathbb{C} при наличии внешнего поля $\frac{1}{2}|z|^2$ (подробности см. в разделе 2.5.2).

При дополнительных незначительных ограничениях на w_k можно показать, что условие конечности логарифмического момента является не только

достаточным, но и необходимым для п.н.-сходимости эмпирических мер нулей. Легко проверить, что эти дополнительные условия выполняются для $\mathbf{W}_n = \mathbf{W}_n^{(i)}$ с $i = 1, 2, 3$.

Теорема 22. *Рассмотрим невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_0, ξ_1, \dots . Пусть w_0, w_1, \dots является последовательностью комплексных чисел, удовлетворяющих (2.87), и пусть для некоторого $C > 0$ выполнено*

$$|w_{n-k}/w_n| < Ce^{\beta k} n^{\alpha k} \text{ при всех } n \in \mathbb{N}, k \leq n. \quad (2.89)$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. С вероятностью 1, последовательность случайных мер $\frac{1}{n}\mu_{\mathbf{W}_n}(e^\beta n^\alpha \cdot)$ сходится по вероятности к мере на \mathbb{D} с плотностью (2.88).
2. $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$.

Подчеркнем, что все наши результаты предполагают невырожденность случайных величин ξ_k . Чтобы показать необходимость данного условия, рассмотрим неслучайный полином

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}. \quad (2.90)$$

Классический результат Сеге (см. [212]) утверждает, что нули $s_n(nz)$ асимптотически концентрируются (при $n \rightarrow \infty$) вдоль кривой $\{z \in \mathbb{C} : |ze^{1-z}| = 1\} \cap \mathbb{D}$ (см. рис. 2.5 слева). Данное поведение значительно отличается от распределения на \mathbb{D} с плотностью $1/(2\pi|z|)$, которое следует из Теоремы 21 для тех же полиномов, но с рандомизированными коэффициентами (см. рис. 2.5 справа).

Целые функции Литтлвуда-Оффорда

Далее мы рассмотрим случайные целые функции, которые были также введены Литтлвудом и Оффордом (см. [161, 162]). Их целью было описание

свойств “типичной” целой функции заданного порядка $1/\alpha$. Пусть дана последовательность комплексных чисел w_0, w_1, \dots , удовлетворяющих (2.87). Рассмотрим случайную целую функцию

$$\mathbf{W}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k w_k z^k. \quad (2.91)$$

Следующие функции даны в качестве примеров:

$$\mathbf{W}^{(1)}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{(k!)^\alpha} z^k, \quad \mathbf{W}^{(2)}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{k^{\alpha k}} z^k, \quad \mathbf{W}^{(3)}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{\Gamma(\alpha k + 1)} z^k.$$

Первая функция есть ни что иное, как уже рассмотренная плоская модель: $\mathbf{W}(n^\alpha z) = \mathbb{F}_n(z)$. При $\alpha = 1$ она является рандомизированной версией ряда Тейлора для экспоненты. Последняя функция является рандомизированной версией функции Миттага-Леффлера. Нашей целью является описание плотности нулей \mathbf{W} на глобальной шкале. Имеет место следующее усиление плоского случая Теоремы 19.

Теорема 23. *Рассмотрим невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_0, ξ_1, \dots , такие что $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$. Пусть последовательность комплексных чисел w_0, w_1, \dots удовлетворяет (2.87). С вероятностью 1, последовательность $\frac{1}{n} \mu_{\mathbf{W}}(e^\beta n^\alpha \cdot)$ сходится к неслучайной мере с плотностью*

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi\alpha} |z|^{\frac{1}{\alpha}-2} \quad (2.92)$$

относительно меры Лебега на \mathbb{C} .

В качестве следствия получаем закон больших чисел для нулей \mathbf{W} .

Следствие 17. *Пусть $N(r) := \mu_{\mathbf{W}}(\mathbb{D}_r)$ обозначает число нулей \mathbf{W} в круге \mathbb{D}_r . В условиях Теоремы 23 выполнено*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r^{1/\alpha}} = e^{-\beta/\alpha} \quad \text{н.н.}$$

В случае $\alpha = 1/2$ предельная мера в Теореме 23 имеет постоянную плотность $1/\pi$. Отличие между предельными плотностями в Теореме 21 и Теореме 23 в том, что в последней нет ограничения на единичный круг. Функция (2.91) в случае бернулиевских случайных величин ξ_k была рассмотрена Литтлвудом и Оффордом (см. [161, 162]). Они получили некоторые нестрогие оценки на распределение нулей \mathbf{W} при условии $\log |w_k| \sim -\alpha k \log k$ при $k \rightarrow \infty$.

Опять отметим важность условия невырожденности. Экспонента e^z не имеет комплексных нулей, тогда как нули ее рандомизированной версии $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \frac{z^k}{k!}$ имеют предельную плотность $1/(2\pi|z|)$ на \mathbb{C} . При этом абсолютные значения нулей имеют постоянную предельную плотность, равную 1 на $(0, \infty)$.

Рандомизированная тета-функция

Зафиксируем параметр $\alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ и рассмотрим случайную аналитическую функцию

$$\mathbf{H}_n(z) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e^{n^{1-\alpha} k^\alpha} z^k, & (\text{при } \alpha < 1, z \in \mathbb{D}), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e^{-n^{1-\alpha} k^\alpha} z^k, & (\text{при } \alpha > 1, z \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

Теорема 24. *Рассмотрим невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_0, ξ_1, \dots , такие что $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$. При $n \rightarrow \infty$ последовательность случайных мер $\frac{1}{n} \mu_{\mathbf{H}_n}$ сходится по вероятности к неслучайной мере с плотностью*

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi\alpha|1-\alpha|} \frac{1}{|z|^2} \left| \frac{\log |z|}{\alpha} \right|^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}$$

относительно меры Лебега на \mathbb{C} . Плотность ограничена в \mathbb{D} в случае $\alpha < 1$ и в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ в случае $\alpha > 1$.

Когда параметр α перепрыгивает значение 1, нули \mathbf{H}_n прыгают из единичного диска \mathbb{D} в его дополнение $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ (см. рис. 2.6 слева в случае $\alpha = 2$). Отметим, что формально случай $\alpha = 1$ соответствует полиномам Каца, у которых нули концентрируются на границе \mathbb{D} . Частный случай $\alpha = 2$ соответствует

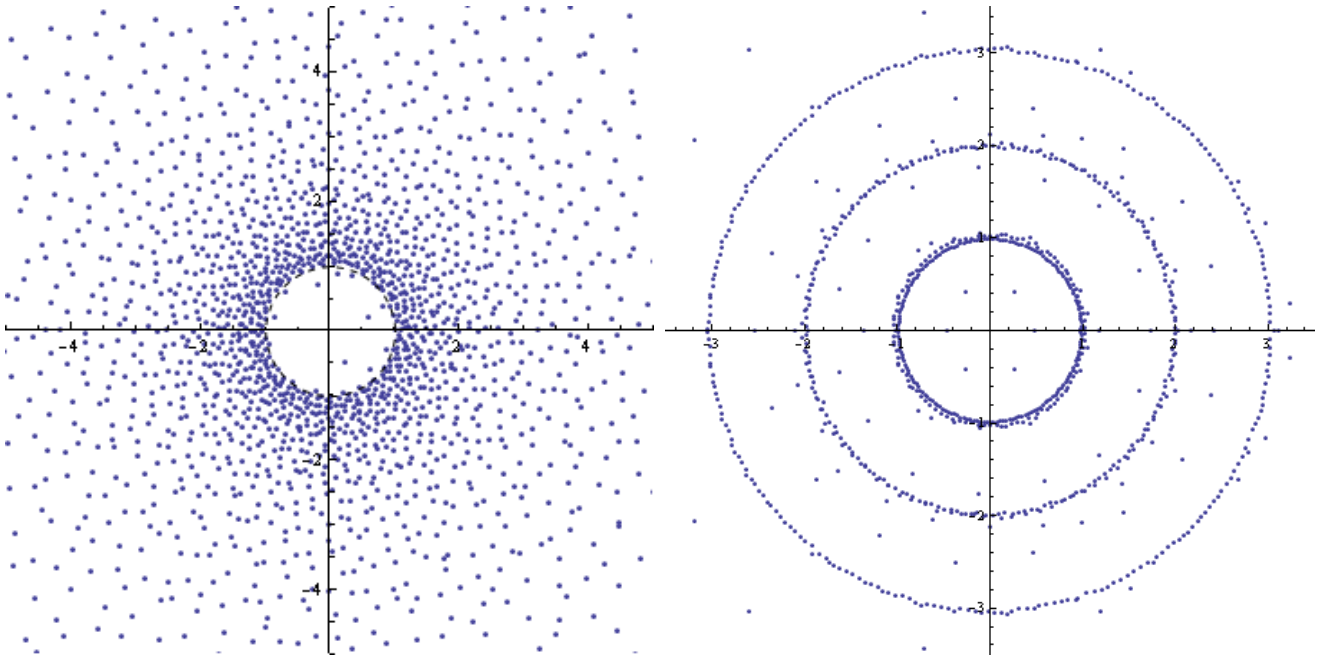


Рис. 2.6. Слева: нули рандомизированной тета-функции $\mathbf{H}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e^{-\frac{k^2}{n}} z^k$ с $n = 2000$ и нормально распределенными коэффициентами. Справа: нули случайного полинома из Примера 14 с $n = 300$ в случае распределения Коши.

рандомизированной тета-функции

$$\mathbf{H}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e^{-\frac{k^2}{n}} z^k. \quad (2.93)$$

Предельное распределение нулей имеет плотность $\frac{1}{4\pi|z|^2}$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Если суммирование в (2.93) произвести по $k \in \mathbb{Z}$, нули заполнят всю комплексную плоскость в соответствии с этой же плотностью.

Аналогичная модель была рассмотрена Шером и Маджумдаром (см. [190]): $\mathfrak{Q}_n(z) := \sum_{k=0}^n \xi_k e^{-k^\alpha} z^k$, где $\alpha > 1$. Предполагая, что ξ_k вещественны, они показали, что почти все нули \mathfrak{Q}_n становятся вещественными при $\alpha > 2$. В нашей модели распределение аргументов нулей остается равномерным при всех α .

Общий результат

Сформулируем теорему, из которой вытекают все примеры, рассмотренные выше. Рассмотрим невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_0, ξ_1, \dots , такие что $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$. Пусть дан

случайный ряд Тейлора

$$G_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k f_{k,n} z^k, \quad (2.94)$$

где $f_{k,n} \in \mathbb{C}$ являются неслучайными коэффициентами. Предположим, что существует функция $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и число $T_0 \in (0, \infty]$, такие что

$$(A1) \quad f(t) > 0 \text{ при } t < T_0 \text{ и } f(t) = 0 \text{ при } t > T_0;$$

$$(A2) \quad f \text{ непрерывна на } [0, T_0) \text{ и при } T_0 < +\infty \text{ непрерывна слева в } T_0;$$

$$(A3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in [0, An]} \left| |f_{k,n}|^{1/n} - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = 0 \text{ при всех } A > 0;$$

$$(A4) \quad R_0 := \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)^{-1/t} \in (0, \infty] \text{ и } \liminf_{n, \frac{k}{n} \rightarrow \infty} |f_{k,n}|^{-1/k} \geq R_0.$$

Позже будет показано, что условие (A4) гарантирует, что ряд (2.94) сходится в круге \mathbb{D}_{R_0} с вероятностью 1. Пусть $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ обозначает преобразование Лежандра-Фенхеля функции $u(t) := -\log f(t)$, где $\log 0 := -\infty$:

$$I(s) := \sup_{t \geq 0} (st - u(t)) = \sup_{t \geq 0} (st + \log f(t)). \quad (2.95)$$

Отметим, что I является выпуклой функцией, $I(s)$ конечно при $s < \log R_0$ и $I(s) = +\infty$ при $s > \log R_0$. Напомним, что μ_{G_n} обозначает меру, приписывающую каждому нулю G_n вес, равный его кратности.

Теорема 25. *В условиях, сформулированных выше, последовательность случайных мер $\frac{1}{n} \mu_{G_n}$ сходится по вероятности к некоторой неслучайной локально конечной мере μ в круге \mathbb{D}_{R_0} . Мера μ является инвариантной относительно поворотов и определяется следующими значениями на кругах:*

$$\mu(\mathbb{D}_r) = I'(\log r), \quad r < R_0, \quad (2.96)$$

где I' обозначает левую производную I .

Так как I выпукла, левая производная существует почти везде на $(-\infty, \log R_0)$ и является неубывающей функцией, непрерывной слева. Так как супремум

в (2.95) берется по $t \geq 0$, имеем $\lim_{s \rightarrow -\infty} I'(s) = 0$. Следовательно, μ не имеет атома в нуле. Если I' является абсолютно непрерывной на некотором интервале $(\log r_1, \log r_2)$, тогда плотность μ в кольце $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ относительно меры Лебега на \mathbb{C} равна

$$\rho(z) = \frac{I''(\log |z|)}{2\pi|z|^2}. \quad (2.97)$$

Можно задаться вопросом, какая мера μ может выступать в качестве предельной в Теореме 25. Очевидно, μ должна быть инвариантной относительно поворотов и без атома в 0. Следующая теорема показывает, что никаких других существенных ограничений не требуется.

Теорема 26. Пусть μ является мерой на \mathbb{C} , инвариантной относительно поворотов, такой что

1. $\mu(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{R_0}) = 0$, где $R_0 := \sup\{r > 0 : \mu(\mathbb{D}_r) < \infty\} \in (0, \infty]$.
2. $\int_0^R \mu(\mathbb{D}_r) r^{-1} dr < \infty$ для некоторого (следовательно, для любого) $R < R_0$.

Тогда существует случайный ряд Тейлора G_n вида (2.94) с радиусом сходимости R_0 п.н., такой что последовательность $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ сходится по вероятности к μ в круге \mathbb{D}_{R_0} .

Пример 14. Рассмотрим случайный полином

$$G_n(z) := \sum_{k=0}^n \xi_k z^k + 2^n \sum_{k=n+1}^{2n} \xi_k \left(\frac{z}{2}\right)^k + \left(\frac{9}{2}\right)^n \sum_{k=2n+1}^{3n} \xi_k \left(\frac{z}{3}\right)^k. \quad (2.98)$$

Применим Теорему 25 с

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1], \\ (\log 2)(t - 1), & t \in [1, 2], \\ (\log 3)t - \log \frac{9}{2}, & t \in [2, 3], \\ +\infty, & t \geq 3, \end{cases} \quad I(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ s, & s \in [0, \log 2], \\ 2s - \log 2, & s \in [\log 2, \log 3], \\ 3s - \log 6, & t \geq \log 3. \end{cases}$$

Функция u' имеет три интервала постоянства длины 1, на которых она принимает значения $0, \log 2, \log 3$. Соответственно функция I' имеет три скачка размера 1 в $0, \log 2, \log 3$ и является локально постоянной вне этих точек. Следовательно, предельное распределение нулей G_n является суммой равномерных вероятностных распределений на трех концентрических окружностях с радиусами 1, 2, 3 (см. рис. 2.6).

Замечание 15. Предположим, что G_n удовлетворяет условиям Теоремы 25. Тогда этим же условиям удовлетворяет производная G'_n (более того, в обоих случаях f одна и та же). Тогда производная G_n любого фиксированного порядка имеет то же предельное распределение, что и сама функция G_n . Аналогично, для любой комплексной последовательности c_n , такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |c_n| \leq f(0),$$

функция $G_n(z) - c_n$ удовлетворяет этим условиям. Следовательно, предельное распределение корней уравнения $G_n(z) = c_n$ такое же, как и у нулей G_n .

Связь с ортогональными полиномами и логарифмическим потенциалом

Тождество $\frac{1}{2\pi} \Delta \log |z - z_0| = \delta(z_0)$ влечет важную формулу

$$\mu_{G_n} = \frac{1}{2\pi} \Delta \log |G_n(z)|, \quad (2.99)$$

где лапласиан Δ понимается в смысле распределений. Первым шагом в доказательстве Теореме 25 является доказательство предельной формы (2.99).

Теорема 27. В условиях раздела 2.5.2, для любого $z \in \mathbb{D}_{R_0} \setminus \{0\}$ выполнено

$$p_n(z) := \frac{1}{n} \log |G_n(z)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} I(\log |z|). \quad (2.100)$$

Замечание 16. Объединяя (2.99) и (2.100), мы получаем, по крайней мере формально, следующую версию (2.96): $\mu = \frac{1}{2\pi} \Delta(I(\log |z|))$.

Мера μ может интерпретироваться как равновесная мера для логарифмического потенциала в присутствии внешнего поля (см. [188]). Предположим, что выполняются предположения раздела 2.5.2 и, более того, функция u выпукла на $(0, T_0)$. Так как мы хотим иметь дело с конечными мерами, зафиксируем некоторое $\kappa \in (0, T_0)$ и рассмотрим урезанную версию G_n :

$$G_n^{(\kappa)}(z) := \sum_{k=0}^{[\kappa n]} \xi_k f_{k,n} z^k.$$

Если G_n удовлетворяет условиям (A1)–(A4) раздела 2.5.2, тогда им же удовлетворяет и производная $G_n^{(\kappa)}$ с

$$u^{(\kappa)}(t) := \begin{cases} u(t), & t \in [0, \kappa] \\ +\infty, & t > \kappa. \end{cases}$$

По Теореме 25, последовательность $\frac{1}{n} \mu_{G_n^{(\kappa)}}$ сходится по вероятности к предельной мере, которую мы обозначим $\mu^{(\kappa)}$.

Предложение 6. Мера $\mu^{(\kappa)}$ является единственной мерой, минимизирующей функционал

$$J(\nu) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \log \frac{1}{|z-w|} \nu(dz) \nu(dw) + \int_{\mathbb{C}} I(\log |z|) \nu(dz)$$

по множеству всех мер ν на \mathbb{C} , имеющих общую массу κ .

Обозначим $S^{(\kappa)}$ носитель меры $\mu^{(\kappa)}$. Из интерпретации $\mu^{(\kappa)}$ как образа меры Лебега при отображении $t \mapsto \exp\{(u^{(\kappa)})'(t)\}$ следует следующее свойство монотонности: если $\kappa_1 < \kappa_2$, то $S^{(\kappa_1)} \subset S^{(\kappa_2)}$. Если левая производная $u^{(\kappa)}$ не имеет интервала постоянства, тогда меры $\mu^{(\kappa_1)}$ и $\mu^{(\kappa_2)}$ совпадают на $S^{(\kappa_1)}$.

Открытые вопросы

Мы установили глобальную универсальность распределения нулей при условии конечности логарифмического момента. Мы считаем, что локальная универсальность комплексных нулей, а также локальная и глобальная универсальность вещественных нулей в моделях, рассматриваемых здесь, могут быть

установлены при более сильных моментных ограничениях. Например, должна существовать локальная универсальность распределений из области притяжения устойчивого закона с параметром α , где $\alpha \in (0, 2]$, тем не менее, разные значения α должны соответствовать разным классам универсальности. Распределение нулей полинома Каца \mathbb{K}_n в случае логарифмически убывающих хвостов было изучено в § 2.4. Мы считаем, что в общей постановке, рассматриваемой здесь, должны выполняться аналогичные результаты. В частности, нули должны обладать круговой структурой, аналогичной той, которая была найдена в Теореме 13 (см. рис. 2.3 справа). Также наши результаты должны обобщаться на системы аналитических функций многих переменных. В Теоремах 21, 23 нами доказана п.н.-сходимость эмпирических распределений нулей в моделях Литтлвуда-Оффорда. Однако неизвестно, можно ли заменить сходимость по вероятности на сходимость п.н. в Теореме 19. Мы также не знаем, можно ли подход, используемый в разделе 2.5.2, применить к полиномам, ортогональным относительно меры, которая необязательно инвариантна относительно поворотов.

2.5.3. Доказательства: частные случаи

Докажем результаты раздела 2.5.1. Для этого мы проверим выполнение условий раздела 2.5.2 и применим Теорему 25. Напомним обозначение $u(t) := -\log f(t)$.

Доказательство. [Доказательство Теоремы 20.] Мы можем предполагать, что $w = 0$, так как в противном случае можно рассмотреть полином $\mathbf{W}_n(e^{-w}z)$. Из соотношения $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log |w_k| = 0$ следует, что условия (A1)–(A4) из раздела 2.5.2 выполняются с $T_0 = 1$, $R_0 = +\infty$ и

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1], \\ +\infty, & t > 1. \end{cases}$$

Преобразование Лежандра-Фенхеля функции u есть $I(r) = \max(0, r)$. Из (2.96) следует, что μ является равномерной вероятностной мерой на \mathbb{T} . ■

Замечание 17. При немного более ограничительном предположении $\mathbb{E} \log |\xi_0| < \infty$ Теорему 20 можно вывести из работы [131] (которая частично основана на неравенстве Эрдеша-Турана). Однако этот метод требует субэкспоненциального роста коэффициентов и поэтому не работает для других примеров, рассматриваемых здесь.

Доказательство. [Доказательство 19] По формуле Стирлинга, $\log n! = n \log n - n + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому условие (A3) выполняется с

$$u(t) = \begin{cases} \alpha(t \log t + (1-t) \log(1-t)), & (0 \leq t \leq 1, \text{ эллиптическая модель}), \\ \alpha(t \log t - t), & (t \geq 0, \text{ плоская модель}), \\ \alpha(t \log t - (1+t) \log(1+t)), & (t \geq 0, \text{ гиперболическая модель}). \end{cases}$$

В эллиптическом случае, $u(t) = +\infty$ при $t > 1$. Преобразование Лежандра-Фенхеля функции u есть

$$I(s) = \begin{cases} \alpha \log(1 + e^{s/\alpha}), & (s \in \mathbb{R}, \text{ эллиптическая модель}), \\ \alpha e^{s/\alpha}, & (s \in \mathbb{R}, \text{ плоская модель}), \\ -\alpha \log(1 - e^{s/\alpha}), & (s < 0, \text{ гиперболическая модель}). \end{cases}$$

В гиперболическом случае, $I(s) = +\infty$ при $s \geq 0$. Мы имеем $R_0 = 1$ в гиперболическом случае и $R_0 = +\infty$ в оставшихся двух. Для завершения доказательства осталось применить Теорему 25. ■

Доказательство. [Доказательство Теоремы 21] Применим Теорему 25 к полиному $G_n(z) = \mathbf{W}_n(e^\beta n^\alpha z)$. Имеем: $f_{k,n} = e^{\beta k + \alpha k \log n} w_k$. Из (2.87) следует, что условие (A3) выполняется с

$$u(t) = \begin{cases} \alpha(t \log t - t), & t \in [0, 1], \\ +\infty, & t > 1. \end{cases}$$

Преобразование Лежандра-Фенхеля функции u есть

$$I(s) = \begin{cases} \alpha e^{s/\alpha}, & s \leq 0, \\ \alpha + s, & s \geq 0. \end{cases}$$

Применяя Теорему 25, получаем, что $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ сходится по вероятности к требуемому пределу. Сходимость п.н. будет установлена в разделе 2.5.5. ■

Доказательство. [Доказательство Теоремы 23] Применим Теорему 25 к $G_n(z) = \mathbf{W}(e^\beta n^\alpha z)$. Имеем: $u(t) = \alpha(t \log t - t)$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, $I(s) = \alpha e^{s/\alpha}$ при всех $s \in \mathbb{R}$. Из Теоремы 25 следует сходимость по вероятности. Сходимость п.н. будет установлена в разделе 2.5.5. ■

Доказательство. [Доказательство Теоремы 24] Положим $\sigma = +1$ при $\alpha > 1$ и $\sigma = -1$ при $\alpha < 1$. Имеем: $u(t) = \sigma t^\alpha$ при $t \geq 0$. Следовательно,

$$I(r) = \begin{cases} \sigma(\alpha - 1) \left(\frac{\sigma r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, & \sigma r \geq 0, \\ +\infty, & \sigma r < 0. \end{cases}$$

Доказательство завершается применением Теоремы 25. ■

2.5.4. Доказательство Теоремы 27

Условие конечности логарифмического момента

Следующая лемма является единственным местом в доказательстве, где используется условие конечности логарифмического момента.

Лемма 50. *Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_0, ξ_1, \dots . Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$M := \sup_{k=0,1,\dots} \frac{|\xi_k|}{e^{\varepsilon k}} < +\infty \text{ п.н.} \iff \mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty. \quad (2.101)$$

Доказательство. Для любой неотрицательной случайной величины X выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k] \leq \mathbb{E} X \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k].$$

Полагая $X = \frac{1}{\varepsilon} \log(1 + |\xi_0|)$, получаем, что $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[|\xi_0| \geq e^{\varepsilon k} - 1] < \infty$ для некоторого (следовательно, для любого) $\varepsilon > 0$. Для завершения доказательства остается применить лемму Бореля-Кантелли. \blacksquare

Верхняя оценка

Пусть $z \in \mathbb{D}_{R_0} \setminus \{0\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[|G_n(z)| > e^{n(I(\log |z|) + 4\varepsilon)} \right] = 0. \quad (2.102)$$

Сначала оценим хвост ряда Тейлора (2.94), задающего G_n . Делая ε достаточно маленьким, можем предположить, что $|z|e^{2\varepsilon} < R_0$. Из условия (A4) следует, что существует $A > 0$, такое что для всех $n \geq A$ и $k \geq An$ выполнено

$$|f_{k,n}| < (|z|e^{2\varepsilon})^{-k}.$$

Из Леммы 50 вытекает, что для некоторой п.н. конечной величины M выполнено

$$\left| \sum_{k \geq An} \xi_k f_{k,n} z^k \right| \leq M \sum_{k \geq An} e^{\varepsilon k} |f_{k,n}| |z|^k \leq M \sum_{k \geq An} e^{-\varepsilon k} \leq M. \quad (2.103)$$

Последнее неравенство справедливо для всех достаточно больших n . Отметим также, что это означает, что для всех достаточно больших n ряд (2.94) сходится с вероятностью 1.

Теперь рассмотрим начало ряда Тейлора (2.94), задающего G_n . Возьмем некоторое $\delta > 0$. Из условия (A3) следует, что существует N , такое что для всех $n > N$ и $k \leq An$ выполнено

$$|f_{k,n}| < (f(k/n) + \delta)^n. \quad (2.104)$$

Из (2.95) вытекает, что при всех $t \geq 0$

$$t \log |z| + \log f(t) \leq I(\log |z|). \quad (2.105)$$

Используя (2.104), (2.105) и Лемму 50 с ε/A вместо ε , получаем, что существует п.н. конечная случайная величина M' , такая что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0 \leq k < An} \xi_k f_{k,n} z^k \right| &\leq M' \sum_{0 \leq k < An} e^{\frac{\varepsilon k}{A}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) + \delta \right)^n |z|^k \\ &\leq M' e^{\varepsilon n} \sum_{0 \leq k < An} \left(e^{\frac{k}{n} \log |z| + \log f\left(\frac{k}{n}\right)} + \delta |z|^{\frac{k}{n}} \right)^n \\ &\leq M' e^{2\varepsilon n} \left(e^{I(\log |z|)} + \delta |z|^A \right)^n \\ &\leq M' e^{3\varepsilon n} e^{nI(\log |z|)}, \end{aligned} \quad (2.106)$$

где последнее неравенство справедливо при достаточно маленьких $\delta = \delta(\varepsilon)$. Объединяя (2.103) и (2.106), получаем, что для всех достаточно больших n выполнено

$$|G_n(z)| \leq M' e^{n(I(\log |z|) + 3\varepsilon)} + M. \quad (2.107)$$

Так как по Лемме 50 величины M и M' конечны п.н., приходим к (2.102).

Нижняя оценка

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $z \in \mathbb{D}_{R_0} \setminus \{0\}$. Покажем, что

$$\mathbb{P} \left[|G_n(z)| < e^{n(I(\log |z|) - 4\varepsilon)} \right] = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.108)$$

Нам понадобится неравенство Колмогорова-Рогозина в многомерной форме, которую можно найти в [99]. Определим функцию концентрации d -мерного случайного вектора X как

$$Q(X; r) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}[X \in \mathbb{D}_r(x)], \quad r > 0, \quad (2.109)$$

где $\mathbb{D}_r(x)$ обозначает d -мерный шар радиуса r с центром в x . Очевидно, что для любых независимых случайных векторов X, Y и всех $r, a > 0$ выполнено

$$Q(X + Y; r) \leq Q(X; r), \quad Q(aX; r) = Q(X; r/a). \quad (2.110)$$

Следующий результат вытекает из [99, Следствие 1, стр. 304].

Теорема 28 (Неравенство Колмогорова-Рогозина). *Существует зависящая только от d постоянная C_d , такая что для любых независимых (необязательно одинаково распределенных) случайных d -мерных векторов X_1, \dots, X_n при всех $r > 0$ выполнено*

$$Q(X_1 + \dots + X_n; r) \leq C_d \cdot \left(\sum_{k=1}^n (1 - Q(X_k; r)) \right)^{-1/2}.$$

Идея доказательства (2.108) состоит в том, чтобы используя неравенство Колмогорова-Рогозина показать, что взаимное уничтожение членов ряда (2.94) происходит с маленькой вероятностью. Сначала мы найдем члены, у которых коэффициенты $f_{k,n}$ достаточно большие. По определению I , см. (2.95), существует $t_0 \in [0, T_0]$, такое что $t_0 \log |z| + \log f(t_0) > I(\log |z|) - \varepsilon$. Более того, из условия (A2) следует, что мы можем найти закрытый интервал J длины $|J| > 0$, содержащий t_0 , такой что

$$f(t)|z|^t > e^{I(\log |z|) - 2\varepsilon}, \quad t \in J.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{J}_n := \{k \in \mathbb{N}_0 : k/n \in J\}$. Из условия (A3) следует, что существует N , такое что при всех $n > N$ и $k \in \mathcal{J}_n$ выполнено

$$|f_{k,n}||z|^k > e^{n(I(\log |z|) - 3\varepsilon)}.$$

Для $k = 0, \dots, n$ положим

$$a_{k,n} := e^{-n(I(\log |z|) - 3\varepsilon)} f_{k,n} z^k.$$

Заметим, что $|a_{k,n}| > 1$ при $k \in \mathcal{J}_n$. Обозначим

$$G_{n,1} := \sum_{k \in \mathcal{J}_n} a_{k,n} \xi_k, \quad G_{n,2} := \sum_{k \notin \mathcal{J}_n} a_{k,n} \xi_k.$$

Рассматривая вещественную и мнимую части, мы можем интерпретировать комплексные случайные величины $a_{k,n} \xi_k$ как двумерные случайные векторы. Применяя (2.110), мы приходим к

$$\mathbb{P}[|G_n(z)| < e^{n(I(\log |z|) - 4\varepsilon)}] \leq Q(G_{n,1} + G_{n,2}; e^{-\varepsilon n}) \leq Q(G_{n,1}; e^{-\varepsilon n}). \quad (2.111)$$

По Теореме 28 существует абсолютная константа C , такая что для всех $r > 0$ выполнено

$$Q(G_{n,1}; r) \leq C \cdot \left(\sum_{k \in \mathcal{J}_n} (1 - Q(a_{k,n} \xi_k; r)) \right)^{-1/2} \leq C \cdot \left(\sum_{k \in \mathcal{J}_n} (1 - Q(\xi_k; r)) \right)^{-1/2}.$$

Второе неравенство следует из того, что $|a_{k,n}| > 1$. Из невырожденности случайной величины ξ_0 следует, что мы можем выбрать $r > 0$ настолько маленьким, что $Q(\xi_0; r) < 1$. Отметим, что это единственное место в доказательстве Теоремы 25, где мы используем случайность. Оставшаяся часть доказательства справедлива для любой неслучайной последовательности ξ_0, ξ_1, \dots , такой что $|\xi_n| = O(e^{\delta n})$ при всех $\delta > 0$. Если n достаточно большое, то $e^{-\varepsilon n} \leq r$, поэтому

$$Q(G_{n,1}; e^{-\varepsilon n}) \leq Q(G_{n,1}; r) \leq C_1 |\mathcal{J}_n|^{-1/2} \leq C_2 n^{-1/2}. \quad (2.112)$$

В последнем неравенстве мы использовали, что число элементов множества \mathcal{J}_n больше, чем $(|J|/2)n$ при больших n . Объединяя (2.111) и (2.112), приходим к (2.108).

2.5.5. Доказательство Теоремы 25 и родственных результатов

Доказательство Теоремы 25

Напомним, что μ_{G_n} является мерой, считающей нули G_n . Мы хотим показать, что для любой гладкой функции $\varphi : \mathbb{D}_{R_0} \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем выполнено

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \varphi(z) \mu_{G_n}(dz) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \varphi(z) \mu(dz). \quad (2.113)$$

Пусть событие E_n означает, что $G_n \equiv 0$. Левая часть (2.113) не определена корректно на E_n . Однако $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n] = 0$. Действительно, из условий (A1), (A2) и (A3) следует, что если n большое, то $f_{k,n} > 0$ при всех $k < T_0 n/2$. Также выполнено $\mathbb{P}[\xi_0 = 0] < 1$, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_n] = 0$. Поэтому в доказательстве (2.113) мы можем считать, что произошло событие, противоположное E_n .

Известно (см. [129]), что

$$\int_{\mathbb{D}_{R_0}} \varphi(z) \mu_{G_n}(dz) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \Delta\varphi(z) \log |G_n(z)| \lambda(dz). \quad (2.114)$$

Данное соотношение является переформулировкой (2.99). Из Теоремы 27 мы знаем, что для любого $z \in \mathbb{D}_{R_0} \setminus \{0\}$ случайная величина $p_n(z) := \frac{1}{n} \log |G_n(z)|$ сходится к $p(z) := I(\log |z|)$ по вероятности. Предположив, что мы можем перейти к пределу под знаком интеграла (что будет оправдано ниже), получаем

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \varphi(z) \mu_{G_n}(dz) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \Delta\varphi(z) p(z) \lambda(dz). \quad (2.115)$$

Это доказывает Теорему 25 с формулой $\frac{1}{2\pi} \Delta(I(\log |z|))$ для предельного распределения нулей, как в Замечании 16. Докажем, что предельное распределение нулей может быть дано формулой (2.96). Для μ , определенной в (2.96), выполняется

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \Delta\varphi(z) p(z) \lambda(dz) = \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \varphi(z) \mu(dz). \quad (2.116)$$

Если I гладкое, то по формуле Грина левая часть (2.116) равна

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \varphi(z) \Delta(I(\log |z|)) \lambda(dz) = \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \varphi(z) \frac{I''(\log |z|)}{2\pi |z|^2} \lambda(dz) = \int_{\mathbb{D}_{R_0}} \varphi(z) \mu(dz).$$

Если I не гладкая, мы можем найти последовательность неубывающих гладких функций I'_1, I'_2, \dots , таких что $I'_n \leq I'$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} I'_n(s) = I'(s)$ для всех $s < \log R_0$, где I' непрерывна. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $I_n(s) := \int_{-\infty}^s I'_n(t) dt \rightarrow I(s)$ при $n \rightarrow \infty$. Для каждой I_n мы можем, как и выше, использовать формулу Грина, а затем устремить $n \rightarrow \infty$, чтобы получить (2.116) в полной общности.

Мажорируемая сходимость

Нам осталось оправдать перестановку предела и интеграла при переходе от (2.114) к (2.115). Напомним, что последовательность случайных величин X_n

называется ограниченной по вероятности (или плотной), если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $A = A(\varepsilon)$, такое что $\mathbb{P}[|X_n| > A] < \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Также напомним, что X_n называется ограниченной п.н., если $\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n| < \infty$ п.н. Далее нам понадобится следующая лемма из [213].

Лемма 51 (Лемма 3.1 в [213]). *Рассмотрим измеримое пространство с конечной мерой (X, \mathcal{A}, ν) . Пусть $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ являются случайными функциями, заданными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, совместно измеримые относительно $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Предположим, что для почти всех (по мере ν) точек $x \in X$ выполняется $f_n(x) \rightarrow 0$ по вероятности (соответственно, п.н.) и что последовательность $\int_X |f_n(x)|^{1+\delta} \nu(dx)$ ограничена по вероятности (соответственно, п.н.) для некоторого $\delta > 0$. Тогда $\int_X f_n(x) \nu(dx)$ сходится по вероятности (соответственно, п.н.) к 0.*

Напомним, что функция φ обращается в ноль вне некоторого круга \mathbb{D}_r , где $r < R_0$. По Лемме 51, переход от (2.114) к (2.115) будет оправдан, если мы покажем, что последовательность случайных величин

$$B_n := \int_{\mathbb{D}_r} |\Delta\varphi(z)|^2 |p_n(z) - p(z)|^2 \lambda(dz) \quad (2.117)$$

плотна. Так как φ ограничена на \mathbb{D}_r , мы имеем

$$B_n \leq C \int_{\mathbb{D}_r} |p(z)|^2 \lambda(dz) + C \int_{\mathbb{D}_r} |p_n(z)|^2 \lambda(dz).$$

Первое слагаемое в правой части является конечной постоянной, так как $0 \leq I(\log |z|) \leq I(\log r)$. Поэтому для завершения доказательства Теоремы 25 осталось доказать плотность последовательности

$$\tilde{B}_n := \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{D}_r} (\log |G_n(z)|)^2 \lambda(dz). \quad (2.118)$$

Сначала предположим, что G_n является полиномом степени n и $f(1) \neq 0$. Это, к примеру, выполнено в постановке Теоремы 21. Обозначая w_{1n}, \dots, w_{nn}

нули G_n , запишем

$$G_n(z) = \xi_n f_{n,n}(z - w_{1n}) \dots (z - w_{nn}).$$

По неравенству между арифметическим и геометрическим средними, получаем

$$\tilde{B}_n \leq \frac{2\pi r^2}{n^2} (\log |f_{n,n}| + \log |\xi_n|)^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{D}_r} \log^2 |z - w_{kn}| \lambda(dz).$$

Напомним, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |f_{n,n}| = \log f(1)$ конечен. Следовательно, первый член в правой части ограничен по вероятности. Второй член ограничен неслучайной постоянной, так как $\int_{\mathbb{D}_r} \log^2 |z - w| \lambda(dz) \leq C$, где $C = C(r)$ не зависит от $w \in \mathbb{C}$.

В общей постановке доказательство плотности \tilde{B}_n несколько сложнее. Главная трудность состоит в том, что $\log |G_n|$ становится бесконечным в нулях G_n . Таким образом, нам надо показать, что с большой вероятностью G_n не имеет слишком много нулей. Докажем, что \tilde{B}_n ограничено п.н.:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}_n < \infty \text{ п.н.} \quad (2.119)$$

Если $G_n(0) = 0$, обозначим τ_n кратность нуля в 0. Положим $G_n^*(z) := G_n(z)/z^{\tau_n}$ и определим $G_n^*(0) \neq 0$ по непрерывности. Положим

$$M_n(R) := \sup_{|z|=R} |G_n^*(z)|,$$

где $R < R_0$. Прежде всего, из (2.107) вытекает, что

$$D_1(R) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n(R) < \infty \text{ п.н.} \quad (2.120)$$

Обозначим $N_n(R)$ число нулей G_n^* в круге \mathbb{D}_R , посчитанных с учетом кратности, которые мы обозначим $a_{1,n}, \dots, a_{N_n(R),n}$. По формуле Пуассона-Йенсена (см. [23, Гл. 6]) для любых $z \in \mathbb{D}_r$ и $R > r$ выполнено

$$\log |G_n^*(z)| = I_n(z; R) + \sum_{k=1}^{N_n(R)} \log \left| \frac{R(z - a_{k,n})}{R^2 - \bar{a}_{k,n}z} \right|, \quad (2.121)$$

где

$$I_n(z; R) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |G_n^*(Re^{i\theta})| P_R(|z|, \theta - \arg z) d\theta \quad (2.122)$$

и P_R обозначает ядро Пуассона:

$$P_R(\rho, \varphi) := \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \varphi}.$$

Зафиксируем маленькое $\delta > 0$. Заметим, что $0 \leq P_{r+\delta}(\rho, \varphi) < C$ при всех $\rho < r$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$, где C зависит только от r и δ . Следовательно, $I_n(z; r + \delta) \leq C \log M_n(r + \delta)$ при всех $z \in \mathbb{D}_r$, поэтому (2.120) влечет

$$D_2 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{z \in \mathbb{D}_r} I_n(z; r + \delta) < \infty \text{ п.н.} \quad (2.123)$$

Покажем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N_n(r + \delta) < \infty \text{ п.н.} \quad (2.124)$$

Из (2.121) с $R = r + 2\delta$ и $z = 0$ вытекает, что

$$N_n(r + \delta) \leq \frac{1}{\log \frac{r+2\delta}{r+\delta}} \log \left| \frac{M_n(r + 2\delta)}{G_n^*(0)} \right|. \quad (2.125)$$

Действительно, $I_n(0; R) \leq M_n(R)$, а вклад любого нуля G_n^* в $\mathbb{D}_{r+\delta}$ в сумму в правой части (2.121) не превышает $\log \frac{r+\delta}{r+2\delta}$. Очевидно, $G_n^*(0) = f_{\tau_n, n} \xi_{\tau_n}$. Пусть $\tau := \min\{n : \xi_n \neq 0\}$ обозначает индекс первого ненулевого коэффициента ξ_n . Заметим, что $\tau < \infty$ п.н. Из (A1), (A2), (A3) вытекает $f_{k, n} > 0$ для достаточно больших n и всех $k \in [0, T_0 n/2]$. Поэтому $\tau_n = \tau$ при достаточно больших n . Следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |G_n^*(0)| = 0 \text{ п.н.} \quad (2.126)$$

Применяя (2.120) и (2.126) к правой части (2.125), приходим к (2.124).

Теперь покажем, что

$$D_3 := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \inf_{z \in \mathbb{D}_r} I_n(z; r + \delta) > -\infty \text{ п.н.} \quad (2.127)$$

Известно, что $I_n(0; R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |G_n^*(Re^{i\theta})| d\theta$ не убывает по R . Заметим, что $I_n(0; 0) = \log |G_n^*(0)|$. Следовательно, (2.126) влечет

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I_n(0; R) > -\infty \text{ п.н.} \quad (2.128)$$

С этого момента положим $R = r + \delta$. Пусть $q_n(\theta) := \frac{1}{n} \log |G_n^*(Re^{i\theta})|$ и обозначим

$$q_n^+(\theta) := \max(q_n(\theta), 0), \quad q_n^-(\theta) := -\min(q_n(\theta), 0).$$

Тогда $q_n(\theta) = q_n^+(\theta) - q_n^-(\theta)$. Существует постоянная $C > 1$, зависящая только от r, δ , такая что $1/C < P_R(\rho, \varphi) < C$ при всех $\rho < r$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$. Получаем, что при всех $z \in \mathbb{D}_r$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{n} I_n(z; R) &= \int_0^{2\pi} q_n^+(\theta) P_R(|z|, \theta - \arg z) d\theta - \int_0^{2\pi} q_n^-(\theta) P_R(|z|, \theta - \arg z) d\theta \\ &\geq \frac{1}{C} \int_0^{2\pi} q_n^+(\theta) d\theta - C \int_0^{2\pi} q_n^-(\theta) d\theta \\ &= \frac{2\pi C}{n} I_n(0; R) - \left(C - \frac{1}{C}\right) \int_0^{2\pi} q_n^+(\theta) d\theta \\ &\geq \frac{2\pi C}{n} I_n(0; R) - \left(C - \frac{1}{C}\right) \frac{2\pi}{n} \log M_n(R). \end{aligned}$$

Учитывая (2.120) и (2.128), приходим к (2.127).

Теперь мы готовы доказать, что последовательность \tilde{B}_n ограничена п.н. Применяя неравенство между арифметическим и геометрическим средними к (2.121), получаем

$$(\log |G_n(z)|)^2 \leq 3(\tau_n \log |z|)^2 + 3I_n^2(z; R) + 3N_n(R) \sum_{k=1}^{N_n(R)} \log^2 \left| \frac{R(z - a_{k,n})}{R^2 - \bar{a}_{k,n}z} \right|.$$

Существует постоянная C , зависящая только от r, δ , такая что при всех $a \in \mathbb{D}_R$ выполнено

$$\int_{\mathbb{D}_r} \log^2 \left| \frac{R(z - a)}{R^2 - \bar{a}z} \right| \lambda(dz) \leq C.$$

Учитывая (2.118), получаем, что для некоторой постоянной C , зависящей только от r, δ , выполнено

$$\tilde{B}_n \leq \frac{C}{n^2} \left(\tau_n^2 + \sup_{z \in \mathbb{D}_r} I_n^2(z; R) + N_n^2(R) \right).$$

Напомним, что $\tau_n = \tau$ при достаточно больших n . Применяя (2.123), (2.127), (2.124), приходим к (2.119). Последовательность \tilde{B}_n ограничена п.н. и, следовательно, плотна.

Доказательство сходимости п.н. в Теореме 21

Сходимость по вероятности уже была установлена в разделе 2.5.3. При заданном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим единственное $j_n \in \mathbb{N}$, такое что $j_n^3 \leq n < (j_n + 1)^3$. Положим $m_n = j_n^3$ и $G_n(z) = \mathbf{W}_n(e^{\beta m_n^\alpha z})$. Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n/n = 1$. Покажем, что $\frac{1}{n} \mu_{G_n}$ сходится п.н. к мере с плотностью (2.88). Для этого докажем сходимость п.н. соответствующих потенциалов. Зафиксируем $z \in \mathbb{D}$. Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |G_n(z)| = \alpha |z|^{1/\alpha} \quad \text{п.н.} \quad (2.129)$$

Заметим, что G_n удовлетворяет всем условиям раздела 2.5.2. Из (2.107) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |G_n(z)| \leq \alpha |z|^{1/\alpha} \quad \text{п.н.}$$

Таким образом, достаточно доказать только нижнюю оценку в (2.129). Зафиксируем маленькое $\varepsilon > 0$. Из (2.108) и леммы Бореля-Кантелли, примененной к подпоследовательности $\{j^3\}_{j \in \mathbb{N}}$, следует, что с вероятностью 1 при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$|G_{m_n}(z)| > e^{m_n(\alpha |z|^{1/\alpha} - \varepsilon)}. \quad (2.130)$$

Пусть теперь n не является точным кубом. Из Леммы 50 и (2.87) следует, что

$$\begin{aligned} |G_n(z) - G_{m_n}(z)| &= \left| \sum_{k=m_n+1}^n \xi_k w_k e^{\beta k} m_n^{\alpha k} z^k \right| \\ &\leq M e^{2\varepsilon n} \sum_{k=m_n+1}^n e^{-\alpha(k \log k - k)} n^{\alpha k} |z|^k. \end{aligned}$$

Функция $x \mapsto -\alpha(x \log x - x) + \alpha x \log n$, заданная при $x > 0$, достигает своего максимума, равного αn , в точке $x = n$. Напомним, что $|z| < 1$. Так как $m_n > (1 - \varepsilon)n$ и $M < e^{\varepsilon n}$, если n достаточно велико, приходим к следующей оценке:

$$|G_n(z) - G_{m_n}(z)| \leq e^{3\varepsilon n} e^{\alpha n} |z|^{(1-\varepsilon)n}.$$

Так как $\alpha + \log |z| < \alpha |z|^{1/\alpha}$, при достаточно маленьком $\varepsilon > 0$ получаем

$$|G_n(z) - G_{m_n}(z)| \leq e^{(1-\varepsilon)n(\alpha |z|^{1/\alpha} - 2\varepsilon)} \leq e^{m_n(\alpha |z|^{1/\alpha} - 2\varepsilon)}. \quad (2.131)$$

Объединяя (2.130) и (2.131), получаем, что с вероятностью 1 для всех достаточно больших n выполнено $|G_n(z)| \geq e^{m_n(\alpha |z|^{1/\alpha} - 2\varepsilon)}$. Это является требуемой нижней оценкой в (2.129).

Завершим доказательство. Нам надо показать, что $\frac{1}{n}\mu_{G_n}$ сходится п.н. к мере μ с плотностью (2.88). Рассмотрим произвольную гладкую функцию $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ с носителем в \mathbb{D} . Обозначим $p_n(z) := \frac{1}{n} \log |G_n(z)|$. Как и в (2.114), имеем

$$S_n(\varphi) := \frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbb{C}: G_n(z)=0} \varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \Delta \varphi(z) p_n(z) \lambda(dz).$$

Мы показали в (2.129), что для любого $z \in \mathbb{D}$ последовательность $p_n(z)$ сходится п.н. к $p(z) := \alpha |z|^{1/\alpha}$. Предполагая, что можно поменять предел и интеграл местами, приходим к

$$S_n(\varphi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \Delta \varphi(z) p(z) \lambda(dz) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) \mu(dz). \quad (2.132)$$

Соотношение (2.116) завершает доказательство. Чтобы обосновать перестановку интеграла и предела, воспользуемся Леммой 3.1 из [213]. Для этого нам надо

показать, что B_n , определенная в (2.117) (или, что эквивалентно, \tilde{B}_n , определенная в (2.118)), ограничена п.н., т.е. что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}_n < \infty$ п.н. Но это уже было проверено в (2.119).

К сожалению, (2.129) было установлено только для $z \in \mathbb{D}$. Для этого носитель φ был ограничен на \mathbb{D} . Для завершения доказательства достаточно избавиться от этого ограничения. Для фиксированного маленького $\varepsilon > 0$ возьмем гладкую функцию $\psi_\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$, равную 1 на $\mathbb{D}_{1-2\varepsilon}$ и 0 вне $\mathbb{D}_{1-\varepsilon}$. Пусть $N_n(r)$ обозначает число нулей G_n внутри \mathbb{D}_r . Тогда из (2.132) вытекает

$$\frac{1}{n} N_n(1 - \varepsilon) \geq S_n(\psi_\varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \int_{\mathbb{D}} \psi_\varepsilon(z) \mu(dz) \geq \mu(\mathbb{D}_{1-2\varepsilon}) = (1 - 2\varepsilon)^{1/\alpha}. \quad (2.133)$$

Пусть теперь φ является произвольной гладкой функцией на \mathbb{C} с компактным носителем. Представим $\varphi = \varphi_{1,\varepsilon} + \varphi_{2,\varepsilon}$, где $\varphi_{1,\varepsilon} = \varphi \cdot \psi_\varepsilon$ является гладкой функцией с носителем в $\mathbb{D}_{1-\varepsilon}$ и $\varphi_{2,\varepsilon} = \varphi \cdot (1 - \psi_\varepsilon)$ является гладкой функцией с носителем в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1-2\varepsilon}$. Тогда из (2.132) и (2.133) следует

$$S_n(\varphi_{1,\varepsilon}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \int_{\mathbb{D}} \varphi_{1,\varepsilon}(z) \mu(dz), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(\varphi_{2,\varepsilon}) \leq (1 - (1 - 4\varepsilon)^{1/\alpha}) \|\varphi\|_\infty.$$

Заметим, что $\varphi_{1,\varepsilon}$ совпадает с φ на $\mathbb{D}_{1-2\varepsilon}$ и, следовательно, $\int_{\mathbb{D}} \varphi_{1,\varepsilon}(z) \mu(dz)$ сходится к $\int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \mu(dz)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Так как $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно маленьким, $S_n(\varphi) = S_n(\varphi_{1,\varepsilon}) + S_n(\varphi_{2,\varepsilon})$ сходится п.н. к $\int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \mu(dz)$, что завершает доказательство.

Доказательство сходимости п.н. в Теореме 23

Пусть последовательность m_n определена так же, как и в предыдущем доказательстве. Положим $G_n(z) = \mathbf{W}(e^\beta m_n^\alpha z)$. Покажем, что последовательность случайных мер $\frac{1}{n} \mu_{G_n}$ сходится п.н. к мере с плотностью (2.92). Это завершит доказательство Теоремы 23, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n/n = 1$. Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |G_n(z)| = \alpha |z|^{1/\alpha} \quad \text{п.н.} \quad (2.134)$$

Заметим, что G_n удовлетворяет условиям раздела 2.5.2 с $I(s) = \alpha e^{s/\alpha}$. Из (2.107) вытекает

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |G_n(z)| \leq \alpha |z|^{1/\alpha} \quad \text{п.н.}$$

Докажем нижнюю оценку в (2.134). Зафиксируем маленькое $\varepsilon > 0$. Из (2.108) и леммы Бореля-Кантелли, примененной к подпоследовательности $\{j^3\}_{j \in \mathbb{N}}$, следует, что с вероятностью 1 при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$|G_{m_n}(z)| > e^{m_n(\alpha |z|^{1/\alpha} - \varepsilon)}.$$

Однако $G_{m_n}(z) = G_n(z)$ по определению. Кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n/n = 1$. Это доказывает нижнюю оценку в (2.134). Оставшаяся часть доказательства такая же, как и в Теореме 21, при этом нам не надо беспокоиться о случае $z \notin \mathbb{D}$.

Доказательство Теоремы 22

Пусть $\mathbf{W}_n(z) = \sum_{k=0}^n \xi_k w_k z^k$, где w_k является последовательностью, удовлетворяющей (2.87) и (2.89). Предположим, что $\mathbb{E} \log(1 + |\xi_0|) = \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем, что с вероятностью 1 существует бесконечно много n , таких что все нули $\mathbf{W}_n(e^{-\beta} n^{-\alpha} z)$ расположены в круге \mathbb{D}_ε . Воспользуемся идеей из § 2.2. По Лемме 50, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\xi_n|^{1/n} = +\infty$. Следовательно, с вероятностью 1, существует бесконечно много n , таких что

$$|\xi_n|^{1/n} > \max_{k=1, \dots, n-1} |\xi_{n-k}|^{1/(n-k)}, \quad |\xi_n|^{1/n} > \max \left\{ \frac{3C+1}{\varepsilon}, \frac{1}{e^{\alpha\varepsilon}} \right\}. \quad (2.135)$$

Рассмотрим одно из таких n . Из (2.89) и (2.135) вытекает, что для всех $z \in \mathbb{C}$ и $k < n$ выполнено

$$\begin{aligned} \left| w_{n-k} \xi_{n-k} \left(\frac{z}{e^{\beta} n^{\alpha}} \right)^{n-k} \right| &\leq C |w_n| e^{\beta k} n^{\alpha k} |\xi_n|^{n-k} \left| \frac{z}{e^{\beta} n^{\alpha}} \right|^{n-k} \\ &= C \left| w_n \xi_n \left(\frac{z}{e^{\beta} n^{\alpha}} \right)^n \right| (|\xi_n|^{1/n} |z|)^{-k}. \end{aligned}$$

При $|z| > \varepsilon$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n-1} w_{n-k} \xi_{n-k} \left(\frac{z}{e^{\beta n^\alpha}} \right)^{n-k} \right| &\leq C \left| w_n \xi_n \left(\frac{z}{e^{\beta n^\alpha}} \right)^n \right| \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(3C+1)^k} \right) \\ &< \frac{1}{3} \left| w_n \xi_n \left(\frac{z}{e^{\beta n^\alpha}} \right)^n \right|. \end{aligned}$$

Из (2.87) и (2.135) следует, что правая часть этого неравенства стремится к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$. При достаточно большом n она больше, чем $|\xi_0 w_0|$. Поэтому при $|z| > \varepsilon$ член степени n в полиноме $\mathbf{W}_n(e^{-\beta n^\alpha} z)$ больше по абсолютному значению, чем сумма остальных членов. Следовательно, полином $\mathbf{W}_n(e^{-\beta n^\alpha} z)$ не имеет нулей вне круга \mathbb{D}_ε .

Доказательство Теоремы 26

Сначала рассмотрим меру μ , удовлетворяющую условиям Теоремы 26. Определим $I(s) := \int_{-\infty}^s \mu(\mathbb{D}_{e^r}) dr$ при $s < \log R_0$. Из второго предположения теоремы следует, что интеграл конечен. Очевидно, I не убывает, непрерывна и выпукла на $(-\infty, \log R_0)$. При $s > \log R_0$ положим $I(s) := +\infty$. Зададим $I(\log R_0)$ по непрерывности слева. Теперь определим u как преобразования Лежандра-Фенхеля функции I :

$$u(t) := \sup_{s \in \mathbb{R}} (st - I(s)).$$

Мы утверждаем, что случайная аналитическая функция $G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k f_{k,n} z^k$ с $f_{k,n} = e^{-nu(k/n)}$ удовлетворяет условиям (A1)–(A4) Теоремы 25 с $f = e^{-u}$. Из двойственности преобразования Лежандра-Фенхеля следует, что функция u обладает следующими свойствами. Во-первых, она выпукла и полунепрерывна снизу. Во-вторых, она конечна на интервале $[0, T_0)$, где $T_0 := \limsup_{t \rightarrow +\infty} I(t)/t \in (0, +\infty]$. Это выполнено, так как I не убывает и $\lim_{s \rightarrow -\infty} I(s) = 0$ по построению. В-третьих, $u(t) = +\infty$ при $t > T_0$ и $t < 0$. Это проверяет выполнение условия (A1). В-четвертых, имеет место (2.95) и $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)/t = \log R_0$. Это вместе с Леммой 50 показывает, что радиус сходимости G_n п.н. равен R_0 и

выполняется условие (A4). Наконец, u непрерывна на $[0, T_0)$ (т.к. выпукла и конечна), и в случае $T_0 < +\infty$ функция u непрерывна слева в точке T_0 (следует из полунепрерывности снизу функции u). Это показывает, что выполнено условие (A2). Условие (A3) очевидно выполняется с $f = e^{-u}$.

Доказательство Предложения 6

Логарифмический потенциал, порожденный мерой $\mu^{(\kappa)}$, есть

$$U^{(\kappa)}(z) := \int_{\mathbb{C}} \log \frac{1}{|z-w|} \mu^{(\kappa)}(dw).$$

Покажем, что

$$U^{(\kappa)}(z) = - \begin{cases} u(\kappa) - u(0), & |z| \leq e^{u'(0)}, \\ I(\log |z|) + u(\kappa), & e^{u'(0)} \leq |z| \leq e^{u'(\kappa)}, \\ \kappa \log |z|, & |z| \geq e^{u'(\kappa)}. \end{cases} \quad (2.136)$$

Мы полагаем $u'(0) := \lim_{t \downarrow 0} u'(t)$. Из (2.136) следует, что $F(z) := U^{(\kappa)}(z) + I(\log |z|)$ постоянна и равна $-u(\kappa)$ в кольце $\{z \in \mathbb{C} : e^{u'(0)} \leq |z| \leq e^{u'(\kappa)}\}$, которое содержит $\mu^{(\kappa)}$. Из (2.95) вытекает, что $F(z) = I(\log |z|) - \kappa \log |z| \geq -u(\kappa)$ при $|z| \geq e^{u'(\kappa)}$ и $F(z) = I(\log |z|) + u(0) - u(\kappa) \geq -u(\kappa)$ при $|z| \leq e^{u'(0)}$. Таким образом, $F(z)$ постоянна на носителе $\mu^{(\kappa)}$, а вне носителя ограничена снизу некоторой константой. Следовательно, по Теореме 3.3 на стр. 44 из [188], $\mu^{(\kappa)}$ является равновесной мерой для логарифмического потенциала в присутствии внешнего поля $I(\log |z|)$. В теореме из [188] данное утверждение сформулировано только для $\kappa = 1$, но оно справедливо для всех $\kappa > 0$.

Осталось доказать (2.136). Равномерное вероятностное распределение ν_r на границе \mathbb{D}_r порождает потенциал

$$\int_{\partial \mathbb{D}_r} \log \frac{1}{|z-w|} \nu_r(dw) = - \max\{\log r, \log |z|\}. \quad (2.137)$$

Положим $F(r) = I'(\log r)$. Напомним, что $\mu^{(\kappa)}$ является инвариантной относительно поворотов мерой общей массы κ с носителем в кольце $\{z \in \mathbb{C} : e^{u'(0)} \leq |z| \leq e^{u'(\kappa)}\}$, причем $\mu^{(\kappa)}(\mathbb{D}_r) = F(r)$. Вместе с (2.137) это влечет (2.136) при $|z| \geq e^{u'(\kappa)}$. Теперь предположим, что $|z| \leq e^{u'(0)}$. Используя (2.137) и формулу интегрирования по частям, получаем

$$-U^{(\kappa)}(z) = \int_{e^{u'(0)}}^{e^{u'(\kappa)}} \log |s| dF(s) = I'(r)r \Big|_{u'(0)}^{u'(\kappa)} - \int_{e^{u'(0)}}^{e^{u'(\kappa)}} I'(\log s) \frac{ds}{s} = u(\kappa) - u(0).$$

Здесь мы использовали тождество $I(u'(t)) = tu'(t) - u(t)$ при $t = 0$ и $t = \kappa$. Предположим, наконец, что $e^{u'(0)} \leq |z| \leq e^{u'(\kappa)}$. Используя (2.137), получаем

$$-U^{(\kappa)}(z) = \int_0^{|z|} \log |z| dF(s) + \int_{|z|}^{e^{u'(\kappa)}} \log |s| dF(s) = I(\log |z|) + u(\kappa),$$

где первый интеграл равен $F(z) \log |z|$, а для получения второго интеграла была использована формула интегрирования по частям. Доказательство (2.136) завершено.

Глава 3

Распределение алгебраических чисел

3.1. Обозначения и необходимые сведения из теории алгебраических чисел

Вещественное или комплексное число называется *алгебраическим*, если оно является нулем некоторого полинома с целочисленными коэффициентами.

Высота полинома

$$p(x) := a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

с целыми коэффициентами определяется как $H(p) := \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$.

Обозначим $\mathcal{P}(Q)$ класс всех полиномов с целочисленными коэффициентами степени не более n и высоты не более Q . Мощность данного класса равна $(2Q + 1)^{n+1}$.

Полином с целочисленными коэффициентами называется *простым*, если он неприводим над \mathbb{Q} , примитивен (т.е. наибольший общий делитель коэффициентов равен единице) и его старший коэффициент положителен. Пусть $\mathcal{P}^*(Q)$ обозначает класс всех простых полиномов из $\mathcal{P}(Q)$.

Минимальным полиномом алгебраического числа α называется простой полином, нулем которого является α . При этом *степень* $\deg(\alpha)$ и *высота* $H(\alpha)$ числа α определяются как степень и высота этого минимального полинома.

Различные алгебраические числа называются сопряженными, если у них совпадает минимальный полином.

В данной главе мы всегда будем полагать степень n *фиксированной*, поэтому часто в обозначениях различных объектов мы не будем явно указывать зависимость от n (как, например, у классов $\mathcal{P}^*(Q), \mathcal{P}^*(Q)$). При этом нас будут интересовать различные асимптотические соотношения при $Q \rightarrow \infty$. Участву-

ющие в них константы могут зависеть от n .

Мы будем использовать следующие обозначения: для неотрицательных функций f, g мы пишем $f \ll g$, если существует неотрицательная константа C_n (зависящая только от n), такая что $f \leq C_n g$. Также мы обозначаем $f \asymp g$, если $f \ll g$ и $f \gg g$.

Пусть B является подмножеством \mathbb{R}^k или \mathbb{C}^k , где $k \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим $\Phi_k(Q; B)$ число упорядоченных наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in B$ различных чисел, таких что для некоторого $p \in \mathcal{P}^*(Q)$ выполнено

$$p(\alpha_1) = \dots = p(\alpha_k) = 0.$$

Таким образом, $\Phi_k(Q; B)$ обозначает число лежащих в B упорядоченных наборов сопряженных алгебраических чисел степени не более n и высоты не более Q . В частности, $\Phi_1(Q; B)$ обозначает количество алгебраических чисел $\alpha \in B$ степени не более n и высоты не более Q .

Также обозначим $\theta(B)$ число точек в B с целочисленными координатами, а $\theta^*(B)$ – число точек в B с целочисленными взаимнопростыми координатами.

Напомним, что функция Мебиуса μ определена на множестве натуральных чисел следующим образом:

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ свободно от квадратов и является произведением} \\ & \text{четного числа простых сомножителей;} \\ -1, & \text{если } n \text{ свободно от квадратов и является произведением} \\ & \text{нечетного числа простых сомножителей;} \\ 0, & \text{если } n \text{ несвободно от квадратов.} \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2. Введение

Одной из центральных задач теории диофантовых приближений является вопрос о том, насколько хорошо вещественное число x может быть приближе-

но рациональными числами p/q . Так как \mathbb{Q} всюду плотно в \mathbb{R} , точность аппроксимации должна соотноситься со "сложностью" p/q , которая определяется как $|p| + |q|$. Первый общий результат в этой области принадлежит Дирихле (см. [93]): для любого *иррационального* x существует бесконечно много рациональных чисел p/q , таких что

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

С другой стороны, если $x = a/b$ рационально, то, как нетрудно видеть, для любого другого рационального числа $p/q \neq x$ выполнено

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq}. \quad (3.2)$$

(Здесь и далее мы для определенности полагаем, что знаменатель рационального числа всегда положителен.) Таким образом, мы получили полезный критерий иррациональности: вещественное число, у которого бесконечно много хороших приближений рациональными числами, должно быть иррациональным. Это нас приводит к важному понятию: мы говорим, что положительное число M является *мерой иррациональности* вещественного числа x , если существует положительная постоянная $c(x, M)$, такая что для любого рационального числа $p/q \neq x$ выполнено

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(x, M)}{q^M}.$$

Таким образом, рациональными числами являются в точности те числа, для которых 1 является мерой иррациональности, а мера иррациональности любого иррационального числа больше либо равна 2.

Лиувилль (см. [156, 157]) обобщил (3.2), показав, что n является мерой иррациональности любого алгебраического числа степени n . Применяв данный результат, он впервые доказал существование трансцендентных чисел (путем явного построения числа, у которого не существует конечной меры иррациональности).

Впоследствии было получено несколько улучшений теоремы Лиувилля (см. [38, 95, 199]). Окончательный результат в данном направлении принадлежит Роту (см. [186]), который показал, что любое число, большее 2, является мерой иррациональности любого алгебраического числа степени $n \geq 2$.

Диофантовы приближения обобщаются следующим естественным образом.

Рациональные числа являются алгебраическими числами степени 1. Зафиксируем некоторое n и рассмотрим задачу приближения вещественных чисел алгебраическими числами степени не более n . При этом опять аппроксимация должна соотноситься со “сложностью” алгебраического числа, которую мы будем измерять его высотой $H(\alpha)$.

Следуя Коксма (см. [148]), для данного вещественного числа x обозначим $\omega_n^*(x)$ супремум множества вещественных чисел ω , для которых существует бесконечно много вещественных алгебраических чисел α степени не больше n , таких что

$$|x - \alpha| \leq \frac{1}{H(\alpha)^{\omega+1}}.$$

Спринджук (см. [30, 31]) доказал, что почти все вещественные числа x (относительно меры Лебега) удовлетворяют $\omega_n^*(x) = n$ для любого натурального n . Бейкер и Шмидт (см. [50], а также [61]) в некотором смысле уточнили данный результат, показав, что алгебраические числа степени не более n образуют *регулярную систему*: существует постоянная c_n , зависящая только от n , такая что для любого интервала I для всех достаточно больших $Q \in \mathbb{N}$ существует не менее

$$c_n |I| \frac{Q^{n+1}}{(\ln Q)^{3n^2}}$$

алгебраических чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ степени не более n и высоты не более Q , таких что

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geq \frac{(\ln Q)^{3n^2}}{Q^{n+1}}, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Заметим, что количество алгебраических чисел степени не более n и высоты не более Q имеет порядок Q^{n+1} при $Q \rightarrow \infty$. Поэтому данный результат пока-

зывает, что для любого фиксированного n алгебраические числа распределены достаточно регулярно при большой высоте. Однако он описывает поведение только малой части из них. В связи с этим, Малер в своем письме к Спринджуку в 1985 году задал следующий вопрос: как распределены алгебраические числа фиксированной степени $n \geq 2$?

Один из возможных ответов на данный вопрос был дан Коледой (см. [140], а также [17] для случая $n = 2$). А именно, зафиксируем $n \geq 2$ и рассмотрим произвольный интервал $I \subset \mathbb{R}$. Напомним (см. § 3.1), что $\Phi_1(Q; I)$ обозначает количество алгебраических чисел $\alpha \in I$ степени не больше n и высоты не больше Q . Тогда

$$\Phi_1(Q; I) = \frac{(2Q)^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_I \rho_1(x) dx + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q\right), \quad Q \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

где $\zeta(\cdot)$ обозначает дзета-функцию Римана, а $l(n)$ определено как

$$l(n) := \begin{cases} 1, & n = 2, \\ 0, & n \geq 3. \end{cases} \quad (3.4)$$

Предельная плотность ρ_1 определяется формулой

$$\rho_1(x) := 2^{-n-1} \int_{D_x} \left| \sum_{j=1}^n j t_j x^{j-1} \right| dt_1 \dots dt_n, \quad (3.5)$$

где область интегрирования D_x определяется следующим образом:

$$D_x := \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq k \leq n} |t_k| \leq 1, |t_n x^n + \dots + t_1 x| \leq 1 \right\}.$$

Если $x \in [-1 + 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2}]$, то (3.5) можно упростить следующим образом:

$$\rho_1(x) = \frac{1}{12} \left(3 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 x^{2k} \right).$$

Функция ρ_1 совпадает с плотностью нулей случайного полинома

$$G(x) := \xi_0 + \xi_1 x + \dots + \xi_{n-1} x^{n-1} + \xi_n x^n, \quad (3.6)$$

где $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на $[-1, 1]$ (см. раздел 1.4.2). Напомним, это означает, что для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{E} \mu_G(B) = \int_B \rho_1(x) dx,$$

где $\mu_G(B)$, как обычно, обозначает число нулей G , лежащих в B .

В § 3.3 (также см. [120]) будет получен аналог формулы (3.3) для *комплексных* алгебраических чисел. В § 3.4 (также см. [119]) мы обобщим (3.3) на наборы из k сопряженных алгебраических чисел, показав, что асимптотическое поведение числа данных наборов описывается с помощью k -точечной корреляционной функции вещественных нулей полинома (3.6), которая была найдена в разделе 1.4.2 (также см. [119]).

Пусть дан полином

$$p(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$$

степени n . Временно будем полагать, что его коэффициенты являются произвольными вещественными или комплексными числами.

Обозначим

$$\Delta(p) := \min_{1 \leq i < j \leq n} |\alpha_i - \alpha_j| \quad (3.7)$$

минимальное расстояние между нулями p .

В своей знаменитой работе Малер (см. [166]) доказал, что

$$\Delta(p) \geq \sqrt{3} n^{-(n+2)/2} \frac{|D(p)|^{1/2}}{(|a_n| + \dots + |a_0|)^{n-1}}, \quad (3.8)$$

где

$$D(p) := a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad (3.9)$$

обозначает дискриминант полинома $p(x)$. Эквивалентно $D(p)$ можно определить как следующий определитель $(2n - 1) \times (2n - 1)$ -матрицы:

$$D(p) := (-1)^{n(n-1)/2} \times \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & a_0 \\ n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) сразу следует, что

$$|D(p)| \ll H(p)^{2n-2}. \quad (3.11)$$

Данная оценка верна для произвольных полиномов. Начиная с данного момента, мы опять будем рассматривать только полиномы с целочисленными коэффициентами.

В своей работе Малер отметил, что так как условие $D(p) \neq 0$ влечет $|D(p)| \geq 1$, то из (3.8) немедленно вытекает

$$\Delta(p) \gg H(p)^{-n+1} \quad (3.12)$$

при условии, что p не имеет кратных нулей. До сих пор оценка (3.12) является наилучшей из известных оценок снизу. Однако для $n \geq 4$ все еще неизвестно, насколько данная оценка отличается от оптимальной. Обозначим κ_n инфимум по таким κ , для которых

$$\Delta(p) > H(p)^{-\kappa}$$

выполняется для всех полиномов степени n с целочисленными коэффициентами, без кратных нулей и достаточно большой высоты $H(p)$. Легко видеть, что (3.12) эквивалентно $\kappa_n \leq n - 1$. Также довольно простым упражнением является проверка того, что $\kappa_2 = 1$ (см., например, [83]). Эвертсе (см. [101]) показал, что $\kappa_3 = 2$.

Для $n \geq 4$ известны только оценки κ_n . Сначала Мигнотте (см. [169]) доказал, что $\kappa_n \geq n/4$ для $n \geq 2$. Позже Бюжо и Мигнотте (см. [82, 83]) показали, что $\kappa_n \geq n/2$ для четных $n \geq 4$ и $\kappa_n \geq (n + 2)/4$ для нечетных $n \geq 5$. Вскоре после этого Бересневич, Берник и Гетце (см. [62]), используя совершенно иной подход, улучшили данный результат в случае нечетного n : они получили (в качестве следствия из более общего результата), что $\kappa_n \geq (n + 1)/3$ для $n \geq 2$. Недавно Бюжо и Дюджелла (см. [81]) достигли значительного прогресса, показав что $\kappa_n \geq (2n - 1)/3$ при $n \geq 4$ (также см. [80] для неприводимых полиномов).

Вышеприведенные результаты отвечают на следующий вопрос: “Как близко друг к другу могут располагаться два сопряженных алгебраических числа степени n ?” Грубо говоря, если мы рассмотрим полином p^* , минимизирующий $\Delta(p)$ среди всех полиномов с целочисленными коэффициентами степени n , одинаковой высоты и без кратных нулей, тогда $\Delta(p^*)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$H(p^*)^{-c_1 n} \ll \Delta(p^*) \ll H(p^*)^{-c_2 n}$$

для некоторых абсолютных констант $0 < c_2 \leq c_1$. В § 3.5 (также см. [121]) вместо рассмотрения экстремального полинома p^* мы изучим поведение $\Delta(p)$ для “типичного” полинома p с целочисленными коэффициентами. Мы докажем, что для “большинства” полиномов с целочисленными коэффициентами (точная формулировка дана в разделе 3.5.1) выполнено

$$\Delta(p) \asymp 1.$$

Мы также покажем, что данная оценка имеет место для “большинства” непри-

водимых (над \mathbb{Q}) полиномов с целочисленными коэффициентами.

Родственной задачей является изучение распределения дискриминантов полиномов с целочисленными коэффициентами. Чтобы ее сформулировать, удобно (хотя и не необходимо) воспользоваться вероятностной терминологией. Зафиксируем некоторое $Q \in \mathbb{N}$. Напомним, что $\mathcal{P}(Q)$ обозначает класс всех полиномов p с целочисленными коэффициентами, таких что $\deg(p) \leq n$ и $H(p) \leq Q$. Мощность этого класса равна $(2Q + 1)^{n+1}$. Рассмотрим равномерное вероятностное распределение на данном классе, при этом вероятность каждого полинома равна $(2Q + 1)^{-n-1}$. Таким образом, мы имеем случайный полином

$$G_Q(x) = \xi_{Q,n}x^n + \xi_{Q,n-1}x^{n-1} + \cdots + \xi_{Q,0} \quad (3.13)$$

с независимыми коэффициентами, равномерно распределенными на $2Q + 1$ целой точке $\{-Q, \dots, Q\}$. Нас интересует асимптотическое поведение $D(G_Q)$ при фиксированном n и при $Q \rightarrow \infty$.

Берник, Гетце и Куксо (см. [65]) показали, что при $\nu \in [0, 1/2]$

$$\mathbb{P}[|D(G_Q)| < Q^{2n-2-2\nu}] \gg Q^{-2\nu}.$$

Отметим, что случай $\nu = 0$ согласуется с (3.11). В [65] было предположено, что данная оценка оптимальна с точностью до константы:

$$\mathbb{P}[|D(G_Q)| < Q^{2n-2-2\nu}] \asymp Q^{-2\nu}. \quad (3.14)$$

Данная гипотеза оказалась верной при $n = 2$: Гетце, Коледа и Королев (см. [117]) показали, что при $n = 2$ и $\nu \in (0, 3/4)$ выполнено

$$\mathbb{P}[|D(G_Q)| < Q^{2-2\nu}] = 2(\log 2 + 1)Q^{-2\nu} \left(1 + O(Q^{-\nu} \log Q + Q^{2\nu-3/2} \log^{3/2} Q) \right).$$

Однако для $n = 3$ и $\nu \in [0, 3/5)$ Коледа, Гетце и Куксо (см. [141]) получили асимптотическое соотношение

$$\mathbb{P}[|D(G_Q)| < Q^{4-2\nu}] = \kappa Q^{-5\nu/3} \left(1 + O(Q^{-\nu/3} \log Q + Q^{5\nu/3-1}) \right), \quad (3.15)$$

где абсолютная константа κ была явно вычислена. Тем самым, гипотеза была опровергнута.

Недавно Бересневич, Берник и Гетце (см. [63]) показали, что для всех n и $0 \leq \nu < n - 1$ выполнено

$$\mathbb{P}[|D(G_Q)| < Q^{2n-2-2\nu}] \gg Q^{-n+3-(n+2)\nu/n}.$$

Они также получили аналогичную оценку для результатов.

В § 3.5 (также см. [121]) мы докажем предельную теорему для $D(G_Q)$. В качестве следствия, мы получим, что "с высокой вероятностью" (детали см. в разделе 3.5.1) выполняется следующее асимптотическое соотношение:

$$|D(G_Q)| \asymp Q^{2n-2}.$$

Такая же оценка "с высокой вероятностью" имеет место и для неприводимых полиномов.

Для более полного обзора предмета мы отсылаем читателя к [64].

3.3. Распределение комплексных алгебраических чисел

Результаты данного параграфа были получены совместно с Ф. Гетце и Д. Коледой.

Пусть дана область в комплексной плоскости $\Omega \subset \mathbb{C}$. Напомним (см. § 3.1), что $\Phi_1(Q; \Omega)$ обозначает число алгебраических чисел в Ω степени не более n и высоты не более Q . В данном параграфе мы будем всегда предполагать, что Ω не пересекает вещественную ось, а ее граница состоит из конечного числа алгебраических кривых.

Теорема 29. *Зафиксируем произвольное целое число $n \geq 2$. Справедливо соотношение*

$$\Phi_1(Q; \Omega) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_{\Omega} \psi(z) \lambda(dz) + O(Q^n), \quad Q \rightarrow \infty, \quad (3.16)$$

где, как обычно, λ обозначает меру Лебега на комплексной плоскости, а предельная плотность ψ определяется формулой

$$\psi(z) := \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \int_{D_z} \left| \sum_{k=1}^{n-1} t_k \left((k+1)z^k - \frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} \right) \right|^2 dt_1 \dots dt_{n-1}. \quad (3.17)$$

Интегрирование производится по области

$$D_z := \left\{ (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \max_{1 \leq k \leq n-1} |t_k| \leq 1, \right. \\ \left. \left| z \sum_{k=1}^{n-1} t_k \left(z^k - \frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} \right) \right| \leq 1, \left| \frac{1}{\operatorname{Im} z} \sum_{k=1}^{n-1} t_k \operatorname{Im} z^{k+1} \right| \leq 1 \right\}.$$

Неявная константа в остаточном члене в правой части (3.16) зависит только от n , числа алгебраических кривых, образующих границу области Ω , а также их максимальной степени.

Доказательство Теоремы 29 дано в разделе 3.3.1. Сейчас приведем некоторые свойства предельной плотности ψ .

Предложение 7. *Функция ψ положительна на \mathbb{C} и удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\psi(-z) = \psi(\bar{z}) = \psi(z), \\ \psi\left(\frac{1}{z}\right) = |z|^4 \psi(z). \quad (3.18)$$

Доказательство. Положительность и первое соотношение тривиальны. Чтобы доказать (3.18), заметим, что для любого неприводимого полинома $g(z)$ с целочисленными коэффициентами степени n , полином $z^n g(z^{-1})$ также неприводим и имеет такие же степень и высоту. Следовательно, для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ выполнено

$$\Phi_1(Q; \Omega) = \Phi_1(Q; \Omega^{-1}),$$

где Ω^{-1} определена как $\Omega^{-1} := \{z \in \mathbb{C} : z^{-1} \in \Omega\}$. Устремляя $Q \rightarrow \infty$, из Теоремы 29 получаем

$$\int_{\Omega} \psi(z) \lambda(dz) = \int_{\Omega^{-1}} \psi(z) \lambda(dz).$$

С другой стороны, замена $z \rightarrow 1/z$ приводит к

$$\int_{\Omega} \psi(z) \lambda(dz) = \int_{\Omega^{-1}} \psi(z^{-1}) |z|^{-4} \lambda(dz).$$

Так как класс областей Ω достаточно большой, приходим к (3.18). ■

Предложение 8. *Около вещественной прямой плотность ψ допускает следующее асимптотическое приближение:*

$$\psi(x_0 + iy) = A|y| \cdot (1 + o(1)), \quad y \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

Постоянная A не зависит от y и может быть выписана явно:

$$A = \int_{\tilde{D}_{x_0}} \left| \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)t_k x_0^{k-1} \right|^2 dt_1 \dots dt_{n-1}.$$

Область интегрирования определяется следующим образом:

$$\tilde{D}_{x_0} = \left\{ (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \max_{1 \leq k \leq n-1} |t_k| \leq 1, \right. \\ \left. \left| \sum_{k=1}^{n-1} k t_k x_0^{k+1} \right| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) t_k x_0^k \right| \leq 1 \right\}.$$

Соотношение (3.19) можно интерпретировать как “отталкивание” комплексных алгебраических чисел от вещественной оси.

Доказательство. Из соотношения

$$\frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} = \frac{z^{k+1} - \bar{z}^{k+1}}{z - \bar{z}} = \sum_{j=0}^k z^{k-j} \bar{z}^j$$

вытекает

$$(k+1)z^k - \frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} = \sum_{j=0}^k z^{k-j} (z^j - \bar{z}^j) \\ = (z - \bar{z}) \sum_{j=1}^k z^{k-j} \sum_{m=0}^{j-1} z^{j-1-m} \bar{z}^m = (z - \bar{z}) \sum_{s=1}^k s z^{s-1} \bar{z}^{k-s}.$$

Следовательно, $\psi(z)$ и D_z могут быть переписаны следующим образом:

$$\psi(z) = 4 |\operatorname{Im} z| \int_{D_z} \left| \sum_{k=1}^{n-1} t_k \sum_{s=1}^k s z^{s-1} \bar{z}^{k-s} \right|^2 dt_1 \dots dt_{n-1}$$

и

$$D_z = \left\{ (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \max_{1 \leq k \leq n-1} |t_k| \leq 1, \right. \\ \left. \left| \sum_{k=1}^{n-1} t_k \sum_{j=1}^k z^{k-j+1} \bar{z}^j \right| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^{n-1} t_k \sum_{j=0}^k z^{k-j} \bar{z}^j \right| \leq 1 \right\}.$$

Замечая, что $\tilde{D}_{x_0} = D_{x_0+0 \cdot i}$ и устремляя $\operatorname{Im} z \rightarrow 0$, приходим к требуемому соотношению. ■

Предложение 9. При $|z| \geq 1$ имеет место оценка

$$\psi(z) \asymp \frac{|\operatorname{Im} z|}{|z|^6},$$

где, как обычно, неявная константа зависит только от n .

Доказательство. Из Предложения 8 вытекает, что $\psi(z) \asymp |\operatorname{Im} z|$ при $|z| \leq 1$, что вместе с (3.18) завершает доказательство. ■

Если $|z|$ относительно мало или велико, тогда плотность возможно переписать в упрощенной форме.

Предложение 10. Если $|z| \leq 1 - 1/\sqrt{2}$, то

$$\psi(z) = \frac{2^{n-1}}{3 |\operatorname{Im} z|} \sum_{k=1}^{n-1} \left| (k+1)z^k - \frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} \right|^2.$$

Если $|z| \geq 2 + \sqrt{2}$, то

$$\psi(z) = \frac{2^{n-1}}{3 |\operatorname{Im} z|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|z|^{4k+4}} \left| (k+1)\bar{z}^k - \frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} \right|^2.$$

Доказательство. При $|z| \leq 1 - 1/\sqrt{2}$ выполнено

$$\sum_{k=2}^n (k-1)|z|^k \leq 1 \text{ и } \sum_{k=2}^n k|z|^{k-1} \leq 1,$$

что приводит к

$$D_z = [-1, 1]^{n-1},$$

и путем интегрирования мы приходим к первому утверждению. Второе утверждение следует из первого и (3.18). \blacksquare

Завершим данный раздел рассмотрением случая $n = 2$.

Пример. Для квадратичных алгебраических чисел плотность принимает следующий вид:

$$\psi(z) = \frac{4}{|\operatorname{Im} z|} \int_{D_z} |t \operatorname{Im} z|^2 dt,$$

где

$$D_z := \left\{ t \in \mathbb{R} : |t| \leq \min \left(1, \frac{1}{|z|^2}, \frac{1}{2|\operatorname{Re} z|} \right) \right\}.$$

После элементарных преобразований получаем

$$\psi(x + iy) = \begin{cases} \frac{8}{3}|y|, & \text{if } x^2 + y^2 \leq 1, \text{ и } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{|y|}{3x^3}, & \text{if } (|x| - 1)^2 + y^2 \leq 1, \text{ и } |x| > \frac{1}{2}, \\ \frac{8|y|}{3(x^2 + y^2)^3}, & \text{if } (|x| - 1)^2 + y^2 > 1, \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

3.3.1. Доказательство Теоремы 29

Для $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ обозначим γ_k число простых полиномов из \mathcal{P}_Q , имеющих ровно k нулей в Ω . Для любого алгебраического числа его минимальный полином является простым, и при этом любой простой полином является минимальным для некоторого алгебраического числа. Следовательно,

$$\Phi_1(Q; \Omega) = \sum_{k=1}^n k\gamma_k. \quad (3.20)$$

Рассмотрим множество $A_k \subset [-1, 1]^{n+1}$, состоящее из тех точек $(t_0, \dots, t_n) \in [-1, 1]^{n+1}$, для которых полином $t_0 + t_1x + \dots + t_nx^n$ имеет ровно k нулей в Ω . Количество примитивных полиномов из \mathcal{P}_Q , имеющих ровно k нулей в Ω , равно $\theta^*(QA_k)$. По определению простого полинома, получаем, что

$$\left| \gamma_k - \frac{1}{2}\theta^*(QA_k) \right| \leq R_Q, \quad (3.21)$$

где R_Q обозначает число приводимых (над \mathbb{Q}) полиномов из \mathcal{P}_Q . Отметим, что множитель $\frac{1}{2}$ возникает из-за того, что у простых полиномов старший коэффициент положителен. Известно (см. [217]), что

$$R_Q = O\left(Q^n \log^{l(n)} Q\right), \quad Q \rightarrow \infty. \quad (3.22)$$

Так как не существует приводимого над \mathbb{Q} квадратичного полинома с целочисленными коэффициентами без вещественных нулей, логарифмический множитель в случае $n = 2$ может быть опущен. Таким образом, из (3.20), (3.21), и (3.22) получаем

$$\Phi_1(Q; \Omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \theta^*(QA_k) + O(Q^n), \quad Q \rightarrow \infty. \quad (3.23)$$

Чтобы оценить $\theta^*(QA_k)$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 52. *Пусть дана ограниченная область $A \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, с границей, состоящей из конечного числа алгебраических поверхностей. Тогда*

$$\theta^*(tA) = \frac{\lambda_d(A)}{\zeta(d)} t^d + O\left(t^{d-1} \log^{l(d)} t\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Напомним, что $\lambda_d(A)$ обозначает объем множества. Неявная константа в остаточном члене в правой части зависит только от d , числа алгебраических поверхностей, а также их максимальной степени.

Результаты данного типа хорошо известны, см., например, классическую монографию Бахманна [48, стр. 436–444] (в частности, формулы (83a) и (83b) на стр. 441–442). Однако мы не смогли отыскать данного результата в требуемой нам форме, поэтому приводим доказательство здесь.

Доказательство. Заметим, что

$$\theta(tA) = \sum_{j=1}^{[Nt]+1} \theta^*\left(\frac{t}{j}A\right),$$

где N выбрано настолько большим, чтобы выполнялось $A \subset [-N, N]^d$.

Напомним, что μ обозначает функцию Мебиуса, определение которой дано в (3.1). Применение формулы обращения Мебиуса (см., например, [179]) дает

$$\theta^*(tA) = \sum_{j=1}^{[Nt]+1} \mu(j) \theta\left(\frac{t}{j}A\right). \quad (3.25)$$

Из принципа Липшица (см. [91]) следует, что

$$\left| \theta\left(\frac{t}{j}A\right) - \left(\frac{t}{j}\right)^d \lambda_d(A) \right| \leq c \cdot \left(\frac{t}{j}\right)^{d-1} \quad (3.26)$$

для некоторой константы c , зависящей только от числа алгебраических поверхностей и их максимальной степени. Применение этого к (3.39) приводит к

$$\left| \theta^*(tA) - \lambda_d(A)t^d \sum_{j=1}^{[Nt]+1} \frac{\mu(j)}{j^d} \right| \leq ct^{d-1} \sum_{j=1}^{[Nt]+1} \frac{1}{j^{d-1}}. \quad (3.27)$$

Хорошо известно (см., например, [179]), что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(j)}{j^d} = \frac{1}{\zeta(d)}.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{j=1}^{[Nt]+1} \frac{\mu(j)}{j^d} - \frac{1}{\zeta(d)} \right| \leq \sum_{j=[Nt]+2}^{\infty} \frac{1}{j^d} \leq \frac{1}{(d-1)(Nt)^{d-1}}. \quad (3.28)$$

Более того, выполнено

$$\sum_{j=1}^{[Nt]+1} \frac{1}{j^{d-1}} \leq \begin{cases} \zeta(d-1), & d \geq 3, \\ \log([Nt]+1) + 1, & d = 2. \end{cases} \quad (3.29)$$

Объединяя (3.27), (3.28), и (3.29), приходим к требуемому. \blacksquare

Так как граница Ω состоит из конечного числа алгебраических кривых, граница A_k состоит из конечного числа алгебраических поверхностей. Поэтому из Леммы 52 вытекает

$$\theta^*(QA_k) = \frac{\lambda_{n+1}(A_k)}{\zeta(n+1)} Q^{n+1} + O(Q^n), \quad Q \rightarrow \infty,$$

что вместе с (3.40) влечет

$$\Phi_1(Q; \Omega) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \sum_{k=1}^n k \lambda_{n+1}(A_k) + O(Q^n), \quad Q \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Чтобы вычислить $\sum_{k=1}^n k \lambda_{n+1}(A_k)$, заметим, что

$$\lambda_{n+1}(A_k) = 2^{n+1} \mathbb{P}[\mu_G(\Omega) = k],$$

где G является случайным полиномом, определенным в (3.6), а μ_G , как обычно, обозначает его считающую меру нулей. Суммируя по k , получаем

$$\sum_{k=1}^n k \lambda_{n+1}(A_k) = 2^{n+1} \mathbb{E} \mu_G(\Omega). \quad (3.31)$$

Правая часть последнего равенства была вычислена в [5] в более общей постановке: было показано, что если коэффициенты $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ имеют совместную плотность распределения $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$, тогда справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mu_G(\Omega) &= \int_{\Omega} dr d\alpha \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dt_1 \dots dt_{n-1} \frac{r^2}{\sin \alpha} \\ &\times \left(\left[\sum_{k=1}^{n-1} t_k r^{k-1} \left((k+1) \cos(k+1)\alpha - \cos \alpha \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin \alpha} \right) \right]^2 \right. \\ &\left. + \left[\sum_{k=1}^{n-1} k t_k r^{k-1} \sin(k+1)\alpha \right]^2 \right) \\ &\times p \left(\frac{1}{\sin \alpha} \sum_{k=1}^{n-1} t_k r^{k+1} \sin k\alpha, -\frac{1}{\sin \alpha} \sum_{k=1}^{n-1} t_k r^k \sin(k+1)\alpha, t_1, \dots, t_{n-1} \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $r = |z|$ и $\alpha = \arg z$ полярные координаты в комплексной плоскости.

В случае, когда коэффициенты независимы и равномерно распределены на $[-1, 1]$, совместная плотность распределения принимает вид

$$p = 2^{-n-1} \mathbb{1}_{[-1,1]^{n+1}}.$$

Таким образом, из (3.42) и (3.41) вытекает, что для завершения доказательства достаточно показать, что для плотности p данного вида правая часть (3.32)

совпадает с

$$\int_{\Omega} \psi(z) \theta(dz),$$

где ψ определена в (3.17).

В самом деле, подынтегральное выражение в (3.17) преобразуется как

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{n-1} t_k \left((k+1)z^k - \frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} \right) \right|^2 = \frac{1}{r^2} \left| \sum_{k=1}^{n-1} t_k \left((k+1)z^{k+1} - z \frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} \right) \right|^2 \\ & = \left| \sum_{k=1}^{n-1} t_k r^k \left(\left[(k+1) \cos(k+1)\alpha - \cos \alpha \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin \alpha} \right] + i \left[k \sin(k+1)\alpha \right] \right) \right|^2, \end{aligned}$$

а для функций, задающих область D_z , выполнено

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{n-1} t_k \left(z^{k+1} - z \frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} \right) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} t_k \left(\operatorname{Re} z^{k+1} - \operatorname{Re} z \frac{\operatorname{Im} z^{k+1}}{\operatorname{Im} z} \right) \right| \\ & = \left| \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{k=1}^{n-1} t_k r^{k+1} (\sin \alpha \cos(k+1)\alpha - \cos \alpha \sin(k+1)\alpha) \right| \\ & = \left| \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{k=1}^{n-1} t_k r^{k+1} \sin k\alpha \right|, \end{aligned}$$

и

$$\left| \frac{1}{\operatorname{Im} z} \sum_{k=1}^{n-1} t_k \operatorname{Im} z^{k+1} \right| = \left| \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{k=1}^{n-1} t_k r^k \sin(k+1)\alpha \right|,$$

что завершает доказательство.

3.4. Корреляция между вещественными сопряженными алгебраическими числами

Результаты данного параграфа были получены совместно с Ф. Гетце и Д. Коледой.

3.4.1. Обозначения и формулировка результата

Зафиксируем $n \geq 2$ и $k \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим

$$\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Напомним обозначения для элементарных симметрических функций:

$$\sigma_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0, \\ \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq k} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_i}, & \text{если } 1 \leq i \leq k, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Также напомним, что $\Phi_k(Q; B)$ обозначает число лежащих в B упорядоченных наборов сопряженных алгебраических чисел степени не более n и высоты не более Q .

Для данной функции $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^k$ обозначим $N_k(g, B)$ число лежащих в B упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in B$ различных вещественных чисел, таких что

$$g(x_1) = \dots = g(x_k) = 0.$$

Для любого алгебраического числа его минимальный полином является простым, и при этом любой простой полином является минимальным для некоторого алгебраического числа. Таким образом, мы имеем

$$\Phi_k(Q; B) = \sum_{p \in \mathcal{P}^*(Q)} N_k(p, B). \quad (3.33)$$

Применяя теорему Фубини к правой части, получаем

$$\Phi_k(Q; B) = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \#\{p \in \mathcal{P}^*(Q) : N_k(p, B) = m\}. \quad (3.34)$$

Так как $N_k(p, B) \leq n!/(n-k)!$, сумма в правой части конечна.

Сформулируем главный результат данного параграфа.

Теорема 30. Пусть дана область B в \mathbb{R}^k с границей, состоящей из конечного числа алгебраических поверхностей. Тогда

$$\Phi_k(Q; B) = \frac{(2Q)^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_B \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q\right), \quad Q \rightarrow \infty, \quad (3.35)$$

где

$$\rho_k(\mathbf{x}) := 2^{-n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j| \int_{D_{\mathbf{x}}} \prod_{i=1}^k \left| \sum_{j=0}^{n-k} t_j x_i^j \right| dt_0 \dots dt_{n-k} \quad (3.36)$$

и

$$D_{\mathbf{x}} := \left\{ (t_0, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k+1} : \max_{0 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{i-j} \sigma_{i-j}(\mathbf{x}) t_j \right| \leq 1 \right\}.$$

Неявная константа в остаточном члене в правой части (3.35) зависит только от n , числа алгебраических поверхностей, образующих границу области B , а также их максимальной степени. Доказательство Теоремы 30 дано в разделе 3.4.2.

Следствие 18. В случае $k = 1$ получаем (3.3).

Следствие 19. При $k = n$ соотношение (3.36) упрощается следующим образом:

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \frac{2^{-n}}{(n+1)} \left(\frac{1}{\max_{0 \leq i \leq n} |\sigma_i(\mathbf{x})|} \right)^{n+1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

В разделе 1.4.2 было показано, что функция ρ_k , определенная в (3.36), является k -точечной корреляционной функцией нулей случайного полинома G , определенного в (3.6). Напомним, что это означает, что для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^k$ выполнено

$$\mathbb{E}N_k(G, B) = \int_B \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.37)$$

Приведем несколько свойств ρ_k .

Предложение 11. а) Для любой перестановки s длины n и всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$

$$\rho_k(x_{s(1)}, x_{s(2)}, \dots, x_{s(k)}) = \rho_k(\mathbf{x}).$$

б) Для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$

$$\rho_k(-\mathbf{x}) = \rho_k(\mathbf{x}).$$

в) Для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ с ненулевыми координатами

$$\rho_k(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_k^{-1}) = \rho_k(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k x_i^2.$$

Доказательство. Первое и второе свойства очевидны. Для доказательства последнего заметим, что для любого неприводимого полинома $g(z)$ с целочисленными коэффициентами степени n , полином $z^n g(z^{-1})$ также неприводим и имеет такие же степень и высоту. Поэтому для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^k$, не содержащего точек с нулевыми координатами, выполнено

$$\Phi_k(Q; B^{-1}) = \Phi_k(Q; B),$$

где B^{-1} обозначает

$$B^{-1} := \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_k^{-1}) \in B\}.$$

Устремляя $Q \rightarrow \infty$ и применяя (3.35), приходим к

$$\int_B \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{B^{-1}} \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Заменяя $(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1})$, получаем

$$\int_B \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B \left(\prod_{i=1}^k x_i^{-2} \right) \rho_k(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_k^{-1}) d\mathbf{x}.$$

Так как класс множеств B достаточно большой, приходим к требуемому. ■

3.4.2. Доказательство Теоремы 30

Рассмотрим множество $A_m \subset [-1, 1]^{n+1}$, состоящее из тех точек $(t_0, \dots, t_n) \in [-1, 1]^{n+1}$, для которых

$$N_k(t_0 + t_1 x + \dots + t_n x^n, B) = m.$$

Тогда число примитивных полиномов $p \in \mathcal{P}(Q)$, таких что $N_k(p, B) = m$, равно $\theta^*(QA_m)$. Таким образом, из определения простого полинома следует, что

$$\left| \#\{p \in \mathcal{P}^*(Q) : N_k(p, B) = m\} - \frac{1}{2} \theta^*(QA_m) \right| \leq R_Q, \quad (3.38)$$

где R_Q обозначает количество приводимых (над \mathbb{Q}) полиномов из \mathcal{P}_Q . Отметим, что множитель $1/2$ возникает из-за того, что у простых полиномов старший коэффициент положителен. Известно (см. [217]), что

$$R_Q = O\left(Q^n \log^{l(n)} Q\right), \quad Q \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

Объединяя (3.38) и (3.39) с (3.34), получаем

$$\Phi_k(Q; B) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} m \theta^*(QA_m) + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q\right), \quad Q \rightarrow \infty. \quad (3.40)$$

Чтобы оценить $\theta^*(QA_m)$, воспользуемся Леммой 52. Так как граница B состоит из конечного числа алгебраических поверхностей, то же справедливо и для A_m . Следовательно, по Лемме 52 имеем

$$\theta^*(QA_m) = \frac{\lambda_{n+1}(A_m)}{\zeta(n+1)} Q^{n+1} + O(Q^n), \quad Q \rightarrow \infty,$$

что вместе с (3.40) влечет

$$\Phi_k(Q; \Omega) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} m \lambda_{n+1}(A_m) + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q\right), \quad Q \rightarrow \infty. \quad (3.41)$$

Чтобы вычислить $\sum_{m=0}^{\infty} m \lambda_{n+1}(A_m)$, заметим, что

$$\lambda_{n+1}(A_m) = 2^{n+1} \mathbb{P}[N_k(G, B) = m],$$

где G является полиномом, определенным в (3.6). Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \lambda_{n+1}(A_m) = 2^{n+1} \mathbb{E} N_k(G, B), \quad (3.42)$$

что вместе с (3.37) завершает доказательство.

3.5. Распределение дискриминанта полиномов с целочисленными коэффициентами

Результаты данного параграфа были получены совместно с Ф. Гетце.

3.5.1. Формулировка результата

Напомним, что G и G_Q обозначают случайные полиномы с независимыми коэффициентами, равномерно распределенными на $\{-Q, \dots, Q\}$ и $[-1, 1]$ соответственно; см. (3.6) и (3.13). Обозначим φ плотность распределения дискриминанта $D(G)$.

Теорема 31. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{-\infty \leq a \leq b \leq \infty} \left| \mathbb{P} \left[a \leq \frac{D(G_Q)}{Q^{2n-2}} \leq b \right] - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \ll \frac{1}{Q}. \quad (3.43)$$

Доказательство Теоремы 31 приведено в разделе 3.5.2. Сейчас мы приведем несколько следствий.

Напомним, что $|D(G_Q)| \ll Q^{2n-2}$; см. (3.11). Из Теоремы 31 следует, что с высокой вероятностью имеет место аналогичная нижняя оценка.

Следствие 20. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее только от n), такое что для достаточно больших Q*

$$\mathbb{P}[|D(G_Q)| > \delta Q^{2n-2}] > 1 - \varepsilon. \quad (3.44)$$

Доказательство. Из (3.43) вытекает

$$\mathbb{P}[|D(G_Q)| < \delta Q^{2n-2}] \ll \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x) dx + \frac{1}{\log Q},$$

что завершает доказательство. ■

В качестве другого следствия получим оценку для $\Delta(G_Q)$ (минимального расстояния между нулями G_Q ; см. (3.7)).

Следствие 21. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее только от n), такое что для достаточно больших Q*

$$\mathbb{P}[\delta < \Delta(G_Q) < \delta^{-1}] > 1 - \varepsilon. \quad (3.45)$$

Доказательство. Для достаточно больших Q имеем

$$\mathbb{P} \left[|\xi_{Q,n}| > \frac{\varepsilon}{2} Q \right] > 1 - \varepsilon.$$

Поэтому из (3.9) и (3.11) вытекает, что с вероятностью по крайней мере $1 - \varepsilon$ выполнено

$$\Delta(G_Q) \leq \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^{2/n},$$

что влечет верхнюю оценку. Нижняя оценка немедленно вытекает из (3.44) и (3.8). ■

Замечание о неприводимости. Если мы хотим интерпретировать $\Delta(G_Q)$ как расстояние между ближайшими сопряженными алгебраическими числами, нам следует ограничиться рассмотрением только неприводимых полиномов. Другими словами, надо рассматривать условное распределение случайного полинома G_Q при условии того, что он неприводим. В данном случае соотношения (3.44) и (3.45) с условными версиями левых частей также имеют место. Данный факт сразу следует из оценки

$$\mathbb{P}[G_Q \text{ неприводим}] \asymp 1,$$

которая была получена ван дер Варденом (см. [217]).

3.5.2. Доказательство Теоремы 31

Рассмотрим множество $A \subset [-1, 1]^{n+1}$, состоящее из тех точек $(t_0, \dots, t_n) \in [-1, 1]^{n+1}$, для которых

$$a \leq D(t_0 + t_1x + \dots + t_nx^n) \leq b.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lambda_{n+1}(A) = 2^{n+1} \mathbb{P}[a \leq D(G) \leq b] = 2^{n+1} \int_a^b \varphi(x) dx,$$

тогда как

$$\theta(QA) = (2Q + 1)^{n+1} \mathbb{P} \left[a \leq \frac{D(G_Q)}{Q^{2n-2}} \leq b \right].$$

Из принципа Липшица (см. [91]) следует, что

$$|\theta(QA) - Q^{n+1} \lambda_{n+1}(A)| \leq c \cdot Q^n \quad (3.46)$$

для некоторой постоянной c , зависящей только от n . Объединяя последние три соотношения, завершаем доказательство теоремы.

3.5.3. Результаты

Для полиномов

$$p(x) := a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n), \quad q(x) := b_m(x - \beta_1) \dots (x - \beta_m),$$

обозначим $R(p, q)$ их результат, определенный как

$$R(p, q) := a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

Дискриминант является частным случаем результата:

$$D(p) = (-1)^{n(n-1)/2} a_n^{-1} R(p, p').$$

Повторяя рассуждения раздела 3.5.2, можно получить следующий результат. Рассмотрим случайные полиномы

$$\begin{aligned} G_Q(x) &:= \xi_{Q,n} x^n + \xi_{Q,n-1} x^{n-1} + \dots + \xi_{Q,1} x + \xi_{Q,0}, \\ F_Q(x) &:= \eta_{Q,m} x^m + \eta_{Q,m-1} x^{m-1} + \dots + \eta_{Q,1} x + \eta_{Q,0} \end{aligned}$$

с независимыми коэффициентами, равномерно распределенными на $2Q + 1$ точке $\{-Q, \dots, Q\}$, и рассмотрим случайные полиномы

$$\begin{aligned} G(x) &:= \xi_n x^n + \xi_{n-1} x^{n-1} + \dots + \xi_1 x + \xi_0, \\ F(x) &:= \eta_m x^m + \eta_{m-1} x^{m-1} + \dots + \eta_1 x + \eta_0 \end{aligned}$$

с независимыми коэффициентами, равномерно распределенными на $[-1, 1]$. Пусть ψ обозначает плотность распределения $R(G, F)$. Тогда

$$\sup_{-\infty \leq a \leq b \leq \infty} \left| \mathbb{P} \left[a \leq \frac{R(G_Q, F_Q)}{Q^{m+n}} \leq b \right] - \int_a^b \psi(x) dx \right| \ll \frac{1}{Q}.$$

Глава 4

Выпуклые оболочки случайных процессов

4.1. Введение

Пусть дано ограниченное выпуклое множество $T \subset \mathbb{R}^n$. Определим его *внутренние объемы* $V_0(T), \dots, V_n(T)$ как коэффициенты в формуле Штейнера:

$$\lambda_n(T + rB_n) = \sum_{k=0}^n \kappa_{n-k} V_k(T) r^{n-k}, \quad r \geq 0, \quad (4.1)$$

где B_n обозначает n -мерный единичный шар, λ_n , как обычно, обозначает n -мерный объем и $\kappa_k := \pi^{k/2} / \Gamma(\frac{k}{2} + 1)$ обозначает объем B_k . Обозначим W_k равномерно распределенное случайное k -мерное линейное подпространство \mathbb{R}^n . При $1 \leq k \leq n$ выполнено следующее соотношение, называемое формулой Крофтона:

$$V_k(T) = \binom{n}{k} \frac{\kappa_n}{\kappa_k \kappa_{n-k}} \mathbb{E} \lambda_k(T|W_k), \quad (4.2)$$

где $T|W_k$ обозначает проекцию T на W_k . В частности, $V_1(T)$ с точностью до константы совпадает со средней шириной. Для более подробного изложения материала по интегральной геометрии мы отсылаем читателя к книгам [192] и [29].

Судаков (рассмотревший случай $k = 1$, см. [32]) и Шева (рассмотревшая произвольное $k \in \mathbb{N}$, см. [86]) расширили понятие внутренних объемов на *бесконечномерные* выпуклые множества (также см. [3, Гл. 4, § 9.9]). Пусть дано сепарабельное гильбертово пространство H . Нормализация в (4.1) выбрана таким образом, что $V_k(T)$ зависит только от T и не зависит от размерности пространства, в котором находится T . Поэтому определение $V_k(T)$ может быть расширено на любые конечномерные выпуклые множества из H (т.е. содержащиеся в каком-то конечномерном аффинном подпространстве H). Далее, для

произвольного выпуклого множества $T \subset H$ определим

$$V_k(T) := \sup_{T'} V_k(T') \in [0, +\infty], \quad (4.3)$$

где супремум берется по всем конечномерным выпуклым подмножествам T' множества T .

Напомним, что *изонормальный процесс* над сепарабельным гильбертовым пространством H – это гауссовский процесс $\{\xi(t) : t \in H\}$ с ковариационной функцией

$$\text{Cov}(\xi(s), \xi(s)) = \langle t, s \rangle.$$

Чтобы различные характеристики ξ были корректно определены, мы всегда имеем дело с сепарабельной модификацией процесса, которая существует в силу сепарабельности H (см. [155]).

Напомним, что выпуклое множество T называется *GB-множеством*, если существует версия изонормального процесса на T , имеющая ограниченные реализации. Известно, что GB-свойство равносильно $V_1(T) < \infty$, что также влечет $V_k(T) < \infty$ при всех $k \in \mathbb{N}$ (см. [86]). Следующее предложение является прямым следствием из [36, Теорема 3].

Предложение 12. *Для любого выпуклого компактного GB-множества $T \subset H$ существует модификация изонормального процесса ξ на H (так называемая естественная модификация), реализации которой линейны на линейной оболочке T .*

Отметим, что хотя процесс ξ линеен на T п.н., он необязательно непрерывен на T п.н. Для данного выпуклого компактного GB-множества $T \subset H$ мы будем всегда полагать, что ξ является естественной (следовательно, линейной п.н.) модификацией изонормального процесса на T .

Судаков (см. [32, Предложение 14]) установил связь между первым внутренним объемом и супремумом изонормального процесса.

Теорема 32 (Судаков). *Для произвольного выпуклого компактного GB -множества $T \subset H$ выполнено*

$$V_1(T) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \sup_{t \in T} \xi(t). \quad (4.4)$$

Цирельсон [35] обобщил данный результат на все внутренние объемы следующим образом. Рассмотрим k независимых копий $\{\xi_i(t) : t \in H\}$, $1 \leq i \leq k$, изонормального процесса $\xi(t)$. Назовем k -мерным спектром (необязательно выпуклого) компактного множества $T \subset H$ следующее случайное множество:

$$\text{спек}_k T := \{(\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)) : t \in T\} = \boldsymbol{\xi}(T) \subset \mathbb{R}^k,$$

где мы обозначили $\boldsymbol{\xi}(t) := (\xi_1(t), \dots, \xi_k(t))$.

Теорема 33 (Цирельсон). *Для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого выпуклого компактного GB -множества $T \subset H$ выполнено*

$$V_k(T) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k! \kappa_k} \mathbb{E} \lambda_k(\text{спек}_k T). \quad (4.5)$$

Замечание 18. Теорема 33 действительно является обобщением Теоремы 32. В самом деле, при $k = 1$ спектр $\text{спек}_1 T$ является диапазоном процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$, и по Теореме 33 получаем

$$V_1(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in T} \xi(t) - \inf_{t \in T} \xi(t) \right).$$

Так как процессы ξ и $-\xi$ имеют одинаковое распределение, приходим к

$$\mathbb{E} \inf_{t \in T} \xi(t) = -\mathbb{E} \sup_{t \in T} \xi(t),$$

что влечет (4.4).

Следующее предложение позволяет обобщить результаты Судакова и Цирельсона на невыпуклые множества.

Предложение 13. *Для любого компакта $T \subset H$, такого что $V_1(\overline{\text{conv} T}) < \infty$,*

$$\text{conv спек}_k T = \text{спек}_k \overline{\text{conv} T} \quad \text{п.н.},$$

где $\text{conv} T$ обозначает выпуклую оболочку T .

Доказательство будет приведено в разделе 4.5.4. В качестве прямого следствия получаем следующий результат (также см. [35, стр. 776]).

Предложение 14. *Спектр любого выпуклого компактного GB -множества с вероятностью единица выпуклый.*

Объединение Предложения 13 с Теоремами 32 и 33 влечет следующий результат.

Теорема 34 (Судаков-Цирельсон). *Для любого компакта $T \subset H$, такого что $V_1(\overline{\text{conv } T}) < \infty$,*

$$V_k(\overline{\text{conv } T}) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k! \kappa_k} \mathbb{E} \text{Vol}_k(\text{conv spec}_k T).$$

В частности,

$$V_1(\overline{\text{conv } T}) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \sup_{t \in T} \xi(t).$$

Замечание 19. Из (4.3) следует (также см. [32, Предложение 12]), что $V_k(\overline{\text{conv } T}) = V_k(\text{conv } T)$.

Данный результат может быть интерпретирован как бесконечномерный аналог формулы Крофтона (4.2). Следующее соотношение, также полученное Цирельсоном в [35], является бесконечномерным аналогом формулы Штейнера, см. (4.1).

Теорема 35 (Цирельсон). *Для любого $r > 0$ и любого выпуклого компактного GB -множества $T \subset H$*

$$\mathbb{E} \exp \left(\sup_{t \in T} \left[r \xi(t) - \frac{r^2}{2} \text{Var } \xi(t) \right] \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\sqrt{2\pi}} \right)^k V_k(T). \quad (4.6)$$

Теперь перейдем к *коническим* внутренним объемам, которые являются аналогами в сферической геометрии обычных (евклидовых) внутренних объемов.

Назовем множество $C \subset \mathbb{R}^n$ выпуклым конусом, если для любых $t, s \in C$ и $a, b \geq 0$ ¹ выполнено $at + bs \in C$. В сороковых годах предыдущего столетия в работах [42, 128, 191] был получен конический (также известный как сферический) аналог формулы Штейнера (4.1). В современной форме (см. [44, 115, 168]), данная формула выражает объем угловой окрестности выпуклого конуса C в \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{P}[\text{dist}^2(\theta, C) \leq \lambda] = \sum_{k=0}^n \beta_{k,n}(\lambda) v_k(C), \quad (4.7)$$

где θ является случайной величиной, равномерно распределенной на \mathbb{S}^{n-1} , и $\beta_{k,n}(\cdot)$ обозначает функцию распределения Бета-распределения с параметрами $(n - j)/2$ и $n/2$. Так как функции $\beta_{1,n}, \dots, \beta_{n,n}$ линейно независимы, данная формула однозначно определяет коэффициенты $v_k(C)$, которые называются *коническими внутренними объемами* конуса C . Нормализация выбрана таким образом, что они не зависят от размерности окружающего пространства. Конический внутренний объем $v_k(C)$ соответствует $(k - 1)$ -му сферическому внутреннему объему $v_{k-1}(C \cap \mathbb{S}^{n-1})$ из [43, 112, 193].

Следуя обозначениям из [44], для каждого $k = 0, 1, \dots, n$ определим k -й *полухвостовой функционал* следующим образом:

$$h_k(C) := v_k(C) + v_{k+2}(C) + \dots, \quad (4.8)$$

где при $k > n$ мы полагаем $v_k(C) := 0$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} v_k(C) &= h_k(C) - h_{k+2}(C), \quad k = 1, \dots, n - 2; \\ v_{n-1}(C) &= h_{n-1}(C), \quad v_n(C) = h_n(C). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Конические объемы удовлетворяют аналогу формулы Гаусса-Бонне (см. [193, Теорема 6.5.5] или [44, стр. 28]):

$$h_0(C) = v_0(C) + v_2(C) + \dots = \frac{1}{2}, \quad h_1(C) = v_1(C) + v_3(C) + \dots = \frac{1}{2}. \quad (4.10)$$

¹ В оригинальном определении выпуклого конуса a, b строго положительны, но нам удобно предполагать, что все рассматриваемые конусы содержат начало координат.

В частности,

$$v_0(C) + v_1(C) + \dots + v_n(C) = 1. \quad (4.11)$$

Коническая версия формулы Крофтона (4.2) утверждает, что при всех $0 \leq k \leq n - 1$

$$h_{k+1}(C) = \frac{1}{2} \mathbb{P}[C \cap W_{n-k} \neq \{0\}]. \quad (4.12)$$

В других обозначениях, это можно найти в [189, Гл. IV § 4]).

Также возможно сначала определить полухвостовые функционалы с помощью конической формулы Крофтона, а затем, используя (4.9), определить конические внутренние объемы. Мы последуем этому плану в § 4.5, когда будем определять конические внутренние объемы в бесконечномерном случае.

Также в данном параграфе мы обнаружим связь между коническими внутренними объемами и вероятностью поглощения спектром начала координат, тем самым получив конические версии формул Судакова и Цирельсона (4.4), (4.5) и (4.6): для любого $k \in \mathbb{N}$ и произвольного выпуклого компактного подмножества $T \subset H$ выполнено

$$\mathbb{P} \left[0 \in \text{Int conv} \left\{ (\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)) \in \mathbb{R}^k : t \in T \right\} \right] = h_{k+1}(\text{cone } T).$$

Данный результат можно интерпретировать как бесконечномерный аналог конической формулы Крофтона (4.12). При $k = 1$ она сводится к

$$\mathbb{P} \left[\inf_{t \in T} \xi(t) \geq 0 \right] = v_0(\text{cone } T).$$

Также мы покажем, что для любого $r > 0$ выполняется

$$\mathbb{E} \exp \left(\frac{1 - r^{-2}}{2} \sup_{t \in T} \frac{\xi_+^2(t)}{\text{Var } \xi(t)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k v_k(\text{cone } T),$$

что можно интерпретировать как бесконечномерный аналог конической формулы Штейнера (4.174).

Используя формулу Судакова (4.4), в § 4.2 (также см. [137]) мы вычислим первые внутренние объемы различных бесконечномерных выпуклых компактов, включая единичные шары в полунормах соболевского типа и эллипсоиды в

гильбертовом пространстве. Мы свяжем распределения случайных одномерных проекций этих множеств с распределениями S_1, S_2, C_1, C_2 , изученными в [68]. Мы покажем, что k -й внутренний объем множества всех функций на $[0, 1]$, с константой Липшица не более 1 и выходящих из 0 (соответственно, с нулевым средним), равен

$$\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}k + 1\right)}, \text{ соответственно, } \frac{\pi^{(k+1)/2}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}k + \frac{3}{2}\right)}.$$

Это связано с исследованием Гао и Витале (см. [113]), которые рассмотрели аналогичную задачу для функций с ограничением на полную вариацию вместо константы Липшица. Используя их результаты, мы приведем новый вывод формулы для среднего объема выпуклой оболочки d -мерного броуновского движения, полученной Элданом в [98]. Также мы приведем аналог результата Элдана для броуновского моста. Мы покажем, что из результатов про внутренние объемы липшицевых шаров аналогичным образом могут быть выведены формулы средних объемов случайных зоноидов (в смысле интеграла Ауманна), порожденных броуновским движением и броуновским мостом. В доказательствах будут использованы результаты Судакова и Цирельсона.

Если применить формулу Цирельсона (4.5) к случаю, когда T является конечномерным эллипсоидом, справа будет стоять определитель матрицы, строки которой являются независимыми одинаково распределенными центрированными гауссовскими векторами с эллипсоидами рассеяния, совпадающими с T . В § 4.3 (также см. [9]) данный результат будет обобщен на случай разнораспределенных гауссовских векторов. При этом внутренний объем в левой части заменяется на *смешанный объем*. В качестве приложения мы дадим геометрическую интерпретацию интенсивности нулей случайного гауссовского поля в терминах смешанного объема эллипсоидов рассеяния его градиентов.

§ 4.4 посвящен следующему вопросу. Старая гипотеза утверждает, что среди всех симплексов, вписанных в единичную сферу, правильный симплекс имеет максимальную среднюю ширину. Используя формулу Судакова (4.4), легко

получить следующую эквивалентную формулировку: для любого центрированного гауссовского вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) , удовлетворяющего $\mathbb{E} \xi_1^2 = \dots = \mathbb{E} \xi_n^2 = 1$, выполнено

$$\mathbb{E} \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_n\},$$

где η_1, η_2, \dots суть независимые стандартные гауссовские величины. Воспользовавшись данной вероятностной интерпретацией, мы получим *асимптотическую* версию гипотезы. Кроме того, мы покажем, что средняя ширина правильного симплекса с $2n$ вершинами удивительным образом близка к средней ширине правильного кроссполитопа с тем же числом вершин. На вероятностном языке, наш результат утверждает, что

$$1 \leq \frac{\mathbb{E} \max\{|\eta_1|, \dots, |\eta_n|\}}{\mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_{2n}\}} \leq \min \left\{ \sqrt{\frac{2n}{2n-1}}, 1 + \frac{C}{n \log n} \right\},$$

где $C > 0$ является абсолютной константой. Также мы вычислим все моменты длин проекций правильного куба, симплекса и кроссполитопа на прямую со случайным направлением, тем самым доказав несколько гипотез Финча. В заключение, мы установим предельные теоремы для распределений этих длин проекций, когда размерность стремится к бесконечности. В случае n -мерного куба Q_n , мы докажем, что

$$W_{Q_n} - \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \left(0, \frac{\pi - 3}{\pi} \right),$$

в то время как у симплекса и кроссполитопа предельные распределения связаны с распределением Гумбеля.

4.2. Внутренние объемы соболевских шаров с

приложением к броуновским выпуклым оболочкам

Результаты данного параграфа были получены совместно с Э. Каблучко.

4.2.1. Формулировка результатов

В литературе известно довольно мало примеров бесконечномерных множеств, у которых вычислены внутренние объемы. Целью данного параграфа является расширение списка известных примеров путем вычисления первых (и, где возможно, всех) внутренних объемов так называемых “соболевских шаров”. Это определенные бесконечномерные выпуклые компактные подмножества гильбертова пространства $L^2 = L^2[0, 1]$, определенные в терминах полунорм соболевского типа:

$$f \mapsto \left(\int_0^1 |f'(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Наши доказательства используют связь между внутренними объемами и изонормальным гауссовским процессом.

Соболевские шары

Дадим определение множеств, которые нас будут интересовать. Обозначим $AC[0, 1]$ пространство абсолютно непрерывных вещественнозначных функций на $[0, 1]$. Пусть $\|\cdot\|_p$ обозначает L^p -норму, где $p \in [1, \infty]$.

СЛУЧАЙ $p \neq 1$. Пусть сначала $p \in (1, \infty]$. Рассмотрим множество

$$\mathbb{K}^p := \{f \in AC[0, 1] : f' \in L^p, \|f'\|_p \leq 1\}.$$

Например, хорошо известно, что множество \mathbb{K}^∞ состоит из всех функций на $[0, 1]$ с константой Липшица, не превосходящей 1. Множество \mathbb{K}^p содержит все постоянные функции и, следовательно, не компактно в L^2 . Однако, если мы дополнительно наложим различные граничные условия, компактность появится.

Рассмотрим следующие множества:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{BM}^p &:= \{f \in \mathbb{K}^p : f(0) = 0\}, \\ \mathbb{K}_{CBM}^p &:= \{f \in \mathbb{K}^p : f(0) = f(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Как будет видно позже, эти множества соответствуют броуновскому движению (БД) и броуновскому движению, центрированному своим интегралом (ЦБД). Также определим следующие два множества, соответствующие броуновскому мосту (БМ) и броуновскому мосту, центрированному своим интегралом (ЦБМ):

$$\mathbb{K}_{BB}^p := \left\{ f \in \mathbb{K}^p : \int_0^1 f(s) ds = 0 \right\},$$

$$\mathbb{K}_{CBB}^p := \left\{ f \in \mathbb{K}^p : \int_0^1 f(s) ds = 0, f(0) = f(1) \right\}.$$

Пусть $M[0, 1]$ обозначает множество всех неубывающих функций на $[0, 1]$. Также рассмотрим множества

$$\mathbb{L}^p := \mathbb{K}^p \cap M[0, 1], \quad \mathbb{L}_{BM}^p := \mathbb{K}_{BM}^p \cap M[0, 1], \quad \mathbb{L}_{BB}^p := \mathbb{K}_{BB}^p \cap M[0, 1].$$

Не имеет смысла рассматривать множества \mathbb{L}_{CBM}^p и \mathbb{L}_{CBB}^p , так как они состоят из одной нулевой функции.

СЛУЧАЙ $p = 1$. В случае $p = 1$ вышеприведенные определения задают множества, которые некомпактны в L^2 . Вместо абсолютно непрерывных функций надо перейти к более широкому классу функций ограниченной вариации. Из технических соображений в этом случае удобно рассматривать функции на \mathbb{R} , а не на $[0, 1]$. Пусть D обозначает множество функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ из пространства Скорохода, которые постоянны на $(-\infty, 0)$ и на $[1, +\infty)$ (с необязательно одинаковыми значениями на обоих интервалах). Обозначим $TV(f)$ полную вариацию функции f на \mathbb{R} . При $p = 1$ положим

$$\mathbb{K}^1 := \{f \in D : TV(f) \leq 1\}.$$

Наложим теперь граничные условия на функции из \mathbb{K}^1 . Обозначим $f(t-) := \lim_{s \uparrow t} f(s)$ левый предел f в точке $t \in \mathbb{R}$. Пусть $R_f(t) := f(t) - f(t-)$ обозначает

скачок f в точке $t \in \mathbb{R}$. Положим

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{BM}^1 &:= \{f \in \mathbb{K}^1 : f(0-) = 0, R_f(1) = 0\}, \\ \mathbb{K}_{CBM}^1 &:= \{f \in \mathbb{K}^1 : f(0-) = f(1) = 0\}.\end{aligned}$$

Также определим следующие множества:

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{BB}^1 &:= \left\{ f \in \mathbb{K}^1 : \int_0^1 f(s)ds = 0, R_f(0) = R_f(1) = 0 \right\}, \\ \mathbb{K}_{CBV}^1 &:= \left\{ f \in \mathbb{K}^1 : \int_0^1 f(s)ds = 0, f(0) = f(1), R_f(0) = 0 \right\}.\end{aligned}$$

Обозначая M множество невозрастающих функций на \mathbb{R} , определим

$$\mathbb{L}^1 := \mathbb{K}^1 \cap M, \quad \mathbb{L}_{BM}^1 := \mathbb{K}_{BM}^1 \cap M, \quad \mathbb{L}_{BB}^1 := \mathbb{K}_{BB}^1 \cap M.$$

Нас всегда будут интересовать значения функций на $[0, 1]$, но чисто из технических соображений мы расширим функции на всю вещественную прямую. Читатель всегда может ограничить рассматриваемые функции на интервал $[0, 1]$, но при этом должен иметь в виду, что информация о значении в точке $f(0-)$ потеряется. Также отметим, что прыжок в 0 вносит вклад в полную вариацию $TV(f)$.

Обозначение. Мы будем писать \mathbb{K}_*^p (соответственно, \mathbb{L}_*^p), если имеем в виду одно из множеств, определенных выше, где $*$ $\in \{BM, CBM, BB, CBV\}$ (соответственно, $*$ $\in \{BM, BB\}$).

Мы будем рассматривать множества \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p как подмножества $L^2 = L^2[0, 1]$. Следующая лемма показывает, что вложение \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p в L^2 инъективно. Ее доказательство будет изложено в разделе 4.2.3.

Лемма 53. Пусть $p \in [1, \infty]$. Если $f \in \mathbb{K}_*^p$ и $g \in \mathbb{K}_*^p$ равны почти всюду (по мере Лебега) на $[0, 1]$, то они совпадают на $[0, 1]$ (при $p \neq 1$) или на \mathbb{R} (при $p = 1$).

Следующая лемма доказывается стандартными средствами.

Лемма 54. *Множества \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p являются компактными выпуклыми подмножествами L^2 при всех $p \in [1, \infty]$ и допустимых значениях $*$.*

Главные результаты про внутренние объемы

Единственным известным результатом о внутренних объемах бесконечномерных выпуклых тел является следующая теорема Гао и Витале (см. [113] и [111]).

Теорема 36. *При всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$V_k(\mathbb{L}_{BM}^1) = \frac{\kappa_k}{k!} = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1) k!}, \quad V_k(\mathbb{L}_{BB}^1) = \frac{\kappa_{k+1}}{2k!} = \frac{\pi^{(k+1)/2}}{2\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{3}{2}) k!}. \quad (4.13)$$

Фактически Гао и Витале [111, 113] сформулировали свои результаты в несколько иной форме. Они рассмотрели спираль Винера (введенную Колмогоровым [18]) и спираль броуновского моста,

$$\{\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot) : t \in [0, 1]\} \subset L^2 \quad \text{и} \quad \{\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot) - t : t \in [0, 1]\} \subset L^2,$$

и вычислили внутренние объемы замкнутых выпуклых оболочек этих множеств. Нетрудно видеть, что эти выпуклые оболочки фактически изометричны \mathbb{L}_{BM}^1 и \mathbb{L}_{BB}^1 .

Мы дополним результаты Теоремы 36 (которая имеет дело с шарами по полной вариации, $p = 1$), доказав аналогичный результат для липшицевых шаров, $p = \infty$.

Теорема 37. *При всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$V_k(\mathbb{K}_{BM}^\infty) = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{3}{2}k + 1)}, \quad V_k(\mathbb{K}_{BB}^\infty) = \frac{\pi^{(k+1)/2}}{2\Gamma(\frac{3}{2}k + \frac{3}{2})}. \quad (4.14)$$

Кроме того, $V_k(\mathbb{L}_{BM}^\infty) = 2^{-k}V_k(\mathbb{K}_{BM}^\infty)$ и $V_k(\mathbb{L}_{BB}^\infty) = 2^{-k}V_k(\mathbb{K}_{BB}^\infty)$.

Доказательство Теоремы 37 изложено в разделе 4.2.2. Теоремы 36 и 37 имеют интересные вероятностные приложения, которые обсуждаются в разделах 4.2.1 и 4.2.1.

У множеств \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p с произвольным $p \in [1, \infty]$ мы вычислим только первый внутренний объем. Чтобы сформулировать соответствующий результат, рассмотрим стандартное броуновское движение $\{W(t) : t \in [0, 1]\}$. Рассмотрим следующие гауссовские процессы на $[0, 1]$ (которые являются броуновским движением, броуновским мостом, центрированным броуновским движением и центрированным броуновским мостом):

$$X_{BM}(t) := W(t), \quad (4.15)$$

$$X_{CBM}(t) := W(t) - \int_0^1 W(s) ds, \quad (4.16)$$

$$X_{BB}(t) := W(t) - tW(1), \quad (4.17)$$

$$X_{CBB}(t) := W(t) - tW(1) - \int_0^1 (W(s) - sW(1)) ds. \quad (4.18)$$

Эти процессы являются частными случаями гауссовского свободного поля на $[0, 1]$ с подходящими граничными условиями.

Теорема 38. Пусть $p \in [1, \infty]$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда при всех допустимых значениях * выполнено

$$V_1(\mathbb{K}_*^p) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \|X_*\|_q, \quad V_1(\mathbb{L}_*^p) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \|\max(X_*, 0)\|_q.$$

На самом деле, мы сформулируем и докажем более общий результат, см. Теорему 41 в разделе 4.2.3. В частных случаях $p = 1$ и $p = \infty$ в Теореме 38 возможно вычислить явные постоянные.

Предложение 15. При $p = 1$ имеем

$$V_1(\mathbb{K}_{BM}^1) = \pi, \quad V_1(\mathbb{K}_{BB}^1) = \pi \log 2, \quad (4.19)$$

$$V_1(\mathbb{L}_{BM}^1) = 2, \quad V_1(\mathbb{L}_{BB}^1) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.20)$$

Предложение 16. При $p = \infty$ имеем

$$V_1(\mathbb{K}_{BM}^\infty) = 2V_1(\mathbb{L}_{BM}^\infty) = \frac{4}{3}, \quad V_1(\mathbb{K}_{BB}^\infty) = 2V_1(\mathbb{L}_{BB}^\infty) = \frac{\pi}{4}, \quad (4.21)$$

$$V_1(\mathbb{K}_{CBM}^\infty) = \frac{1}{6}(2\sqrt{3} + \log(2 + \sqrt{3})), \quad V_1(\mathbb{K}_{CBB}^\infty) = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (4.22)$$

Формула для $V_1(\mathbb{K}_{BB}^\infty)$ была упомянута в [34, Пример 1]. Отметим, что (4.20) является частным случаем Теоремы 36, тогда как (4.21) является частным случаем Теоремы 37.

При $p = 2$ соболевские шары являются эллипсоидами в гильбертовом пространстве с полуосями, равными либо $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, либо $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$. Данные эллипсоиды будут изучены в разделе 4.2.4.

Приложения к броуновским выпуклым оболочкам

Комбинируя теорему Цирельсона с результатами раздела 4.2.1, возможно получить интересные вероятностные приложения. Главная идея состоит в том, что выпуклая оболочка броуновского движения в \mathbb{R}^k может быть интерпретирована как проекция выпуклой оболочки спирали Винера на “равномерно выбранное” случайное k -мерное линейное подпространство в L^2 . Точная формулировка дана в Теореме 33 (которую можно понимать как бесконечномерный аналог формулы Крофтона (4.2)). Это позволяет установить связь между k -м внутренним объемом выпуклой оболочки спирали Винера и средним объемом выпуклой оболочки броуновского движения в \mathbb{R}^k .

Рассмотрим стандартное одномерное броуновское движение $\{W(t) : t \geq 0\}$. Изонормальный процесс $\{\xi(f) : f \in L^2\}$ определяется как

$$\{\xi(f) : f \in L^2\} \stackrel{f.d.d.}{=} \left\{ \int_0^1 f(t) dW(t) : f \in L^2 \right\},$$

где стохастический интеграл понимается в смысле Ито. Обозначим

$$\{X_{BM}^{(k)}(t) = (W_1(t), \dots, W_k(t)) : t \geq 0\}$$

стандартное \mathbb{R}^k -значное броуновское движение, чьи компоненты $W_1(t), \dots, W_k(t)$ являются независимыми копиями $W(t)$. Используя стандартную изометрию между \mathbb{L}_{BM}^1 и замыканием выпуклой оболочки спирали Винера, можно показать, что спектр $\text{spres}_k(\mathbb{L}_{BM}^1)$ (см. определение в § 4.1) распределен так же, как и выпуклая оболочка k -мерного броуновского движения $\{X_{BM}^{(k)} : t \in [0, 1]\}$. Комбинируя Теорему 36 с Теоремой 33, получаем

$$\mathbb{E} \lambda_k(\text{conv}\{X_{BM}^{(k)}(t) : 0 \leq t \leq 1\}) = \frac{\kappa_k^2}{(2\pi)^{k/2}}. \quad (4.23)$$

Так как m -мерная проекция k -мерного броуновского движения является m -мерным броуновским движением, по формуле Крофтона (4.2) получаем обобщение (4.23) на произвольные внутренние объемы: при всех $0 \leq m \leq k$ выполнено

$$\mathbb{E} V_m(\text{conv}\{X_{BM}^{(k)}(t) : 0 \leq t \leq 1\}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \binom{k}{m} \frac{\kappa_k \kappa_m}{\kappa_{k-m}}. \quad (4.24)$$

Элдан (см. [98]) получил (4.23) и (4.24) независимо, но судя по всему, эквивалентность его результата Теореме 36 осталась незамеченной. Для $m = 1, 2$ результат (4.24) содержится в [143, Сл. 1.4, Предл. 1.6], см. также [67] и [142, Гл. 4.3, 4.4].

Аналогично, легко видеть, что спектр $\text{spres}_k(\mathbb{L}_{BB}^1)$ распределен так же, как и выпуклая оболочка стандартного k -мерного броуновского моста $\{X_{BB}^{(k)}(t) : t \in [0, 1]\}$. Комбинируя Теорему 37 с Теоремой 33, получаем

$$\mathbb{E} \lambda_k(\text{conv}\{X_{BB}^{(k)}(t) : 0 \leq t \leq 1\}) = \frac{\kappa_k \kappa_{k+1}}{2(2\pi)^{k/2}}. \quad (4.25)$$

Так как ортогональная проекция X_{BB} снова является броуновским мостом, по формуле Крофтона (4.2) получаем, что при всех $0 \leq m \leq k$ выполнено

$$\mathbb{E} V_m(\text{conv}\{X_{BB}^{(k)}(t) : 0 \leq t \leq 1\}) = \frac{1}{2(2\pi)^{m/2}} \binom{k}{m} \frac{\kappa_k \kappa_{m+1}}{\kappa_{k-m}}. \quad (4.26)$$

В [181] и [167] формулы (4.25) и (4.26) были получены при $k = 2$.

Сформулируем дискретные версии вышеизложенных результатов. Рассмотрим следующие точки в \mathbb{R}^n :

$$P_i := (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i), \quad P_i^* := P_i - \left(\frac{i}{n}, \dots, \frac{i}{n} \right), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Обозначим $\mathbb{T}_{BM,n}$ выпуклую оболочку P_0, \dots, P_n и $\mathbb{T}_{BB,n}$ выпуклую оболочку P_0^*, \dots, P_n^* . Множества $\mathbb{T}_{BM,n}$ и $\mathbb{T}_{BB,n}$ являются симплексами и могут быть интерпретированы как дискретные аналоги \mathbb{L}_{BM}^1 и \mathbb{L}_{BB}^1 . Следующая теорема была получена Гао и Витале (см. [113] и [111]).

Теорема 39. *При всех $k = 1, \dots, n$ выполнено*

$$V_k(\mathbb{T}_{BM,n}) = \frac{1}{k!} \sum_{A_{n,k}} \frac{1}{\sqrt{d_1 \dots d_k}}, \quad (4.27)$$

$$V_k(\mathbb{T}_{BB,n}) = \frac{1}{k!} \sum_{A_{n,k}} \sqrt{\frac{n - (d_1 + \dots + d_k)}{nd_1 \dots d_k}}, \quad (4.28)$$

где $A_{n,k}$ обозначает множество всех $(d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{N}^k$, таких что $d_1 + \dots + d_k \leq n$.

Спектр $\text{spec}_k(\mathbb{T}_{BM,n})$ является выпуклой оболочкой n -шагового гауссовского случайного блуждания в \mathbb{R}^k ; аналогично, $\text{spec}_k(\mathbb{T}_{BB,n})$ является выпуклой оболочкой n -шагового гауссовского блуждания в \mathbb{R}^k , возвращающегося в 0:

$$\begin{aligned} \text{spec}_k(\mathbb{T}_{BM,n}) &\stackrel{d}{=} \text{conv}\{0, X_{BM}^{(k)}(1), \dots, X_{BM}^{(k)}(n)\}, \\ \text{spec}_k(\mathbb{T}_{BB,n}) &\stackrel{d}{=} \text{conv}\{0, X_{BM}^{(k)}(1), \dots, X_{BM}^{(k)}(n)\} | \{X_{BM}^{(k)}(n) = 0\}. \end{aligned}$$

Теорема 33 вместе с Теоремой 39 дает формулу для среднего объема данных выпуклых оболочек:

$$\mathbb{E} \lambda_k(\text{spec}_k(\mathbb{T}_{BM,n})) = \frac{\kappa_k}{(2\pi)^{k/2}} \sum_{A_{n,k}} \frac{1}{\sqrt{d_1 \dots d_k}}, \quad (4.29)$$

$$\mathbb{E} \lambda_k(\text{spec}_k(\mathbb{T}_{BB,n})) = \frac{\kappa_k}{(2\pi)^{k/2}} \sum_{A_{n,k}} \sqrt{\frac{n - (d_1 + \dots + d_k)}{nd_1 \dots d_k}}. \quad (4.30)$$

Формула Крофтона (4.2) позволяет обобщить данные формулы на все внутрен-

ние объемы: при всех $1 \leq m \leq k$ выполнено

$$\mathbb{E} V_m(\text{spec}_k(\mathbb{T}_{BM,n})) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \binom{k}{m} \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-m}} \sum_{A_{n,m}} \frac{1}{\sqrt{d_1 \dots d_m}}, \quad (4.31)$$

$$\mathbb{E} V_m(\text{spec}_k(\mathbb{T}_{BB,n})) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \binom{k}{m} \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-m}} \sum_{A_{n,m}} \sqrt{\frac{n - (d_1 + \dots + d_m)}{nd_1 \dots d_m}}. \quad (4.32)$$

Для полупериметра V_1 выпуклой оболочки (необязательно гауссовского) двумерного случайного блуждания S_1, S_2, \dots Спицер и Видом (см. [208]), а также Бакстер (см. [58]) получили формулу

$$\mathbb{E} V_1(\text{conv}\{0, S_1, \dots, S_n\}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \mathbb{E} \|S_j\|_2.$$

В гауссовском случае правая часть данной формулы превращается в $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}}$. Это эквивалентно (4.31) при $k = 2, m = 1$. Многомерное обобщение формулы Спицера-Видома будет получено в § 4.6.

Приложение к броуновским зоноидам

Спектр \mathbb{L}_{BM}^∞ является зоноидом, порожденным k -мерным броуновским движением $\{X_{BM}^{(k)} : t \in [0, 1]\}$:

$$\text{spec}_k(\mathbb{L}_{BM}^\infty) \stackrel{d}{=} \left\{ \int_0^1 X_{BM}^{(k)}(t)g(t)dt : g \in L^\infty[0, 1], 0 \leq g \leq 1 \right\}.$$

Из стохастически-интегрального представления изонормального процесса (см. Лемму 56 ниже) следует, что любая функция $f \in \mathbb{L}_{BM}^\infty$ может быть представлена как $f(t) = \int_0^t g(s)ds$ для некоторой измеримой $0 \leq g \leq 1$. Данное случайное множество может быть интерпретировано как интеграл Ауманна случайного отображения, сопоставляющего точке $t \in [0, 1]$ сегмент $[0, X_{BM}^{(k)}(t)]$. Используя Теорему 33 и Теорему 37, получаем

$$\mathbb{E} \lambda_k(\text{spec}_k(\mathbb{L}_{BM}^\infty)) = \frac{1}{(2\sqrt{2\pi})^k} \binom{\frac{3}{2}k}{k}^{-1}.$$

Используя формулу Крофтона (4.2) и инвариантность броуновского движения относительно проекций, получаем

$$\mathbb{E} V_m(\text{spec}_k(\mathbb{L}_{BM}^\infty)) = \binom{k}{m} \frac{\kappa_k}{\kappa_m \kappa_{k-m}} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{2\pi})^m} \left(\frac{3}{2}m\right)^{-1}.$$

Аналогично можно показать, что $\text{spec}_k(\mathbb{L}_{BB}^\infty)$ является зоноидом, порожденным k -мерным броуновским мостом $\{X_{BB}^{(k)}: t \in [0, 1]\}$. Используя Теорему 33 и Теорему 37, получаем

$$\mathbb{E} \lambda_k(\text{spec}_k(\mathbb{L}_{BB}^\infty)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(2\sqrt{2\pi})^k} \binom{\frac{3}{2}k}{k}^{-1}.$$

Используя формулу Крофтона (4.2) и инвариантность броуновского моста относительно проекций, получаем

$$\mathbb{E} V_m(\text{spec}_k(\mathbb{L}_{BB}^\infty)) = \binom{k}{m} \frac{\kappa_k}{\kappa_m \kappa_{k-m}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2(2\sqrt{2\pi})^m} \left(\frac{3}{2}m\right)^{-1}.$$

Также можно получить дискретные версии вышеизложенных результатов. Обозначим $\text{Zon}(v_1, \dots, v_n)$ зонотоп, порожденный векторами v_1, \dots, v_n :

$$\text{Zon}(v_1, \dots, v_n) := \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]\}.$$

Рассмотрим множества

$$\mathbb{F}_{BM,n} := \text{Zon}\{P_1, \dots, P_n\}, \quad \mathbb{F}_{BB,n} := \text{Zon}\{P_1^*, \dots, P_n^*\}, \quad (4.33)$$

Эти множества являются параллелепипедами и могут быть интерпретированы как конечномерные аналоги \mathbb{L}_{BM}^∞ и \mathbb{L}_{BB}^∞ (см. раздел 4.2.2). Следующий результат является дополнением Теоремы 39.

Теорема 40. *При всех $k = 1, \dots, n$ выполнено*

$$V_k(\mathbb{F}_{BM,n}) = \sum_{A_{n,k}} \sqrt{d_1 \dots d_k}, \quad (4.34)$$

$$V_k(\mathbb{F}_{BB,n}) = \sum_{B_{n,k}} \sqrt{d_1 \dots d_{k+1}}, \quad (4.35)$$

где $A_{n,k}$ обозначает множество всех $(d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{N}^k$, таких что $d_1 + \dots + d_k \leq n$, и $B_{n,k}$ обозначает множество всех $(d_1, \dots, d_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$, таких что $d_1 + \dots + d_{k+1} = n$.

Очевидно, $\text{spec}_k(\mathbb{F}_{BM,n})$ является зонотопом, порожденным n -шаговым гауссовским случайным блужданием в \mathbb{R}^k ; аналогично, $\text{spec}_k(\mathbb{F}_{BB,n})$ является зонотопом, порожденным n -шаговым гауссовским случайным блужданием в \mathbb{R}^k , возвращающимся в ноль на n -м шаге:

$$\begin{aligned} \text{spec}_k(\mathbb{F}_{BM,n}) &\stackrel{d}{=} \text{Zon}\{X_{BM}^{(k)}(1), \dots, X_{BM}^{(k)}(n)\}, \\ \text{spec}_k(\mathbb{F}_{BB,n}) &\stackrel{d}{=} \text{Zon}\{X_{BM}^{(k)}(1), \dots, X_{BM}^{(k)}(n)\} \mid \{X_{BM}^{(k)}(n) = 0\}. \end{aligned}$$

Теорема 33 вместе с Теоремой 40 дает формулы для средних объемов этих зонотопов:

$$\mathbb{E} \lambda_k(\text{spec}_k(\mathbb{F}_{BM,n})) = \frac{k! \kappa_k}{(2\pi)^{k/2}} \sum_{A_{n,k}} \sqrt{d_1 \dots d_k}, \quad (4.36)$$

$$\mathbb{E} \lambda_k(\text{spec}_k(\mathbb{F}_{BB,n})) = \frac{k! \kappa_k}{(2\pi)^{k/2}} \sum_{B_{n,k}} \sqrt{d_1 \dots d_{k+1}}. \quad (4.37)$$

Используя формулу Крофтона (4.2), получаем обобщение этих формул на все внутренние объемы: при всех $1 \leq m \leq k$ выполнено

$$\mathbb{E} V_m(\text{spec}_k(\mathbb{F}_{BM,n})) = \frac{m!}{(2\pi)^{m/2}} \binom{k}{m} \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-m}} \sum_{A_{n,m}} \sqrt{d_1 \dots d_m}, \quad (4.38)$$

$$\mathbb{E} V_m(\text{spec}_k(\mathbb{F}_{BB,n})) = \frac{m!}{(2\pi)^{m/2}} \binom{k}{m} \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-m}} \sum_{B_{n,m}} \sqrt{d_1 \dots d_{m+1}}. \quad (4.39)$$

4.2.2. Внутренние объемы липшицевых шаров: доказательства

Теоремы 40 и Теоремы 37

В этом разделе мы вычислим внутренние объемы липшицевых шаров \mathbb{K}_{BM}^∞ , \mathbb{K}_{BB}^∞ , \mathbb{L}_{BM}^∞ , \mathbb{L}_{BB}^∞ и их конечномерных аналогов $\mathbb{F}_{BM,n}$ и $\mathbb{F}_{BB,n}$.

Конечномерные липшицевы зонотопы

Напомним, что \mathbb{L}^∞ обозначает множество всех неубывающих функций на $[0, 1]$ с константой Липшица, не превосходящей 1 (см. раздел 4.2.1). Рассмотрим конечномерные аналоги \mathbb{L}_{BM}^∞ и \mathbb{L}_{BB}^∞ :

$$\mathbb{F}_{BM,n} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1} \in [0, 1]\},$$

$$\mathbb{F}_{BB,n} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1} \in [0, 1], x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Очевидно, данное определение эквивалентно (4.33). Наша цель состоит в доказательстве Теоремы 40, переформулированной следующим образом

$$V_k(\mathbb{F}_{BM,n}) = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} \sqrt{l_1(l_2 - l_1) \dots (l_k - l_{k-1})}, \quad (4.40)$$

$$V_k(\mathbb{F}_{BB,n}) = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} \sqrt{l_1(l_2 - l_1) \dots (l_k - l_{k-1})(n - l_k)}. \quad (4.41)$$

Доказательство. [Доказательство Теоремы 40] Докажем (4.40). Рассмотрим линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенный как

$$A(\delta_1, \dots, \delta_n) := (\delta_1, \delta_1 + \delta_2, \dots, \delta_1 + \dots + \delta_n).$$

Тогда $\mathbb{F}_{BM,n}$ является образом единичного куба $[0, 1]^n$ под действием оператора A . В частности, $\mathbb{F}_{BM,n}$ есть параллелепипед, порожденный векторами Ae_1, \dots, Ae_n , где e_1, \dots, e_n является стандартным базисом в \mathbb{R}^n . Формула для внутренних объемов параллелепипедов хорошо известна (см. [146, Теорема 9.8.2]) и в нашем случае дает

$$\begin{aligned} V_k(\mathbb{F}_{BM,n}) &= \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_k \leq n} \lambda_k(\text{Zon}(Ae_{m_1}, \dots, Ae_{m_k})) \\ &= \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} \lambda_k(\text{Zon}(Ae_{n-l_1+1}, \dots, Ae_{n-l_k+1})). \end{aligned}$$

Обозначая G_{l_1, \dots, l_k} матрицу Грама векторов $\{Ae_{n-l_1+1}, \dots, Ae_{n-l_k+1}\}$, получаем

$$V_k(\mathbb{F}_{BM,n}) = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} \sqrt{\det(G_{l_1, \dots, l_k})}. \quad (4.42)$$

Элемент матрицы G_{l_1, \dots, l_k} с индексом (i, j) равен $\min(l_i, l_j)$. Определитель G_{l_1, \dots, l_k} можно вычислить с помощью элементарных преобразований строк, но мы предпочтем вероятностное рассуждение. Заметим, что G_{l_1, \dots, l_k} является ковариационной матрицей случайного вектора $(W(l_1), \dots, W(l_k))$, где W обозначает стандартное броуновское движение. Плотность распределения данного вектора в нуле может быть вычислена как с помощью формулы для многомерной гауссовской плотности, так и с использованием марковского свойства броуновского движения. Сравнивая данные два подхода, получаем

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k \sqrt{\det(G_{l_1, \dots, l_k})}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k \sqrt{l_1(l_2 - l_1) \dots (l_k - l_{k-1})}}.$$

Подставляя полученную формулу для $\det(G_{l_1, \dots, l_k})$ в (4.42), получаем (4.40).

Доказательство (4.41) аналогично. В данном случае рассмотрим оператор $A : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенный как

$$A(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}) := (-s, \delta_1 - s, \delta_1 + \delta_2 - s, \dots, \delta_1 + \dots + \delta_{n-1} - s),$$

где

$$s = s(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}) := \frac{1}{n}((n-1)\delta_1 + (n-2)\delta_2 + \dots + \delta_{n-1}).$$

Тогда $\mathbb{F}_{BB,n}$ является образом единичного куба $[0, 1]^{n-1}$ под действием оператора A . Из формулы для внутренних объемов параллелепипеда (см. [146, Теорема 9.8.2]) получаем

$$V_k(\mathbb{F}_{BB,n}) = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n-1} \sqrt{\det(G_{l_1, \dots, l_k})}, \quad (4.43)$$

где G_{l_1, \dots, l_k} обозначает матрицу Грама векторов $\{Ae_{n-l_1}, \dots, Ae_{n-l_k}\}$. Элемент этой матрицы с индексом (i, j) равен $\min(l_i, l_j) - \frac{1}{n}l_i l_j$. Как и выше, определитель G_{l_1, \dots, l_k} легко вычислить с помощью элементарных преобразований строк, но мы используем вероятностное рассуждение. Заметим, что G_{l_1, \dots, l_k} является ковариационной матрицей случайного вектора $(W(l_1), \dots, W(l_k))$ при условии $W(n) = 0$. Вычисляя его плотность распределения с использованием формулы для многомерной гауссовской плотности, а также с помощью марковского

свойства броуновского моста, получаем

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k \sqrt{\det(G_{l_1, \dots, l_k})}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k \sqrt{l_1(l_2 - l_1) \dots (l_k - l_{k-1})(n - l_k)}}.$$

Подставляя это в (4.43), приходим к (4.41). ■

Доказательство Теоремы 37

Идея доказательства состоит в аппроксимации множеств \mathbb{L}_{BM}^∞ и \mathbb{L}_{BB}^∞ их дискретными аналогами.

ШАГ 1: \mathbb{L}_{BM}^∞ . Рассмотрим некоторое $n \in \mathbb{N}$ и обозначим $\mathbb{L}_{BM,n}^\infty$ параллелепипед в $L^2[0, 1]$, порожденный функциями $f_{1,n}, \dots, f_{n,n}$, где

$$f_{l,n}(t) := \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{n-l}{n}, \\ t - \frac{n-l}{n}, & \text{если } \frac{n-l}{n} \leq t \leq \frac{n-l+1}{n}, \\ 1, & \text{если } \frac{n-l+1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\mathbb{L}_{BM,n}^\infty$ состоит из всех функций, которые не убывают, кусочно линейны со скачками в $0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$, имеют константу Липшица, не превышающую 1, и обращаются в нуль в 0. В частности, $\mathbb{L}_{BM,2^n}^\infty \subset \mathbb{L}_{BM,2^{n+1}}^\infty$ и

$$\mathbb{L}_{BM}^\infty = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{BM,2^n}^\infty}.$$

По непрерывности снизу функционала V_k (которая установлена в Предложении 13 в [32] при $k = 1$, но также верна для любого $k \in \mathbb{N}$ с аналогичным доказательством), имеем

$$V_k(\mathbb{L}_{BM}^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_k(\mathbb{L}_{BM,2^n}^\infty).$$

Для вычисления $V_k(\mathbb{L}_{BM,n}^\infty)$ будем действовать так же, как и в доказательстве Теоремы 40. Элемент матрицы Грама векторов $\{f_{1,n}, \dots, f_{n,n}\}$ с индексом (i, j) имеет вид

$$\langle f_{i,n}, f_{j,n} \rangle_{L^2} = \frac{1}{n^3} \left(\min(i, j) - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \mathbb{1}_{i=j} \right).$$

Таким образом, матрица Грама векторов $\{n^{3/2}f_{1,n}, \dots, n^{3/2}f_{n,n}\}$ хоть и не совпадает, но очень близка к матрице Грама векторов $\{Ae_n, \dots, Ae_1\}$, которые образуют параллелепипед $\mathbb{F}_{BM,n}$. Рассуждая так же, как и в доказательстве Теоремы 40, получаем

$$\begin{aligned} V_k(\mathbb{L}_{BM,n}^\infty) &= \frac{1}{n^{3k/2}} \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} \sqrt{l_1(l_2 - l_1) \dots (l_k - l_{k-1}) + O(n^{k-1})} \\ &= \frac{1}{n^k} \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} \sqrt{\frac{l_1}{n} \left(\frac{l_2}{n} - \frac{l_1}{n}\right) \dots \left(\frac{l_k}{n} - \frac{l_{k-1}}{n}\right) + O(n^{-1})}, \end{aligned}$$

где неявная постоянная в остаточном члене не зависит от l_1, \dots, l_k . Заменяя сумму Римана интегралом Римана, приходим к

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_k(\mathbb{L}_{BM,n}^\infty) = \int \dots \int_{0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq 1} \sqrt{a_1(a_2 - a_1) \dots (a_k - a_{k-1})} da_1 \dots da_k.$$

Данный интеграл легко вычислить:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_k(\mathbb{L}_{BM,n}^\infty) = \frac{2}{3k} B\left(\frac{3}{2}k, \dots, \frac{3}{2}k\right) = \frac{2^{-k} \pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}k + 1\right)},$$

где бета-функция B имеет k переменных. Это приводит к требуемой формуле для $V_k(\mathbb{L}_{BM}^\infty)$.

ШАГ 2: \mathbb{L}_{BB}^∞ . Аналогичным образом приходим к интегралу

$$V_k(\mathbb{L}_{BB}^\infty) = \int \dots \int_{0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq 1} \sqrt{a_1(a_2 - a_1) \dots (a_k - a_{k-1})(1 - a_k)} da_1 \dots da_k.$$

Данный интеграл может быть вычислен с помощью бета-функции от $k + 1$ переменных:

$$V_k(\mathbb{L}_{BB}^\infty) = B\left(\frac{3}{2}k, \dots, \frac{3}{2}k\right) = \frac{2^{-(k+1)} \pi^{(k+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}k + \frac{3}{2}\right)}.$$

ШАГ 3: \mathbb{K}_{BM}^∞ и \mathbb{K}_{BB}^∞ . Чтобы вычислить внутренние объемы \mathbb{K}_{BM}^∞ и \mathbb{K}_{BB}^∞ , заметим, что

$$\mathbb{K}_{BM}^\infty = 2(\mathbb{L}_{BM}^\infty - h), \quad \mathbb{K}_{BB}^\infty = 2(\mathbb{L}_{BB}^\infty - h),$$

где $h(t) := t/2 \in L^2$. Следовательно, $V_k(\mathbb{K}_{BM}^\infty) = 2^k V_k(\mathbb{L}_{BM}^\infty)$ и $V_k(\mathbb{K}_{BB}^\infty) = 2^k V_k(\mathbb{L}_{BB}^\infty)$.

Замечание 20. Гао и Витале (см. [113]) предположили, что для любого выпуклого GB-множества в гильбертовом пространстве последовательность $m_k := (k+1)V_{k+1}/V_k$ (которая, как известно, убывает) либо сходится к строго положительному пределу, либо удовлетворяет $m_k = O(1/\sqrt{k})$. Легко видеть, что для множеств \mathbb{L}_{BM}^∞ и \mathbb{L}_{BV}^∞ выполнено $m_k \sim \text{const}/\sqrt{k}$, что подтверждает данную гипотезу.

4.2.3. Гауссовская ширина соболевских шаров: доказательство

Теоремы 38

Гауссовская ширина

Нашей целью является вычисление первого внутреннего объема \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p . Более того, мы найдем распределение *гауссовской ширины* этих множеств. Для ограниченного множества $T \subset \mathbb{R}^n$ гауссовская ширина $W_G(T)$ и равномерная ширина $W_U(T)$ определяются как

$$W_G(T) := \sup_{t \in T} \langle N, t \rangle - \inf_{t \in T} \langle N, t \rangle, \quad W_U(T) := \sup_{t \in T} \langle U, t \rangle - \inf_{t \in T} \langle U, t \rangle,$$

где N имеет стандартное нормальное распределение в \mathbb{R}^n , а U равномерно распределена на единичной сфере в \mathbb{R}^n . Имеет место представление

$$W_G \stackrel{d}{=} R_n W_U,$$

где случайная величина R_n не зависит от U , при этом R_n^2 имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. По закону больших чисел, R_n/\sqrt{n} сходится по распределению к 1 при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, при больших n нормированная равномерная ширина $\sqrt{n}W_U$ близка к гауссовской ширине W_G . При бесконечном n равномерная ширина не имеет смысла, но существует естественное бесконечномерное обобщение W_G , а именно, диапазон изонормального процесса. Поэтому для множества T в сепарабельном гильбертовом пространстве H определим его гауссовскую ширину как

$$\text{Width}(T) := \sup_{t \in T} \xi(t) - \inf_{t \in T} \xi(t), \quad (4.44)$$

где $\{\xi(h): h \in H\}$ является изонормальным гауссовским процессом на H . Мы всегда рассматриваем сепарабельную версию изонормального процесса (доказательство существования см. в Предложении 2.4.10 из [2]).

В следующей теореме находится гауссовская ширина \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p . Мы используем обозначения $x^+ := \max(x, 0)$ и $x^- := \max(-x, 0)$. Напомним, что X_* обозначает гауссовский процесс, определенный в (4.15)–(4.18).

Теорема 41. Пусть $p \in [1, \infty]$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Максимумы изонормальных процессов на \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p распределены следующим образом:

$$\sup_{f \in \mathbb{K}_*^p} \xi(f) \stackrel{d}{=} \|X_*\|_q, \quad \sup_{f \in \mathbb{L}_*^p} \xi(f) \stackrel{d}{=} \|X_*^+\|_q.$$

Гауссовские ширины \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p распределены следующим образом:

$$\sup_{f \in \mathbb{K}_*^p} \xi(f) - \inf_{f \in \mathbb{K}_*^p} \xi(f) \stackrel{d}{=} 2\|X_*\|_q, \quad \sup_{f \in \mathbb{L}_*^p} \xi(f) - \inf_{f \in \mathbb{L}_*^p} \xi(f) \stackrel{d}{=} \|X_*^+\|_q + \|X_*^-\|_q.$$

По Теореме 32, Теорема 38 сразу же следует из Теоремы 41. Доказательство Теоремы 41 будет изложено ниже в этом разделе.

Изонормальный процесс на \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p

Рассмотрим стандартное броуновское движение $\{W(t): t \in [0, 1]\}$. Изонормальный процесс $\{\xi(f): f \in L^2\}$ определен как

$$\{\xi(f): f \in L^2\} \stackrel{f.d.d.}{=} \left\{ \int_0^1 f(t) dW(t): f \in L^2 \right\},$$

где стохастический интеграл понимается в смысле Ито. В Лемме 56 мы найдем альтернативное представление изонормальных процессов на \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p . Сначала мы установим, что вложения \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p в L^2 инъективны.

Лемма 55. Пусть $p \in [1, \infty]$. Если $f \in \mathbb{K}_*^p$ и $g \in \mathbb{K}_*^p$ равны почти всюду (по мере Лебега) на $[0, 1]$, то они совпадают на $[0, 1]$ (при $p \neq 1$) или на \mathbb{R} (при $p = 1$).

Доказательство. В случае $p \neq 1$ функции f и g непрерывны, так что утверждение леммы тривиально. Пусть $p = 1$. Тогда функции f и g непрерывны справа при любом $t \in [0, 1)$, так что там они должны совпадать. Осталось показать, что $f(0-) = g(0-)$ и $f(1) = g(1)$.

СЛУЧАЙ $* = VM$. Имеет место граничное условие $f(0-) = g(0-) = 0$, и функции f и g непрерывны слева в 1, так что $f(1) = g(1)$.

СЛУЧАЙ $* = SVM$. Имеют место граничные условия $f(0-) = g(0-) = 0$ и $f(1) = g(1) = 0$.

СЛУЧАЙ $* = BV$. Функции f и g непрерывны слева в 1 и, следовательно, $f(1) = g(1)$. Кроме того, мы знаем, что $f(0) = g(0)$, а так как $R_f(0) = R_g(0) = 0$, получаем $f(0-) = g(0-)$.

СЛУЧАЙ $* = CVB$. Мы знаем, что $f(0) = g(0)$ и $R_f(0) = R_g(0) = 0$, следовательно, $f(0-) = g(0-)$. Кроме того, имеют место граничные условия $f(0) = f(1)$ и $g(0) = g(1)$, поэтому $f(1) = g(1)$. ■

Лемма 56. Пусть X_* определено в (4.15)–(4.18). Тогда

$$\left\{ \int_0^1 f(t) dW(t) : f \in \mathbb{K}_*^p \right\} \stackrel{f.d.d.}{=} \left\{ \int_0^1 X_*(1-t) df(t) : f \in \mathbb{K}_*^p \right\}, \quad (4.45)$$

и аналогичное равенство имеет место для \mathbb{L}_*^p вместо \mathbb{K}_*^p .

Доказательство. Заметим, что любая $f \in \mathbb{K}_*^p$ является функцией ограниченной вариации. Интегрируя по частям (см. [152, Теорема 2.3.7] для обоснования), получаем

$$\int_0^1 f(t) dW(t) = f(1)W(1) - \int_0^1 W(t) df(t).$$

СЛУЧАЙ 1: $* = VM$. Процесс $\{X_*(1-t) : t \in [0, 1]\}$ (являющийся стандартным броуновским движением с обратным временем) имеет такие же конечномерные

распределения, как и $\{W(1) - W(t) : t \in [0, 1]\}$. Выполнено $f(0-) = 0$ и, следовательно,

$$\int_0^1 (W(1) - W(t))df(t) = f(1)W(1) - \int_0^1 W(t)df(t) = \int_0^1 f(t)dW(t),$$

что доказывает (4.45).

В оставшихся трех случаях процесс $\{X_*(1-t) : t \in [0, 1]\}$ имеет такие же конечномерные распределения, что и процесс $\{-X_*(t) : t \in [0, 1]\}$. Следовательно, нам надо доказать, что

$$\left\{ \int_0^1 f(t)dW(t) : f \in \mathbb{K}_*^p \right\} \stackrel{f.d.d.}{=} \left\{ - \int_0^1 X_*(t)df(t) : f \in \mathbb{K}_*^p \right\}. \quad (4.46)$$

СЛУЧАЙ 2: $* = CBM$. Выполнено $f(0-) = f(1) = 0$. Обозначая $N := \int_0^1 W(s)ds$, получаем

$$- \int_0^1 X_*(t)df(t) = \int_0^1 (N - W(t))df(t) = - \int_0^1 W(t)df(t) = \int_0^1 f(t)dW(t).$$

СЛУЧАЙ 3: $* = BB$. Выполнено $\int_0^1 f(t)dt = 0$, следовательно, из определения $X_*(t)$ вытекает

$$- \int_0^1 X_*(t)df(t) = W(1) \int_0^1 tdf(t) - \int_0^1 W(t)df(t) = f(1)W(1) - \int_0^1 W(t)df(t),$$

где мы использовали равенство $\int_0^1 tdf(t) = f(1)$, вытекающее из интегрирования по частям.

СЛУЧАЙ 4: $* = CBB$. Выполнено $f(0) = f(1)$ и $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Обозначая $N := \int_0^1 (W(s) - sW(1))ds$, получаем

$$- \int_0^1 X_*(t)df(t) = \int_0^1 (tW(1) - W(t) + N)df(t) = f(1)W(1) - \int_0^1 W(t)df(t),$$

где мы воспользовались равенствами $\int_0^1 df(t) = 0$ и $\int_0^1 tdf(t) = f(1)$, вытекающими из интегрирования по частям.

Лемма 57. Пусть $p \in [1, \infty]$ и $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной функцией. В случае $p = 1$ сделаем дополнительные предположения:

1. Если $* = BM$, то $X(1) = 0$.
2. Если $* = BV$, то $X(0) = X(1) = 0$.
3. Если $* = CBV$, то $X(0) = X(1)$.

Тогда

$$\Psi : f \mapsto \int_0^1 X(t) df(t)$$

является непрерывным отображением из \mathbb{K}_*^p или \mathbb{L}_*^p (рассматриваемых как подмножества L^2) в \mathbb{R} .

Замечание 21. Из леммы следует, что правая часть (4.45) определяет гауссовский процесс с непрерывными выборочными траекториями. (Заметим, что процесс $X(t) := X_*(1 - t)$ удовлетворяет граничным условиям Леммы 57). Таким образом, множества \mathbb{K}_*^p и \mathbb{L}_*^p обладают GB-свойством. В дальнейшем мы всегда будем иметь дело с версией изонормального процесса на \mathbb{K}_*^p или \mathbb{L}_*^p , которая определяется правой частью (4.45).

Замечание 22. Рассмотрим пример, показывающий, что условие на $X(0)$ и $X(1)$ в случае $p = 1$ существенно. Рассмотрим последовательность

$$f_n(t) := \mathbb{1}_{[1-\frac{1}{n}, \infty)}(t) \in \mathbb{K}_{BM}^1.$$

Она сходится в $L^2[0, 1]$ к 0. Для непрерывной функции X , не удовлетворяющей $X(1) = 0$, мы бы имели

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} X\left(1 - \frac{1}{n}\right) = X(1) \neq 0 = \Psi(0).$$

Аналогичные примеры возможны для остальных значений $*$.

Доказательство. [Доказательство Леммы 57] Достаточно доказать следующее утверждение: для произвольных $f, f_1, f_2, \dots \in \mathbb{K}_*^p$, таких что $f_n \rightarrow f$ в L^2 при $n \rightarrow \infty$, существует подпоследовательность f_{n_i} , для которой $\Psi(f_{n_i})$ сходится к $\Psi(f)$ при $i \rightarrow \infty$.

ШАГ 1. Мы покажем, что возможно отыскать подпоследовательность f_{n_i} , для которой $\Psi(f_{n_i})$ сходится к *некоторому* пределу. Заметим, что полная вариация функции f_n не превосходит 1 при всех n . Для $p = 1$ это следует из определения \mathbb{K}_*^1 , в то время как для $p > 1$ выполнено $f_n \in AC[0, 1]$ и $TV(f_n) = \|f'_n\|_1 \leq \|f'_n\|_p \leq 1$ по неравенству Ляпунова и определению \mathbb{K}_*^p . Неравенство $TV(f_n) \leq 1$ вместе с граничными условиями влечет $\|f_n\|_\infty \leq 1$.

Рассмотрим знакопеременную меру Лебега-Стилтьеса $\mu_n((s, t]) := f_n(t) - f_n(s)$, $s < t$. Полная вариация μ_n не превосходит 1. По теореме Хелли, мы можем извлечь подпоследовательность μ_{n_i} , слабо сходящуюся к некоторой знакопеременной мере μ при $i \rightarrow \infty$. Отметим, что μ сконцентрирована на интервале $[0, 1]$. Более того, при $p \neq 1$ для любых $0 \leq x \leq y \leq 1$ по неравенству Гельдера выполнено

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left| \int_x^y f'_n(s) ds \right| \leq \|f'_n\|_p |y - x|^{1/q} \leq |y - x|^{1/q}.$$

По теореме Арцела-Асколи, мы можем извлечь подпоследовательность f_{n_i} , равномерно сходящуюся к некоторой непрерывной функции. Следовательно, μ_{n_i} слабо сходится к некоторой знакопеременной мере μ , не имеющей атомов.

Так как X является непрерывной функцией, из определения слабой сходимости вытекает, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Psi(f_{n_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 X(t) \mu_{n_i}(dt) = \int_0^1 X(t) \mu(dt).$$

ШАГ 2. Докажем, что $\Psi(f) = \int_0^1 X(t) \mu(dt)$.

Ниже в доказательстве мы рассмотрим только случай $p = 1$. Доказательство случая $p \neq 1$ аналогично и, фактически, значительно легче, так как в этом

случае мера μ не имеет атомов и, следовательно, мы можем игнорировать члены с $\mu(\{0\})$ и $\mu(\{1\})$.

СЛУЧАЙ $*$ = BM . Положим $\mu^\circ := \mu - \delta_1\mu(\{1\})$, где δ_1 обозначает дельта-меру в 1. Рассмотрим функцию $h(t) := \mu^\circ((-\infty, t])$. По построению, h принадлежит пространству Скорохода и $h(0-) = 0$, $R_h(1) = 1$, так что h удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функции из \mathbb{K}_{BM}^1 . По определению слабой сходимости, имеем

$$f_{n_i}(t) = \mu_{n_i}((-\infty, t]) \rightarrow \mu((-\infty, t]) = h(t), \quad i \rightarrow \infty,$$

для всех $t \in (0, 1)$, где h непрерывна. Теорема о мажорируемой сходимости влечет сходимость f_{n_i} к h в L^2 . С другой стороны, f_{n_i} сходится к f в L^2 . По единственности L^2 -предела, f и h совпадают почти всюду на $[0, 1]$. Рассуждая так же, как и в Лемме 55, получаем, что эти функции совпадают везде. Следовательно,

$$\Psi(f) = \Psi(h) = \int_0^1 X(t)dh(t) = \int_0^1 X(t)\mu(dt) - X(1)\mu(\{1\}) = \int_0^1 X(t)\mu(dt),$$

где последний шаг вытекает из предположения $X(1) = 0$.

СЛУЧАЙ $*$ = CBM . Определим функцию $h(t) := \mu((-\infty, t])$. Граничное условие $f_{n_i}(0-) = f_{n_i}(1) = 0$ влечет $\mu_{n_i}([0, 1]) = 0$ и, следовательно, $\mu([0, 1]) = 0$. Из этого вытекает $h(0-) = h(1) = 0$. Кроме того, h принадлежит пространству Скорохода. Поэтому h удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функции из \mathbb{K}_{CBM}^1 . По определению слабой сходимости, имеем

$$f_{n_i}(t) = \mu_{n_i}((-\infty, t]) \rightarrow \mu((-\infty, t]) = h(t), \quad i \rightarrow \infty,$$

для всех $t \in (0, 1)$, где h непрерывна. Теорема о мажорируемой сходимости влечет сходимость f_{n_i} к h в L^2 . С другой стороны, f_{n_i} сходится к f в L^2 . По единственности L^2 -предела, f и h совпадают почти всюду на $[0, 1]$. Рассуждая

так же, как и в Лемме 55, получаем, что эти функции совпадают везде. Следовательно,

$$\Psi(f) = \Psi(h) = \int_0^1 X(t)dh(t) = \int_0^1 X(t)\mu(dt),$$

что и требовалось.

СЛУЧАЙ * = *BB*. Положим $\mu^\circ := \mu - \delta_0\mu(\{0\}) - \delta_1\mu(\{1\})$, где δ_0 и δ_1 обозначают дельта-меры в 0 и 1. Рассмотрим функцию $h(t) := \mu^\circ((-\infty, t]) + c$, где постоянная c выбрана так, чтобы $\int_0^1 h(t)dt = 0$. По построению, h принадлежит пространству Скорохода и удовлетворяет граничным условиям $R_h(0) = R_h(1) = 0$. По определению слабой сходимости, $\mu_{n_i}((-\infty, t]) \rightarrow \mu((-\infty, t])$ для всех $t \in (0, 1)$, где h непрерывна. Следовательно, при $c_{n_i} = f_{n_i}(0-) - c + \mu(\{0\})$ выполнено $f_{n_i}(t) - c_{n_i} \rightarrow h(t)$ при всех $t \in (0, 1)$, где h непрерывна. Заметим, что последовательность c_{n_i} ограничена. По теореме о мажорируемой сходимости, $f_{n_i} - c_{n_i}$ сходится к h в L^2 . С другой стороны, f_{n_i} сходится к f в L^2 . Следовательно, $h - f$ постоянна почти всюду на $[0, 1]$. Так как интегралы f и h по $[0, 1]$ равны нулю, эти функции совпадают почти всюду. Рассуждая так же, как и в Лемме 55, получаем, что эти функции совпадают везде. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi(f) = \Psi(h) &= \int_0^1 X(t)dh(t) \\ &= \int_0^1 X(t)\mu(dt) - X(0)\mu(\{0\}) - X(1)\mu(\{1\}) = \int_0^1 X(t)\mu(dt), \end{aligned}$$

где последний шаг вытекает из предположения $X(0) = X(1) = 0$.

СЛУЧАЙ * = *CBV*. Положим $\mu^\circ := \mu + \mu(\{0\})(\delta_1 - \delta_0)$. Рассмотрим функцию $h(t) := \mu^\circ((-\infty, t]) + c$, где постоянная c выбрана так, чтобы $\int_0^1 h(t)dt = 0$. Граничное условие $f_{n_i}(0-) = f_{n_i}(1) = 0$ влечет $\mu_{n_i}([0, 1]) = 0$ и, следовательно, $\mu^\circ([0, 1]) = \mu([0, 1]) = 0$. По построению, h принадлежит пространству Скорохода и удовлетворяет граничным условиям $h(1) = h(0-)$ и $R_h(0) = 0$. По определению слабой сходимости, $\mu_{n_i}((-\infty, t]) \rightarrow \mu((-\infty, t])$ для всех $t \in (0, 1)$, где h

непрерывна. Полагая $c_{n_i} := f_{n_i}(0-) - c + \mu(\{0\})$, получаем, что $f_{n_i}(t) - c_{n_i} \rightarrow h(t)$ для всех $t \in (0, 1)$, где h непрерывна. По теореме о мажорируемой сходимости, $f_{n_i} - c_{n_i}$ сходится к h в L^2 . С другой стороны, f_{n_i} сходится к f в L^2 . Следовательно, $h - f$ постоянна почти всюду на $[0, 1]$. Так как интегралы f и h по $[0, 1]$ равны нулю, эти функции совпадают почти всюду. Рассуждая так же, как и в Лемме 55, получаем, что эти функции совпадают везде. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi(f) = \Psi(h) &= \int_0^1 X(t) dh(t) \\ &= \int_0^1 X(t) \mu(dt) + (X(1) - X(0)) \mu(\{0\}) = \int_0^1 X(t) \mu(dt), \end{aligned}$$

где последний шаг вытекает из предположения $X(0) = X(1)$. ■

Доказательство Теоремы 41

Напомним, что по Лемме 56 изонормальный процесс представляется в виде

$$\{\xi(f) : f \in \mathbb{K}_*^p\} = \left\{ \int_0^1 X_*(1-t) df(t) : f \in \mathbb{K}_*^p \right\}.$$

Пусть сначала $p \in (1, \infty]$. Тогда любая $f \in \mathbb{K}_*^p$ абсолютно непрерывна. По неравенству Гельдера,

$$\left| \int_0^1 X_*(1-t) df(t) \right| = \left| \int_0^1 f'(t) X_*(1-t) dt \right| \leq \|f'\|_p \|X_*\|_q \leq \|X_*\|_q. \quad (4.47)$$

С другой стороны, равенство в (4.47) достигается при $f = g$, где

$$g(t) := \begin{cases} \int_0^t \left(\frac{X_*(1-s)}{\|X_*\|_q} \right)^{q-1} ds, & \text{если } p \in (1, \infty), \\ \int_0^t \operatorname{sgn} X_*(1-s) ds, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Позже мы покажем, что возможно изменить функцию g таким образом, что она станет удовлетворять граничным условиям из \mathbb{K}_*^p .

Но сначала разберем случай $p = 1$. Полная вариация любой $f \in \mathbb{K}_*^1$ не превосходит 1, следовательно,

$$\left| \int_0^1 X_*(1-t)df(t) \right| \leq \sup_{t \in [0,1]} |X_*(t)|.$$

Неравенство достигается при $f = g$, где

$$g(t) := \begin{cases} 0, & t < \arg \max |X_*(1-\cdot)|, \\ 1, & t \geq \arg \max |X_*(1-\cdot)|. \end{cases}$$

Покажем как можно изменить g , чтобы граничные условия были соблюдены. Пусть $p \in (1, \infty]$.

СЛУЧАЙ $* = VM$. Возьмем $f = g$, так как граничное условие $g(0) = 0$ выполняется.

СЛУЧАЙ $* = BV$. Возьмем $f(t) = g(t) + a$, где постоянная a такая, что $\int_0^1 f(s)ds = 0$.

СЛУЧАЙ $* = CBM$. Возьмем $f(t) = g(t) + a + bt$, где постоянные a, b такие, что $f(0) = f(1) = 0$. Заметим, что $\int_0^1 X_*(t)dt = 0$ (так как X_* является центрированным броуновским движением), следовательно,

$$\int_0^1 X_*(1-t)df(t) = \int_0^1 X_*(1-t)dg(t). \quad (4.48)$$

СЛУЧАЙ $* = CBV$. Возьмем $f(t) = g(t) + a + bt$, где постоянные a, b такие, что $f(0) = f(1)$ и $\int_0^1 f(s)ds = 0$. Заметим, что $\int_0^1 X_*(t)dt = 0$ (так как X_* является центрированным броуновским мостом), следовательно, (4.48) выполняется.

При $p = 1$ рассуждения аналогичны, но надо также отметить, что $R_g(0) = R_g(1) = 0$ по определению (так как процесс X_* не имеет максимумов в 0 и 1).

Следовательно, граничные условия из \mathbb{K}_*^1 выполняются.

Рассмотрим теперь максимум на \mathbb{L}_*^p . Так как любая $f \in \mathbb{L}_*^p$ монотонно не убывает, получаем

$$\left| \int_0^1 X_*(1-t)df(t) \right| \leq \left| \int_0^1 \max(X_*(1-t), 0)df(t) \right|,$$

и возможно повторить те же рассуждения, что и в случаях $* = VM$ и $* = BV$, заменив X_* на $\max(X_*, 0)$. \square

4.2.4. Внутренние объемы эллипсоидов в гильбертовом пространстве

Первый внутренний объем эллипсоида

Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H над \mathbb{R} с ортонормированным базисом ψ_1, ψ_2, \dots . Для определенности предположим, что H бесконечномерно, хотя аналогичные рассуждения применяются и к конечномерному случаю. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, таких что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$. Рассмотрим следующее подмножество H :

$$\mathcal{E} := \left\{ h = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{\lambda_n^2} \leq 1 \right\}. \quad (4.49)$$

Отметим, что \mathcal{E} является эллипсоидом с полуосями $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Получим формулу для гауссовской ширины и первого внутреннего объема \mathcal{E} .

Предложение 17. *Рассмотрим случайную величину $M := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 N_n^2$, где N_1, N_2, \dots являются независимыми стандартными гауссовскими величинами. Тогда*

$$\text{Width}(\mathcal{E}) \stackrel{d}{=} 2\sqrt{M}, \quad V_1(\mathcal{E}) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \sqrt{M}. \quad (4.50)$$

Замечание 23. Из $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$ следует, что $M < \infty$ п.н. Поэтому \mathcal{E} является GB-множеством.

Доказательство. [Доказательство Предложения 17] Изонормальный процесс $\{\xi(h) : h \in H\}$ задается следующим образом: при $h = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n \in H$ имеем

$$\xi(h) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n N_n.$$

По неравенству Коши-Шварца и определению \mathcal{E} , получаем оценку

$$\sup_{h \in \mathcal{E}} \xi(h) = \sup_{h \in \mathcal{E}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n N_n \cdot \frac{x_n}{\lambda_n} \right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 N_n^2 \right)^{1/2} = \sqrt{M}. \quad (4.51)$$

С другой стороны, при $x_n = \lambda_n^2 N_n / \sqrt{M}$ в (4.51) достигается равенство, следовательно,

$$\sup_{h \in \mathcal{E}} \xi(h) = \sqrt{M}.$$

Таким образом, по формуле Судакова, получаем требуемое выражение для первого внутреннего объема \mathcal{E} . ■

Замечание 24. Ривин (см. [185]) получил формулу для площади поверхности n -мерного эллипсоида (совпадающую с $2V_{n-1}$), которая очень похожа на результат Предложения 17. Он показал, что площадь поверхности эллипсоида \mathcal{E}^* с полуосями $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$ равна

$$2V_{n-1}(\mathcal{E}^*) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 \dots \lambda_n} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \mathbb{E} \sqrt{\lambda_1^2 N_1^2 + \dots + \lambda_n^2 N_n^2}. \quad (4.52)$$

Фактически, формула Ривина (4.52) может быть выведена из Предложения 17, см. Предложение 19 ниже.

Частные случаи: E_d и F_d

Рассмотрим некоторые частные случаи, в которых возможно вычислить $\mathbb{E} \sqrt{M}$ явно. По формуле $\mathbb{E} e^{-tN_n^2} = (1+2t)^{-1/2}$ находим преобразование Лапласа величины M :

$$\mathbb{E} e^{-tM} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2\lambda_n^2 t)^{-1/2}.$$

Пример 15. Рассмотрим эллипсоид E_d с полуосями $\frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, причем каждое значение имеет кратность $d \in \mathbb{N}$. Преобразование Лапласа величины M равно

$$\mathbb{E} e^{-tM} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2t}{n^2\pi^2}\right)^{-d/2} = \left(\frac{\sqrt{2t}}{\sinh \sqrt{2t}}\right)^{d/2}. \quad (4.53)$$

Случайные величины с преобразованием Лапласа (4.53) часто возникают в теории вероятностей. В частности, они изучались в [68] и [177]. Исходная величина M с преобразованием Лапласа (4.53) в этих работах обозначается $S_{d/2}$. Среди многих других результатов, в частности, вычислены некоторые моменты S_1 и S_2 . По Предложению 17,

$$\text{Width}(E_d) \stackrel{d}{=} 2\sqrt{S_{d/2}}. \quad (4.54)$$

Из Предложения 17 и результатов [68] (см., например, Таблицу 1 в [177]) вытекает, что

$$V_1(E_d) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \sqrt{S_{d/2}} = \begin{cases} 2 \log 2, & \text{если } d = 2, \\ 2, & \text{если } d = 4. \end{cases} \quad (4.55)$$

Пример 16. Рассмотрим эллипсоид F_d с полуосями $\frac{1}{(n-\frac{1}{2})\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, причем каждое значение имеет кратность $d \in \mathbb{N}$. Преобразование Лапласа величины M равно

$$\mathbb{E} e^{-tM} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2t}{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2}\right)^{-d/2} = \left(\frac{1}{\cosh \sqrt{2t}}\right)^{d/2}. \quad (4.56)$$

Исходная величина M с преобразованием Лапласа (4.56) обозначается $C_{d/2}$ в [68] и [177]. По Предложению 17,

$$\text{Width}(F_d) \stackrel{d}{=} 2\sqrt{C_{d/2}}. \quad (4.57)$$

Из формулы для $\mathbb{E} C_{d/2}^{1/2}$, выведенной в [68] (см., например, Таблицу 1 в [177]), получаем

$$V_1(F_d) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \sqrt{C_{d/2}} = \begin{cases} \frac{8G}{\pi}, & \text{если } d = 2, \\ \frac{28}{\pi^2} \zeta(3), & \text{если } d = 4, \end{cases} \quad (4.58)$$

где $G := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ есть постоянная Каталана и $\zeta(3) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Произвольные внутренние объемы эллипсоидов

Предложение 17 можно обобщить на все внутренние объемы следующим образом.

Предложение 18. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$V_k(\mathcal{E}) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!} \mathbb{E} \sqrt{\det W_k},$$

где W_k есть $k \times k$ -матрица, чей элемент с индексом (i, j) равен $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 N_{n,i} N_{n,j}$ и $\{N_{n,i} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k\}$ суть независимые стандартные гауссовские величины.

Доказательство. Напомним, что ψ_1, ψ_2, \dots обозначает ортонормированный базис H . Представим вектор $h \in H$ в виде $h = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n$. Рассмотрим k независимых изонормальных процессов $\{\xi_i(h) : h \in \mathcal{E}\}$, где $1 \leq i \leq k$, определенных как

$$\xi_i(h) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n N_{n,i}.$$

Имея в виду применить Теорему 33, рассмотрим случайное выпуклое множество

$$\text{спек}_k \mathcal{E} = \{(\xi_1(h), \dots, \xi_k(h)) : h \in \mathcal{E}\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Определим вектор $y = y(h) \in \mathbb{R}^{\infty}$ и $k \times \infty$ -матрицу A следующим образом:

$$y := \left(\frac{x_1}{\lambda_1}, \frac{x_2}{\lambda_2}, \dots \right)^T \in \mathbb{R}^{\infty}, \quad A := (\lambda_n N_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k}.$$

Тогда $\|y\|_2 \leq 1$ равносильно $h \in \mathcal{E}$, и мы имеем следующее представление:

$$\text{спек}_k \mathcal{E} = \{Ay : y \in \mathbb{R}^{\infty}, \|y\|_2 \leq 1\}.$$

Обозначим a_1, \dots, a_k строки матрицы A ,

$$a_i := (\lambda_1 N_{1,i}, \lambda_2 N_{2,i}, \dots) \in \ell^2 \quad \text{п.н.}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

и пусть V обозначает линейную оболочку $\{a_1, \dots, a_k\}$ в гильбертовом пространстве ℓ^2 квадратично суммируемых последовательностей. Имеем $\dim V = k$ и $V^\perp = \text{Ker} A$ п.н. Следовательно,

$$\text{спес}_k \mathcal{E} = \{Ay : y \in V, \|y\|_2 \leq 1\}.$$

Любое $y \in V$ п.н. представляется как $y = c_1 a_1 + \dots + c_k a_k$, при этом

$$\|y\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^k c_i c_j \langle a_i, a_j \rangle = \langle AA^T c, c \rangle, \quad Ay = AA^T c,$$

где $c := (c_1, \dots, c_k)^T$. Поэтому

$$\text{спес}_k \mathcal{E} = \{AA^T c : c \in \mathbb{R}^k, \langle AA^T c, c \rangle \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^k : \langle (AA^T)^{-1} x, x \rangle \leq 1\}.$$

Таким образом, $\text{спес}_k \mathcal{E}$ – это эллипсоид, определяемый квадратичной формой AA^T . Объем эллипсоида известен (см., например, Предложение 19 ниже для $k = n$), и мы получаем

$$\lambda_k(\text{спес}_k \mathcal{E}) = \kappa_k \sqrt{\det(AA^T)} = \kappa_k \sqrt{\det W_k}.$$

Для завершения доказательства остается применить Теорему 33. ■

Замечание 25. В конечномерном случае Предложение 18 получено в [9].

Следующее предложение устанавливает дуальность между V_k и V_{n-k} для эллипсоидов, что объясняет Замечание 24. Пусть дана симметричная положительно определенная $n \times n$ -матрица Σ . Рассмотрим следующие два эллипсоида в \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \Sigma^{-1} x \rangle \leq 1\}, \quad \mathcal{E}^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \Sigma x \rangle \leq 1\}.$$

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ суть оси \mathcal{E} , то $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$ суть оси \mathcal{E}^* .

Предложение 19. Для любого $0 \leq k \leq n$ выполнено

$$V_k(\mathcal{E}) = |\det \Sigma|^{1/2} \frac{\kappa_k}{\kappa_{n-k}} V_{n-k}(\mathcal{E}^*).$$

Доказательство. Известно, что существует симметричная положительно определенная матрица U , такая что $\Sigma^{-1} = U^2$. Пусть B_n обозначает единичный шар в \mathbb{R}^n . Тогда, рассматривая U как линейный оператор на \mathbb{R}^n , получаем

$$U(\mathcal{E}) = B_n, \quad U(B_n) = \mathcal{E}^*.$$

Внутренние объемы являются частным случаем смешанных объемов (подробнее см. в разделе 4.3.2):

$$V_k(\mathcal{E}) = \frac{\binom{n}{k}}{\kappa_{n-k}} V(\underbrace{\mathcal{E}, \dots, \mathcal{E}}_k, \underbrace{B_n, \dots, B_n}_{n-k}). \quad (4.59)$$

Применяя линейное преобразование U к смешанным объемам, получаем

$$\begin{aligned} V_k(\mathcal{E}) &= |\det U|^{-1} \frac{\binom{n}{k}}{\kappa_{n-k}} V(\underbrace{U(\mathcal{E}), \dots, U(\mathcal{E})}_k, \underbrace{U(B_n), \dots, U(B_n)}_{n-k}) \\ &= |\det \Sigma|^{1/2} \frac{\binom{n}{k}}{\kappa_{n-k}} V(\underbrace{B_n, \dots, B_n}_k, \underbrace{\mathcal{E}^*, \dots, \mathcal{E}^*}_{n-k}) \\ &= |\det \Sigma|^{1/2} \frac{\kappa_k}{\kappa_{n-k}} V_{n-k}(\mathcal{E}^*). \end{aligned}$$

■

4.2.5. Частные случаи $p = 1, 2, \infty$

Гауссовская ширина \mathbb{K}_*^1 и \mathbb{L}_*^1

Здесь мы рассмотрим случай $p = 1$. Напомним, что множество \mathbb{K}_*^1 состоит из функций на $[0, 1]$, чья полная вариация не превосходит 1, с дополнительными граничными или интегральными условиями. В множестве \mathbb{L}_*^1 мы дополнительно требуем от функций монотонное неубывание. Применяя Теорему 41 (с $q = \infty$)

и (4.44), мы получаем распределение гауссовской ширины множеств \mathbb{K}_*^1 и \mathbb{L}_*^1 :

$$\text{Width}(\mathbb{K}_{BM}^1) \stackrel{d}{=} 2 \sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \stackrel{d}{=} \frac{2}{\sqrt{C_1}}, \quad (4.60)$$

$$\text{Width}(\mathbb{L}_{BM}^1) \stackrel{d}{=} \sup_{t \in [0,1]} W(t) - \inf_{t \in [0,1]} W(t) \stackrel{d}{=} \frac{2}{\sqrt{C_2}}, \quad (4.61)$$

$$\text{Width}(\mathbb{K}_{BB}^1) \stackrel{d}{=} 2 \sup_{t \in [0,1]} |X_{BB}(t)| \stackrel{d}{=} \pi \sqrt{S_1}, \quad (4.62)$$

$$\text{Width}(\mathbb{L}_{BB}^1) \stackrel{d}{=} \sup_{t \in [0,1]} X_{BB}(t) - \inf_{t \in [0,1]} X_{BB}(t) \stackrel{d}{=} \frac{\pi}{2} \sqrt{S_2}, \quad (4.63)$$

где мы воспользовались известными характеристиками распределений максимумов и диапазонов броуновского движения и броуновского моста в терминах распределений S_1, S_2, C_1, C_2 (см. [68]). Отметим, что $\frac{1}{2} \text{Width}(\mathbb{K}_{BB}^1)$ имеет распределение Колмогорова-Смирнова, тогда как $\text{Width}(\mathbb{L}_{BB}^1)$ имеет предельное распределение в критерии Кёйпера. Сравнивая (4.62) и (4.63) с (4.54), получаем следующие тождества распределений:

$$\text{Width}(\mathbb{K}_{BB}^1) \stackrel{d}{=} \frac{\pi}{2} \text{Width}(E_2), \quad \text{Width}(\mathbb{L}_{BB}^1) \stackrel{d}{=} \frac{\pi}{4} \text{Width}(E_4).$$

Пытаясь объяснить эти странные совпадения, можно предположить, что существует изометрия между соответствующими множествами. В качестве свидетельства данной гипотезы, можно показать, что

$$\text{diam}(\mathbb{K}_{BB}^1) = \frac{\pi}{2} \text{diam}(E_2) = \frac{1}{2}, \quad \text{diam}(\mathbb{L}_{BB}^1) = \frac{\pi}{4} \text{diam}(E_4) = \frac{1}{4},$$

где $\text{diam}(T) := \sup_{x,y \in T} \|x - y\|_2$. Однако, как показывает следующее предложение, гипотеза неверна.

Предложение 20. *Множества \mathbb{K}_{BB}^1 и $\frac{\pi}{2}E_2$, оснащенные L^2 -метрикой, не изометричны. Кроме того, \mathbb{L}_{BB}^1 и $\frac{\pi}{4}E_4$ также не изометричны.*

Доказательство. Предположим, что существует изометрия φ между \mathbb{L}_{BB}^1 и $\frac{\pi}{4}E_4$. Тогда $\varphi(tx + (1-t)y) = t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{L}_{BB}^1$ и $t \in [0, 1]$. В частности, φ является гомеоморфизмом между множествами экстремальных точек выпуклых множеств \mathbb{L}_{BB}^1 и $\frac{\pi}{4}E_4$, оснащенных индуцированной

L^2 -топологией. Экстремальные точки \mathbb{L}_{BB}^1 суть функции

$$f_\alpha(t) = (\alpha - 1)\mathbb{1}_{(-\infty, \alpha)}(t) + \alpha\mathbb{1}_{[\alpha, \infty)}(t), \quad \alpha \in (0, 1),$$

включая нулевую функцию. Это видно из того, что \mathbb{L}_{BB}^1 является образом выпуклого множества S всех (неотрицательных) мер μ на $(0, 1)$ с $\mu((0, 1)) \leq 1$ под действием отображения A , которое сопоставляет мере $\mu \in S$ функцию $t \mapsto \mu([0, t]) - \int_0^1 \mu([0, s])ds$. Экстремальные точки S суть дельта-меры δ_α , $\alpha \in (0, 1)$ и нулевая мера. Так как A аффинно и биективно, экстремальные точки \mathbb{L}_{BB}^1 суть $f_\alpha = A\delta_\alpha$ и 0 . Заметим, что $A\delta_\alpha \rightarrow 0$ (в L^2) при $\alpha \rightarrow 0$ и при $\alpha \rightarrow 1$.

Таким образом, множество экстремальных точек \mathbb{L}_{BB}^1 гомеоморфно окружности. С другой стороны, множество экстремальных точек $\frac{\pi}{4}E_4$ является границей $\frac{\pi}{4}E_4$. Очевидно, эти множества не гомеоморфны (одно из них бесконечномерно, а другое – нет), что доказывает отсутствие изометрии между \mathbb{L}_{BB}^1 и $\frac{\pi}{4}E_4$.

Аналогично, экстремальные точки выпуклого множества \mathbb{K}_{BB}^1 суть функции f_α , $-f_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, и мы опять приходим к отсутствию гомеоморфизма между экстремальными точками \mathbb{K}_{BB}^1 и $\frac{\pi}{2}E_2$. ■

Пример 17. Напомним, что в соответствии с Теоремой 32,

$$V_1(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E} \text{Width}(T).$$

Применяя это к (4.60)–(4.63) и воспользовавшись тождествами

$$\sqrt{2\pi} \mathbb{E} C_1^{-1/2} = \pi, \quad \sqrt{2\pi} \mathbb{E} C_2^{-1/2} = 2, \quad \sqrt{2\pi} \mathbb{E} S_1^{1/2} = 2 \log 2, \quad \sqrt{2\pi} \mathbb{E} S_2^{1/2} = 2$$

(см. [177, Равенство (56)] и (4.55)), получаем формулу для первого внутреннего объема из Предложения 15.

Первый внутренний объем \mathbb{K}_*^2

По Теореме 38, первый внутренний объем \mathbb{K}_*^2 связан со средней L^2 -нормой процесса X_* следующим образом:

$$V_1(\mathbb{K}_*^2) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \left(\int_0^1 X_*^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Распределение L^2 -нормы X_* хорошо изучено (см., например, [68]). Используя разложение Карунена-Лоэва для гауссовских процессов, процесс X_* можно представить как взвешенное χ^2 -распределение с весами, выраженными через собственные значения ковариационного оператора X_* . В нашем случае, распределение L^2 -нормы имеет вид S_d или C_d (см. раздел 4.2.4). Кроме того, используя аналогичный метод, можно показать, что \mathbb{K}_*^2 изометрично эллипсоиду E_d или F_d .

Сначала рассмотрим d -мерное обобщение \mathbb{K}_*^2 . Обозначим $AC^d[0, 1]$ множество абсолютно непрерывных функций $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Положим

$$\mathbb{K}^{2,d} := \left\{ f = (f_1, \dots, f_d) \in AC^d[0, 1] : f'_1, \dots, f'_d \in L^2[0, 1], \sum_{i=1}^d \|f'_i\|_2^2 \leq 1 \right\}.$$

После этого, определим $\mathbb{K}_*^{2,d}$ для всех допустимых значений $*$ путем наложения на каждую компоненту f_1, \dots, f_d тех же граничных условий, что и в разделе 4.2.1. Отметим, что $\mathbb{K}_{BM}^{2,d}$ является шаром Штрассена (d -мерного броуновского движения), который, к примеру, возникает, в функциональном законе повторного логарифма.

Предложение 21. *В L^2 -метрике, имеют место следующие свойства:*

1. $\mathbb{K}_{BM}^{2,d}$ изометрично F_d ;
2. $\mathbb{K}_{BV}^{2,d}$ и $\mathbb{K}_{CBM}^{2,d}$ изометричны E_d ;
3. $\mathbb{K}_{CBV}^{2,d}$ изометрично $\frac{1}{2}E_{2d}$.

Доказательство. Доказательство использует характеризацию соболевских шаров с $p = 2$ в терминах разложения Карунена-Лоэва. Пусть сначала $d = 1$.

СЛУЧАЙ $* = VM$. Любая вещественно-значная функция $\psi \in L^2$ имеет ортонормированное разложение вида

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{2} \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \pi t \right).$$

Это является разложением через собственные функции оператора Лапласа с граничными условиями $f(0) = f'(1) = 0$. Имеем $\psi \in \mathbb{K}_{BM}^2$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 a_k^2 \leq 1.$$

Таким образом, приходим к изометрии между \mathbb{K}_{BM}^2 и F_1 .

СЛУЧАЙ $* = CBM$. Любую функцию $\psi \in L^2$ можно записать в виде

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{2} \sin(k\pi t),$$

что является разложением через собственные функции оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле $f(0) = f(1) = 0$. Имеем $\psi \in \mathbb{K}_{CBM}^2$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 a_k^2 \leq 1$, что приводит к тому, что \mathbb{K}_{CBM}^2 изометрично E_1 .

СЛУЧАЙ $* = BV$. Любую функцию $\psi \in L^2$ с нулевым интегралом можно представить в виде

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{2} \cos(k\pi t),$$

что является разложением через собственные функции оператора Лапласа с граничными условиями Неймана $f'(0) = f'(1) = 0$. Имеем $\psi \in \mathbb{K}_{BV}^2$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 a_k^2 \leq 1$, что влечет изометрию между \mathbb{K}_{BV}^2 и E_1 .

СЛУЧАЙ $* = CBV$. Любую функцию $\psi \in L^2$ с нулевым интегралом можно разложить в ряд Фурье

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(2\pi kt) + b_k \cos(2\pi kt)),$$

что является разложением через собственные функции оператора Лапласа с периодическими граничными условиями $f(0) = f(1)$. Имеем $\psi \in \mathbb{K}_{CBV}^2$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{4}$, что доказывает изометрию между \mathbb{K}_{CBV}^2 и $\frac{1}{2}E_2$.

В случае произвольной размерности $d \in \mathbb{N}$ необходимо выписывать разложение каждой компоненты ψ по-отдельности. ■

Пример 18. Используя Предложение 21 вместе с (4.55), (4.58), получаем

$$\begin{aligned} V_1(\mathbb{K}_{BB}^{2,2}) &= V_1(\mathbb{K}_{CBM}^{2,2}) = 2V_1(\mathbb{K}_{CBV}^{2,1}) = 2 \log 2, \\ V_1(\mathbb{K}_{BB}^{2,4}) &= V_1(\mathbb{K}_{CBM}^{2,4}) = 2V_1(\mathbb{K}_{CBV}^{2,2}) = 2, \\ V_1(\mathbb{K}_{BM}^{2,2}) &= \frac{8G}{\pi}, \\ V_1(\mathbb{K}_{BM}^{2,4}) &= \frac{28}{\pi^2} \zeta(3). \end{aligned}$$

Первый внутренний объем \mathbb{K}_*^∞ и \mathbb{L}_*^∞

Здесь мы рассмотрим случай $p = \infty$. Напомним, что множества \mathbb{K}_*^∞ состоят из всех функций с константой Липшица, не превосходящей 1 и удовлетворяющих дополнительным граничным условиям. В множестве \mathbb{L}_*^∞ от функций дополнительно требуется монотонность. Применяя Теорему 41 с $q = 1$ и используя обозначение $\sigma_*^2(t) := \text{Var } X_*(t)$, получаем

$$V_1(\mathbb{K}_*^\infty) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \int_0^1 |X_*(t)| dt = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} |N| \int_0^1 \sigma_*(t) dt = 2 \int_0^1 \sigma_*(t) dt.$$

Здесь N имеет стандартное нормальное распределение, и мы воспользовались фактом, что $\mathbb{E} |N| = \sqrt{2/\pi}$. Для первого внутреннего объема \mathbb{L}_*^∞ получаем

формулу

$$V_1(\mathbb{L}_*^\infty) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \int_0^1 |X_*^+(t)| dt = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \max(N, 0) \int_0^1 \sigma_*(t) dt = \int_0^1 \sigma_*(t) dt.$$

Дисперсия $\sigma_*^2(t)$ задается соотношением

$$\sigma_{BM}^2(t) = t, \quad \sigma_{BB}^2(t) = t(1-t), \quad \sigma_{CBM}^2(t) = t^2 - t + \frac{1}{3}, \quad \sigma_{CBB}^2(t) = \frac{1}{12}.$$

Оценивая интеграл $\sigma_*(t)$, мы получаем формулу для первого внутреннего объема \mathbb{K}_*^∞ из Предложения 16. Аналогично, получаем, что первый внутренний объем \mathbb{L}_*^∞ равен

$$V_1(\mathbb{L}_{BM}^\infty) = \frac{2}{3}, \quad V_1(\mathbb{L}_{BB}^\infty) = \frac{\pi}{8}.$$

4.3. Смешанные объемы эллипсоидов и нули гауссовских случайных полей

Результаты данного параграфа были получены совместно с З. Каблучко.

4.3.1. Формулировка главного результата

Случайный определитель и смешанный объем эллипсоидов

Рассмотрим независимые центрированные невырожденные гауссовские случайные векторы $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^d$, $k \leq d$, с ковариационными матрицами $\Sigma_1, \dots, \Sigma_d$ соответственно. Обозначим \mathcal{E}_i эллипсоид рассеяния ξ_i :

$$\mathcal{E}_i := \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x}^\top \Sigma_i^{-1} \mathbf{x} \leq 1\}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.64)$$

Обозначим M матрицу размера $k \times d$, чьими строками являются ξ_1, \dots, ξ_k .

Теорема 42. *Выполнено соотношение*

$$\mathbb{E} \sqrt{\det(MM^\top)} = \frac{(d)_k}{(2\pi)^{k/2} \kappa_{d-k}} V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k, B, \dots, B), \quad (4.65)$$

где $V_d(\cdot, \dots, \cdot)$ обозначает смешанный объем d выпуклых тел в \mathbb{R}^d (подробнее см. в разделе 4.3.2), B – единичный шар в \mathbb{R}^d , $(d)_k := d(d-1)\dots(d-k+1)$ – символ Похгаммера и $\kappa_n := \pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ есть объем единичного шара в \mathbb{R}^n .

Левую часть (4.65) можно интерпретировать как средний объем k -мерного гауссовского случайного параллелопада.

Следствие 22. В случае $k = d$ выполнено

$$\mathbb{E} |\det M| = \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_d).$$

В качестве другого прямого следствия мы получаем выражение для смешанного объема d произвольных эллипсоидов в \mathbb{R}^d .

Следствие 23. Для произвольных эллипсоидов $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_d$, заданных симметричными положительно определенными матрицами $\Sigma_1, \dots, \Sigma_d$ так же, как и в (4.64), выполнено

$$\begin{aligned} V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_d) &= \frac{1}{d!} \prod_{i=1}^d (\det \Sigma_i)^{-1/2} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^{d^2}} |\det(x_{ij})| \prod_{i=1}^d \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^\top \Sigma_i^{-1} \mathbf{x}_i\right) dx_{11} \dots dx_{dd}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})^\top.$$

Единственная оценка смешанного объема эллипсоидов, которая нам известна, принадлежит Барвинку (см. [55]). Он показал, что

$$\frac{\kappa_d}{3^{(d-1)/2}} \sqrt{D_d(\Sigma_1, \dots, \Sigma_d)} \leq V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_d) \leq \kappa_d \sqrt{D_d(\Sigma_1, \dots, \Sigma_d)},$$

где $D_d(\cdot, \dots, \cdot)$ обозначает смешанный дискриминант d симметричных матриц размера $d \times d$:

$$D_d(A_1, \dots, A_d) = \frac{1}{d!} \frac{\partial^d}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_d} \det(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_d A_d) \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0}.$$

Если ξ_1, \dots, ξ_k суть независимые стандартные гауссовские векторы, то MM^\top является матрицей Уишарта и (4.65) принимает вид (см. [222], [116])

$$\mathbb{E} \sqrt{\det(MM^\top)} = \frac{(d)_k \kappa_d}{(2\pi)^{k/2} \kappa_{d-k}}.$$

Внутренние объемы

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^d$, $k \leq d$, одинаково распределены с общей ковариационной матрицей Σ и эллипсоидом рассеяния \mathcal{E} , то (4.65) принимает вид

$$\mathbb{E} \sqrt{\det(MM^\top)} = \frac{k!}{(2\pi)^{k/2}} V_k(\mathcal{E}), \quad (4.66)$$

так как k -й внутренний объем V_k выражается через смешанный объем следующим образом:

$$V_k(K) = \frac{\binom{d}{k}}{\kappa_{d-k}} V_d(\underbrace{K, \dots, K}_k, B, \dots, B).$$

Подставляя $k = 1$ в (4.66), мы получаем, что для произвольного центрированного гауссовского вектора ξ с эллипсоидом рассеяния \mathcal{E} выполнено

$$\mathbb{E} \|\xi\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V_1(\mathcal{E}). \quad (4.67)$$

М.А. Лифшиц заметил, что (4.67) является частным случаем результата Судакова (см. Теорему 32).

Связь с результатом Судакова

Напомним формулировку теоремы Судакова в конечномерном случае: для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^d$ выполнено

$$\mathbb{E} \sup_{\mathbf{x} \in A} \langle \mathbf{x}, \eta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V_1(\text{conv } A), \quad (4.68)$$

где η является стандартным гауссовским вектором в \mathbb{R}^d и $\text{conv } A$, как обычно, обозначает выпуклую оболочку A .

Выведем (4.67) из (4.68). Рассмотрим матрицу U , такую что $\Sigma = U^{-1}(U^{-1})^\top$ и $U\xi$ является стандартным гауссовским вектором. Подставляя $A = \mathcal{E}$ и $\eta = U\xi$ в (4.68), мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\xi\| &= \mathbb{E} \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \langle \mathbf{x}, \xi \rangle = \mathbb{E} \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \langle (U^{-1})^\top \mathbf{x}, U\xi \rangle \\ &= \mathbb{E} \sup_{\|U^\top \mathbf{x}\| \leq 1} \langle \mathbf{x}, U\xi \rangle = \mathbb{E} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}} \langle \mathbf{x}, U\xi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V_1(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Нули гауссовских случайных полей

Рассмотрим случайное поле $X(\mathbf{t}) := (X_1(\mathbf{t}), \dots, X_k(\mathbf{t}))^\top : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k \leq d$. Следуя Азаису и Вшебору (см. [46]), мы всегда предполагаем, что выполнены следующие условия:

- (a) X гауссовское;
- (b) почти наверное, функция $X(\cdot)$ принадлежит классу гладкости \mathcal{C}^1 ;
- (c) при всех $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ случайный вектор $X(\mathbf{t})$ имеет невырожденное распределение;
- (d) почти наверное, если $X(\mathbf{t}) = 0$, то $J_X(\mathbf{t})$ (матрица Якоби $X(\mathbf{t})$) имеет полный ранг.

Тогда п.н. множество уровня $X^{-1}(0)$ является \mathcal{C}^1 -гладким многообразием размерности $d-k$, и для любого борелевского множества F мера Лебега $\lambda_{d-k}(X^{-1}(0) \cap F)$ корректно определена ($\lambda_0(\cdot)$ означает считающую меру).

В [47, стр. 177] было показано, что

$$\mathbb{E} \lambda_{d-k}(X^{-1}(0) \cap F) = \int_F \mathbb{E} \left[\sqrt{\det(J_X(\mathbf{t})J_X(\mathbf{t})^\top)} \mid X(\mathbf{t}) = 0 \right] p_{X(\mathbf{t})}(0) d\mathbf{t}, \quad (4.69)$$

где $p_{X(\mathbf{t})}(\cdot)$ является плотностью распределения $X(\mathbf{t})$. Таким образом, подынтегральное выражение в (4.69) может быть интерпретировано как интенсивность нулей X .

В этом параграфе мы рассматриваем частный случай, когда X центрировано и его координаты X_1, \dots, X_k независимы. Обозначим $\mathcal{E}_i(\mathbf{t})$ эллипсоид рассеяния гауссовского вектора $\nabla[X_i(\mathbf{t})/\sqrt{\text{Var } X_i(\mathbf{t})}]$.

Теорема 43. Пусть X является центрированным случайным полем с независимыми координатами, удовлетворяющим условиям (a)-(d). Тогда

$$\mathbb{E} \lambda_{d-k}(X^{-1}(0) \cap F) = \frac{(d)_k}{(2\pi)^k \kappa_{d-k}} \int_F V_d(\mathcal{E}_1(\mathbf{t}), \dots, \mathcal{E}_k(\mathbf{t}), B, \dots, B) d\mathbf{t}. \quad (4.70)$$

Формула (4.70) связывает нулевые множества случайных уравнений со смешанными объемами. В случае $k = d$ она напоминает хорошо известную теорему Бернштейна о числе решений типичной системы алгебраических уравнений.

Теорема Бернштейна

Рассмотрим полином d комплексных переменных

$$f(z_1, \dots, z_d) := \sum c_{j_1, \dots, j_d} z_1^{j_1} \dots z_d^{j_d}.$$

Многогранник Ньютона полинома f – это множество в \mathbb{R}^d , определенное следующим образом:

$$\text{Nw}(f) := \text{conv}\{(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d : c_{j_1, \dots, j_d} \neq 0\}.$$

Пусть K_1, \dots, K_d являются компактными выпуклыми многогранниками в \mathbb{R}^d с вершинами в \mathbb{Z}^d . Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, \dots, z_d) = 0, \\ \dots \\ f_d(z_1, \dots, z_d) = 0, \end{cases}$$

такую что $\text{Nw}(f_i) = K_i$. Бернштейн показал (см. [1]), что для почти всех таких систем (по отношению к мере Лебега в пространстве коэффициентов полиномов) число ненулевых решений равно

$$\lambda_0(f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_d^{-1}(0) \setminus \{\mathbf{0}\}) = d! V_d(K_1, \dots, K_d).$$

4.3.2. Необходимые сведения из геометрии

Для более подробного ознакомления с основами интегральной и выпуклой геометрии мы отсылаем читателя к [3] и [193].

Смешанные объемы.

Рассмотрим произвольные выпуклые тела $K_1, \dots, K_d \subset \mathbb{R}^d$. Минковский показал (см. [170]), что $\lambda_d(r_1 K_1 + \dots + r_d K_d)$ при $r_1, \dots, r_d \geq 0$ является однородным полиномом степени d с неотрицательными коэффициентами:

$$\lambda_d(r_1 K_1 + \dots + r_d K_d) = \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_d=1}^d r_{i_1} \dots r_{i_d} V_d(K_{i_1}, \dots, K_{i_d}). \quad (4.71)$$

Коэффициенты $V_d(K_{i_1}, \dots, K_{i_d})$ будут однозначно определены, если предположить, что они симметричны по отношению к перестановкам K_{i_1}, \dots, K_{i_d} . Коэффициент $V_d(K_1, \dots, K_d)$ называется смешанным объемом выпуклых тел K_1, \dots, K_d . Эквивалентное определение смешанного объема можно получить путем дифференцирования (4.71):

$$V_d(K_1, \dots, K_d) = \frac{1}{d!} \frac{\partial^d}{\partial r_1 \dots \partial r_d} \lambda_d(r_1 K_1 + \dots + r_d K_d) \Big|_{r_1=\dots=r_d=0}.$$

Для любого аффинного преобразования L выполнено

$$V_d(LK_1, \dots, LK_d) = |\det L| \cdot V_d(K_1, \dots, K_d). \quad (4.72)$$

Также верно следующее соотношение:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} V_{d-1}(K_1|_{\mathbf{u}^\perp}, \dots, K_{d-1}|_{\mathbf{u}^\perp}) d\mathbf{u} = \frac{\kappa_{d-1}}{\kappa_d} V_d(K_1, \dots, K_{d-1}, B), \quad (4.73)$$

где $d\mathbf{u}$ обозначает инвариантную относительно поворотов меру на сфере \mathbb{S}^{d-1} , нормированную так, чтобы мера всей сферы была равна единице.

Объем параллелотопов.

Обозначим $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$ параллелотоп, заданный векторами $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. Для произвольных $A \subset \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$ обозначим $A|[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]^\perp$ ортогональную проекцию A на $\text{span}^\perp\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ (ортогональное дополнение линейной оболочки векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$). Известно, что

$$\lambda_k([\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]) = \sqrt{\det(AA^\top)}, \quad (4.74)$$

где A – матрица, чьими строками являются $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Для произвольных $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^d$ и $k = 1, \dots, d - 1$ выполнено

$$\lambda_d([\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d]) = \lambda_k([\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k])\lambda_{d-k}([\mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_d]|[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]^\perp). \quad (4.75)$$

Эллипсоиды

Существует биекция $A \mapsto \mathcal{E}$ между симметричными положительно определенными матрицами размера $d \times d$ и d -мерными невырожденными эллипсоидами с центрами в начале координат (подробнее см. в [144]):

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x}^\top A^{-1} \mathbf{x} \leq 1\}.$$

Любому невырожденному линейному преобразованию координат вида $\mathbf{x} \mapsto L\mathbf{x}$ соответствует замена соответствующей матрицы A на матрицу A_L вида

$$A_L = LAL^\top. \quad (4.76)$$

Пусть \mathcal{E}' является ортогональной проекцией эллипсоида \mathcal{E} на k -мерное подпространство с некоторым ортонормированным базисом $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$. Обозначим A' матрицу размера $k \times k$, соответствующую эллипсоиду \mathcal{E}' в этом базисе. Имеет место соотношение

$$A' = CAC^\top, \quad (4.77)$$

где C – матрица размера $k \times d$, чьими строками являются $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

4.3.3. Доказательства теорем

Доказательство Теоремы 42. Случай $k = d$

Будем проводить доказательство индукцией по d . Сначала предположим, что ξ_d является стандартным гауссовским вектором. Обозначим χ_d случайную величину, имеющую χ -распределение с d степенями свободы и независимую от ξ_1, \dots, ξ_{d-1} . Применяя (4.74) и (4.75) с $k = 1$, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\det M| &= \mathbb{E} \lambda_d([\xi_1, \dots, \xi_d]) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E} \lambda_d([\xi_1, \dots, \xi_{d-1}, \chi_d \mathbf{u}]) \, d\mathbf{u} \\ &= \mathbb{E} \chi_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E} \lambda_{d-1}([\xi_1, \dots, \xi_{d-1}] | \mathbf{u}^\perp) \, d\mathbf{u} \\ &= \frac{d\kappa_d}{\sqrt{2\pi}\kappa_{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E} \lambda_{d-1}([\xi_1 | \mathbf{u}^\perp, \dots, \xi_{d-1} | \mathbf{u}^\perp]) \, d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Из (4.77) следует, что $\xi_i | \mathbf{u}^\perp$ имеет эллипсоид рассеяния $\mathcal{E}_i | \mathbf{u}^\perp$. По предположению индукции,

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}([\xi_1 | \mathbf{u}^\perp, \dots, \xi_{d-1} | \mathbf{u}^\perp]) = \frac{(d-1)!}{(2\pi)^{(d-1)/2}} V_{d-1}(\mathcal{E}_1 | \mathbf{u}^\perp, \dots, \mathcal{E}_{d-1} | \mathbf{u}^\perp).$$

Объединяя два последних соотношения с (4.73), мы получаем

$$\mathbb{E} |\det M| = \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{d-1}, B). \quad (4.78)$$

Если ξ_d является произвольным невырожденным гауссовским вектором, то существует линейное преобразование L , такое что $L\xi_d$ – стандартный гауссовский вектор. Из (45) следует, что $L\mathcal{E}_i$ является эллипсоидом рассеяния $L\xi_i$ и, в частности, $L\mathcal{E}_d = B$. Применяя (4.78) к матрице LM^\top и используя (4.72), мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\det M| &= |\det L|^{-1} \mathbb{E} |\det LM^\top| = \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} |\det L|^{-1} V_d(L\mathcal{E}_1, \dots, L\mathcal{E}_{d-1}, B) \\ &= \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{d-1}, \mathcal{E}_d). \end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 42. Случай $k < d$

Рассмотрим матрицу M' размера $d \times d$, чьи первые k строк образуют матрицу M , а остальные $d - k$ строк являются независимыми стандартными гауссовскими векторами ξ_{k+1}, \dots, ξ_d (независимыми от M). По предыдущему случаю мы имеем

$$\mathbb{E} |\det M'| = \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k, B, \dots, B).$$

С другой стороны, из (4.75) следует

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\det M'| &= \mathbb{E} \lambda_d([\xi_1, \dots, \xi_d]) = \mathbb{E} \lambda_k([\xi_1, \dots, \xi_k]) \lambda_{d-k}([\xi_{k+1}, \dots, \xi_d] | [\xi_1, \dots, \xi_k]^\perp) \\ &= \mathbb{E} \sqrt{\det(MM^\top)} \mathbb{E} \lambda_{d-k}([\eta_1, \dots, \eta_{d-k}]), \end{aligned}$$

где $\eta_1, \dots, \eta_{d-k}$ – независимые стандартные гауссовские векторы в \mathbb{R}^{d-k} . Опять применяя предыдущий случай, получаем

$$\mathbb{E} \lambda_{d-k}([\eta_1, \dots, \eta_{d-k}]) = \frac{(d-k)!}{(2\pi)^{(d-k)/2}} \kappa_{d-k}.$$

Для завершения доказательства осталось объединить полученные три соотношения.

Доказательство Теоремы 43

Предположим сначала, что X_j имеет единичную дисперсию: $\text{Var } X_j(\mathbf{t}) \equiv 1$ при всех $j = 1, \dots, k$. Дифференцируя соотношение $\mathbb{E} X_j(\mathbf{t}) X_j(\mathbf{t}) = 1$ по t_i , мы получаем

$$\mathbb{E} \frac{\partial X_j}{\partial t_i}(\mathbf{t}) X_j(\mathbf{t}) = 0,$$

что вместе с независимостью координат X приводит к независимости $J_X(\mathbf{t})$ и $X(\mathbf{t})$. Это означает, что условие $X(\mathbf{t}) = 0$ в (4.69) может быть опущено. Для завершения доказательства теоремы в случае $\text{Var } X_j(\mathbf{t}) \equiv 1$ осталось объединить (4.69) с (4.65).

Общий случай следует из того факта, что нули $X_j / \sqrt{\text{Var } X_j}$ совпадают с нулями X_j .

4.4. Средняя ширина правильных многогранников и средний максимум зависимых гауссовских величин

Результаты данного параграфа были получены совместно с Э. Каблучко и А. Литваком.

4.4.1. Гипотеза о средней ширине

Введение

Как расположить $n + 1$ точку на $(n - 1)$ -мерной единичной сфере, чтобы средняя ширина их выпуклой оболочки была максимальна? Старая гипотеза утверждает (см. [122, раздел 9.10.2]), что для этого точки должны располагаться в вершинах *правильного* симплекса.

Средняя ширина с точностью до константы совпадает с первым внутренним объемом V_1 (см. [192, стр. 210]):

$$V_1(K) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \mathbb{E}[W_K]. \quad (4.79)$$

Как было отмечено во введении, первый внутренний объем не зависит от размерности окружающего пространства. Поэтому гипотеза может быть сформулирована следующим образом:

$$\sup_{x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{S}^{n-1}} V_1(\text{conv}(x_1, \dots, x_{n+1})) = V_1(T_n), \quad (4.80)$$

где T_n обозначает правильный симплекс с $n + 1$ вершиной, вписанный в сферу \mathbb{S}^{n-1} .

Данный вопрос является на удивление сложным. Несколько авторов (см. [51, 52, 114, 219]) предположили наличие доказательства, но гипотеза все еще является открытой. Кроме естественной формулировки с точки зрения выпуклой геометрии, данная задача имеет важное значение в теории информации, поскольку тесно связана с так называемой *simplex code conjecture* (см. [87]).

Вероятностная формулировка

Гипотезу можно переформулировать в терминах гауссовских векторов следующим образом. Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ обозначает стандартный гауссовский вектор в \mathbb{R}^n . Рассмотрим компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$. По формуле Судакова (см. Теорему 32), имеем

$$V_1(\text{conv}(K)) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \sup_{x \in K} \langle \eta, x \rangle. \quad (4.81)$$

Данная вероятностная интерпретация первого внутреннего объема позволяет переформулировать гипотезу следующим образом.

Предложение 22. *Для любого целого $n \geq 2$ следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) *Выполнено*

$$\sup_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{n-2}} V_1(\text{conv}(x_1, \dots, x_n)) = V_1(T_{n-1}), \quad (4.82)$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда x_1, \dots, x_n лежат в вершинах правильного симплекса.

(ii) *Для любого центрированного гауссовского вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) , такого что*

$$\mathbb{E} \xi_1^2 = \dots = \mathbb{E} \xi_n^2 = 1, \quad (4.83)$$

выполнено

$$\mathbb{E} \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_n\}, \quad (4.84)$$

и равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbb{E} [\xi_i \xi_j] = -1/(n-1)$ при всех $i \neq j$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\sup_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{n-2}} V_1(\text{conv}(x_1, \dots, x_n)) = \sup_{y_1, \dots, y_n \in \mathbb{S}^{n-1}} V_1(\text{conv}(y_1, \dots, y_n)), \quad (4.85)$$

так как существует $(n - 1)$ -мерное аффинное подпространство (и, следовательно, $(n - 2)$ -мерная сфера радиуса, не превосходящего 1), содержащее y_1, \dots, y_n . Следовательно, мы можем переформулировать (i) как

$$\sup_{y_1, \dots, y_n \in \mathbb{S}^{n-1}} V_1(\text{conv}(y_1, \dots, y_n)) = V_1(T_{n-1}), \quad (4.86)$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда y_1, \dots, y_n являются вершинами правильного симплекса с центром в начале координат. Пусть, как обычно, $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначает стандартный ортонормированный базис в \mathbb{R}^n . В качестве реализации такого симплекса можно взять выпуклую оболочку точек

$$v_i := \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left(e_i - \frac{e_1 + \dots + e_n}{n} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Чтобы это увидеть, заметим, что $(n - 1)$ -мерный правильный симплекс

$$S_{n-1} := \text{conv}(e_1, \dots, e_n) \quad (4.87)$$

можно вписать в $(n - 2)$ -мерную сферу радиуса $\sqrt{(n - 1)/n}$ с центром в $(e_1 + \dots + e_n)/n$. Из (4.81), примененному к $K = S_{n-1}$, следует, что

$$V_1(T_{n-1}) = \sqrt{\frac{n}{n-1}} V_1(S_{n-1}) = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_n\}. \quad (4.88)$$

Произвольным точкам $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{S}^{n-1}$ сопоставим центрированный гауссовский вектор (ξ_1, \dots, ξ_n) , такой что $\mathbb{E} \xi_1^2 = \dots = \mathbb{E} \xi_n^2 = 1$, через соотношение

$$\xi_i := \langle \eta, y_i \rangle, \dots, \xi_n := \langle \eta, y_n \rangle.$$

Если мы будем отождествлять (y_1, \dots, y_n) и (y'_1, \dots, y'_n) при условии $\langle y_i, y_j \rangle = \langle y'_i, y'_j \rangle$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, а также считать равными гауссовские векторы с одинаковым распределением, то это соответствие будет однозначным, так как $\text{Cov}(\xi_i, \xi_j) = \langle y_i, y_j \rangle$. Из (4.81) вытекает

$$\sqrt{2\pi} \mathbb{E} \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} = V_1(\text{conv}(y_1, \dots, y_n)).$$

Гауссовский вектор, соответствующий точкам v_1, \dots, v_n , удовлетворяет

$$\mathbb{E} [\xi_i \xi_j] = \langle v_i, v_j \rangle = -1/(n - 1), \quad i \neq j.$$

Объединяя вышесказанное, получаем эквивалентность (i) и (ii). ■

Асимптотическая версия гипотезы

Сейчас мы покажем, что (4.80) выполняется *асимптотически*.

Теорема 44. *Для некоторой абсолютной константы $C > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$V_1(T_n) \leq \sup_{x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{S}^{n-1}} V_1(\text{conv}(x_1, \dots, x_{n+1})) \leq V_1(T_n) \left(1 + C \frac{\log \log n}{\log n}\right).$$

Доказательство. Первое неравенство тривиально, так как в качестве x_1, \dots, x_{n+1} мы можем взять вершины T_n . Заменяя n на $n-1$ и используя (4.85), мы можем переформулировать второе неравенство следующим образом: при всех $n \geq 2$ выполнено

$$\sup_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{n-1}} V_1(\text{conv}(x_1, \dots, x_n)) \leq V_1(T_{n-1}) \left(1 + C \frac{\log \log n}{\log n}\right).$$

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{n-1}$. Для $k = 1, \dots, n$ рассмотрим гауссовские случайные величины $\xi_k := \langle x_k, \eta \rangle$ и заметим, что ξ_k имеет нулевое среднее и единичную дисперсию. Известно (см., например, [85, стр. 138]), что

$$\mathbb{E} \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \leq \sqrt{2 \log n}. \quad (4.89)$$

Для полноты изложения, приведем доказательство. При $t > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \exp(t \mathbb{E} \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}) &\leq \mathbb{E} \exp(t \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}) \\ &= \mathbb{E} \max\{e^{t\xi_1}, \dots, e^{t\xi_n}\} \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E} e^{t\xi_k} = ne^{t^2/2}. \end{aligned}$$

Подставляя $t = \sqrt{2 \log n}$, получаем (4.89).

С другой стороны, из теории экстремальных значений хорошо известно (см. [21, Теорема 1.5.3 на стр. 25] и [176]), что

$$\mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_n\} = \sqrt{2 \log n} - O\left(\frac{\log \log n}{\sqrt{2 \log n}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.90)$$

Воспользовавшись (4.81) и (4.89), получаем

$$V_1(\text{conv}(x_1, \dots, x_n)) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \leq \sqrt{4\pi \log n}.$$

Объединяя это с (4.88) и (4.90), приходим к

$$\begin{aligned} V_1(\operatorname{conv}(x_1, \dots, x_n)) &\leq V_1(T_{n-1}) \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}} \left(1 - O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)\right)^{-1} \\ &= V_1(T_{n-1}) \cdot \left(1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)\right), \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. ■

4.4.2. Правильный симплекс и правильный кроссполитоп

В этом разделе мы сравним среднюю ширину правильного симплекса T_{2n-1} со средней шириной правильного n -мерного кроссполитопа, определяемого как

$$C_n := \operatorname{conv}(\pm e_1, \dots, \pm e_n).$$

Заметим, что и симплекс T_{2n-1} , и кроссполитоп C_n (который является вырожденным симплексом) имеют $2n$ вершин и могут быть вписаны в \mathbb{S}^{2n-2} . Мы покажем, что гипотеза (4.80) выполняется в этом частном случае, т.е. $V_1(C_n) \leq V_1(T_{2n-1})$. Более того, мы получим нижнюю оценку, которая показывает, что средняя ширина T_{2n-1} удивительным образом близка к средней ширине C_n .

Средняя ширина и экстремальные значения

Из формулы Судакова (4.81), также см. (4.88), следует, что

$$V_1(T_{n-1}) = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_n\} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} V_1(S_{n-1}), \quad (4.91)$$

$$V_1(C_n) = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \max\{\pm\eta_1, \dots, \pm\eta_n\} = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \max\{|\eta_1|, \dots, |\eta_n|\}, \quad (4.92)$$

где $S_{n-1} := \operatorname{conv}(e_1, \dots, e_n)$ (см. (4.87)). Из теории экстремальных значений известно (см. [21, Теорема 1.5.3 на стр. 25]), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\max\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \leq u_n + \frac{x}{\sqrt{2 \log n}} \right] = e^{-e^{-x}}, \quad (4.93)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\max\{|\eta_1|, \dots, |\eta_n|\} \leq u_{2n} + \frac{x}{\sqrt{2 \log n}} \right] = e^{-e^{-x}}, \quad (4.94)$$

где u_n – произвольная последовательность, удовлетворяющая $\sqrt{2\pi}u_n e^{u_n^2/2} \sim n$, например,²

$$u_n := \sqrt{2 \log n} - \frac{\frac{1}{2} \log \log n + \log(2\sqrt{\pi})}{\sqrt{2 \log n}}. \quad (4.95)$$

Отметим, что (4.94) (вместе с (4.93)) выражает тот факт, что минимум и максимум η_1, \dots, η_n становятся асимптотически независимыми (см. [21, Теорема 1.8.3 на стр. 41]). Беря математическое ожидание (что оправдано по [176]) и пользуясь тем, что ожидание от распределения Гумбеля в правых частях (4.93) и (4.94) есть постоянная Эйлера γ , получаем

$$V_1(T_{n-1}) = \sqrt{2\pi} \left(u_n + \frac{\gamma + o(1)}{\sqrt{2 \log n}} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.96)$$

$$V_1(C_n) = \sqrt{2\pi} \left(u_{2n} + \frac{\gamma + o(1)}{\sqrt{2 \log n}} \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.97)$$

Эти формулы известны (см. [41], [107, стр. 5], [106, стр. 8]).

Сравнение $V_1(T_{2n-1})$ и $V_1(C_n)$

Покажем, что разница между $V_1(T_{2n-1})$ и $V_1(C_n)$ значительно меньше, чем оценка $o(1/\sqrt{2 \log n})$, вытекаемая из (4.96) и (4.97). Сначала сформулируем соответствующий вероятностный результат.

Теорема 45. *Если η_1, \dots, η_{2n} являются независимыми стандартными гауссовскими величинами, то*

$$\mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_{2n}\} \leq \mathbb{E} \max\{|\eta_1|, \dots, |\eta_n|\} \leq \sqrt{\frac{2n}{2n-1}} \mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_{2n}\}.$$

Левая часть неравенства немедленно вытекает из леммы Слепяна (см. [21, Следствие 4.2.3 на стр. 105]), так как у случайного вектора $(\eta_1, \dots, \eta_{2n})$ компоненты некоррелируемы, тогда как недиагональные корреляции у вектора $(\eta_1, -\eta_1, \dots, \eta_n, -\eta_n)$ неположительны. Доказательство второй оценки будет дано в разделе 4.4.4. Из Теоремы 45 вместе с (4.91) и (4.92) вытекает следующий результат.

² $a_n \sim b_n$ означает $a_n/b_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Следствие 24. Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\sqrt{\frac{2n-1}{2n}} V_1(T_{2n-1}) \leq V_1(C_n) \leq V_1(T_{2n-1}).$$

Следующая теорема, доказательство которой будет изложено в разделе 4.4.5, дает асимптотически более точную оценку.

Теорема 46. Рассмотрим независимые стандартные гауссовские величины η_1, η_2, \dots . При $n \rightarrow \infty$ выполнено

$$\mathbb{E} \max\{|\eta_1|, \dots, |\eta_n|\} = \left(1 + \frac{1 + o(1)}{8n \log n}\right) \mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_{2n}\}.$$

Объединяя Теорему 46 с (4.91) и (4.92), получаем следующий результат.

Следствие 25. При $n \rightarrow \infty$,

$$V_1(C_n) = V_1(T_{2n-1}) \left(1 - \frac{1 + o(1)}{4n}\right), \quad V_1(C_n) = V_1(S_{2n-1}) \left(1 + \frac{1 + o(1)}{8n \log n}\right).$$

Возможно нахождение дальнейших членов в асимптотических разложениях (4.96) и (4.97), (см., например, [21, Равенство (2.4.8) на стр. 39]), но, по-видимому, ни одно из таких разложений не даст столь маленькой разницы между ожиданиями, которая получена в Теоремах 45 и 46.

4.4.3. Моменты и предельное распределение случайной ширины

Формула Судакова для высших моментов

Пусть дано выпуклое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим W_K длину проекции K на равномерно выбранное направление:

$$W_K = \sup_{t \in K} \langle U, t \rangle - \inf_{t \in K} \langle U, t \rangle, \quad (4.98)$$

где U равномерно распределено на \mathbb{S}^{n-1} . В данном разделе мы найдем моменты случайной величины W_K .

Напомним, что $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ обозначает случайный вектор, имеющий стандартное нормальное распределение в \mathbb{R}^n . Рассмотрим изонормальный процесс, заданный как

$$\Xi(t) := \langle \eta, t \rangle, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Он характеризуется равенствами

$$\mathbb{E} [\Xi(t)] = 0, \quad \mathbb{E} [\Xi(t)\Xi(s)] = \langle t, s \rangle, \quad t, s \in \mathbb{R}^n. \quad (4.99)$$

Для компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ определим диапазон Ξ на K как

$$\text{Range } \Xi(t) := \sup_{t \in K} \Xi(t) - \inf_{t \in K} \Xi(t).$$

Следующая теорема обобщает формулу Судакова в конечномерном случае (см. (4.81)) на все моменты.

Теорема 47. *Если множество $K \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и компактно, то*

$$\mathbb{E} [W_K^k] = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})} \mathbb{E} \left[\left(\text{Range } \Xi(t) \right)^k \right]. \quad (4.100)$$

Если, кроме того, K симметрично относительно начала координат, то

$$\mathbb{E} [W_K^k] = 2^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})} \mathbb{E} \left[\left(\sup_{t \in K} \Xi(t) \right)^k \right]. \quad (4.101)$$

Как было отмечено в § 4.1, Цирельсон (см. Теорему 33, а также [35]) обобщил формулу Судакова на все внутренние объемы. После публикации Теоремы 47 в [134] мы узнали, что Паорис и Пивоваров расширили формулу Цирельсона на все моменты (см. [174, Предложение 4.1]), тем самым получив более общую версию Теоремы 47.

Доказательство. Стандартный гауссовский вектор η в \mathbb{R}^n может быть представлен как

$$\eta \stackrel{d}{=} RU,$$

где U и R^2 такие, что

1. U является случайным вектором, равномерно распределенным на единичной сфере \mathbb{S}^{n-1} ;
2. R^2 является случайной величиной, имеющей χ^2 -распределение с n степенями свободы;
3. U и R^2 независимы.

Таким образом, мы имеем следующее равенство по распределению:

$$\text{Range}_{t \in K} \Xi(t) = \sup_{t \in K} \langle \eta, t \rangle - \inf_{t \in K} \langle \eta, t \rangle \stackrel{d}{=} \sup_{t \in K} \langle RU, t \rangle - \inf_{t \in K} \langle RU, t \rangle = RW_K. \quad (4.102)$$

Беря k -й момент от обеих частей и замечая, что R и W_K независимы, получаем

$$\mathbb{E} \left[\left(\text{Range}_{t \in K} \Xi(t) \right)^k \right] = \mathbb{E} [R^k] \mathbb{E} [W_K^k].$$

Моменты $\mathbb{E} [R^k]$ распределения χ^2 известны. Подставляя их значения, получаем (4.100) (которое имеет место без предположения симметричности K). Если множество K симметрично относительно начала координат, то $\text{Range}_{t \in K} \Xi(t) = 2 \sup_{t \in K} \Xi(t)$, откуда вытекает (4.101). ■

Замечание 26. В частности, подставляя $k = 1$ в Теореме 47 и воспользовавшись (4.79), мы из (4.100) получаем формулу Судакова:

$$V_1(K) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E} \left[\text{Range}_{t \in K} \Xi(t) \right] = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in K} \Xi(t) \right]. \quad (4.103)$$

Отметим, что при выводе (4.103) мы не использовали предположение о симметричности K : в последнем равенстве нам понадобилось только то, что $\sup_{t \in K} \Xi(t)$ и $-\inf_{t \in K} \Xi(t)$ равномерно распределены.

Приложения к правильным многогранникам

Теорему 47 можно использовать для доказательства нескольких гипотез о проекциях правильных многогранников, выдвинутых Финчем (см. [106–108]).

Пример 19. Рассмотрим n -мерный куб единичного объема $Q_n := [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^n$. Легко видеть, что $\text{Range}_{t \in Q_n} \Xi(t) = \sum_{i=1}^n |\eta_i|$. Следовательно, из (4.100) вытекает

$$\mathbb{E} [W_{Q_n}^k] = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n |\eta_i| \right)^k \right]. \quad (4.104)$$

В частности, при $k = 1$ мы получаем

$$\mathbb{E} [W_{Q_n}] = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\frac{n+1}{2})} n \mathbb{E} |\eta_1| = \frac{n \Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})},$$

что эквивалентно $V_1(Q_n) = n$. Данное равенство хорошо известно. Для второго момента проекции длины получаем соотношение

$$\mathbb{E} [W_{Q_n}^2] = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[(|\eta_1| + \dots + |\eta_n|)^2 \right] = \mathbb{E} |\eta_1^2| + (n-1) \mathbb{E} |\eta_1 \eta_2| = 1 + \frac{2}{\pi} (n-1),$$

где мы воспользовались равенствами $\mathbb{E} |\eta_1^2| = 1$ и $\mathbb{E} |\eta_1 \eta_2| = (\mathbb{E} |\eta_1|)^2 = \frac{2}{\pi}$. Данная формула в качестве гипотезы была предложена Финчем (см. [107, стр. 9]), который доказал ее для $n = 2, 3$ чисто геометрическими методами (см. [108]).

Используя (4.104), можно вывести последующие моменты W_{Q_n} , например,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [W_{Q_n}^3] &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(\frac{n+3}{2})} \pi^{-\frac{3}{2}} n (2n^2 + (3\pi - 6)n + 4 - \pi), \\ \mathbb{E} [W_{Q_n}^4] &= \frac{1}{(n+2)\pi^2} (4n^3 + (12\pi - 24)n^2 + (44 - 20\pi + 3\pi^2)n + 8\pi - 24), \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенствами $\mathbb{E} |\eta_1| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\mathbb{E} |\eta_1^2| = 1$, $\mathbb{E} |\eta_1^3| = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\mathbb{E} |\eta_1^4| = 3$.

Пример 20. Для кроссполитона $C_n := \text{conv}(\pm e_1, \dots, \pm e_n)$ имеем $\sup_{t \in C_n} \Xi(t) = \max\{|\eta_1|, \dots, |\eta_n|\}$. Поэтому из Теоремы 47 вытекает

$$\mathbb{E} [W_{C_n}^k] = 2^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})} \mathbb{E} \left[\left(\max_{1 \leq i \leq n} |\eta_i| \right)^k \right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

При $k = 2$ данная формула была предложена Финчем в качестве гипотезы в [106, стр. 3] (также см. [107]).

Пример 21. Для $(n - 1)$ -мерного симплекса $S_{n-1} := \text{conv}(e_1, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^n$ Теорема 47 влечет

$$\mathbb{E}[W_{S_{n-1}}^k] = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)} \mathbb{E} \left[\left(\max_{1 \leq i \leq n} \eta_i - \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i \right)^k \right].$$

Отметим, что в этой формуле S_{n-1} проецируется на случайное направление в \mathbb{R}^n , хотя сам симплекс имеет размерность $(n - 1)$.

Более естественно рассмотреть соответствующую формулу для T_{n-1} (правильного симплекса с n вершинами, вписанного в $\mathbb{S}^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$), спроецированного на случайное направление в \mathbb{R}^{n-1} . В качестве реализации его вершин рассмотрим точки

$$v_i := \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left(e_i - \frac{e_1 + \dots + e_n}{n} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

лежащие в гиперплоскости $L := \{x_1 + \dots + x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ (которую можно отождествить с \mathbb{R}^{n-1}). Из (4.99) следует, что изонормальный процесс Ξ на L удовлетворяет соотношению

$$(\Xi(v_i))_{i=1, \dots, n} \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left(\eta_i - \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{n} \right)_{i=1, \dots, n},$$

так что для его диапазона на T_{n-1} выполнено

$$\text{Range}_{t \in T_{n-1}} \Xi(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \eta_i - \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i \right).$$

Следовательно, проекция длины T_{n-1} на равномерно выбранное случайное направление в гиперплоскости L удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{E}[W_{T_{n-1}}^k] = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1+k}{2}\right)} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{k/2} \mathbb{E} \left[\left(\max_{1 \leq i \leq n} \eta_i - \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i \right)^k \right].$$

При $k = 2$ данная формула была предложена Финчем в качестве гипотезы в [107, стр. 4] и проверена для маленьких значений n .

Предельное распределение случайной ширины

Какое асимптотическое распределение у длины правильного многогранника высокой размерности на случайную прямую? Следующие теоремы отвечают на данный вопрос. Доказательства будут даны в разделе 4.4.6.

Теорема 48. *Случайная ширина куба $Q_n := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ удовлетворяет следующей центральной предельной теореме:*

$$W_{Q_n} - \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi - 3}{\pi}\right).$$

После публикации Теоремы 48 в [134] мы узнали, что в [175] была установлена центральная предельная теорема для объема проекции куба на линейное подпространство любой фиксированной размерности.

Теорема 49. *Для случайной ширины симплекса $S_{n-1} := \text{conv}(e_1, \dots, e_n)$ и кроссполитона $C_n := \text{conv}(\pm e_1, \dots, \pm e_n)$ выполнено*

$$\sqrt{2n \log n} \left(W_{S_{n-1}} - \frac{2u_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G_1 + G_2, \quad (4.105)$$

$$\sqrt{2n \log n} \left(W_{C_n} - \frac{2u_{2n}}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} 2G_1, \quad (4.106)$$

где G_1, G_2 являются независимыми случайными величинами с распределением Гумбеля $\mathbb{P}[G_1 \leq x] = \mathbb{P}[G_2 \leq x] = e^{-e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 27. Легко проверить, что плотность распределения $G_1 + G_2$ равна $2e^{-x} K_0(2e^{-x/2})$, $x \in \mathbb{R}$, где

$$K_0(z) := \int_0^{\infty} e^{-z \cosh t} dt, \quad z > 0,$$

есть модифицированная функция Бесселя второго рода.

4.4.4. Доказательство Теоремы 45

Как уже было упомянуто, первая оценка в Теореме 45 есть прямое следствие леммы Слепяна. Перейдем к доказательству неравенства

$$\mathbb{E} \max\{|\eta_1|, \dots, |\eta_n|\} \leq \sqrt{\frac{2n}{2n-1}} \mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_{2n}\}.$$

При $n = 1$ неравенство доказывается прямым вычислением, так что предположим, что $n \geq 2$.

Идея доказательства взята из работы Чаттерджи (см. [84]). Для $t \in [0, 1]$ рассмотрим центрированный гауссовский вектор

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_{2n}(t))$$

со следующей ковариационной матрицей:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_i^2(t)] &= \frac{2n}{t + 2n - 1}, \quad i = 1, \dots, 2n, \\ \mathbb{E} [\xi_{2i-1}(t)\xi_{2i}(t)] &= -\frac{2nt}{t + 2n - 1}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и $\mathbb{E} [\xi_i(t)\xi_j(t)] = 0$ в остальных случаях. Имеем:

$$\xi(0) \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{2n}{2n-1}} (\eta_1, \dots, \eta_{2n}), \quad \xi(1) \stackrel{d}{=} (\eta_1, -\eta_1, \eta_2, -\eta_2, \dots, \eta_n, -\eta_n).$$

Поэтому достаточно показать, что функция

$$\varphi(t) := \mathbb{E} \max\{\xi_1(t), \dots, \xi_{2n}(t)\}$$

не возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим функцию

$$F_\beta(x_1, \dots, x_{2n}) := \frac{1}{\beta} \log \left(\sum_{i=1}^{2n} e^{\beta x_i} \right).$$

Очевидно, что

$$\max\{x_1, \dots, x_{2n}\} \leq F_\beta(x_1, \dots, x_{2n}) \leq \frac{\log 2n}{\beta} + \max\{x_1, \dots, x_{2n}\}.$$

Поэтому от нас требуется показать, что для любого $\beta > 0$ функция

$$\varphi_\beta(t) := \mathbb{E} F_\beta(\xi(t))$$

не возрастает на $[0, 1]$.

В дальнейшем \mathbf{x} будет обозначать (x_1, \dots, x_{2n}) . Положим $\sigma_{ij}(t) := \mathbb{E} [\xi_i(t)\xi_j(t)]$ и обозначим $f(t, \mathbf{x})$ плотность распределения $\xi(t)$. Хорошо известно, что плотность многомерного нормального распределения обладает следующим свойством:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \neq j.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} F_\beta(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} F_\beta(\mathbf{x}) \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2n} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}(\mathbf{x}) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \, d\mathbf{x}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial t} &= -\frac{2n}{(t+2n-1)^2}, \quad i = 1, \dots, 2n, \\ \frac{\partial \sigma_{2i-1, 2i}}{\partial t} &= -\frac{2n(2n-1)}{(t+2n-1)^2}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и $\partial \sigma_{ij} / \partial t = 0$ в оставшихся случаях. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} \\ &= -\frac{n}{(t+2n-1)^2} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F_\beta(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_{2i-1}^2}(\mathbf{x}) + 2(2n-1) \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2i-1} \partial x_{2i}}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2i}^2}(\mathbf{x}) \right] \, d\mathbf{x} \\ &= -\frac{n}{(t+2n-1)^2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_{2i-1}^2}(\mathbf{x}) + 2(2n-1) \frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_{2i-1} \partial x_{2i}}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_{2i}^2}(\mathbf{x}) \right] \, d\mathbf{x} \\ &= -\frac{n}{(t+2n-1)^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_{2i-1}^2}(\mathbf{x}) + 2(2n-1) \frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_{2i-1} \partial x_{2i}}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_{2i}^2}(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) = \beta(p_i(\mathbf{x}) - p_i^2(\mathbf{x})), \quad \frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = -\beta p_i(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}), \quad i \neq j,$$

где

$$p_i(\mathbf{x}) := \frac{\partial F_\beta}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{e^{\beta x_i}}{\sum_{k=1}^{2n} e^{\beta x_k}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & -\frac{(t+2n-1)^2}{n\beta} \cdot \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} = \\ & = \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{E} [p_i(\xi(t))] - \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{E} [p_i^2(\xi(t))] - 2(2n-1) \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [p_{2i-1}(\xi(t))p_{2i}(\xi(t))] \\ & = 1 - \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{E} [p_i^2(\xi(t))] - 2(2n-1) \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [p_{2i-1}(\xi(t))p_{2i}(\xi(t))]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Как мы уже упомянули, можно считать, что $n \geq 2$. Для $i = 1, \dots, n$ имеем

$$\mathbb{E} [p_{2i-1}(\xi(t))p_j(\xi(t))] = \begin{cases} \mathbb{E} [p_1(\xi(t))p_2(\xi(t))], & j = 2i; \\ \mathbb{E} [p_1(\xi(t))p_3(\xi(t))], & j \neq 2i-1, 2i. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & -\frac{(t+2n-1)^2}{n\beta} \cdot \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} = \\ & 1 - \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{2n} p_i(\xi(t)) \right]^2 - 2n(2n-2) \mathbb{E} [p_1(\xi(t))p_2(\xi(t))] + 2n(2n-2) \mathbb{E} [p_1(\xi(t))p_3(\xi(t))] \\ & = -2n(2n-2) \mathbb{E} [p_1(\xi(t))p_2(\xi(t))] + 2n(2n-2) \mathbb{E} [p_1(\xi(t))p_3(\xi(t))]. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы доказать, что $\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} \leq 0$, тем самым завершив доказательство, достаточно проверить, что

$$\mathbb{E} [p_1(\xi(t))p_2(\xi(t))] \leq \mathbb{E} [p_1(\xi(t))p_3(\xi(t))],$$

что эквивалентно

$$\mathbb{E} \left[\frac{e^{\beta \xi_1(t)}(e^{\beta \xi_2(t)} - e^{\beta \xi_3(t)})}{(\sum_{i=1}^{2n} e^{\beta \xi_i(t)})^2} \right] \leq 0.$$

Так как векторы $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), \xi_4(t))$ и $(\xi_4(t), \xi_3(t), \xi_2(t), \xi_1(t))$ равномерно распределены и независимы от $(\xi_5(t), \dots, \xi_{2n}(t))$, последнее неравенство эквивалентно

$$\mathbb{E} \left[\frac{e^{\beta \xi_4(t)}(e^{\beta \xi_3(t)} - e^{\beta \xi_2(t)})}{(\sum_{i=1}^{2n} e^{\beta \xi_i(t)})^2} \right] \leq 0.$$

Так как левые части последних двух неравенств равны, суммируя их, получаем, что достаточно доказать, что

$$\mathbb{E} \left[\frac{(e^{\beta\xi_1(t)} - e^{\beta\xi_4(t)})(e^{\beta\xi_2(t)} - e^{\beta\xi_3(t)})}{(\sum_{i=1}^{2n} e^{\beta\xi_i(t)})^2} \right] \leq 0. \quad (4.108)$$

По построению вектора $\xi(t)$, имеем

$$\frac{\mathbb{E} [\xi_1(t)\xi_2(t)]}{\sqrt{\mathbb{E} [\xi_1^2(t)]\mathbb{E} [\xi_2^2(t)]}} = -t$$

и

$$\sigma^2 := \mathbb{E} [\xi_i^2(t)] = \frac{2n}{t + 2n - 1}.$$

Обозначим $h(x_1, x_2, x_3, x_4)$ плотность распределения $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), \xi_4(t))$:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) := \frac{1}{4\pi^2\sigma^4(1-t^2)} \times \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-t^2)}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2t(x_1x_2 + x_3x_4)) \right]. \quad (4.109)$$

Рассмотрим следующие множества $A, B \subset \mathbb{R}^4$:

$$A := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) > 0\},$$

$$B := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) < 0\}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\frac{(e^{\beta\xi_1(t)} - e^{\beta\xi_4(t)})(e^{\beta\xi_2(t)} - e^{\beta\xi_3(t)})}{(\sum_{i=1}^{2n} e^{\beta\xi_i(t)})^2} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_A \frac{(e^{\beta x_1} - e^{\beta x_4})(e^{\beta x_2} - e^{\beta x_3})}{(e^{\beta x_1} + e^{\beta x_2} + e^{\beta x_3} + e^{\beta x_4} + \sum_{i=5}^{2n} e^{\beta\xi_i(t)})^2} h(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\int_B \frac{(e^{\beta x_1} - e^{\beta x_4})(e^{\beta x_2} - e^{\beta x_3})}{(e^{\beta x_1} + e^{\beta x_2} + e^{\beta x_3} + e^{\beta x_4} + \sum_{i=5}^{2n} e^{\beta\xi_i(t)})^2} h(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \right]. \end{aligned}$$

Меняя во втором слагаемом x_2 и x_3 местами, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_B \frac{(e^{\beta x_1} - e^{\beta x_4})(e^{\beta x_2} - e^{\beta x_3})}{(e^{\beta x_1} + e^{\beta x_2} + e^{\beta x_3} + e^{\beta x_4} + \sum_{i=5}^{2n} e^{\beta \xi_i(t)})^2} h(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \right] \\ &= -\mathbb{E} \left[\int_A \frac{(e^{\beta x_1} - e^{\beta x_4})(e^{\beta x_2} - e^{\beta x_3})}{(e^{\beta x_1} + e^{\beta x_2} + e^{\beta x_3} + e^{\beta x_4} + \sum_{i=5}^{2n} e^{\beta \xi_i(t)})^2} h(x_1, x_3, x_2, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \right], \end{aligned}$$

что влечет

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\frac{(e^{\beta \xi_1(t)} - e^{\beta \xi_4(t)})(e^{\beta \xi_2(t)} - e^{\beta \xi_3(t)})}{(\sum_{i=1}^{2n} e^{\beta \xi_i(t)})^2} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_A \frac{(e^{\beta x_1} - e^{\beta x_4})(e^{\beta x_2} - e^{\beta x_3})(h(x_1, x_2, x_3, x_4) - h(x_1, x_3, x_2, x_4))}{(e^{\beta x_1} + e^{\beta x_2} + e^{\beta x_3} + e^{\beta x_4} + \sum_{i=5}^{2n} e^{\beta \xi_i(t)})^2} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \right]. \end{aligned}$$

Так как экспонента является неубывающей функцией и $\beta > 0$, получаем, что при $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$ выполнено

$$(e^{\beta x_1} - e^{\beta x_4})(e^{\beta x_2} - e^{\beta x_3}) \geq 0.$$

Таким образом, чтобы доказать (4.108), достаточно проверить, что при $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$ выполняется

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) - h(x_1, x_3, x_2, x_4) \leq 0.$$

В самом деле, из (4.109) следует, что при $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$ выполнено

$$\begin{aligned} \frac{h(x_1, x_3, x_2, x_4)}{h(x_1, x_2, x_3, x_4)} &= \exp \left[-\frac{t}{\sigma^2(1-t^2)}(x_1 x_3 + x_2 x_4 - x_1 x_2 - x_3 x_4) \right] \\ &= \exp \left[\frac{t}{\sigma^2(1-t^2)}(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) \right] \geq 1, \end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

4.4.5. Доказательство Теоремы 46

Напомним, что $A_n := \mathbb{E} \max_{1 \leq i \leq n} |\eta_i|$ и $B_n := \mathbb{E} \max_{1 \leq i \leq 2n} \eta_i$ асимптотически эквивалентны $\sqrt{2 \log n}$. Поэтому, чтобы доказать теорему, требуется прове-

ритель, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4n\sqrt{2 \log n} \left(\mathbb{E} \max_{1 \leq i \leq n} |\eta_i| - \mathbb{E} \max_{1 \leq i \leq 2n} \eta_i \right) = 1. \quad (4.110)$$

Введем обозначение для хвоста нормального распределения:

$$\bar{\Phi}(t) := \int_t^{\infty} e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}}.$$

Хорошо известно (см. [85, стр. 137]), что при $t > 0$ выполнено

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) e^{-t^2/2} \leq \bar{\Phi}(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} t} e^{-t^2/2}. \quad (4.111)$$

Для распределений функций максимумов, которые нас интересуют, получаем

$$F_n(t) := \mathbb{P} \left[\max_{1 \leq i \leq n} |\eta_i| \leq t \right] = \left(\int_{-t}^t e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \right)^n = (1 - 2\bar{\Phi}(t))^n, \quad t \geq 0, \quad (4.112)$$

$$G_n(t) := \mathbb{P} \left[\max_{1 \leq i \leq 2n} \eta_i \leq t \right] = \left(\int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \right)^{2n} = (1 - \bar{\Phi}(t))^{2n}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.113)$$

Следовательно,

$$A_n = \mathbb{E} \max_{1 \leq i \leq n} |\eta_i| = \int_0^{\infty} (1 - F_n(t)) dt,$$

$$B_n = \mathbb{E} \max_{1 \leq i \leq 2n} \eta_i = \int_0^{\infty} (1 - G_n(t)) dt - \int_0^{\infty} (\bar{\Phi}(t))^{2n} dt.$$

Чтобы убедиться в верности второго равенства, заметим, что для $M := \max_{1 \leq i \leq 2n} \eta_i$ выполняется

$$\mathbb{P}[M_+ > t] = 1 - G_n(t), \quad t > 0,$$

$$\mathbb{P}[M_- > t] = \mathbb{P}[M < -t] = (1 - \bar{\Phi}(-t))^{2n} = (\bar{\Phi}(t))^{2n}, \quad t > 0.$$

По существу, второй интеграл в формуле для B_n можно не принимать в расчет. Действительно, из (4.111) и равенства $\bar{\Phi}(0) = 1/2$ следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (\bar{\Phi}(t))^{2n} dt &\leq (\bar{\Phi}(0))^{2n} + \int_1^{\infty} (\bar{\Phi}(t))^{2n} dt \leq 2^{-2n} + \int_1^{\infty} (2\pi)^{-n} t^{-2n} e^{-t^2 n} dt \\ &\leq 2^{-2n} + (2\pi e)^{-n} \leq 2^{-n}. \end{aligned}$$

Исходя из вышесказанного, получаем, что для доказательства (4.110) достаточно проверить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4n \sqrt{2 \log n} \int_0^{\infty} (G_n(t) - F_n(t)) dt = 1.$$

После замены переменных $t = t_n + \frac{a}{t_n}$, $a \in \mathbb{R}$, где $t_n \sim \sqrt{2 \log n}$ является решением уравнения

$$\bar{\Phi}(t_n) = \frac{1}{2n}, \quad (4.114)$$

наша задача сводится к доказательству соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-t_n^2}^{\infty} 4n \left(G_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) - F_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) \right) da = 1. \quad (4.115)$$

Сначала докажем поточечную сходимость функций под знаком интеграла.

Если $a \in \mathbb{R}$ зафиксировано и $n \rightarrow \infty$, тогда из (4.111) и (4.114) получаем

$$r_n := \bar{\Phi} \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} t_n} e^{-\frac{1}{2} \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} t_n} e^{-\frac{1}{2} t_n^2} e^{-a} \sim \frac{e^{-a}}{2n}. \quad (4.116)$$

Из формул для F_n и G_n (см. (4.112), (4.113)) получаем

$$\begin{aligned} F_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) &= (1 - 2r_n)^n = e^{n \log(1 - 2r_n)}, \\ G_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) &= (1 - r_n)^{2n} = e^{2n \log(1 - r_n)}. \end{aligned}$$

Используя (4.116) и формулы Тейлора для логарифма и экспоненты, получаем

$$\begin{aligned} F_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) &= \exp \left\{ -n \left(2r_n + 2r_n^2 + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right\} = e^{-2nr_n} \left(1 - 2nr_n^2 + o \left(\frac{1}{n} \right) \right), \\ G_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) &= \exp \left\{ -2n \left(r_n + \frac{r_n^2}{2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right\} = e^{-2nr_n} \left(1 - nr_n^2 + o \left(\frac{1}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

Вычитая одно из другого и применяя (4.116) дважды, приходим к

$$4n \left(G_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) - F_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) \right) = 4ne^{-2nr_n} \left(nr_n^2 + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-e^{-a}} e^{-2a}.$$

Если предположить, что в левой части (4.115) можно поменять интегрирование и предел местам, то левая часть (4.115) будет равна

$$\text{Левая часть (4.115)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^{-a}} e^{-2a} da = \int_0^{\infty} e^{-y} y dy = 1,$$

где мы сделали замену переменной $y = e^{-a}$.

Таким образом, для завершения доказательства требуется показать, что возможно применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Для этого достаточно проверить, что для любой интегрируемой функции $g(a)$ выполняется

$$0 \leq n \left(G_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) - F_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) \right) \leq g(a), \quad a > -\frac{1}{4}t_n^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.117)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-t_n^2}^{-t_n^2/4} \left(G_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) - F_n \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) \right) da = 0. \quad (4.118)$$

Неотрицательность $G_n - F_n$ следует из неравенства $(1 - z)^2 \geq 1 - 2z$ (см. (4.112), (4.113)). Докажем верхнюю оценку в (4.117). Из неравенства

$$y^n - x^n \leq n(y - x)y^{n-1}$$

при $0 \leq x \leq y$ следует, что

$$G_n(t) - F_n(t) = (1 - 2\bar{\Phi}(t) + \bar{\Phi}^2(t))^n - (1 - 2\bar{\Phi}(t))^n \leq n\bar{\Phi}^2(t)(1 - \bar{\Phi}(t))^{2n-2}. \quad (4.119)$$

В дальнейшем, $C, C_1, \dots > 0$ будут обозначать абсолютные константы. Пусть сначала $a > -\frac{1}{4}t_n^2$, т.е. $t_n + \frac{a}{t_n} > \frac{3}{4}t_n$. Из (4.111) и (4.114) получаем

$$\bar{\Phi} \left(t_n + \frac{a}{t_n} \right) \leq \frac{C_1}{t_n + \frac{a}{t_n}} e^{-\frac{1}{2}(t_n + \frac{a}{t_n})^2} \leq \frac{4C_1}{3t_n} e^{-\frac{1}{2}t_n^2} e^{-a} \leq \frac{C_2}{n} e^{-a}. \quad (4.120)$$

С другой стороны, если $a \in [-\frac{1}{4}t_n^2, 0]$, то снова из (4.111) и (4.114) получаем

$$\bar{\Phi}\left(t_n + \frac{a}{t_n}\right) \geq \frac{C'_1}{t_n + \frac{a}{t_n}} e^{-\frac{1}{2}(t_n + \frac{a}{t_n})^2} \geq \frac{C'_1}{t_n} e^{-\frac{1}{2}t_n^2} e^{-a} e^{-\frac{a^2}{2t_n^2}} \geq \frac{C'_2}{n} e^{-\frac{7}{8}a}, \quad (4.121)$$

где в последней оценке мы воспользовались неравенством $-\frac{a^2}{2t_n^2} \geq \frac{1}{8}a$.

Заметим, что так как $-a \leq \frac{1}{4}t_n^2 \sim \frac{1}{2} \log n$, то правая часть (4.120) ограничена сверху $Cn^{-1/4}$. Применяя неравенство $1 - x \leq e^{-\frac{1}{2}x}$ (которое верно при достаточно маленьких $x > 0$) вместе с (4.121), получаем, что при $a \in [-\frac{1}{4}t_n^2, 0]$ выполнено

$$\left(1 - \bar{\Phi}\left(t_n + \frac{a}{t_n}\right)\right)^{2n-2} \leq e^{-(n-1)\frac{C'_2}{n}e^{-\frac{7}{8}a}} \leq e^{-C'e^{-\frac{7}{8}a}}.$$

Объединяя это с (4.119), (4.120) для $a > -\frac{1}{2}t_n^2$, имеем

$$\begin{aligned} n(G_n - F_n)\left(t_n + \frac{a}{t_n}\right) &\leq n^2 \bar{\Phi}^2\left(t_n + \frac{a}{t_n}\right) \left(1 - \bar{\Phi}\left(t_n + \frac{a}{t_n}\right)\right)^{2n-2} \\ &\leq C'' e^{-2a} e^{-C'e^{-\frac{7}{8}a}}, \end{aligned}$$

где в случае $a > 0$ мы использовали тривиальную оценку $1 - \bar{\Phi}(t) \leq 1$. Функция в правой части интегрируема по a , что завершает доказательство (4.117).

Перейдем к доказательству (4.118). Опять используя (4.119), тривиальную оценку $\bar{\Phi}(t) \leq 1$ и возрастаемость функции $1 - \bar{\Phi}(t)$, получаем

$$I_n := n \int_{-t_n^2}^{-t_n^2/4} (G_n - F_n)\left(t_n + \frac{a}{t_n}\right) da \leq n^2 t_n^2 \left(1 - \bar{\Phi}\left(\frac{3}{4}t_n^2\right)\right)^{2n-2}.$$

Так как $t_n^2 \sim 2 \log n$, из (4.121) вытекает, что при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\bar{\Phi}\left(\frac{3}{4}t_n^2\right) \geq Cn^{-\varepsilon}, \text{ в то время как } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Phi}\left(\frac{3}{4}t_n^2\right) = 0.$$

Опять применяя неравенство $1 - x \leq e^{-\frac{1}{2}x}$ (верное для маленьких $x > 0$), получаем

$$I_n \leq Cn^2 (\log n) e^{-Cn^{-\varepsilon}(n-1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

что доказывает (4.118). □

4.4.6. Доказательства Теоремы 48 и Теоремы 49

Оба доказательства используют тот факт, что равномерно распределенный на сфере \mathbb{S}^{n-1} вектор U может быть представлен в виде

$$U \stackrel{d}{=} \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}}, \dots, \frac{\eta_n}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}} \right). \quad (4.122)$$

Доказательство. [Доказательство Теоремы 48] Из определения W_{Q_n} (см. (4.98)) и центральной симметричности куба следует, что

$$W_{Q_n} = 2 \sup_{t \in Q_n} \langle t, U \rangle \stackrel{d}{=} \frac{|\eta_1| + \dots + |\eta_n|}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}}. \quad (4.123)$$

Рассмотрим случайный вектор (X_n, Y_n) с

$$X_n := \frac{|\eta_1| + \dots + |\eta_n| - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \quad Y_n := \frac{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2 - n}{v\sqrt{n}}, \quad (4.124)$$

где

$$\mu := \mathbb{E} |\eta_1| = \sqrt{2/\pi}, \quad (4.125)$$

$$\sigma^2 := \text{Var} |\eta_1| = \mathbb{E} [\eta_1^2] - (\mathbb{E} |\eta_1|)^2 = (\pi - 2)/\pi, \quad (4.126)$$

$$v^2 := \text{Var}(\eta_1^2) = \mathbb{E} [\eta_1^4] - (\mathbb{E} [\eta_1^2])^2 = 2. \quad (4.127)$$

Заметим, что $\mathbb{E} X_n = \mathbb{E} Y_n = 0$ и $\text{Var} X_n = \text{Var} Y_n = 1$, тогда как

$$r := \text{Cov}(X_n, Y_n) = \frac{n \text{Cov}(|\eta_1|, \eta_1^2)}{\sigma v n} = \frac{1}{\sqrt{\pi - 2}}, \quad (4.128)$$

где мы использовали соотношение $\mathbb{E} |\eta_1^3| = 2\sqrt{2/\pi}$. По двумерной центральной предельной теореме,

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (X, Y), \quad (4.129)$$

где (X, Y) является двумерным гауссовским вектором со стандартными координатами и ковариацией r . Из (4.124) получаем

$$W_{Q_n} \stackrel{d}{=} \frac{|\eta_1| + \dots + |\eta_n|}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}} = \frac{\mu n + \sigma\sqrt{n}X_n}{\sqrt{n + v\sqrt{n}Y_n}} = \frac{\mu n \left(1 + \frac{\sigma X_n}{\mu\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{v Y_n}{\sqrt{n}}}}.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, раскладывая в ряд Тейлора в 0 и замечая, что $X_n = O_P(1)$, $Y_n = O_P(1)$, получаем

$$\frac{|\eta_1| + \dots + |\eta_n|}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}} = \mu\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sigma X_n}{\mu} - \frac{v Y_n}{2} \right) + O_P\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{|\eta_1| + \dots + |\eta_n|}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}} - \mu\sqrt{n} = \sigma X_n - \frac{1}{2}\mu v Y_n + O_P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что из (4.129) вытекает, что последовательность $\sigma X_n - \frac{1}{2}\mu v Y_n$ имеет нормальное предельное распределение с нулевым средним и дисперсией

$$\text{Var} \left[\sigma X_n - \frac{1}{2}\mu v Y_n \right] = \sigma^2 + \frac{1}{4}\mu^2 v^2 - \sigma\mu v r = \frac{\pi - 3}{\pi},$$

где мы воспользовались (4.125), (4.126), (4.127), (4.128). Применяя (4.123), получаем

$$W_{Q_n} - \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \stackrel{d}{=} \frac{|\eta_1| + \dots + |\eta_n|}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}} - \mu\sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi - 3}{\pi}\right),$$

что завершает доказательство. ■

Замечание 28. Самонормированные или студентизированные суммы вида

$$R_n := \frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2}} \quad \text{или} \quad T_n := \frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{\sqrt{(\zeta_1 - \bar{\zeta}_n)^2 + \dots + (\zeta_n - \bar{\zeta}_n)^2}},$$

где ζ_1, ζ_2, \dots являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами и $\bar{\zeta}_n := \frac{1}{n}(\zeta_1 + \dots + \zeta_n)$, интенсивно изучались различными авторами (см., например, [92]), причем особый упор делался на случай $\mathbb{E}[\zeta_i] = 0$. Случай $\mathbb{E}[\zeta_i] \neq 0$ был изучен в [60] (рассмотрено T_n) и в [172] (рассмотрено $1/R_n^2$ и сходные величины). После некоторых вычислений, наша центральная предельная теорема для W_{Q_n} может быть выведена из [172, Теорема 3.1(v)], но поскольку там было изучено $1/R_n^2$, а не R_n , было проще привести прямое доказательство.

Доказательство. [Доказательство Теоремы 49] Докажем (4.105). Используя представление (4.122), получаем

$$W_{S_{n-1}} \stackrel{d}{=} \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \eta_i - \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}}. \quad (4.130)$$

Из теории экстремальных величин известно, что диапазон стандартной нормальной выборки удовлетворяет

$$Z_n := u_n \left(\max_{1 \leq i \leq n} \eta_i - \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i - 2u_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G_1 + G_2. \quad (4.131)$$

Фактически это следует (см. [21, Теорема 1.8.3 на стр. 41]) из асимптотической независимости $\max_{1 \leq i \leq n} \eta_i$ и $-\min_{1 \leq i \leq n} \eta_i$, которые оба имеют предельное распределение Гумбеля, как в (4.93). Заметим, что Y_n , определенное в (4.124), имеет нормальное предельное распределение, что вытекает из центральной предельной теоремы. Имеем:

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq n} \eta_i - \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}} = \frac{2u_n + \frac{Z_n}{u_n}}{\sqrt{n + \sqrt{2n}Y_n}} = \frac{2u_n}{\sqrt{n}} \frac{1 + \frac{Z_n}{2u_n^2}}{\sqrt{1 + \sqrt{2/n}Y_n}}.$$

Замечая, что $Z_n, Y_n = O_P(1)$, и разлагая в ряд Тейлора, получаем

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq n} \eta_i - \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}} = \frac{2u_n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{Z_n}{2u_n^2} + O_P\left(\frac{1}{u_n^4}\right) \right),$$

где мы воспользовались соотношением $u_n \sim \sqrt{2 \log n}$, из которого следует, что Y_n можно не принимать в расчет. Следовательно, (4.131) влечет

$$u_n \sqrt{n} \left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} \eta_i - \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}} - \frac{2u_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G_1 + G_2,$$

что, принимая во внимание (4.130), приводит к (4.105).

Доказательство (4.106) аналогично, но вместо (4.123) надо воспользоваться представлением

$$W_{C_n} \stackrel{d}{=} \frac{2 \max_{1 \leq i \leq n} |\eta_i|}{\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}} \quad (4.132)$$

вместе с предельным соотношением

$$Z'_n := u_n \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\eta_i| - u_{2n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G_1, \quad (4.133)$$

следующим из асимптотической независимости максимума и минимума. ■

4.5. Конические аналоги результатов Судакова и Цирельсона

Результаты данного параграфа были получены совместно с Ф. Гетце и З. Каблучко.

4.5.1. Формулировка результатов

Прежде всего, нам требуется обобщить понятие конических внутренних объемов и полухвостовых функционалов на бесконечномерный случай (напомним, что конечномерный случай описан в § 4.1).

Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H . Как уже было упомянуто, нормировка в (4.174) берется таким образом, чтобы конический внутренний объем $v_k(C)$ зависел только от C и не зависел от размерности окружающего пространства; следовательно, то же самое верно и для $h_k(C)$. Таким образом, определение $h_k(C)$ можно расширить на любой конечномерный выпуклый конус в H (т.е. выпуклый конус, содержащийся в некотором конечномерном линейном подпространстве H). В общем случае будем действовать следующим образом.

Определение 50. Для произвольного выпуклого конуса $C \subset H$ определим

$$h_k(C) := \sup_{C'} h_k(C') \in [0, +\infty],$$

где супремум берется по всем конечномерным выпуклым конусам C' , содержащимся в C . После этого определим

$$v_k(C) := h_k(C) - h_{k+2}(C), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.134)$$

Очевидно, соотношение

$$\frac{1}{2} = h_0(C) = h_1(C) \geq h_2(C) \geq \dots \geq 0$$

имеет место и в бесконечномерном случае. Следовательно, существует предел

$$h_\infty(C) := \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(C) \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Объединяя это с (4.134), получаем

$$h_k(C) = h_\infty(C) + \sum_{i=0}^{\infty} v_{k+2i}(C).$$

Пример 22. Если C совпадает с (бесконечномерным) H , то $h_0(C) = h_1(C) = \dots = h_\infty(C) = 1/2$ и $v_0(C) = v_1(C) = \dots = 0$.

Рассмотрим произвольное компактное множество T в H . Обозначим $\text{cone } T$ его выпуклую коническую оболочку в H :

$$\text{cone } T := \text{conv}\{at : t \in T, a \geq 0\}.$$

Наш первый результат связывает вероятность того, что выпуклая оболочка спектра T содержит начало координат в своей внутренности с коническими внутренними объемами $\text{cone } T$. Пусть $\dim \text{cone } T$ обозначает размерность аффинной оболочки $\text{cone } T$.

Теорема 51. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого компакта $T \subset H$, такого что $V_1(\overline{\text{conv } T}) < \infty$ и $\dim \text{cone } T > k$, выполнено*

$$h_{k+1}(\text{cone } T) = h_\infty(\text{cone } T) + \sum_{i=0}^{\infty} v_{k+2i+1}(\text{cone } T) = \frac{1}{2} \mathbb{P}[0 \in \text{Int conv spec}_k T],$$

где Int обозначает внутренность множества.

Замечание 29. Условие $\dim \text{cone } T > k$ является существенным. Если $\dim \text{cone } T \leq k$, то из (4.12) вытекает $h_{k+1}(\text{cone } T) = 0$. С другой стороны, если начало координат принадлежит относительной внутренности $\text{conv } T$ (внутренности относительно аффинной оболочки), тогда $\mathbb{P}[0 \in \text{Int conv spec}_k T] = 1$.

Следствие 26. *В случае $k = 1$ мы получаем конический аналог формулы Судакова (32): нулевой внутренний объем выражается в терминах вероятности невыхода. Если $\dim \text{cone } T > 1$, то*

$$v_0(\text{cone } T) = \mathbb{P} \left[\inf_{t \in T} \xi(t) \geq 0 \right]. \quad (4.135)$$

Доказательство. Из (4.9) вытекает

$$v_0(\text{cone } T) = \frac{1}{2} - h_2(\text{cone } T).$$

Как отмечено выше,

$$\overline{\text{conv spec}_1 T} = \left[\inf_{t \in T} \xi(t), \sup_{t \in T} \xi(t) \right] \quad \text{п.н.}$$

Поэтому из Теоремы 51 следует, что

$$v_0(\text{cone } T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathbb{P} \left[\inf_{t \in T} \xi(t) < 0 < \sup_{t \in T} \xi(t) \right] = \mathbb{P} \left[\inf_{t \in T} \xi(t) \geq 0 \right].$$

■

В следующей теореме мы получаем конический аналог формулы Цирельсона (4.6).

Теорема 52. Для любого $r \in (0, 1)$ и любого выпуклого компактного GB -множества $T \subset H$ выполнено

$$\mathbb{E} \exp \left(\frac{1 - r^{-2}}{2} \sup_{t \in T} \frac{\xi_+^2(t)}{\text{Var } \xi(t)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k v_k(T),$$

где для вещественного числа a мы обозначаем $a_+ := \max(a, 0)$.

Подчеркнем, что в данной теореме существенно, что T выпукло.

4.5.2. Примеры Теоремы 51

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n являются независимыми стандартными гауссовскими векторами в \mathbb{R}^k и $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначает стандартный ортонормальный базис в \mathbb{R}^n .

Неотрицательный ортант

Рассмотрим $H = \mathbb{R}^n$ и $T = \{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда $\text{cone } T$ является неотрицательным ортантом и

$$\text{spec}_k T \stackrel{d}{=} \{\xi_1, \dots, \xi_n\}.$$

Известно (см., например, [43]), что

$$v_k(\text{cone } T) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

С другой стороны, Вендель в [220] показал, что

$$\mathbb{P}[0 \in \text{conv}(\xi_1, \dots, \xi_n)] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-1}{i}$$

выполнено для любых независимых одинаково распределенных векторов в \mathbb{R}^k с центрально симметричной плотностью распределения.

Камеры Вейля типа B_n

Рассмотрим $H = \mathbb{R}^n$ и $T = \{e_1, e_1 + e_2, \dots, \sum_{i=1}^n e_i\}$. Тогда $\text{cone } T$ является замкнутой камерой Вейля типа B_n ,

$$\text{cone } T = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\},$$

и

$$\text{spec}_k T \stackrel{d}{=} \left\{ \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \dots, \sum_{i=1}^n \xi_i \right\}.$$

В [147] было получено

$$v_k(\text{cone } T) = \frac{B(n, k)}{2^n n!},$$

где $B(n, k)$ являются коэффициентами полинома

$$(t+1)(t+3)\dots(t+2n-1) = \sum_{k=0}^{\infty} B(n, k)t^k.$$

С другой стороны, как было показано в [135],

$$\mathbb{P} \left[0 \in \text{conv} \left(\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \dots, \sum_{i=1}^n \xi_i \right) \right] = \frac{2}{2^n n!} (B(n, k+1) + B(n, k+3) + \dots)$$

выполнено для любых независимых одинаково распределенных векторов в \mathbb{R}^k с центрально симметричной плотностью распределения.

Броуновское тело

Рассмотрим $H = L^2([0, 1])$. Пусть T является *спиралью Винера* (введена Колмогоровым в [18]), подмножеством H , определенным как

$$T := \{\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot) : t \in [0, 1]\}.$$

Тогда $\overline{\text{conv } T}$ является *броуновским телом*, множеством всех невозрастающих функций в $H = L^2([0, 1])$, ограниченных между 0 и 1. Спектр спирали Винера может быть представлен (детали см. в разделе 4.2.1 или в [137, раздел 1.5]) как k -мерное броуновское движение W_k :

$$\text{spec}_k(T) \stackrel{d}{=} \{W_k(t) : t \in [0, 1]\}. \quad (4.136)$$

Хорошо известно (см. [100]), что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[0 \in \text{Int conv}(B_k(t) : t \in [0, 1])] = 1.$$

Поэтому из Теоремы 51 вытекает, что

$$h_1(\text{cone } T) = \dots = h_\infty(\text{cone } T) = 1/2,$$

следовательно,

$$v_0(\text{cone } T) = v_1(\text{cone } T) = \dots = 0.$$

Отметим, что $\text{cone } T$ и $H = L^2([0, 1])$ имеют одинаковые конические внутренние объемы (см. Пример 22).

Замечание 30. Гао и Витале (см. [113]) вычислили обычные (евклидовы) внутренние объемы броуновского тела (детали см. в § 4.2.1).

4.5.3. Свойства h_k

Здесь мы приведем некоторые свойства h_k , которые нам понадобятся в доказательстве главных результатов данного параграфа. Результаты данного раздела являются коническими аналогами [32, Предложение 12,13].

Предложение 23. Для любого выпуклого конуса $C \subset H$ выполнено

$$h_k(C) = h_k(\overline{C}).$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим конечномерный выпуклый конус $C_\varepsilon \subset \overline{C}$, такой что

$$h_k(C_\varepsilon) \geq h_k(\overline{C}) - \varepsilon.$$

Обозначим L_ε конечномерную линейную оболочку C_ε . В конечномерном случае конические внутренние объемы непрерывны в сферической метрике Хаусдорфа (см. [193, Теорема 6.5.2]). Поэтому $h_k(C \cap L_\varepsilon) = h_k(\overline{C} \cap L_\varepsilon)$, откуда вытекает

$$h_k(C) \geq h_k(C \cap L_\varepsilon) = h_k(\overline{C} \cap L_\varepsilon) \geq h_k(C_\varepsilon) \geq h_k(\overline{C}) - \varepsilon.$$

Произвольность $\varepsilon > 0$ завершает доказательство. ■

Предложение 24. Рассмотрим неубывающую последовательность выпуклых конусов $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset H$. Имеет место соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_k(C_i) = h_k(\overline{\cup_{i=1}^{\infty} C_i}).$$

Доказательство. Из Предложения 23 вытекает, что достаточно показать, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_k(C_i) = h_k(C), \quad \text{где } C := \overline{\cup_{i=1}^{\infty} C_i}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим конечномерный выпуклый конус $C_\varepsilon \subset C$, такой что

$$h_k(C_\varepsilon) \geq h_k(C) - \varepsilon.$$

Обозначим L_ε конечномерную линейную оболочку C_ε . Из $\cup_{i=n}^{\infty} (C_i \cap L_\varepsilon) = C \cap L_\varepsilon$ вытекает, что $C_i \cap L_\varepsilon \rightarrow C \cap L_\varepsilon$ в сферической метрике Хаусдорфа, следовательно (см. [193, Теорема 6.5.2]),

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_k(C_i \cap L_\varepsilon) = h_k(C \cap L_\varepsilon).$$

Поэтому для всех достаточно больших i

$$\begin{aligned} h_k(C_i) &\geq h_k(C_i \cap L_\varepsilon) \geq h_k(C \cap L_\varepsilon) - \varepsilon \\ &\geq h_k(C_\varepsilon \cap L_\varepsilon) - \varepsilon = h_k(C_\varepsilon) - \varepsilon \geq h_k(C) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Произвольность $\varepsilon > 0$ завершает доказательство. ■

4.5.4. Доказательство Предложения 13

Напомним, что нам надо доказать, что для любого компакта $T \subset H$, такого что $V_1(\overline{\text{conv } T}) < \infty$, выполнено

$$\text{conv spec}_k T = \text{spec}_k \overline{\text{conv } T} \quad \text{п.н.}$$

Рассматривая естественную линейную модификацию ξ на $\overline{\text{conv } T}$, получаем, что с вероятностью единица для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ выполнено

$$\{\mathbf{x} \in \text{spec}_k \overline{\text{conv } T}\} \tag{4.137}$$

$$= \left\{ \exists t_1, t_2, \dots \in T, \alpha_1, \alpha_2, \dots \geq 0 : \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1, \mathbf{x} = \xi \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_i \right) \right\}. \tag{4.138}$$

Для любого N имеем

$$\begin{aligned} \xi \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_i \right) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \xi(t_i) + \xi \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i t_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \xi(t_i) + \beta_N \xi \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\beta_N} t_i \right), \end{aligned} \tag{4.139}$$

где $\beta_N := \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i = o(1)$ при $N \rightarrow \infty$. В то же время, $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\beta_N} t_i \in \overline{\text{conv } T}$, что является компактным GB-множеством, следовательно, ξ ограничен на нем п.н. Таким образом, второй член в правой части (4.139) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, и мы получаем

$$\xi \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi(t_i).$$

Следовательно, из (4.137) вытекает

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{x} \in \text{spec}_k \overline{\text{conv } T}\} \\ &= \left\{ \exists t_1, t_2 \dots \in T, \alpha_1, \alpha_2 \dots \geq 0 : \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1, \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \boldsymbol{\xi}(t_i) \right\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \text{conv spec}_k T\}, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из хорошо известного факта о том, что в конечномерном пространстве бесконечная выпуклая комбинация точек принадлежит выпуклой оболочке этих точек (см. [187]).

4.5.5. Доказательство Теоремы 51

Сначала рассмотрим конечномерный случай и предположим, что T выпукло.

Лемма 58. Пусть T является выпуклым множеством в \mathbb{R}^n с $\dim \text{cone } T > k$. Тогда

$$h_{k+1}(\text{cone } T) = \frac{1}{2} \mathbb{P}[0 \in \text{Int spec}_k T]. \quad (4.140)$$

Доказательство. В конечномерном случае k -мерный спектр может быть представлен следующим образом. Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ обозначает случайных линейный оператор, заданный на стандартном базисе e_1, \dots, e_n в \mathbb{R}^n следующим образом:

$$A(e_1) = \xi_1, \dots, A(e_n) = \xi_n,$$

где ξ_1, \dots, ξ_n являются независимыми стандартными гауссовскими векторами в \mathbb{R}^k . Тогда для любого выпуклого множества в \mathbb{R}^n модификация его k -мерного спектра может быть представлена как его образ под действием оператора A . В частности,

$$\text{spec}_k T \stackrel{d}{=} A(T), \quad \text{spec}_k(\text{cone } T) \stackrel{d}{=} A(\text{cone } T).$$

Докажем, что в правой части (4.140) множество T можно заменить его конической оболочкой:

$$\mathbb{P}[0 \in \text{Int spec}_k T] = \mathbb{P}[0 \in \text{Int spec}_k \text{cone } T]. \quad (4.141)$$

Используя изложенное выше представление спектра, достаточно показать, что

$$\{0 \in \text{Int } A(T)\} = \{0 \in \text{Int } A(\text{cone } T)\} \quad \text{п.н.} \quad (4.142)$$

Очевидно, из левой части вытекает правая. Пусть $0 \in \text{Int } A(\text{cone } T)$. Тогда для некоторых ненулевых векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1} \in \mathbb{R}^k$ выполнено

$$0 \in \text{Int conv}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}) \quad (4.143)$$

и

$$\text{conv}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}) \subset A(\text{cone } T).$$

Так как T выпукло, из последнего включения следует, что существуют $t_1, \dots, t_{k+1} \in T$ и $a_1, \dots, a_{k+1} > 0$, такие что

$$\mathbf{x}_i = A(a_i t_i) = a_i A(t_i), \quad i = 1, \dots, k+1,$$

что вместе с выпуклостью $A(T)$ влечет

$$\text{conv} \left(\frac{\mathbf{x}_1}{a_1}, \dots, \frac{\mathbf{x}_{k+1}}{a_{k+1}} \right) \subset A(T).$$

Из (4.143) очевидным образом вытекает

$$0 \in \text{Int conv} \left(\frac{\mathbf{x}_1}{a_1}, \dots, \frac{\mathbf{x}_{k+1}}{a_{k+1}} \right).$$

Объединяя два последних включения, получаем $0 \in \text{Int } A(T)$, что влечет (4.142).

Таким образом, нам осталось проверить (4.140) для любого выпуклого конуса C (в частности, $C = \text{cone } T$). Как было отмечено выше, конические внутренние объемы C не зависят от размерности окружающего пространства. То же самое имеет место и для распределения спектра $\text{spec}_k(C)$. Поэтому мы можем

предположить, что $\dim C = n$, что влечет $k \leq n - 1$, и так как C выпукло, его внутренность не пуста.

В конечномерном случае конические внутренние объемы непрерывны в сферической метрике Хаусдорфа (см. [193, Теорема 6.5.2]). Поэтому из соотношения (4.12) вытекает, что

$$h_{k+1}(C) = h_{k+1}(\text{Int } C \cup \{0\}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}[(\text{Int } C \cup \{0\}) \cap W_{n-k} \neq \{0\}],$$

где W_{n-k} обозначает равномерно распределенное случайное $(n - k)$ -мерное линейное подпространство в \mathbb{R}^n . Так как конус C выпуклый, он не содержит начала координат кроме как в случае $C = H$. Так как данный случай тривиальный, мы можем предполагать, что $0 \notin \text{Int } C$, что приводит к

$$h_{k+1}(C) = \frac{1}{2} \mathbb{P}[\text{Int } C \cap W_{n-k} \neq \emptyset].$$

Так как распределение стандартного гауссовского вектора в \mathbb{R}^n инвариантно относительно вращений, мы имеем $\ker A \stackrel{d}{=} W_{n-k}$, что приводит к

$$h_{k+1}(C) = \frac{1}{2} \mathbb{P}[\text{Int } C \cap \ker A \neq \emptyset] = \frac{1}{2} \mathbb{P}[0 \in A(\text{Int } C)].$$

Поэтому достаточно показать, что с вероятностью единица следующие события совпадают:

$$\{0 \in A(\text{Int } C)\} = \{0 \in \text{Int } A(C)\} \quad \text{п.н.} \quad (4.144)$$

Так как A п.н. имеет полный ранг, получаем $\dim \ker A = n - k$, что влечет $1 \leq \dim \ker A \leq n - 1$ п.н. Событие в левой части (4.175) совпадает с $\{\exists t \in \text{Int } C : A(t) = 0\}$, откуда следует, что существуют $t_1, \dots, t_{n+1} \in C$ с аффинной оболочкой, совпадающей с \mathbb{R}^n , и $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} > 0$ с $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$, такие что

$$0 = A \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i t_i \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i A(t_i). \quad (4.145)$$

Так как A имеет полный ранг, аффинная оболочка $A(t_1), \dots, A(t_{n+1})$ совпадает с \mathbb{R}^k , что вместе с (4.145) приводит к $\{0 \in \text{Int } A(C)\}$.

Чтобы доказать обратное включение, предположим, что $0 \in \text{Int } A(C)$. С вероятностью единица, $\dim A(\partial C) \leq k - 1$. Поэтому существуют $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1} \in A(C) \setminus A(\partial C)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} > 0$ с $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$, такие что

$$0 = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Для некоторых $t_1, \dots, t_{k+1} \in C \setminus \partial C = \text{Int } C$ выполнено $\mathbf{x}_i = A(t_i)$, $i = 1, \dots, k+1$. Следовательно,

$$0 = A\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i t_i\right),$$

откуда мы получаем $0 \in A(\text{Int } C)$. ■

Закончим доказательство Теоремы 51 для выпуклого T . Существует неубывающая последовательность конечномерных компактных выпуклых множеств T_i , приближающих T :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i \subset T \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i},$$

что влечет

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{cone } T_i \subset \text{cone } T \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{cone } T_i}.$$

Следовательно, из Леммы 24 вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_{k+1}(\text{cone } T_i) = h_{k+1}(\text{cone } T). \quad (4.146)$$

По Лемме 58,

$$h_{k+1}(\text{cone } T_i) = \frac{1}{2} \mathbb{P}[0 \in \text{Int spec}_k T_i]. \quad (4.147)$$

Чтобы аппроксимировать $\mathbb{P}[0 \in \text{Int spec}_k T]$ правой частью (4.147), нам понадобится следующая лемма из [35].

Лемма 59. Пусть T является произвольным GB -множеством в H , и пусть $T_0 \subset T$. Если T_0 плотно в T , тогда множество $\text{spec}_k T_0$ плотно в $\text{spec}_k T$ п.н.

Доказательство. См. [35, Следствие 3]. ■

Из Предложения 14 следует, что $\text{spec}_k T_i, \text{spec}_k T$ выпуклы п.н. Поэтому из Леммы 59 вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{1}\{0 \in \text{Int spec}_k T_i\} = \mathbb{1}\{0 \in \text{Int spec}_k T\} \quad \text{п.н.}$$

Поэтому из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}[0 \in \text{Int spec}_k(T_i)] = \mathbb{P}[0 \in \text{Int spec}_k T],$$

что вместе с (4.146) и (4.147) влечет

$$h_{k+1}(\text{cone } T) = \frac{1}{2} \mathbb{P}[0 \in \text{Int spec}_k T]. \quad (4.148)$$

Тем самым, мы завершили доказательство в случае, когда T выпукло. Чтобы рассмотреть общий случай, достаточно применить (4.148) к $\overline{\text{conv } T}$, после чего воспользоваться Предложениями 13 и 23.

4.5.6. Доказательство Теоремы 52

Как и выше, начнем с разбора конечномерного случая.

Лемма 60. Пусть ξ является стандартным гауссовским вектором в \mathbb{R}^n , и пусть T является выпуклым множеством в \mathbb{R}^n . Тогда

$$\mathbb{E} \exp \left(\frac{1 - r^{-2}}{2} \sup_{t \in T} \frac{\langle \xi, t \rangle_+^2}{\|t\|^2} \right) = \sum_{k=0}^n r^k \nu_k(\text{cone } T).$$

Доказательство. В [168, Замечание 4.7] было показано, что для любого $\lambda > 0$ и любого выпуклого конуса C в \mathbb{R}^n

$$\mathbb{E} \exp \left(\frac{1 - \lambda^2}{2} \|\Pi_C(\xi)\|^2 \right) = \sum_{k=0}^n \lambda^{-k} \nu_k(C), \quad (4.149)$$

где $\Pi_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$ обозначает оператор метрической проекции на конус C , определенный следующим образом:

$$\Pi_C(x) := \arg \min \{\|x - y\| : y \in \overline{C}\}.$$

Для любого фиксированного $y \in \bar{C}$ имеем

$$\arg \min \{ \|x - ay\| : a \geq 0 \} = \frac{\langle x, y \rangle_+}{\|y\|^2},$$

что вместе с теоремой Пифагора

$$\frac{\langle x, y \rangle_+^2}{\|y\|^2} + \|x - y\|^2 = \|y\|^2$$

влечет

$$P_C(x) = \max_{y \in \bar{C}} \frac{\langle x, y \rangle_+}{\|y\|} = \sup_{y \in C} \frac{\langle x, y \rangle_+}{\|y\|}.$$

Подстановка этого и $C = T$, $\lambda = 1/r$ в (4.149) завершает доказательство. ■

Рассмотрим общий случай. Рассуждая так же, как и в доказательстве Теоремы 51, рассмотрим аппроксимирующую последовательность конечномерных множеств T_i , таких что при всех $k = 0, 1 \dots$ выполнено

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v_{k+1}(\text{cone } T_i) = v_{k+1}(\text{cone } T) \quad (4.150)$$

и

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \sup_{t \in T_i} \frac{\xi_+(t)}{\|t\|} = \sup_{t \in T} \frac{\xi_+(t)}{\|t\|} \quad \text{п.н.}, \quad (4.151)$$

где последнее соотношение вытекает из Леммы 59 и выпуклости $\text{spec}_1 T_i$, $\text{spec}_1 T$. Применяя Лемму 60 к левым частям (4.150) и (4.151) и используя теорему о монотонной сходимости и теорему о мажорируемой сходимости, приходим к завершению доказательства Теоремы 52.

4.6. Выпуклая оболочка многомерного случайного блуждания

Результаты данного параграфа были получены совместно с В. Высоцким.

4.6.1. Введение

Пусть $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ обозначает случайное блуждание в \mathbb{R}^d . Данный и следующий параграфы мотивированы следующим вопросом: какова вероят-

ность того, что выпуклая оболочка первых n шагов блуждания содержит начало координат? Это является естественным обобщением на многомерный случай классической задачи нахождения вероятности того, что одномерное случайное блуждание остается положительным (или отрицательным) до времени n . В этом параграфе мы дадим частичный ответ на этот вопрос, т.е. в случае размерности 2 (произвольная размерность будет рассмотрена в следующем параграфе). Более того, разработанные здесь методы будут применены к получению результатов о геометрических характеристиках выпуклой оболочки случайного блуждания, таких как среднее число граней, объем, площадь поверхности и другие внутренние объемы.

Широко известен результат Спарре Андерсена (см. [207, Теорема 2]) о том, что вероятность того, что непрерывное симметричное случайное блуждание остается положительным, не зависит от распределения его приращений и вычисляется следующим образом:

$$\mathbb{P}[S_1 > 0, \dots, S_n > 0] = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \quad (4.152)$$

Другой известный результат о симметричных распределениях, принадлежащий Венделю (см. [220]), касается выпуклой оболочки независимых одинаково распределенных векторов ξ_1, \dots, ξ_n в \mathbb{R}^d : если

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in h] = 0 \quad \text{для любой линейной гиперплоскости } h \subset \mathbb{R}^d \quad (\text{H}_0)$$

и распределение ξ_1 центрально симметрично, т.е.

$$\xi_1 \stackrel{d}{=} -\xi_1, \quad (\text{S})$$

то

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(\xi_1, \dots, \xi_n)] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{k}. \quad (4.153)$$

Вендель накладывал условие (H_0) для того, чтобы гарантировать, что с вероятностью единица векторы ξ_1, \dots, ξ_n находятся в *общем положении*, т.е.

что любые d из них линейно независимы. В дальнейшем нам понадобится более сильное предположение

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in h] = 0 \quad \text{для любой аффинной гиперплоскости } h \subset \mathbb{R}^d, \quad (\text{H})$$

для гарантии того, что любая одномерная проекция ξ_1 имеет непрерывное распределение.

Наблюдается некоторая схожесть между результатами Спарре Андерсена и Венделя, которая вытекает из комбинаторной природы их доказательств. Это является мотивацией для доказательства двумерной версии (4.152) в этом параграфе и многомерной – в следующем.

Теорема 53. Пусть $d = 2$, и предположим, что выполняются (H) и (S).

Тогда

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(S_1, \dots, S_n)] = \sum_{k=1}^n \frac{(2n - 2k - 1)!!}{k(2n - 2k)!!}, \quad (4.154)$$

при этом

$$\mathbb{E}[\pi - \Omega_n]^+ = \frac{2\pi(2n - 1)!!}{(2n)!!}, \quad (4.155)$$

где Ω_n обозначает угол, под которым из начала координат видна выпуклая оболочка $\text{conv}(S_1, \dots, S_n)$.

Обсудим несколько следствий. Из (4.154) несложно вывести (см. раздел 4.6.6 ниже), что

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(S_1, \dots, S_n)] \sim \frac{\log n}{\sqrt{\pi n}}, \quad d = 2; \quad (4.156)$$

здесь и далее в параграфе все асимптотики рассматриваются при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что данная вероятность имеет асимптотику более высокого порядка, чем одномерный аналог (4.152), где

$$\frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} = \frac{\Gamma(n - 3/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n - 1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \quad (4.157)$$

Также имеет место соотношение

$$\mathbb{E}[\pi - \Omega_n \mid 0 \notin \text{conv}(S_1, \dots, S_n)] \sim \frac{2\pi}{\log n}, \quad d = 2.$$

Так как для симметричного случайного блуждания выполнено

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(S_1, \dots, S_n)] = \mathbb{P}[-S_n \notin \text{conv}(S_1 - S_n, \dots, 0)] \quad (4.158)$$

$$= \mathbb{P}[S_n \notin \text{conv}(0, S_1, \dots, S_{n-1})], \quad (4.159)$$

среднее число шагов, на которых блуждание обновляет свою выпуклую оболочку, удовлетворяет соотношению

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}[S_k \notin \text{conv}(0, S_1, \dots, S_{k-1})] \sim \frac{\sqrt{n} \log n}{2\sqrt{\pi}}, \quad d = 2.$$

Методы данного параграфа не позволяют обобщить (4.154) на произвольную размерность. Однако это будет сделано в следующем параграфе с помощью совершенно иной техники.

В произвольной размерности, открытый телесный угол, под которым выпуклая оболочка видна из начала координат, удовлетворяет соотношению ³

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{2} - \frac{\Omega_n}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \right]^+ = \frac{1}{2} \mathbb{P}(0 \notin \text{conv}(S_1, \dots, S_n) | U^\perp), \quad (4.160)$$

где вектор U равномерно распределен на единичной сфере \mathbb{S}^{d-1} и не зависит от блуждания S_n , а $\cdot | u^\perp$ обозначает ортогональную проекцию на линейную гиперплоскость u^\perp , ортогональную $u \in \mathbb{S}^{d-1}$. Для любого направления u , $\tilde{S}_n := S_n | u^\perp$ является $(d-1)$ -мерным случайным блужданием, удовлетворяющим условиям Теоремы 53, следовательно, (4.160) вместе с (4.154) влечет

$$\mathbb{E} [2\pi - \Omega_n]^+ = 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{(2n - 2k - 1)!!}{k(2n - 2k)!!}, \quad d = 3.$$

Формула (4.155) сразу же вытекает из (4.152) и (4.160).

³ В самом деле, рассмотрим произвольное множество $A \subset \mathbb{R}^d$. Если $0 \notin \text{Int}(\text{conv } A)$, то, по определению телесного угла,

$$\Omega(\text{conv } A) := \left| \left\{ \frac{x}{|x|}, x \in \text{conv } A \right\} \right| = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{1}(0 \in \text{conv } A | u^\perp) \sigma(du),$$

следовательно, $\frac{1}{2} - \frac{\Omega(\text{conv } A)}{|\mathbb{S}^{d-1}|} = \frac{1}{2} \mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(A | U^\perp)]$. Если $0 \in \text{Int}(\text{conv } A)$, то левая часть последнего соотношения отрицательна (минус одна вторая), а правая часть равна нулю, таким образом $(\frac{1}{2} - \frac{\Omega(\text{conv } A)}{|\mathbb{S}^{d-1}|})^+ = \frac{1}{2} \mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(A | U^\perp)]$ для любого A .

4.6.2. Вспомогательное утверждение

Обозначим

$$C_n := \text{conv}(S_0, S_1, \dots, S_n)$$

выпуклую оболочку первых n шагов блуждания, *включая начало координат* $S_0 := 0$. Чтобы не рассматривать тривиальный случай, мы всегда предполагаем, что $n \geq d$. С вероятностью единица, C_n является выпуклым многогранником вида

$$\partial C_n = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_n} f, \quad (4.161)$$

где \mathcal{F}_n обозначает множество всех $(d-1)$ -мерных граней C_n . Почти наверное, каждая грань f является $(d-1)$ -симплексом вида

$$f = \text{conv}(S_{i_1(f)}, \dots, S_{i_d(f)}) \quad (4.162)$$

для некоторых индексов $0 \leq i_1(f) < \dots < i_d(f) \leq n$. Отметим, что f получается сдвигом симплекса с вершинами $0, S_{i_2(f)} - S_{i_1(f)}, \dots, S_{i_d(f)} - S_{i_1(f)}$ на $S_{i_1(f)}$. В этом случае мы говорим, что упорядоченный набор $(i_2(f) - i_1(f), \dots, i_d(f) - i_1(f))$ является *темпоральной структурой* грани f .

Вычислим вероятность того, что \mathcal{F}_n содержит грань данной темпоральной структуры. Чтобы подчеркнуть комбинаторную природу результата, мы сделаем это в более общей постановке, рассматривая частичные суммы $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, 1 \leq k \leq n$, с *перестановочными* приращениями ξ_1, \dots, ξ_n . Напомним, что по определению это означает, что для любой перестановки σ длины n вектор $(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(n)})$ имеет то же распределение, что и (ξ_1, \dots, ξ_n) .

Мы предполагаем, что

$$\mathbb{P}[S_1, \dots, S_n \text{ в общем положении}] = 1, \quad (G)$$

чтобы гарантировать, что грани C_n с вероятностью единица являются симплексами. Другими словами, любые d векторов из S_1, \dots, S_n линейно независимы.

К примеру, это выполнено, если ξ_1, \dots, ξ_n имеют совместную плотность распределения.

Если приращения независимы, то S_n является случайным блужданием и (G) имеет место, если выполнено (H). Помимо случайного блуждания, важным примером частичных сумм с перестановочными приращениями является *случайный мост* длины $n + 1$, т.е. случайное блуждание при условии возвращения в начало координат на $n + 1$ -м шаге.

Предложение 25. *Рассмотрим произвольную размерность d и индексы $0 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$.*

1. *Если S_k являются частичными суммами перестановочных векторов и выполнено (G), то*

$$\sum_{i=0}^{n-i_d+i_1} \mathbb{P}[\text{conv}(S_i, S_{i+i_2-i_1}, \dots, S_{i+i_d-i_1}) \in \mathcal{F}_n] = \frac{2}{(i_2 - i_1) \cdot \dots \cdot (i_d - i_{d-1})}. \quad (4.163)$$

Более того, если S_k есть случайный мост длины $n + 1$, то

$$\mathbb{P}[\text{conv}(S_{i_1}, \dots, S_{i_d}) \in \mathcal{F}_n] = \frac{2}{(i_2 - i_1) \cdot \dots \cdot (i_d - i_{d-1})(n - i_d + i_1 + 1)}. \quad (4.164)$$

2. *Если S_k является случайным блужданием и выполнены (H) и (S), то*

$$\mathbb{P}[\text{conv}(S_{i_1}, \dots, S_{i_d}) \in \mathcal{F}_n] = \frac{(2i_1 - 1)!! (2n - 2i_d - 1)!!}{(2i_1)!! (2n - 2i_d)!!} \prod_{k=1}^{d-1} \frac{2}{i_{k+1} - i_k}. \quad (4.165)$$

В качестве первого приложения данного результата вычислим среднее число элементов в \mathcal{F}'_n , множестве (возможно пустом) граней C_n , у которых начало координат является вершиной. Из соотношений

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(S_1, \dots, S_n)] = \mathbb{P}[0 \in \partial C_n] \quad (4.166)$$

и (4.165) сразу же следует, что для случайного блуждания выполнено

$$\mathbb{E} |\mathcal{F}'_n| = 2 \sum_{1 \leq i_2 < \dots < i_d \leq n} \frac{(2n - 2i_d - 1)!!}{i_2(2n - 2i_d)!!} \prod_{k=2}^{d-1} \frac{1}{i_{k+1} - i_k}. \quad (4.167)$$

Это доказывает первую часть Теоремы 53, так как при $d = 2$ выполнено

$$|\mathcal{F}'_n| = \begin{cases} 2, & 0 \notin \text{conv}(S_1, \dots, S_n), \\ 0, & 0 \in \text{conv}(S_1, \dots, S_n). \end{cases}$$

В качестве следствия получаем (детали см. в разделе 4.6.6) асимптотические соотношения для случайного блуждания при условиях (S) и (H),

$$\mathbb{E}_{RW} |\mathcal{F}'_n| \sim \frac{2(\log n)^{d-1}}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.168)$$

и для случайного моста длины $n + 1$ при условии (G),

$$\mathbb{E}_{Br} |\mathcal{F}'_n| \sim \frac{2d(\log n)^{d-1}}{n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.169)$$

4.6.3. Геометрические свойства выпуклой оболочки

Суммируя (4.163) по всем возможным индексам, получаем формулу для математического ожидания числа граней выпуклой оболочки:

$$\mathbb{E} |\mathcal{F}_n| = 2 \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{d-1} \leq n \\ j_1, \dots, j_{d-1} \geq 1}} \frac{1}{j_1 \cdot \dots \cdot j_{d-1}}. \quad (4.170)$$

Сравнивая (4.170) и (4.164), приходим к

$$\mathbb{E}^{(d)} |\mathcal{F}_n| = \sum_{k \leq n} \mathbb{E}_{Br}^{(d-1)} |\mathcal{F}'_{k-1}|,$$

где верхние индексы обозначают размерность. Следовательно, из (4.169) вытекает

$$\mathbb{E} |\mathcal{F}_n| \sim 2(\log n)^{d-1}. \quad (4.171)$$

Подчеркнем, что все данные формулы верны только при условии (G), выполнение (S) не требуется.

При $d = 2$ соотношение (4.170) было доказано Бакстером (см. [58]). Сначала мы обобщили его рассуждения на произвольную размерность, но потом нашли более прямой и наглядный способ доказательства первой части Предложения 25 (см. раздел 4.6.6). Позже мы обнаружили, что обобщение рассуждений Бакстера было уже проделано Барндорффом-Нильсеном и Бакстером (см. [53]), которые расширили доказательство из [58].

Следуя [58] и [201] (в обеих статьях рассматривается только двумерный случай), мы получили следующее обобщение (4.170). Рассмотрим произвольную борелевскую функцию $g : \mathbb{R}^{d \times (d-1)} \rightarrow \mathbb{R}$. Как было отмечено выше, с вероятностью единица C_n является выпуклым многогранником с гранями вида (4.162). Следовательно, мы можем выразить любое геометрическое свойство грани f в виде

$$g(S_{i_2(f)} - S_{i_1(f)}, \dots, S_{i_d(f)} - S_{i_{d-1}(f)})$$

для некоторой функции g . Так как математическое ожидание данного выражения совпадает для всех граней с одинаковой темпоральной структурой, суммируя (4.163) и перенумеруя индексы, получаем следующий результат.

Теорема 54. Пусть S_k являются частичными суммами с перестановочными приращениями. Если выполнено (G), то для

$$G_n := \sum_{f \in \mathcal{F}_n} g(S_{i_2(f)} - S_{i_1(f)}, \dots, S_{i_d(f)} - S_{i_{d-1}(f)})$$

имеет место

$$\mathbb{E} G_n = 2 \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} \leq n} \frac{\mathbb{E} g(S_{i_1}, S_{i_2} - S_{i_1}, \dots, S_{i_{d-1}} - S_{i_{d-2}})}{i_1(i_2 - i_1) \cdot \dots \cdot (i_{d-1} - i_{d-2})}.$$

Заметим, что если S_n является случайным блужданием, удовлетворяющим (H₀), то аргументы g в определении G_n независимы. В этом случае $\mathbb{E} G_n$ можно переписать как

$$\mathbb{E} G_n = 2 \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{d-1} \leq n \\ j_1, \dots, j_{d-1} \geq 1}} \frac{\mathbb{E} g(S_{j_1}^{(1)}, S_{j_2}^{(2)}, \dots, S_{j_{d-1}}^{(d-1)})}{j_1 \cdot \dots \cdot j_{d-1}}, \quad (4.172)$$

где $S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(d-1)}$ суть независимые копии случайного блуждания S_n .

Мы доказали данный результат не зная о работе Барндорффа-Нильсена (см. [53]), в которой не было общего утверждения данного типа, однако было получено несколько результатов, обсуждаемых в следующем разделе, посвященном приложениям Теоремы 54. Наше доказательство использует как комбинаторные, так и вероятностные рассуждения и, по нашему мнению, более прозрачно, чем доказательство в [53].

4.6.4. Приложения Теоремы 54

Выведем несколько следствий из Теоремы 54. В данном разделе мы всегда предполагаем, что S_n является случайным блужданием, удовлетворяющим (H_0) , не накладывая при этом никаких других ограничений. Как и в (4.172), обозначим $S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(d)}$ независимые копии S_n .

Прежде всего, подставляя $g(x_1, \dots, x_{d-1}) \equiv 1$ в (4.172), получаем (4.170), формулу для среднего числа граней выпуклой оболочки S_n . Перейдем к менее тривиальным приложениям.

Следствие 27 (Средняя площадь поверхности).

$$\mathbb{E} \lambda_{d-1}(\partial C_n) = \frac{2}{(d-1)!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{d-1} \leq n \\ j_1, \dots, j_{d-1} \geq 1}} \frac{\mathbb{E} \sqrt{\det \left(\langle S_{j_m}^{(m)}, S_{j_\ell}^{(\ell)} \rangle \right)_{m,\ell=1}^{d-1}}}{j_1 \cdot \dots \cdot j_{d-1}}.$$

При $d = 2$ получаем формулу Спизера-Видома (см. [208]) для среднего периметра:

$$\mathbb{E} \lambda_1(\partial C_n) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{|S_j|}{j}. \quad (4.173)$$

Многомерная версия данного результата была впервые получена Барндорффом-Нильсеном и Бакстером (см. [53]).

Доказательство. Применяя (4.172) с

$$g(x_1, \dots, x_{d-1}) = \lambda_{d-1}(\text{conv}(0, x_1, \dots, x_{d-1})) = \frac{1}{(d-1)!} \sqrt{\det \left(\langle x_m, x_l \rangle \right)_{m,l=1}^{d-1}},$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \lambda_{d-1}(\partial C_n) &= 2 \sum_{\substack{j_1+\dots+j_{d-1}\leq n \\ j_1,\dots,j_{d-1}\geq 1}} \frac{\mathbb{E} \lambda_{d-1} \left(\text{conv} \left(0, S_{j_1}^{(1)}, \dots, S_{j_{d-1}}^{(d-1)} \right) \right)}{j_1 \cdot \dots \cdot j_{d-1}} \\ &= \frac{2}{(d-1)!} \sum_{\substack{j_1+\dots+j_{d-1}\leq n \\ j_1,\dots,j_{d-1}\geq 1}} \frac{\mathbb{E} \sqrt{\det \left(\left\langle S_{j_m}^{(m)}, S_{j_\ell}^{(\ell)} \right\rangle \right)_{m,\ell=1}^{d-1}}}{j_1 \cdot \dots \cdot j_{d-1}}. \end{aligned}$$

■

Следствие 28 (Средний объем).

$$\mathbb{E} \lambda_d(C_n) = \frac{1}{d!} \sum_{\substack{j_1+\dots+j_d\leq n \\ j_1,\dots,j_d\geq 1}} \frac{\mathbb{E} \left| \det \left[S_{j_1}^{(1)}, \dots, S_{j_d}^{(d)} \right] \right|}{j_1 \cdot \dots \cdot j_d}. \quad (4.174)$$

Версия данного результата была получена Барндорффом-Нильсеном и Бакстером (см. [53]).

Доказательство. Обозначим $' : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ оператор проецирования на первые d координат. Рассмотрим произвольное $(d+1)$ -мерное случайное блуждание \tilde{S}_n , такое что $\tilde{S}'_n = S_n$ и его последняя координата распределена непрерывно и не зависит от S_n . Выпуклая оболочка \tilde{C}_n блуждания \tilde{S}_n удовлетворяет $(\partial \tilde{C}_n)' = C_n$, и прообраз при действии $'$ любой точки из $\text{Int}(C_n)$ состоит ровно из двух точек. Применяя (4.172) к \tilde{S}_n с

$$g(x_1, \dots, x_d) = \lambda_d(\text{conv}(0, x'_1, \dots, x'_d)) = \frac{1}{d!} |\det[x'_1, \dots, x'_d]|$$

и используя (4.161), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \lambda_d(C_n) &= \sum_{\substack{j_1+\dots+j_d\leq n \\ j_1,\dots,j_d\geq 1}} \frac{\mathbb{E} \lambda_d \left(\text{conv} \left(0, S_{j_1}^{(1)}, \dots, S_{j_d}^{(d)} \right) \right)}{j_1 \cdot \dots \cdot j_d} \\ &= \frac{1}{d!} \sum_{\substack{j_1+\dots+j_d\leq n \\ j_1,\dots,j_d\geq 1}} \frac{\mathbb{E} \left| \det \left[S_{j_1}^{(1)}, \dots, S_{j_d}^{(d)} \right] \right|}{j_1 \cdot \dots \cdot j_d}. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Получим формулу, которая объединяет все рассмотренные выше примеры. ■

Следствие 29 (Средний внутренний объем).

$$\mathbb{E} V_k(C_n) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k \leq n \\ j_1, \dots, j_k \geq 1}} \frac{\mathbb{E} \sqrt{\det \left(\left\langle S_{j_m}^{(m)}, S_{j_\ell}^{(\ell)} \right\rangle \right)_{m, \ell=1}^k}}{j_1 \cdot \dots \cdot j_k}, \quad k = 1, \dots, d.$$

В частности, формула Спизера-Видома (см. (4.173)) естественным образом обобщается на произвольную размерность:

$$\mathbb{E} V_1(C_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbb{E} |S_j|}{j}.$$

Доказательство. Обозначим $\mathbf{Gr}(k, d)$ линейное многообразие Грассмана всех k -мерных линейных подпространств в \mathbb{R}^d . Для любого $L \in \mathbf{Gr}(k, d)$ проекция $\tilde{S}_n := S_n|L$ является k -мерным случайным блужданием, удовлетворяющим (\mathbf{H}_0) , а его выпуклая оболочка есть $\tilde{C}_n = C_n|L$. Поэтому из (4.175) вытекает

$$\mathbb{E} \lambda_k(C_n|L) = \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k \leq n \\ j_1, \dots, j_k \geq 1}} \frac{\mathbb{E} \lambda_k(\text{conv}(0, S_{j_1}^{(1)}, \dots, S_{j_k}^{(k)})|L)}{j_1 \cdot \dots \cdot j_k}.$$

Интегрируя данное соотношение по $\mathbf{Gr}(k, d)$ по мере Хаара μ_k , нормализованной в соответствии с определением внутренних объемов, и применяя теорему Фубини к обеим частям, получаем

$$\mathbb{E} V_k(C_n) = \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k \leq n \\ j_1, \dots, j_k \geq 1}} \frac{\mathbb{E} V_k(\text{conv}(0, S_{j_1}^{(1)}, \dots, S_{j_k}^{(k)}))}{j_1 \cdot \dots \cdot j_k}.$$

Линейная размерность $K := \text{conv}(0, S_{j_1}^{(1)}, \dots, S_{j_k}^{(k)})$ равна k , следовательно, $V_k(K) = \lambda_k(K)$, что доказывает требуемое утверждение. ■

4.6.5. Несколько комбинаторных рассуждений

Для произвольных $x_1, \dots, x_n \subset \mathbb{R}^d$, обозначим

$$s_0 := 0, \quad s_k := x_1 + \dots + x_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

последовательность частичных сумм. Для любой перестановки $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ обозначим

$$s_0(\sigma) := 0, s_k(\sigma) := x_{\sigma(1)} + \dots + x_{\sigma(k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Докажем простое комбинаторное утверждение, которое является многомерным обобщением двумерной Леммы 1 из [58]. Позже мы обнаружили данный результат в работе Барндорффа-Нильсена и Бакстера (см. [53]). Для удобства читателя, мы приводим доказательство здесь.

Лемма 61. Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Рассмотрим замкнутое полупространство H , такое что

$$x_0, x_0 + s_n \in \partial H \quad \text{и} \quad x_0 + s_j - s_i \notin \partial H, \quad 0 \leq i < j \leq n - 1.$$

Существует ровно одна циклическая перестановка $\sigma = (k + 1, \dots, n, 1, \dots, k)$, такая что

$$x_0, x_0 + s_1(\sigma), \dots, x_0 + s_n(\sigma) \in H.$$

Доказательство. Существует ровно одна точка $x_0 + s_k$ среди точек $\{x_0 + s_i\}_{i=0}^{n-1} \cap (\text{Int}(H))^c$, находящаяся на максимальном расстоянии (возможно нулевым) от ∂H . Тогда $\sigma := (k+1, \dots, n, 1, \dots, k)$ является требуемой перестановкой, причем она единственная, что следует из единственности k . ■

Получим теперь стохастический аналог данного утверждения. Для произвольной перестановки $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ рассмотрим частичные суммы

$$S_0(\sigma) := 0, S_k(\sigma) := \xi_{\sigma(1)} + \dots + \xi_{\sigma(k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для произвольных точек $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^d$ определим

$$H_{\pm}(x_1, \dots, x_d) := \{z \in \mathbb{R}^d : \pm \det[x_2 - x_1, \dots, x_d - x_1, z - x_1] \geq 0\}.$$

Если существует ровно одна гиперплоскость, проходящая через эти точки, тогда данное определение позволяет различать два полупространства H_+ и H_- , на которые гиперплоскость разбивает \mathbb{R}^d . Если такая гиперплоскость не единственна, положим $H_{\pm} := \mathbb{R}^d$.

Лемма 62. Рассмотрим частичные суммы $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $1 \leq k \leq n$ перестановочных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющих (G). Для любых индексов $1 \leq i_1 < \dots < i_{d-2} \leq n-1$ имеет место соотношение

$$\mathbb{P}[S_1, \dots, S_n \in H_{\pm}(0, S_{i_1}, \dots, S_{i_{d-2}}, S_n)] = \frac{1}{i_1(i_2 - i_1) \cdot \dots \cdot (n - i_{d-2})}.$$

Данное утверждение является небольшим обобщением хорошо известного факта о том, что вероятность того, что траектория произвольного непрерывно распределенного одномерного случайного блуждания S_n лежит выше прямой, соединяющей точки $(0, 0)$ и (n, S_n) , равна $1/n$ (см., например, [104, Раздел XII.9]). Этот факт следует из Леммы 62, если мы рассмотрим двумерное случайное блуждание $\tilde{S}_n := (n, S_n)$ с детерминистической первой компонентой.

Доказательство. С вероятностью единица, существует ровно одна гиперплоскость, проходящая через точки $0, S_{i_1}, \dots, S_{i_{d-2}}, S_n$. Предполагая обратное, добавим любую другую точку S_k и придем к противоречию с (G). Следовательно, с вероятностью единица,

$$H_{\pm}(S) := H_{\pm}(0, S_{i_1}, \dots, S_{i_{d-2}}, S_n)$$

являются полупространствами. Положим $i_0 := 0, i_{d-1} := n$ и обозначим \mathcal{S} множество из $(i_1 - i_0) \cdot \dots \cdot (i_{d-1} - i_{d-2})$ перестановок длины n , являющихся произведением $d-1$ -й циклической перестановки вида

$$(k_j + 1, \dots, i_j, i_{j-1} + 1, \dots, k_j), \quad (4.176)$$

где $i_{j-1} + 1 \leq k_j \leq i_j$. Заметим, что любая $\sigma \in \mathcal{S}$ не меняет H_{\pm} в том смысле, что $H_{\pm}(S) = H_{\pm}(S(\sigma))$, а последовательности частичных сумм S и $S(\sigma)$ имеют одинаковое распределение, что вытекает из перестановочности приращений.

Отметим, что $S_{i_j}, \xi_{i_j+1}, \dots, \xi_{i_{j+1}}$ и полупространство $H_{\pm}(0, S_{i_1}, \dots, S_{i_{d-2}}, S_n)$ с вероятностью единица удовлетворяют условиям Леммы 61 при всех $0 \leq j \leq d-2$. Действительно, если для некоторых $i_j \leq m < \ell < i_{j+1}$ с положительной вероятностью выполняется $S_{i_j} + S_{\ell} - S_m \in \partial H_{\pm}(S)$, тогда среди частичных сумм

$S_k(\sigma)$ с

$$\sigma = (1, \dots, i_j, m+1, \dots, \ell, i_j+1, i_j+m, \ell+1, \dots, n)$$

существует d точек $S_{i_1}(\sigma), \dots, S_{i_{d-1}}(\sigma), S_{i_j+\ell-m}(\sigma)$, лежащих в гиперплоскости ∂H_{\pm} , проходящей через 0, что противоречит (G) по перестановочности приращений.

По Лемме 61 существует единственная случайная перестановка $\sigma_{\pm} = \sigma_{\pm}(S) \in \mathcal{S}$, такая что $S_1(\sigma_{\pm}), \dots, S_n(\sigma_{\pm}) \in H_{\pm}(S)$. Следовательно, сумма в

$$\mathbb{P}[S_1, \dots, S_n \in H_{\pm}(S_{i_0}, S_{i_1}, \dots, S_{i_{d-1}})] = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathbb{P}[S_1(\sigma), \dots, S_n(\sigma) \in H_{\pm}(S)] \quad (4.177)$$

равна 1, что завершает доказательство. \blacksquare

Напомним, что случайным мостом длины n называется условное случайное блуждание при условии возвращения в начало координат на последнем шаге.

Лемма 63. *Рассмотрим случайный мост S_k длины $n+1$, порожденный случайным блужданием в \mathbb{R}^d , удовлетворяющим (H). Тогда для любых индексов $0 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} \leq n$ выполнено*

$$\mathbb{P}[S_1, \dots, S_n \in H_{\pm}(0, S_{i_1}, \dots, S_{i_{d-1}})] = \frac{1}{i_1(i_2 - i_1) \cdot \dots \cdot (n - i_{d-1} + 1)}.$$

Это является многомерным обобщением одномерного факта о том, что мост длины n от непрерывно распределенного случайного блуждания остается все время положительным с вероятностью $1/n$.

Доказательство. Мост удовлетворяет (G), так как блуждание удовлетворяет (H). Повторяя рассуждения из доказательства Леммы 62, получаем, что (4.177) выполняется для $i_0 = 0$ и \mathcal{S} , определенного как множество перестановок длины $n+1$, являющихся произведением d циклических перестановок вида (4.176), где $0 \leq j \leq d-1$ и $i_d = n+1$. \blacksquare

4.6.6. Доказательства

Доказательство Предложения 25. Напомним, что $0 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$. Из (4.161) и (4.162) вытекает

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{conv}(S_{i_1}, \dots, S_{i_d}) \in \mathcal{F}_n] &= \mathbb{P}[0, S_1, \dots, S_n \in H_+(S_{i_1}, \dots, S_{i_d})] \quad (4.178) \\ &+ \mathbb{P}[0, S_1, \dots, S_n \in H_-(S_{i_1}, \dots, S_{i_d})]. \end{aligned}$$

Положим

$$H_{\pm} := H_{\pm}(0, S_{i_2} - S_{i_1}, \dots, S_{i_d} - S_{i_{d-1}}).$$

Докажем сначала (4.164) из первой части предложения. Если S_k , $1 \leq k \leq n$, является случайным мостом длины $n+1$, мы сделаем его “полным”, полагая $S_{n+1} := 0$, чтобы включить последнее перестановочное приращение соответствующего случайного блуждания. Преобразуем траекторию полного моста путем перемещения части от 1 до i_1 в конец части от $i_1 + 1$ к $n+1$. Формально, мы переписываем вероятность $\mathbb{P}[0, S_1, \dots, S_n \in H_{\pm} + S_{i_1}]$ в терминах частичных сумм $S_n(\sigma)$ с

$$\sigma = (n - i_1 + 2, n - i_1 + 3, \dots, n + 1, 1, 2, \dots, n - i_1 + 1)$$

и применяем $S_{n+1} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[0, S_1, \dots, S_n \in H_{\pm}(S_{i_1}, \dots, S_{i_d})] \\ = \mathbb{P}[0, S_{n-i_1+2}, \dots, S_n, S_1, S_2, \dots, S_{n-i_1+1} \in H_{\pm}(0, S_{i_2-i_1}, \dots, S_{i_d-i_1})], \end{aligned}$$

в результате (4.164) следует из (4.178) и Леммы 63.

Разобьем траекторию S_n на три части, используя соотношения $H_{\pm} + S_{i_1} = H_{\pm} + S_{i_d}$, которые следуют из $S_{i_d} - S_{i_{d-1}} \in \partial H_{\pm}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[0, S_1, \dots, S_n \in H_{\pm}(S_{i_1}, \dots, S_{i_d})] \\ = \mathbb{P}[0, S_1, \dots, S_{i_1} \in H_{\pm} + S_{i_1}; S_{i_1+1}, \dots, S_{i_d} \in H_{\pm} + S_{i_1}; S_{i_d+1}, \dots, S_n \in H_{\pm} + S_{i_d}]. \end{aligned} \quad (4.179)$$

Теперь не составит труда доказать вторую часть предложения. Если S_n является случайным блужданием, тогда из (4.179) и независимости приращений следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[0, S_1, \dots, S_n \in H_{\pm}(S_{i_1}, \dots, S_{i_d})] \\ &= \mathbb{P}[-S'_{i_1}, -S'_{i_1-1}, \dots, 0 \in H_{\pm}] \mathbb{P}[S_{i_1+1} - S_{i_1}, \dots, S_{i_d} - S_{i_1} \in H_{\pm}] \\ & \times \mathbb{P}[S'_1, \dots, S'_{n-i_d} \in H_{\pm}] \\ &= \mathbb{P}[S'_1, \dots, S'_{i_1} \in H_{\mp}] \mathbb{P}[S_1, \dots, S_{i_d-i_1} \in H_{\pm}(0, S_{i_2-i_1}, \dots, S_{i_d-i_d-1})] \\ & \times \mathbb{P}[S'_1, \dots, S'_{n-i_d} \in H_{\pm}], \end{aligned}$$

где S'_n является независимой копией S_n . В результате (4.165) вытекает из (4.178), Леммы 62 и следующего простого факта.

Лемма 64. *Рассмотрим случайное блуждание S_n в \mathbb{R}^d , и пусть H является полупространством, таким что $0 \in \partial H$. Предположим, что выполняются (H) и (S). Тогда*

$$\mathbb{P}[S_1, \dots, S_n \in H] = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Доказательство. Обозначим u единичный вектор, ортогональный ∂H и лежащий в H . Распределение приращений одномерного случайного блуждания $S'_k := \langle S_k, u \rangle$ непрерывно и симметрично, поэтому требуемое следует из (4.152) и соотношения

$$\mathbb{P}[S_1, \dots, S_n \in H] = \mathbb{P}[S'_1 > 0, \dots, S'_n > 0].$$

■

Остается только доказать (4.163). Переставим три части траектории (от 1 до i_1 , от $i_1 + 1$ до i_d и от $i_d + 1$ до n), прикладывая начало первой части к концу второй и начало третьей к концу первой. Формально, перепишем правую часть (4.179) в терминах частичных сумм $S_n(\sigma)$ с

$$\sigma = (i_d - i_1 + 1, i_d - i_1 + 2, \dots, i_d, 1, 2, \dots, i_d - i_1, i_d + 1, i_d + 2, \dots, n)$$

и получим

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[0, S_1, \dots, S_n \in H_{\pm}(S_{i_1}, \dots, S_{i_d})] \\ &= \mathbb{P}[0, S_{i_d-i_1+1}, \dots, S_{i_d} \in H_{\pm}(\sigma) + S_{i_d}; S_1, \dots, S_{i_d-i_1} \in H_{\pm}(\sigma); \\ & \quad S_{i_d+1}, \dots, S_n \in H_{\pm}(\sigma) + S_{i_d}]. \end{aligned}$$

Если выполнено последнее событие, то

$$-S_{i_d} \in H_{\pm}(\sigma) = H_{\pm}(0, S_{i_2-i_1}, \dots, S_{i_d-i_1}),$$

следовательно, $H_{\pm}(\sigma) \subset H_{\pm}(\sigma) + S_{i_d}$, и с вероятностью единица S_{i_d} является наиболее удаленной точкой от $H_{\pm}(\sigma)$ (такая точка единственна по (G)), кроме случая $i_1 = 0$, когда все точки находятся на нулевом расстоянии:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[0, S_1, \dots, S_n \in H_{\pm}(S_{i_1}, \dots, S_{i_d})] \\ &= \mathbb{P}\left[S_1, \dots, S_{i_d-i_1} \in H_{\pm}(0, S_{i_2-i_1}, \dots, S_{i_d-i_1}); \right. \\ & \quad \left. \operatorname{argmax}_{0 \leq k \leq n-(i_d-i_1)} \operatorname{dist}(H_{\pm}(0, S_{i_2-i_1}, \dots, S_{i_d-i_1}), S_{i_d-i_1+k}) = i_1\right], \quad (4.180) \end{aligned}$$

где argmax является *первым* моментом, когда S_k достигает максимальной удаленности от $H_{\pm}(\dots)$; данное обозначение нам понадобилось только для рассмотрения случая $i_1 = 0$.

Для доказательства (4.163) осталось заменить i_1, \dots, i_d на $i, i+i_2, i+i_3, \dots, i+i_d$, что превратит правую часть (4.180) в

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left[S_1, \dots, S_{i_d} \in H_{\pm}(0, S_{i_2}, S_{i_3-i_2}, \dots, S_{i_d}); \right. \\ & \quad \left. \operatorname{argmax}_{0 \leq k \leq n-i_d} \operatorname{dist}(H_{\pm}(0, S_{i_2}, S_{i_3-i_2}, \dots, S_{i_d}), S_{i_d+k}) = i\right], \end{aligned}$$

после этого просуммировать по $0 \leq i \leq n - i_d$ и применить (4.178), (4.180) и Лемму 62.

Доказательство асимптотических равенств. 1. Мы утверждаем, что для любой последовательности a_n , такой что $a_n \sim (\log n)^a n^{-1/2}$, для некоторого

$a \geq 0$ выполнено

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k} \sim \frac{(\log n)^{a+1}}{\sqrt{n}}. \quad (4.181)$$

В частности, из (4.157) это влечет (4.156), если мы подставим $a = 0$.

Покажем, что главный вклад в асимптотику вносит член $k = o(n)$. Так как сумма a_n расходится, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$\sum_{k=\varepsilon n}^n \frac{a_{n-k}}{k} \leq \frac{1}{\varepsilon n} \sum_{k=\varepsilon n}^n a_{n-k} \sim \frac{1}{\varepsilon n} \sum_{k=1}^{(1-\varepsilon)n} \frac{(\log k)^a}{\sqrt{k}} \preceq \frac{2(\log n)^a}{\varepsilon \sqrt{n}}.$$

Последнее выражение имеет меньший порядок по отношению к

$$\sum_{k=1}^{\varepsilon n-1} \frac{a_{n-k}}{k} \sim \sum_{k=1}^{\varepsilon n-1} \frac{(\log(n-k))^a}{k \sqrt{(n-k)}},$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{(\log n)^{a+1}}{\sqrt{n}} &\sim \frac{(\log(1-\varepsilon)n)^a}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\varepsilon n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{\varepsilon n-1} \frac{(\log(n-k))^a}{k \sqrt{(n-k)}} \\ &\leq \frac{(\log n)^a}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}} \sum_{k=1}^{\varepsilon n-1} \frac{1}{k} \sim \frac{(\log n)^{a+1}}{\sqrt{(1-\varepsilon)n}}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство, очевидно, влечет (4.181).

2. Докажем (4.168) индукцией по d . База $d = 2$ выполнена по (4.156). Так как

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_2 < \dots < i_d \leq n} \frac{(2n - 2i_d - 1)!!}{i_2(2n - 2i_d)!!} \prod_{k=2}^{d-1} \frac{1}{i_{k+1} - i_k} \\ \sum_{i_2=1}^{n-d+2} \frac{1}{i_2} \left[\sum_{1 \leq i'_2 < \dots < i'_{d-1} \leq n-i_2} \frac{(2(n-i_2) - 2i'_{d-1} - 1)!!}{i'_2(2(n-i_2) - 2i'_{d-1})!!} \prod_{k=2}^{d-2} \frac{1}{i'_{k+1} - i'_k} \right], \end{aligned}$$

то (4.167) (или (4.165)) влечет

$$\mathbb{E}_{RW}^{(d)} |\mathcal{F}'_n| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{E}_{RW}^{(d-1)} |\mathcal{F}'_{n-k}|, \quad (4.182)$$

где верхний индекс означает размерность, и по определению, $\mathbb{E}_{RW}^{(d)} |\mathcal{F}'_n| := 0$ при $n \leq d - 1$. Осталось воспользоваться (4.181) для получения (4.168).

3. Рассуждая подобным образом и применяя (4.164) вместо (4.165), легко показать, что (4.182) также имеет место для случайного моста длины $n + 1$. Для любой последовательности b_n , такой что $b_n \sim (\log n)^b n^{-1}$, для некоторого $b \geq 0$, выполняется

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_{n-k}}{k} \sim \frac{(b+2)(\log n)^{b+1}}{(b+1)n}, \quad (4.183)$$

где разница с (4.181) возникла из-за того, что главный вклад в асимптотику вносят индексы k , такие что либо $k = o(n)$, либо $k = n - o(n)$. Асимптотика базового случая $d = 2$ другая, а именно,

$$\mathbb{E}_{Br}^{(2)} |\mathcal{F}'_n| = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(n-k+1)} \sim \frac{4 \log n}{n},$$

остальное же аналогично и доказательство (4.169) не должно вызвать у читателя никаких трудностей.

4.7. Многомерное обобщение результата Спарре

Андерсена

Результаты данного параграфа были получены совместно с В. Высоцким и З. Каблучко.

4.7.1. Введение

Задача поглощения для случайного блуждания

Рассмотрим случайное блуждание $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ в \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, с независимыми одинаково распределенными приращениями ξ_1, ξ_2, \dots . Целью данного параграфа является вычисление вероятности того, что выпуклая оболочка первых n шагов блуждания не содержит начало координат, в случае произвольной размерности d . Как было отмечено в предыдущем параграфе, данный вопрос является естественным обобщением задачи нахождения вероятности того, что

одномерное случайное блуждание не меняет знак до момента времени n . Будем называть $\mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1, S_2, \dots, S_n)]$ *вероятностью поглощения*, а вопрос ее нахождения – *задачей о поглощении*.

Наш первый результат звучит следующим образом.

Теорема 55. Пусть S_1, \dots, S_n является случайным блужданием в \mathbb{R}^d с независимыми одинаково распределенными приращениями, имеющими абсолютно непрерывное центрально симметричное (т.е. $S_1 \stackrel{d}{=} -S_1$) распределение. Тогда

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(S_1, S_2, \dots, S_n)] = \frac{2}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor} B(n, d - 2k + 1), \quad (4.184)$$

где $B(n, k)$ являются коэффициентами полинома

$$(t + 1)(t + 3) \dots (t + 2n - 1) = \sum_{k=0}^n B(n, k)t^k.$$

Примечательно, что в любой размерности вероятность поглощения не зависит от плотности $f(x) = f(-x)$ приращения случайного блуждания. Данный факт был высказан в качестве гипотезы в [218] и доказан в случае $d = 2$. Замечая, что $B(n, 0) = (2n - 1)!!$, в случае $d = 1$ мы получаем знаменитый результат Спарре Андерсена о вероятности того, что непрерывное симметричное блуждание остается положительным:

$$\mathbb{P}[S_1 > 0, \dots, S_n > 0] = \frac{(2n - 1)!!}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}. \quad (4.185)$$

Более того, мы покажем, что вероятность поглощения для *любого* (не обязательно с непрерывными приращениями) симметричного случайного блуждания ограничена снизу правой частью (4.184) (см. Предложение 26 ниже).

Эквивалентная геометрическая формулировка

Наше доказательство основано на ранее неизвестной связи между вероятностной задачей и эквивалентной геометрической задачей, связанной с мерами Вейля. Геометрическую задачу мы решим с помощью теории разбиений гиперплоскостями и тем самым найдем явную формулу для вероятностей

поглощения. Данный метод в корне отличается от метода, использованного в предыдущем параграфе.

Сформулируем эквивалентную геометрическую задачу. *Камерой Вейля* типа B_n называется любой из $2^n n!$ конусов в \mathbb{R}^n вида

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < \varepsilon_1 x_{\sigma(1)} < \varepsilon_2 x_{\sigma(2)} < \dots < \varepsilon_n x_{\sigma(n)}\},$$

где $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ является перестановкой чисел $1, \dots, n$, а $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Также камеры Вейля можно определить как области в \mathbb{R}^n , полученные в результате разбиения пространства n^2 гиперплоскостями $x_i = 0$ и $x_i \pm x_j = 0, i \neq j$.

Оказывается, что в условиях Теоремы 55 выполнено

$$\mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1, S_2, \dots, S_n)] = \frac{N_{n,d}}{2^n n!}, \quad (4.186)$$

где $N_{n,d}$ есть *постоянное* число камер Вейля, пересеченное неслучайным подпространством общего положения в \mathbb{R}^n коразмерности d . Точное значение термина “общее положение” будет объяснено в разделе 4.7.3, где мы найдем значение $N_{n,d}$ с помощью формул Уитни и Заславского из теории *разбиений гиперплоскостями* (см. Теорему 61).

Как было показано в § 4.5, существует между задачей поглощения и сферической выпуклой геометрией. Мы покажем, что для симметричного непрерывного случайного блуждания выполнено

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(S_1, S_2, \dots, S_n)] = \frac{2}{2^n n!} \sum_{k=1}^{\lfloor d/2 \rfloor} v_{d-2k+1}(W_n),$$

где W_n есть камера Вейля типа B_n , а v_k обозначают *конические внутренние объемы* (см. § 4.1).

Данная связь между геометрическими задачами и задачей о поглощении позволила нам найти простое доказательство формулы Кливанса и Шварца (см. [147]), которая связывает коэффициенты характеристического полинома линейного разбиения гиперплоскостями с внутренними объемами областей данного разбиения (см. Теорему 62). Мы использовали данный результат для нахождения конических внутренних объемов $v_k(W_n)$ камер Вейля типа B_n (см.

Теорему 63). Отдельное значение $\nu_1(W_n)$, соответствующее плоской вероятности поглощения, было найдено в [218].

Явная формула, приведенная в Теореме 55, позволяет легко найти асимптотику вероятности поглощения в фиксированной размерности d когда число шагов n стремится к бесконечности (см. Теорему 65). Она также позволяет провести асимптотический анализ в случае, когда размерность растет и $n = n(d)$ также растет таким образом, что поглощение происходит с нетривиальной вероятностью. В этом случае мы докажем, что вероятности поглощения удовлетворяют центральной предельной теореме (см. Теорему 66). В частности, мы покажем, что фазовый переход от непоглощения к поглощению происходит когда число шагов достигает $n \approx e^{2d}$. В Теореме 67 мы дадим точные асимптотики вероятностей поглощения и непоглощения в соответствующих областях больших уклонений $n = e^{2d/c}$ и $n = e^{2dc}$ для любого $c > 1$. Это значительно улучшает менее точные оценки, полученный Элданом (см. [97]) и Тихомировым и Юссефом (см. [214, 215]), подробности см. в разделе 4.7.5. Мы также получим аналог данного результата для простого случайного блуждания, которое, конечно, не удовлетворяет требованию непрерывности приращений. В этом случае односторонняя оценка вероятностей больших уклонений приведена в Теореме 68.

Обобщение на другие типы приращений

Группой Коксетера B_n называется группа симметрий правильного куба $[-1, 1]^n$. Элементы этой группы (в количестве $2^n n!$ штук) действуют на \mathbb{R}^n путем перестановки координат в произвольном порядке и домножением любого числа из них на -1 . Данная конечная группа порождается путем отражений относительно ребер (одномерных граней) любой камеры Вейля типа B_n . Любая камера Вейля W_n типа B_n является фундаментальной областью для действий группы B_n : это означает, что множества $gW_n, g \in B_n$, не пересекаются, а их замыкания в объединении дают все \mathbb{R}^n . Мы отсылаем читателя к [124] для введения в конечные группы отражений.

В сущности, наши методы применимы к выпуклым оболочкам не только симметричных случайных блужданий, но также к любой последовательности частичных сумм $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, k = 1, \dots, n$, если при этом совместное распределение их приращений $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ инвариантно относительно действий группы B_n , т.е.

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \stackrel{d}{=} (\varepsilon_1 \xi_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}) \quad (4.187)$$

для любой перестановки $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ чисел $1, \dots, n$ и любых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. В этом случае мы говорим, что набор (ξ_1, \dots, ξ_n) является *симметрично перестановочным*. Существует множество важных примеров таких наборов с необязательно независимыми одинаково распределенными компонентами: например, при $d = 1$ таким является любой инвариантный относительно поворотов негауссовский вектор в \mathbb{R}^n . Точная формулировка результата содержится в Теореме 57 из следующего раздела.

Наш подход может быть обобщен на задачу поглощения для частичных сумм с распределением приращений, инвариантным относительно других конечных групп. Таковыми являются группы отражений типа A_{n-1} и D_n , а также прямые произведения групп отражений. Объясним подробнее.

Группа Коксетера A_{n-1} является группой симметрий правильного симплекса (определенного как выпуклая оболочка стандартных базисных векторов в \mathbb{R}^n). Элементы этой группы (в количестве $n!$) действуют на \mathbb{R}^n путем перестановки координат. Набор (ξ_1, \dots, ξ_n) случайных векторов в \mathbb{R}^d называется *перестановочным*, если его распределение инвариантно относительно действий из A_{n-1} , т.е.

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \stackrel{d}{=} (\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}) \quad (4.188)$$

для любой перестановки $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ чисел $1, \dots, n$. Мы будем использовать стандартное обозначение $\text{Sym}(n)$ для группы перестановок на $\{1, \dots, n\}$.

Действия группы A_{n-1} оставляет гиперплоскость $x_1 + \dots + x_n = 0$ инвариантной. Сужение действий A_{n-1} на эту гиперплоскость позволяет применить

наш метод, описанный в разделе 4.7.1, к выпуклым оболочкам $\text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1})$ частичных сумм с перестановочными приращениями, которые удовлетворяют $\xi_1 + \dots + \xi_n = 0$ п.н. Это включает в себя задачу поглощения для *случайных мостов* при соответствующем условии непрерывности приращений. Соответствующий аналог (4.186) основывается на подсчете камер Вейля типа A_{n-1} , пересеченных типичным подпространством коразмерности d гиперплоскости $x_1 + \dots + x_n = 0$. Подробное описание дано в Теореме 56.

Группа Коксетера D_n является подгруппой B_n индекса 2, чьи действия на \mathbb{R}^n меняют знаки четного числа координат. Соответствующая Теорема 58 о выпуклых оболочках симметричного случайного блуждания, которому позволено выбирать знак на последнем шаге, обсуждается в разделе 4.7.2.

Наконец, мы рассмотрим случай, когда приращения блужданий инвариантны относительно действий прямого произведения групп отражений. Мы ограничимся рассмотрением прямого произведения групп типа B . Соответствующая Теорема 59 решает задачу поглощения для *совместной* выпуклой оболочки нескольких случайных блужданий с возможно разным числом шагов (при соответствующем условии непрерывности приращений).

В частном случае, когда все случайные блуждания имеют одинаковое распределение приращений и каждое состоит только из одного шага, Теорема 59 сводится к хорошо известному результату Венделя [220]: если ξ_1, \dots, ξ_n суть независимые одинаково распределенные векторы в \mathbb{R}^d с абсолютно непрерывным симметричным распределением, то

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(\xi_1, \dots, \xi_n)] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{k}. \quad (4.189)$$

Таким образом, наш подход сводит воедино классические результаты Спарре Андерсена и Венделя (см. (4.185) и (4.189)) о симметрично распределенных случайных величинах.

Кратко опишем структуру данного параграфа. Раздел 4.7.2 содержит точные формулы для вероятностей поглощения для разных типов приращений.

Данные результаты доказаны в разделе 4.7.6. В разделах 4.7.3 и 4.7.4 мы приведем основные базовые факты из теории разбиений гиперплоскостями и сферической выпуклой геометрии, а также докажем наши геометрические результаты, эквивалентные задаче о поглощении. Асимптотический анализ задач о поглощении изложен в разделе 4.7.5. Завершается параграф списком открытых задач.

4.7.2. Основные результаты: выпуклые оболочки случайных блужданий и мостов

В этом разделе мы приведем явные формулы вероятностей поглощения для частичных сумм

$$S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

с распределением приращений $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$, инвариантным относительно действия конечных групп отражений, а также аналогичные результаты для прямых произведений групп.

Тип A_{n-1} : случайные мосты

Группа Коксетера A_{n-1} является симметричной группой $\text{Sym}(n)$, действующей на \mathbb{R}^n путем перестановки координат. Число элементов этой группы равно $n!$. Под действием группы гиперплоскость

$$L := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

остаётся инвариантной. Это объясняет почему вместо индекса n появляется индекс $n-1$ в стандартном обозначении A_{n-1} . Отметим, что группа A_{n-1} является группой симметрий правильного симплекса с n вершинами, т.е. выпуклой оболочки стандартного базиса в \mathbb{R}^n .

Теорема 56. *Рассмотрим перестановочный набор (ξ_1, \dots, ξ_n) , $n \geq 2$, случайных векторов в \mathbb{R}^d (см. (4.188)). Предположим, что $\xi_1 + \dots + \xi_n = 0$ п.н. и*

что $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ имеет совместную плотность относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^{d(n-1)}$. Тогда

$$\mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1})] = \frac{2}{n!} \left(\begin{bmatrix} n \\ d+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ d+4 \end{bmatrix} + \dots \right), \quad (4.190)$$

где $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ обозначают числа Стирлинга первого рода, определяемые формулой

$$t(t+1) \dots (t+n-1) = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} t^k, \quad (4.191)$$

где мы полагаем $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ при $k \notin \{1, \dots, n\}$.

Замечание 31. Сумма в (4.190) (как и множество других сумм похожего вида ниже) содержит только конечное число ненулевых членов. Из (4.190) вытекает, что вероятность поглощения равна 0 при $n \leq d+1$. Объединяя (4.190) с тождеством

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} + \dots = \frac{n!}{2} \quad (4.192)$$

(которое получается путем подстановки $t = \pm 1$ в (4.191)), получаем следующую формулу для вероятности непоглощения:

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1})] = \frac{2}{n!} \left(\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ d-2 \end{bmatrix} + \dots \right). \quad (4.193)$$

Теорему 56 можно применить к случайным мостам. А именно, предположим, что ξ_1, \dots, ξ_n , $n \geq 2$ являются независимыми одинаково распределенными абсолютно непрерывными случайными векторами в \mathbb{R}^d , рассматриваемыми при условии $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n = 0$ (если плотность распределения S_n не обращается в ноль в начале координат). Их совместное распределение удовлетворяет условиям Теоремы 56. В одномерном случае $d = 1$ из (4.193) получается вероятность того, что случайный мост не меняет своего знака с вероятностью

$$\mathbb{P}[S_1, \dots, S_{n-1} > 0 \text{ или } S_1, \dots, S_{n-1} < 0 \mid S_n = 0] = \frac{2}{n}, \quad (4.194)$$

так как $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$. Фактически, Спарре Андерсен (см. [206]) показал, что вероятность оставаться положительным и вероятность оставаться отрицательным равны $1/n$ каждая. Теорему 56 можно рассматривать как многомерное обобщение данной классической формулы.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные абсолютно непрерывные случайные векторы η_1, \dots, η_n в \mathbb{R}^d . Пусть $M_n := \eta_1 + \dots + \eta_n$ и положим $\xi_i := \eta_i - M_n/n$. Легко проверить, что ξ_1, \dots, ξ_n удовлетворяют условиям теоремы.

Как показано в разделе 4.7.4, число $\frac{1}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ является k -м коническим внутренним объемом камеры Вейля типа A_{n-1} . Его также можно интерпретировать как вероятность появления k в выборке из n наблюдений с непрерывным распределением (см. [24, Лекция 13]), или как

$$\frac{1}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \mathbb{P}[\delta_1 + \dots + \delta_n = k],$$

где $\delta_1, \dots, \delta_n$ суть независимые случайные величины (индикаторы рекордов) с $\delta_i \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{i})$.

Интересно отметить, что формулировка Теоремы 56 (как и других похожих теорем, сформулированных ниже) не зависит от распределения величин ξ_1, \dots, ξ_n . В частности, не накладывается никаких моментных условий. Подчеркнем, что существование плотности в Теореме 56 существенно. В частности, без этого условия вероятности поглощения становятся зависимыми от распределения приращений. Например, для моста или для простого случайного блуждания на \mathbb{Z} (которое совершает прыжки ± 1 с вероятностью $1/2$), известно, что для любого четного n выполнено

$$\mathbb{P}[S_1, \dots, S_{n-1} > 0 \text{ или } S_1, \dots, S_{n-1} < 0 \mid S_n = 0] = \frac{1}{n-1},$$

что, очевидно, отличается от (4.194).

Тип B_n : симметричные случайные блуждания

Группа Коксетера B_n является группой симметрий правильного куба $[-1, 1]^n$ (или двойственного ему кроссполитопа). Элементы этой группы действуют на \mathbb{R}^n путем перестановки координат произвольным образом и домножения любого количества из них на -1 . Число элементов этой группы равно $2^n n!$.

Теорема 57. Рассмотрим симметрично перестановочный набор (ξ_1, \dots, ξ_n) случайных векторов в \mathbb{R}^d (см. (4.187)). Предположим, что (ξ_1, \dots, ξ_n) имеет совместную плотность распределения относительно меры Лебега в \mathbb{R}^{dn} .

Тогда

$$\mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1, S_2, \dots, S_n)] = \frac{2}{2^n n!} (B(n, d+1) + B(n, d+3) + \dots), \quad (4.195)$$

где $B(n, k)$ являются коэффициентами полинома

$$(t+1)(t+3)\dots(t+2n-1) = \sum_{k=0}^n B(n, k)t^k, \quad (4.196)$$

при этом мы полагаем $B(n, k) := 0$ при $k \notin \{0, \dots, n\}$.

Замечание 32. Вероятность поглощения равна 0 при $n \leq d$. Подставляя $t = \pm 1$ в (4.196), получаем тождество

$$B(n, 1) + B(n, 3) + \dots = B(n, 0) + B(n, 2) + \dots = 2^{n-1} n!. \quad (4.197)$$

Следовательно, вероятность непоглощения равна

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(S_1, S_2, \dots, S_n)] = \frac{2}{2^n n!} (B(n, d-1) + B(n, d-3) + \dots). \quad (4.198)$$

Например, Теорема 57 применима в случае, когда ξ_1, \dots, ξ_n являются независимыми одинаково распределенными векторами в \mathbb{R}^d , имеющими плотность распределения f , центрально симметричную относительно начала координат, т.е. $f(t) = f(-t)$ при всех $t \in \mathbb{R}^d$. Что важно, вероятность в (4.195) не зависит от f . Это доказывает гипотезу из [218] для всех d . Применяя (4.198) к случаю $d = 1$ и замечая, что $B(n, 0) = (2n-1)!!$, получаем вероятность того, что симметричное случайное блуждание с абсолютно непрерывными приращениями остается положительным:

$$\mathbb{P}[S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_n > 0] = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Это является классическим результатом Спарре Андерсена (см. [206]). Для простого случайного блуждания формула отличается: из принципа отражения следует

$$\mathbb{P}[S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_n > 0] = \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}.$$

Числа $B(n, k)$ называются B -аналогами чисел Стирлинга (без знака) первого рода (см. A028338 или A039757 для версии со знаком в [200]). Они удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$B(n, k) = (2n - 1)B(n - 1, k) + B(n - 1, k - 1)$$

и явно выражаются следующим образом: $B(n, k) = \sum_{i=k}^n 2^{n-i} \binom{i}{k} [n]_i$. Детально эти числа изучены в [211]. Можно привести вероятностную интерпретацию $B(n, k)$: из (4.196) сразу вытекает, что

$$\frac{B(n, k)}{2^n n!} = \mathbb{P}[\delta_1 + \dots + \delta_n = k],$$

где $\delta_1, \dots, \delta_n$ являются независимыми случайными величинами с $\delta_i \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ для $1 \leq i \leq n$. С точки зрения геометрического подхода, $B(n, k)/(2^n n!)$ есть k -й конический внутренний объем камеры Вейля типа B_n (см. раздел 4.7.4).

Тип D_n

Группа Коксетера D_n действует на \mathbb{R}^n путем перестановки координат произвольным образом и домножением любого четного числа из них на -1 . Она является подгруппой B_n индекса 2, а число ее элементов равно $2^{n-1}n!$. Группа D_n совпадает с группой симметрий полугиперкуба.

Теорема 58. *Рассмотрим случайные векторы ξ_1, \dots, ξ_n в \mathbb{R}^d , такие что для любой перестановки $\sigma \in \text{Sym}(n)$ и любых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ с $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = +1$ выполнено*

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \stackrel{d}{=} (\varepsilon_1 \xi_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}). \quad (4.199)$$

Предположим, что (ξ_1, \dots, ξ_n) имеют совместную плотность распределения относительно меры Лебега в \mathbb{R}^{dn} и обозначим $S_n^* := \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} - \xi_n$. Тогда

$$\mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n, S_n^*)] = \frac{2}{2^{n-1}n!} (D(n, d+1) + D(n, d+3) + \dots), \quad (4.200)$$

где $D(n, k)$ обозначают коэффициенты полинома

$$(t+1)(t+3)\dots(t+2n-3)(t+n-1) = \sum_{k=0}^n D(n, k)t^k, \quad (4.201)$$

при этом мы полагаем $D(n, k) := 0$ при $k \notin \{0, \dots, n\}$.

Замечание 33. Вероятность непоглощения равна

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n, S_n^*)] = \frac{2}{2^{n-1}n!} (D(n, d-1) + D(n, d-3) + \dots). \quad (4.202)$$

Например, Теорема 58 применима когда ξ_1, \dots, ξ_n есть независимые одинаково распределенные векторы с плотностью распределения, центрально симметричной относительно начала координат. Легко показать (см. (4.232) ниже), что

$$\text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n, S_n^*) = \text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n) \cup \text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n^*),$$

таким образом, вероятностная задача, соответствующая группе симметрий D_n , относится к выпуклой оболочке симметричного случайного блуждания, которому позволено “выбирать” знак последнего прыжка, чтобы поглотить начало координат.

Числа

$$D(n, k) = (n-1)B(n-1, k) + B(n-1, k-1)$$

называются D -аналогами чисел Стирлинга (без знака) первого рода (см. A039762 в [200] для версии со знаком). В разделе 4.7.4 будет показано, что $D(n, k)/(2^{n-1}n!)$ совпадает с k -м коническим объемом камеры Вейля типа D_n . Кроме того, имеет место соотношение

$$\frac{D(n, k)}{2^{n-1}n!} = \mathbb{P}[\delta_1 + \dots + \delta_n = k],$$

где $\delta_1, \dots, \delta_n$ суть независимые случайные величины с $\delta_i \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2^i})$ при $1 \leq i \leq n-1$ и $\delta_n \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{n})$.

Прямое произведение групп отражений

До сих пор мы рассматривали вероятностные задачи, связанные с неприводимыми группами. Известно, что произвольная группа отражений может быть представлена как прямое произведение неприводимых. В этом разделе мы изучим задачу о поглощении для *совместных* выпуклых оболочек *нескольких* случайных блужданий и/или мостов. Соответствующие группы симметрий являются прямыми произведениями конечных групп отражений.

Для определенности, ограничимся рассмотрением прямого произведения вида $B_{n_1} \times \cdots \times B_{n_r}$, содержащего только группы одного типа B . Здесь $r \in \mathbb{N}$ соответствует числу случайных блужданий, а n_i , где $1 \leq i \leq r$, соответствует числу шагов в i -м блуждании. Наши результаты легко обобщаются на произведения вида $A_{n_1} \times \cdots \times A_{n_r}$, которые соответствуют совместной выпуклой оболочке нескольких мостов, и даже на смешанное прямое произведение, содержащее группы всех 3 типов A, B, D . Мы не будем приводить данное обобщение ввиду сложности обозначений.

Теорема 59. *Рассмотрим случайные векторы $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)}, \dots, \xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n_r}^{(r)}$ в \mathbb{R}^d , такие что для любой перестановки $\sigma^{(1)} \in \text{Sym}(n_1), \dots, \sigma^{(r)} \in \text{Sym}(n_r)$ и любых знаков $\varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_{n_1}^{(1)}, \dots, \varepsilon_1^{(r)}, \dots, \varepsilon_{n_r}^{(r)} \in \{-1, +1\}$ выполнено*

$$\begin{aligned} & (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)}, \dots, \xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n_r}^{(r)}) \\ & \stackrel{d}{=} (\varepsilon_1^{(1)} \xi_{\sigma_1^{(1)}(1)}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{n_1}^{(1)} \xi_{\sigma_1^{(1)}(n_1)}^{(1)}, \dots, \varepsilon_1^{(r)} \xi_{\sigma_r^{(r)}(1)}^{(r)}, \dots, \varepsilon_{n_r}^{(r)} \xi_{\sigma_r^{(r)}(n_r)}^{(r)}). \end{aligned} \quad (4.203)$$

Предположим, что $(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)}, \dots, \xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n_r}^{(r)})$ имеют совместную плотность распределения $\mathbb{R}^{(n_1 + \dots + n_r)d}$. Обозначим частичные суммы $S_k^{(i)} := \xi_1^{(i)} + \dots + \xi_k^{(i)}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq k \leq n_i$. Тогда

$$\mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1^{(1)}, \dots, S_{n_1}^{(1)}, \dots, S_1^{(r)}, \dots, S_{n_r}^{(r)})] = \frac{2(P(d+1) + P(d+3) + \dots)}{2^{n_1} n_1! \dots 2^{n_r} n_r!}, \quad (4.204)$$

где $P(k)$ (которые также зависят от r, n_1, \dots, n_r) являются коэффициентами полинома

$$\prod_{i=1}^r ((t+1)(t+3)\dots(t+2n_i-1)) = \sum_{k=0}^{n_1+\dots+n_r} P(k)t^k, \quad (4.205)$$

при этом $P(k) := 0$ для $k \notin \{0, \dots, n_1 + \dots + n_r\}$.

Замечание 34. Условие (4.203) выполняется, если $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)}, \dots, \xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n_r}^{(r)}$ являются независимыми случайными векторами, такими что плотность распределения $\xi_k^{(i)}$ зависит только от i и центрально симметрична относительно начала координат в \mathbb{R}^d . В этом частном случае Теорема 59 позволяет вычислить вероятность того, что начало координат поглощается совместной выпуклой оболочкой r независимых случайных блужданий, причем распределения шагов разных блужданий могут отличаться.

Пример 23 (Тип B_1^r : формула Венделя). Рассмотрим частный случай $n_1 = \dots = n_r = 1$, в котором каждое блуждание состоит только из одного шага. Это соответствует прямому произведению r групп $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, в котором каждый множитель действует в \mathbb{R} путем домножения на ± 1 .

Случайные векторы $\xi^{(1)} := \xi_1^{(1)}, \dots, \xi^{(r)} := \xi_1^{(r)}$ со значениями в \mathbb{R}^d должны удовлетворять соотношению

$$(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)}) \stackrel{d}{=} (\pm \xi_1^{(1)}, \dots, \pm \xi_1^{(r)}) \quad (4.206)$$

при всех 2^r выборах знаков. Тогда (4.205), которое определяет коэффициенты $P(k)$, принимает вид $(t+1)^r = \sum_{k=0}^r P(k)t^k$, так что $P(k) = \binom{r}{k}$. Теорема 59 утверждает, что

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)})] = \frac{1}{2^{r-1}} \left(\binom{r}{d-1} + \binom{r}{d-3} + \dots \right).$$

Применяя рекуррентное свойство треугольника Паскаля, приходим к

$$\mathbb{P}[0 \notin \text{conv}(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)})] = \frac{1}{2^{r-1}} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{r-1}{k}.$$

Данная формула была получена Венделем (см. [220]), который накладывал на $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)}$ условие независимости и одинаковой распределенности, что ограничительнее, чем (4.206). Доказательство Венделя основано на формуле Шлафли (4.221) приведенной ниже (также см. [193, раздел 8.2.1]).

Аналогичный результат можно получить рассматривая группу симметрий A_1^r , так как ее действие на \mathbb{R}^{2r} изоморфно действию B_1^r на \mathbb{R}^r .

Отсутствие абсолютной непрерывности

Как уже упоминалось, существование совместной плотности распределения приращений является существенным для наших результатов. Однако в общем случае возможно получить одностороннюю оценку вероятности поглощения.

Рассмотрим набор случайных векторов (ξ_1, \dots, ξ_n) в \mathbb{R}^d , удовлетворяющий всем условиям одной из Теорем 56, 57 или 58. Обозначим $H_{n,d}$ выпуклую оболочку, рассматриваемую в соответствующей теореме. Пусть (ξ'_1, \dots, ξ'_n) обозначает любой набор случайных векторов в \mathbb{R}^d , который удовлетворяет всем условиям соответствующей теоремы *кроме* условия абсолютной непрерывности. Положим $S'_k := \xi'_1 + \dots + \xi'_k$, $1 \leq k \leq n$, и $(S_n^*)' := \xi'_1 + \dots + \xi'_{n-1} - \xi'_n$, а также обозначим $H'_{n,d}$ соответствующую выпуклую оболочку.

Отметим, что обе $H'_{n,d}$ и $H_{n,d}$ замкнуты, и обозначим $\text{Int}(H'_{n,d})$ внутренность $H'_{n,d}$.

Предложение 26. *Для любого из типов A_{n-1}, B_n, D_n выполнено*

$$\mathbb{P}[0 \in \text{Int}(H'_{n,d})] \leq \mathbb{P}[0 \in H_{n,d}] \leq \mathbb{P}[0 \in H'_{n,d}]. \quad (4.207)$$

В частности, данный результат включает в себя случай простого случайного блуждания на \mathbb{Z}^d , где ξ'_1, \dots, ξ'_n независимы и одинаково распределены, и $\mathbb{P}[\xi'_1 = e_i] = \mathbb{P}[\xi'_1 = -e_i] = \frac{1}{2d}$ где $i = 1, \dots, d$, а e_1, \dots, e_n является стандартным базисом в \mathbb{R}^d .

Доказательство. Так как в абсолютно непрерывном случае вероятность поглощения не зависит от распределения, мы можем предположить не умаляя общности, что $\xi_i = \xi'_i + \varepsilon\delta_i$, где $\varepsilon \neq 0$ и $\delta_1, \dots, \delta_n$ суть случайные векторы в \mathbb{R}^d , независимые от ξ'_1, \dots, ξ'_n , со следующим распределением. В случаях B_n и D_n , $\delta_1, \dots, \delta_n$ являются независимыми стандартными гауссовскими векторами в \mathbb{R}^d , тогда как в случае A_{n-1} они являются независимыми стандартными гауссовскими векторами в \mathbb{R}^d , рассмотренными при условии $\delta_1 + \dots + \delta_n = 0$. Набор (ξ_1, \dots, ξ_n) , определенный таким образом, удовлетворяет условиям соответствующей Теоремы 56, 57, или 58.

Отметим, что выпуклая оболочка $H_{n,d}$ получается из $H'_{n,d}$ небольшим случайным искажением. Получаем

$$\mathbb{P}[0 \in H_{n,d}] \leq \mathbb{P}[0 \in H'_{n,d}] + \mathbb{P}[0 \in H_{n,d}, 0 \notin H'_{n,d}], \quad (4.208)$$

$$\mathbb{P}[0 \in H_{n,d}] \geq \mathbb{P}[0 \in \text{Int}(H'_{n,d})] - \mathbb{P}[0 \in \text{Int}(H'_{n,d}), 0 \notin H_{n,d}], \quad (4.209)$$

где $\mathbb{P}[0 \in H_{n,d}]$ не зависит от ε , тогда как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}[0 \in H_{n,d}, 0 \notin H'_{n,d}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}[0 \in \text{Int}(H'_{n,d}), 0 \notin H_{n,d}] = 0,$$

так как $H'_{n,d}$ замкнуто, а $\text{Int}(H'_{n,d})$ – открыто. Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ в (4.208) и (4.209), приходим к (4.207). Отметим, что неравенства в (4.207) могут быть строгими, так как если 0 лежит на границе $H'_{n,d}$, то возможно даже при маленьком искажении 0 будет вне $H_{n,d}$. ■

В разделе 4.7.6 мы дадим другое доказательство Предложения 26, основанное на нашей геометрической интерпретации, связанной с пересечениями камер Вейля. Предложение 26 легко обобщить на произведения групп отражений.

4.7.3. Разбиения гиперплоскостями

Основная формула для числа областей

Линейным разбиением гиперплоскостями (или просто “разбиением”) \mathcal{A} называется конечное множество различных гиперплоскостей в \mathbb{R}^n , проходящих че-

рез начало координат. В литературе по разбиениям гиперплоскостями (см. [173], [209]) рассматривается более общая концепция разбиений *аффинными* гиперплоскостями (гиперплоскости не обязаны проходить через начало координат), однако нам понадобится только линейный случай.

Рангом разбиения \mathcal{A} , обозначаемым $\text{rank}(\mathcal{A})$, называется размерность линейного подпространства, порожденного нормальными к гиперплоскостям из \mathcal{A} , или, что эквивалентно, коразмерность пересечения всех гиперплоскостей:

$$\text{rank}(\mathcal{A}) := n - \dim \left(\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \right).$$

Характеристический полином $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ разбиения \mathcal{A} определяется как

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) := \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{B})}, \quad (4.210)$$

где сумма берется по всем подразбиениям \mathcal{B} из \mathcal{A} , $\#$ обозначает число элементов, а $\text{rank}(\emptyset) := 0$, при этом пересечение по пустому множеству гиперплоскостей мы полагаем равным \mathbb{R}^n . Исходное определение характеристического полинома значительно сложнее и использует понятия частично упорядоченного множества пересечений гиперплоскостей из \mathcal{A} и функции Мебиуса на нем (см. [209, раздел 1.3]). Для наших же целей нам достаточно приведенного выше равносильного определения. Эквивалентность была доказана Уитни (см., например, [173, Лемма 2.3.8] или [209, Теорема 2.4]).

Обозначим $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ множество открытых связанных компонент (“областей” или “камер”) дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ к гиперплоскостям. Следующий фундаментальный результат Заславского (см. [224], а также [209, Теорема 2.5]) выражает число областей разбиения \mathcal{A} через его характеристический полином:

$$\#\mathcal{R}(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1). \quad (4.211)$$

Рассмотрим разбиение \mathcal{A} в \mathbb{R}^n , и пусть L_{n-d} является линейным подпространством в \mathbb{R}^n коразмерности $d \leq n - 1$. Мы говорим, что L_{n-d} находится в

общем положении относительно \mathcal{A} , если для любого непустого подмножества $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ выполнено

$$\dim \left(\bigcap_{H \in \mathcal{B}} (H \cap L_{n-d}) \right) = \begin{cases} n - d - \text{rank}(\mathcal{B}), & \text{если } \text{rank}(\mathcal{B}) \leq n - d, \\ 0, & \text{если } \text{rank}(\mathcal{B}) \geq n - d. \end{cases} \quad (4.212)$$

Наша цель состоит в нахождении числа регионов в $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, пересеченных подпространством L_{n-d} . Данное число можно выразить через число регионов в индуцированном разбиении $\mathcal{A}|L_{n-d}$, т.е. в разбиении в пространстве $L_{n-d} \cong \mathbb{R}^{n-d}$, определенном как⁴

$$\mathcal{A}|L_{n-d} := \{H \cap L_{n-d} : H \in \mathcal{A}\}.$$

Очевидно, выполнено

$$\#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) : R \cap L_{n-d} \neq \emptyset\} = \#\mathcal{R}(\mathcal{A}|L_{n-d}).$$

Лемма 65. *Рассмотрим линейное разбиение гиперплоскостями \mathcal{A} в \mathbb{R}^n , и пусть L_{n-d} является линейным подпространством в \mathbb{R}^n коразмерности $d \leq n - 1$, находящимся в общем положении относительно \mathcal{A} . Обозначим*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) := \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} a_k t^k \quad (4.213)$$

характеристический полином \mathcal{A} . Тогда характеристический полином разбиения \mathcal{A} , ограниченного на L_{n-d} , задается формулой

$$\chi_{\mathcal{A}|L_{n-d}}(t) = \sum_{k=0}^d (-1)^{n-k} a_k + \sum_{k=d+1}^n (-1)^{n-k} a_k t^{k-d}. \quad (4.214)$$

⁴ В данном определении мы полагаем, что линейное подпространство L_{n-d} находится в общем положении относительно \mathcal{A} и что $n - d \neq 1$. Это гарантирует, что любое $H \cap L_{n-d}$ имеет коразмерность 1 в L_{n-d} (по (4.212)) и что все эти гиперплоскости различны. В самом деле, если $H_1 \cap L_{n-d} = H_2 \cap L_{n-d}$, то из (4.212) вытекает, что оба подпространства имеют размерности $n - d - 1$, однако с другой стороны, $H_1 \cap H_2$ имеет размерность $d - 2$ и, следовательно, из (4.212) получаем, что $H_1 \cap H_2 \cap L_{n-d}$ имеет размерность $n - d - 2 \geq 0$, что является противоречием. В случае, когда L_{n-d} является прямой в общем положении относительно \mathcal{A} , мы полагаем $\mathcal{A}|L_{n-d} = \{\{0\}\}$.

Замечание 35. Легко показать, что $a_n = 1$, $a_{n-1} = \#\mathcal{A}$ (см. [209, стр. 10]). Более того, последовательность a_0, \dots, a_n строго положительна (см. [209, Следствие 3.5]) и унимодальна (см. [209, стр. 17]). Также докажем тождество

$$a_0 + a_2 + \dots = a_1 + a_3 + \dots \quad (4.215)$$

Вторая часть Теоремы Заславского (см. [209, Теорема 2.5]) утверждает, что для любого аффинного разбиения гиперплоскостями число *ограниченных* областей в $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ равно (с точностью до знака) $\chi_{\mathcal{A}}(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} a_k$. Так как все наши разбиения линейны, ограниченных областей нет, следовательно, имеет место (4.215).

Доказательство. Если L_{n-d} является прямой, то $\mathcal{A}|_{L_{n-d}} = \{\{0\}\}$ и $\chi_{\mathcal{A}|_{L_{n-d}}} = t-1$, что совпадает с выражением из (4.214), так как $a_n = 1$ и выполнено (4.215).

В дальнейшем можно предполагать, что $n-d \geq 2$. Из (4.212) вытекает, что для любого подмножества $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ выполнено

$$\text{rank}(\mathcal{B}|_{L_{n-d}}) = \begin{cases} \text{rank}(\mathcal{B}), & \text{если } \text{rank}(\mathcal{B}) \leq n-d, \\ n-d, & \text{если } \text{rank}(\mathcal{B}) \geq n-d, \end{cases} \quad (4.216)$$

где ранг рассматривается в L_{n-d} . Как было объяснено в сноске, $\#(\mathcal{B}|_{L_{n-d}}) = \#\mathcal{B}$, так как L_{n-d} не является прямой. Применяя (4.210) (в размерности $n-d$) и после этого (4.216), получаем

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}|_{L_{n-d}}}(t) &= \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-d-\text{rank}(\mathcal{B}|_{L_{n-d}})} \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \text{rank}(\mathcal{B})=n-k}} (-1)^{\#\mathcal{B}} + \sum_{k=d+1}^n \sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \text{rank}(\mathcal{B})=n-k}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n-d-\text{rank}(\mathcal{B})}. \end{aligned}$$

Замечая, что из (4.210) и (4.213) вытекает

$$\sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \text{rank}(\mathcal{B})=n-k}} (-1)^{\#\mathcal{B}} = (-1)^{n-k} a_k,$$

получаем требуемую формулу. ■

Теперь сформулируем главный результат текущего раздела.

Теорема 60. Рассмотрим линейное подпространство L_{n-d} в \mathbb{R}^n коразмерности d в общем положении относительно \mathcal{A} . Число областей в $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, пересеченных подпространством L_{n-d} , равно

$$\#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) : R \cap L_{n-d} \neq \emptyset\} = 2(a_{d+1} + a_{d+3} + \dots),$$

где числа a_k определены в (4.213), и мы полагаем $a_k = 0$ при $k \notin \{0, \dots, n\}$.

Доказательство. Из (4.211) и Леммы 65 вытекает

$$\#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) : R \cap L_{n-d} \neq \emptyset\} = \begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k - 2 \sum_{k=0}^s a_{2k}, & \text{если } d = 2s + 1, \\ \sum_{k=0}^n a_k - 2 \sum_{k=1}^s a_{2k-1}, & \text{если } d = 2s, \end{cases}$$

где мы использовали тот факт, что $\mathcal{A}|L_{n-d}$ является разбиением размерности $n - d$. Для завершения доказательства осталось применить (4.215). ■

Частный случай: отраженные разбиения

Сформулированный выше результат можно применить к *отраженным разбиениям* в \mathbb{R}^n типов A_{n-1} , B_n , D_n . Данные разбиения состоят из гиперплоскостей

$$\mathcal{A}(A_{n-1}): \quad x_i = x_j, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

$$\mathcal{A}(B_n): \quad x_i = x_j, \quad x_i = -x_j, \quad x_k = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$\mathcal{A}(D_n): \quad x_i = x_j, \quad x_i = -x_j, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Теорема 61. Рассмотрим линейное подпространство L_{n-d} в \mathbb{R}^n коразмерности d , находящееся в общем положении относительно одного из разбиений $\mathcal{A}(A_{n-1})$, $\mathcal{A}(B_n)$, $\mathcal{A}(D_n)$. Тогда число областей в данном разбиении, пересеченном L_{n-d} , соответственно равно

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}(A_{n-1})|L_{n-d}) = 2 \left(\binom{n}{d+1} + \binom{n}{d+3} + \dots \right),$$

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}(B_n)|L_{n-d}) = 2(B(n, d+1) + B(n, d+3) + \dots),$$

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}(D_n)|L_{n-d}) = 2(D(n, d+1) + D(n, d+3) + \dots).$$

Доказательство. Характеристические полиномы отраженных разбиений известны (см. стр. 63–64 и Следствие 2.2 на стр. 28 в [209]):

$$\chi_{\mathcal{A}(A_{n-1})}(t) = t(t-1)\dots(t-(n-1)) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} t^k, \quad (4.217)$$

$$\chi_{\mathcal{A}(B_n)}(t) = (t-1)(t-3)\dots(t-(2n-1)) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} B(n, k) t^k, \quad (4.218)$$

$$\chi_{\mathcal{A}(D_n)}(t) = (t-1)(t-3)\dots(t-(2n-3))(t-(n-1)) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} D(n, k) t^k,$$

где мы воспользовались (4.191), (4.196), (4.201). Подчеркнем, что $\mathcal{A}(A_{n-1})$ является разбиением в \mathbb{R}^n , поэтому его полином имеет степень n . \blacksquare

Отсутствие общего положения

Следующая лемма сравнивает число открытых и замкнутых камер, пересеченных произвольным линейным подпространством с соответствующим числом камер, пересеченных подпространством в общем положении.

Лемма 66. *Рассмотрим линейное разбиение \mathcal{A} в \mathbb{R}^n и линейные подпространства L_{n-d}, L'_{n-d} в \mathbb{R}^n коразмерности d . Если L_{n-d} находится в общем положении относительно \mathcal{A} , то*

$$\#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \bar{R} \cap L_{n-d} \neq \emptyset\} = \#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): R \cap L_{n-d} \neq \emptyset\} \quad (4.219)$$

и

$$\begin{aligned} \#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \bar{R} \cap L'_{n-d} \neq \{0\}\} &\geq \#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \bar{R} \cap L_{n-d} \neq \{0\}\}, \\ \#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): R \cap L'_{n-d} \neq \emptyset\} &\leq \#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): R \cap L_{n-d} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение. Рассмотрим произвольную камеру $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Нетрудно показать, что если L_{n-d} не пересекается с R , но имеет нетривиальное пересечение с \bar{R} , то либо L_{n-d} содержится в гиперплоскости из \mathcal{A} , которая формирует поверхность R , либо L_{n-d} содержит грань

R положительной размерности. Оба варианта противоречат условию общего положения.

Теперь докажем второе утверждение; доказательство третьего утверждения аналогично. Напомним, что $\mathbf{Gr}(n-d, n)$ обозначает многообразие Грассмана на всех $(n-d)$ -мерных линейных подпространствах в \mathbb{R}^n , оснащенное стандартной метрикой. Множество подпространств в общем положении относительно \mathcal{A} плотно в $\mathbf{Gr}(n-d, n)$. Для любой камеры $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ множество

$$\{M \in \mathbf{Gr}(n-d, n): \bar{R} \cap M = \{0\}\}$$

открыто в $\mathbf{Gr}(n-d, n)$. Следовательно, существует окрестность U подпространства L'_{n-d} , такая что для всех линейных подпространств $M \in U$ выполнено

$$\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \bar{R} \cap M = \{0\}\} \supset \{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \bar{R} \cap L'_{n-d} = \{0\}\}.$$

Рассмотрим $M \in U$ в общем положении относительно \mathcal{A} . Для завершения доказательства заметим, что (4.219) и Теорема 60 влекут

$$\#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \bar{R} \cap M = \{0\}\} = \#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \bar{R} \cap L_{n-d} = \{0\}\}.$$

■

4.7.4. Связь с коническими внутренними объемами

Характеристический полином линейного разбиения и конические внутренние объемы

Рассмотрим линейное разбиение гиперплоскостями \mathcal{A} в \mathbb{R}^n с характеристическим полиномом

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} a_k t^k.$$

Следующая теорема, сформулированная в [94] и доказанная в [147], связывает коэффициенты характеристического полинома с внутренними объемами областей разбиения. Мы приведем совершенно иное (и очень короткое) доказательство данной теоремы.

Теорема 62. Для любого линейного разбиения гиперплоскостями \mathcal{A} в \mathbb{R}^n выполнено

$$a_k = \sum_{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} v_k(R), \quad k = 0, \dots, n.$$

Доказательство. Рассмотрим случайное $(n - d + 1)$ -мерное линейное подпространство W_{n-d+1} в \mathbb{R}^n , распределенное согласно равномерной мере на многообразии Грассмана, где $d \in \{1, \dots, n\}$. С вероятностью единица, W_{n-d+1} находится в общем положении относительно \mathcal{A} . Следовательно, из Теоремы 60 вытекает

$$\#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) : R \cap W_{n-d+1} \neq \emptyset\} = 2(a_d + a_{d+2} + \dots) \quad \text{п.н.}$$

С другой стороны, из (4.12) следует, что для любого $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$

$$h_d(R) = \frac{1}{2} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{R \cap W_{n-d+1} \neq \emptyset}].$$

Суммируя по всем $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ и объединяя данные формулы, получаем, что для всех $d \in \{1, \dots, n\}$ выполнено

$$\sum_{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} h_d(R) = \frac{1}{2} \mathbb{E} [\#\{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) : R \cap W_{n-d+1} \neq \emptyset\}] = a_d + a_{d+2} + \dots$$

Подставляя $d = 1$, а также применяя (4.215) и (4.10), приходим к

$$\sum_{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} h_0(R) = a_0 + a_2 + \dots$$

Используя формулу $v_k(R) = h_k(R) - h_{k+2}(R)$ (которая следует из (4.8)) получаем, что для всех $k \in \{0, \dots, n\}$ выполняется

$$\sum_{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} v_k(R) = \sum_{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} h_k(R) - \sum_{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} h_{k+2}(R) = a_k,$$

что завершает доказательство. ■

Конические внутренние объемы камер Вейля

Камерами Вейля типов A_{n-1} , B_n , D_n называются следующие выпуклые конусы в \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{C}(A_{n-1}) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < x_2 < \dots < x_n\},$$

$$\mathcal{C}(B_n) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\},$$

$$\mathcal{C}(D_n) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < |x_1| < x_2 < \dots < x_n\}.$$

Каждая камера Вейля $C = \mathcal{C}(G)$ является *фундаментальной областью* для соответствующей группы отражений $G = A_{n-1}, B_n$ или D_n . Это означает, что все конусы вида gC , $g \in G$, которые мы также будем называть камерами Вейля, не пересекаются, и выполнено $\cup_{g \in G} g\bar{C} = \mathbb{R}^n$.

Теорема 63. *Конические внутренние объемы камер Вейля типов A_{n-1} , B_n , D_n равны*

$$v_k(\mathcal{C}(A_{n-1})) = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad v_k(\mathcal{C}(B_n)) = \frac{B(n, k)}{2^n n!}, \quad v_k(\mathcal{C}(D_n)) = \frac{D(n, k)}{2^{n-1} n!},$$

при $k = 0, 1, \dots, n$, где $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, $B(n, k)$, $D(n, k)$ определены в (4.191), (4.196), (4.201) соответственно.

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай \mathcal{A}_{n-1} . Коэффициенты характеристического полинома соответствующего разбиения гиперплоскостями равны $a_k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ (см. доказательство Теоремы 61). Области в $\mathcal{R}(\mathcal{A}_{n-1})$ суть $n!$ изометричных камер Вейля типа A_{n-1} . Теорема 62 влечет

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n! v_k(\mathcal{C}(A_{n-1})),$$

что доказывает требуемую формулу. Случаи B_n и D_n рассматриваются аналогично. ■

Случайные разбиения гиперплоскостями в общем положении

Рассмотрим линейное разбиение \mathcal{A} в \mathbb{R}^n , состоящее из $m \geq n$ гиперплоскостей в общем положении (в нашей терминологии, это означает, что \mathbb{R}^n находится

в общем положении относительно \mathcal{A} , см. (4.212)). Из (4.210) вытекает

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{m}{k} t^{n-k} + \sum_{k=n}^m (-1)^k \binom{m}{k}. \quad (4.220)$$

Применяя (4.211) и используя, что сумма биномиальных коэффициентов с чередующимися знаками равно нулю, получаем

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{k} + \sum_{k=n}^m (-1)^{k+n} \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+n} \binom{m}{k}.$$

Следовательно, из рекурсивного свойства треугольника Паскаля вытекает

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m-1}{k} =: C(m, n). \quad (4.221)$$

Это хорошо известная формула, доказанная Шлафли (см. [191, стр.209–212]) в произвольной размерности, была впервые получена Штейнером (см. [210]) в случае $n = 3$ (см. также простое доказательство по индукции в [112, Лемма 8.2.1]). Мы уже видели данную формулу в Примере 23.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные векторы ξ_1, \dots, ξ_m на единичной сфере \mathbb{S}^{n-1} , такие что их распределение центрально симметрично и не приписывает положительной массы любой $(n-2)$ -мерной большой подсфере. Гиперплоскости $\xi_1^\perp, \dots, \xi_m^\perp$, с вероятностью единица находящиеся в общем положении, разбивают \mathbb{R}^n на $C(m, n)$ случайных конусов. Если мы равномерно случайным образом выберем один из них, то получим т.н. случайный конус Шлафли, который был введен в рассмотрение Хугом и Шнайдером (см. [130]).

Следующий результат из [130] (сформулированный с несущественными изменениями) вычисляет средний внутренний объем случайного конуса Шлафли. Данная теорема легко следует из Теоремы 62.

Теорема 64. *Для любого случайного конуса Шлафли C_m в \mathbb{R}^n выполнено*

$$\mathbb{E} v_k(C_m) = \frac{1}{C(m, n)} \binom{m}{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение \mathcal{A} , состоящее из гиперплоскостей $\xi_1^\perp, \dots, \xi_m^\perp$. Имеем:

$$\mathbb{E} v_k(C_m) = \frac{1}{C(m, n)} \mathbb{E} \sum_{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} v_k(R).$$

С другой стороны, из Теоремы 62 и соотношения (4.220) вытекает

$$\sum_{R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} v_k(R) = \binom{m}{n-k} \text{ п.н.,}$$

что завершает доказательство. ■

Замечание 36. Как сразу видно из доказательства, данный результат верен для любых *детерминистических* векторов ξ_1, \dots, ξ_m , находящихся в общем положении. В качестве случайности здесь играет роль равномерная мера на $C(m, n)$ элементах из $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

4.7.5. Асимптотические результаты

В этом разделе мы воспользуемся явными формулами из раздела 4.7.2 для изучения асимптотического поведения вероятности того, что выпуклая оболочка симметричного случайного блуждания или моста поглощает начало координат. Случаи A_{n-1} , B_n и D_n очень похожи. Мы находимся в условиях Теорем 56, 57, 58, что предполагает перестановочность координат, их совместную непрерывность и, в случаях B_n и D_n , симметричность их распределений. Напомним, что $H_{n,d} \subset \mathbb{R}^d$ обозначает выпуклую оболочку, рассматриваемую в любой из этих теорем.

Асимптотики в постоянной размерности

В следующей теореме вычисляются асимптотики вероятностей непоглощения в случае, когда размерность d фиксирована, а число шагов n стремится к бесконечности. В случае $d = 2$ данный результат был получен в [218]. Мы пишем $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} y_n$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n = 1$.

Теорема 65. Для любой фиксированной размерности $d \geq 2$, в условиях Теорем 56, 57, 58 выполнено

$$\mathbb{P}[0 \notin H_{n,d}] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \frac{2(\log n)^{d-1}}{(d-1)!n}, & \text{в случае } A_{n-1}, \\ \frac{(\log n)^{d-1}}{2^{d-2}(d-1)!\sqrt{\pi n}}, & \text{в случаях } B_n \text{ и } D_n. \end{cases}$$

Доказательство. В случае A_{n-1} воспользуемся хорошо известной асимптотикой чисел Стирлинга [221]: для фиксированного $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(n-1)!} \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(\log n)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Подставляя данную формулу в утверждение Теоремы 56 (см. также (4.193)) и замечая, что член $\binom{n}{d}$ доминирует все остальные, получаем

$$\mathbb{P}[0 \notin H_{n,d}] = \frac{2}{n!} \left(\binom{n}{d} + \binom{n}{d-2} + \dots \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n!} \binom{n}{d} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2(\log n)^{d-1}}{(d-1)!n}.$$

В случае B_n из определения $B(n, k)$, данного в (4.196), вытекает

$$\begin{aligned} B(n, k) &= (2n-1)!! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{(2i_1-1) \dots (2i_k-1)} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2n-1)!!}{k!} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right)^k \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2n-1)!!}{2^k k!} (\log n)^k, \end{aligned}$$

где в первом переходе мы воспользовались тем, что вклад всех членов суммы, у которых по крайней мере два индекса совпадают, имеет порядок $o((\log n)^k)$.

Подставляя данную асимптотику для $B(n, k)$ в утверждение Теоремы 57 (также см. (4.198)) и замечая, что член $B(n, d-1)$ доминирует все остальные, приходим к

$$\mathbb{P}[0 \notin H_{n,d}] = \frac{2}{2^n n!} (B(n, d-1) + B(n, d-3) + \dots) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2B(n, d-1)}{2^n n!}.$$

Используя асимптотику $B(n, d-1)$ и формулу Стирлинга, получаем

$$\mathbb{P}[0 \notin H_{n,d}] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2 \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{(\log n)^{d-1}}{2^{d-1}(d-1)!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(\log n)^{d-1}}{2^{d-2}(d-1)!\sqrt{\pi n}}.$$

Вычисления в случае D_n аналогичны случаю B_n и приводят к такому же результату. ■

Асимптотики в высокой размерности: центральная предельная теорема

Рассмотрим выпуклую оболочку $H_{n,d}$ симметричного случайного блуждания (или случайного моста) длины n в *высокой* размерности d . Понятно, что если n достаточно мало, то вероятность поглощения должна быть близка к 0, в то время как для достаточно больших n вероятность поглощения близка к 1. Таким образом, при некотором значении n (являющимся функцией d), должен быть фазовый переход от непоглощения к поглощению. Данный переход изучался в [97] и в последующих статьях [214, 215].

В данном разделе мы точно опишем местоположение фазового перехода. Для нас будет удобнее сделать $d = d(n)$ функцией от n , чем рассматривать n как функцию от d . Следующая теорема, в частности, показывает, что фазовый переход наблюдается при $d(n) \approx \frac{1}{2} \log n$ для симметричных случайных блужданий и при $d(n) \approx \log n$ для случайных мостов.

Теорема 66. Пусть размерность $d = d(n)$ такова, что для некоторого $a \in \mathbb{R}$ выполнено

$$d(n) = u \log n + a \sqrt{u \log n} + o(\sqrt{\log n})$$

при $n \rightarrow \infty$, где $u = 1$ в случае A_{n-1} и $u = \frac{1}{2}$ в случаях B_n и D_n . Тогда в условиях любой из Теорем 56, 57, 58,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[0 \notin H_{n,d(n)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-t^2/2} dt. \quad (4.222)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай A_{n-1} . Из Теоремы 56 (см. (4.193)) вытекает

$$\mathbb{P}[0 \notin H_{n,d(n)}] = \frac{2}{n!} \left(\binom{n}{d} + \binom{n}{d-2} + \dots \right). \quad (4.223)$$

Согласно классическому результату Гончарова (см., например, [109, Раздел IX.5] или [24, стр. 63]), числа Стирлинга первого рода удовлетворяют центральной

предельной теореме вида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{d(n)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-t^2/2} dt. \quad (4.224)$$

С другой стороны, числа Стирлинга первого рода унимодальны (по k), являясь при этом коэффициентами (со знаками) характеристического полинома разбиения гиперплоскостями (см. Замечание 35 и (4.217)). Объединяя это с (4.224) и с унимодальностью стандартной нормальной плотности, мы получаем, что мода m_n последовательности $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ удовлетворяет

$$m_n = u \log n + o(\sqrt{\log n}). \quad (4.225)$$

Следовательно, если $a < 0$, тогда $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ монотонно возрастают по k при $k < d(n)$, таким образом,

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{d(n)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \leq \mathbb{P}[0 \notin H_{n,d(n)}] \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{d(n)+1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \quad (4.226)$$

По центральной предельной теореме Гончарова (4.224), из этого вытекает требуемое соотношение (4.222) для $a < 0$. Доказательство для $a > 0$ следует аналогичным образом, если мы рассмотрим дополнение вероятностей $\mathbb{P}[0 \in H_{n,d(n)}]$ и применим монотонность $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ при $k > d(n)$. Наконец, случай $a = 0$ легко разбирается используя непрерывность стандартной нормальной плотности, что завершает доказательство Теоремы 66 в случае A_{n-1} .

Перейдем к случаю B_n . Мы воспользуемся теорией мод-пуассоновской сходимости, разработанной в [105, 150]. Помимо ЦПТ, из мод-пуассоновской сходимости можно вывести множество других предельных теорем.

Рассмотрим целочисленную случайную величину X_n с распределением

$$\mathbb{P}[X_n = k] = \frac{1}{2^n n!} B(n, k), \quad k = 0, \dots, n. \quad (4.227)$$

Заметим, что из (4.196) с $t = 1$ вытекает, что сумма вероятностей действительно равна единице.

Докажем, что X_n удовлетворяет центральной предельной теореме вида

$$\frac{X_n - \frac{1}{2} \log n}{\sqrt{\frac{1}{2} \log n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1), \quad (4.228)$$

что является аналогом (4.224).

Положим $(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$. По определению $B(n, k)$, данном в (4.196), производящая функция моментов величины X_n имеет вид

$$\mathbb{E}[e^{zX_n}] = \frac{1}{2^{2^n n!}} \cdot \frac{(e^z)_{2^n}}{(\frac{1}{2}e^z)_n}.$$

Напомним, что $(x)_n \sim n^x \Gamma(n)/\Gamma(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Это выполняется локально равномерно в \mathbb{C} и следует из формулы Веерштрасса о разложении в бесконечное произведение, примененной к $1/\Gamma(x)$. Применяя данную асимптотику и формулу Стирлинга, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[e^{zX_n}]}{e^{(\frac{1}{2} \log n)(e^z - 1)}} = \frac{2^{e^z} \Gamma(\frac{1}{2}e^z)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(e^z)} \quad (4.229)$$

равномерно в \mathbb{C} .

Знаменатель $e^{(\frac{1}{2} \log n)(e^z - 1)}$ в левой части совпадает с производящей функцией моментов распределения Пуассона с параметром $\frac{1}{2} \log n$. Следовательно, (4.229) означает, что X_n сходится в мод-пуассоновском смысле. По общей теории мод-пуассоновской сходимости (см. [150, Предложение 2.4, часть 2]) это влечет (4.228).

Оставшаяся часть доказательства совершенно аналогична случаю A_{n-1} . Дискретное распределение X_n унимодально по Замечанию 35 и соотношению (4.218), а его мода удовлетворяет (4.225) (с $u = \frac{1}{2}$) по установленной ЦПТ (4.228). По Теореме 57 (см. (4.198)) вкупе с определением X_n , данным в (4.227), и унимодальности $B(n, k)$, получаем, что при $a < 0$ выполнено

$$\mathbb{P}[X_n \leq d(n) - 1] \leq \mathbb{P}[0 \notin H_{n,d(n)}] \leq \mathbb{P}[X_n \leq d(n)]. \quad (4.230)$$

Это является аналогом (4.226) и доказывает требуемое (4.222) в случае B_n при $a < 0$. Случай $a \geq 0$ рассматривается аналогично.

Случай D_n совершенно аналогичен случаю B_n , и в нем возникает та же самая асимптотика. ■

Следствие 30. *Имеет место соотношение:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[0 \notin H_{n,d(n)}] = \begin{cases} 0, & \text{если } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d(n)}{u \log n} < 1, \\ 1, & \text{если } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d(n)}{u \log n} > 1, \\ 1/2, & \text{если } d(n) = u \log n + o(\sqrt{\log n}). \end{cases}$$

Доказательство. Подставляя $a = 0$ в Теореме 66, получаем третий случай. Оставшиеся два случая также следуют из Теоремы 66, так как вероятность $\mathbb{P}[0 \notin H_{n,d}]$ возрастает по d , если мы рассматриваем только четное или только нечетное d (см. Теоремы 56, 57, 58). ■

Асимптотики в высоких размерностях: большие уклонения

В данном разделе мы исследуем асимптотики вероятностей в областях больших уклонений, в которых случайное блуждание делает слишком мало (или, соответственно, слишком много) шагов по сравнению с типичной модой, описанной в предыдущем разделе. Первый результат подобного рода был получен в [97], где было доказано, что для некоторых констант $0 < c_1 < c_2$ поглощение (соответственно, поглощение) возникает с большой вероятностью при условии $n < e^{c_1 d / \log d}$ (соответственно, $n > e^{c_2 d \log d}$). В [214, 215] условия были ослаблены: $n < e^{c_1 d}$ (соответственно, $n > e^{c_2 d}$).

Авторы работ [97], [215], [214] рассмотрели следующие три модели: Броуновское движение, суженное на точки пуассоновского процесса (в [97] и [214]), простое случайное блуждание (в [97] и [214]) и случайное блуждание со стандартными гауссовскими приращениями (в [215]). Наш результат, изложенный ниже, дает точную асимптотику и верен для любых приращений, удовлетворяющих условиям любой из Теорем 56, 57, 58. В частности он применим к случаю стандартных гауссовских приращений и может быть легко адаптирован для

броуновского движения, суженного на точки пуассоновского процесса, так как приращения в данной модели перестановочны. Однако без предположения об абсолютной непрерывности приращений мы можем рассмотреть только один из двух вариантов больших уклонений: из Теоремы 68 вытекает, что вероятность непоглощения полиномиально мала относительно числа шагов n при условии $n > e^{(2+\varepsilon)d}$ (для симметричных случайных блужданий) или $n > e^{(1+\varepsilon)d}$ (для случайных мостов). Таким образом, случай простого случайного блуждания на \mathbb{Z}^d не может быть полностью рассмотрен.

Теорема 67. *Предположим, что $d(n) = ux_n \log n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ для некоторой константы $x > 0$, где $u = 1$ в случае A_{n-1} и $u = \frac{1}{2}$ в случаях B_n и D_n . Тогда в условиях любой из Теорем 56, 57, 58 выполнено*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[0 \notin H_{n,d(n)}] &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{-u(x_n \log x_n - x_n + 1)}}{\sqrt{2\pi x u \log n}} \frac{L(x)}{1 - x^{2u}}, \text{ если } x < 1, \\ \mathbb{P}[0 \in H_{n,d(n)}] &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{-u(x_n \log x_n - x_n + 1)}}{\sqrt{2\pi x u \log n}} \frac{L(x)}{x^{2u} - 1}, \text{ если } x > 1, \end{aligned}$$

где $L(x) = \frac{2}{\Gamma(x)}$ в случае A_{n-1} и $L(x) = \frac{2^x \sqrt{x} \Gamma(x/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(x)}$ в случаях B_n и D_n .

Замечание 37. Рассматривая первые два члена ряда Тейлора функции $x \log x - x + 1$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[0 \notin H_{n,[ux \log n]}] &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{-u(x \log x - x + 1)}}{\sqrt{2\pi x u \log n}} \frac{L(x) x^{\{ux \log n\}}}{1 - x^{2u}}, \text{ если } x < 1, \\ \mathbb{P}[0 \in H_{n,[ux \log n]}] &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{-u(x \log x - x + 1)}}{\sqrt{2\pi x u \log n}} \frac{L(x) x^{\{ux \log n\}}}{x^{2u} - 1}, \text{ если } x > 1, \end{aligned}$$

где $\{y\} = y - [y]$ обозначает дробную часть $y > 0$.

Отметим, что функция $x \log x - x + 1$, $x > 0$, является функцией уклонений стандартного пуассоновского распределения.

Доказательство. Из Примера 3.8 в [105] вытекает, что для любого фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\frac{1}{n!} \left[\begin{matrix} n \\ x_n \log n + k \end{matrix} \right] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{-(x_n \log x_n - x_n + 1)} x^{-k}}{\sqrt{2\pi x \log n} \Gamma(x)}.$$

Как и выше, из общей теории мод-пуассоновской сходимости (см. [105, Теорема 3.4]), которая применима, так как предел в правой части (4.229) является целой функцией без вещественных нулей, получаем

$$\frac{1}{2^n n!} B\left(n, \frac{1}{2} x_n \log n + k\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{-\frac{1}{2}(x_n \log x_n - x_n + 1)} 2^x \Gamma(x/2)}{\sqrt{\pi x \log n} 2\sqrt{\pi} \Gamma(x)} x^{-k/2},$$

$$\frac{1}{2^{n-1} n!} D\left(n, \frac{1}{2} x_n \log n + k\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{-\frac{1}{2}(x_n \log x_n - x_n + 1)} 2^x \Gamma(x/2)}{\sqrt{\pi x \log n} 2\sqrt{\pi} \Gamma(x)} x^{-k/2}.$$

После этого требуемое утверждение получается путем суммирования по четным k в случае A_{n-1} и нечетным k в случаях B_n и D_n , таких что $k \geq 1$ при $x > 1$ или $k \leq 0$ при $x < 1$. Суммирование оправдано по теореме о мажорируемой сходимости и второго утверждения Теоремы 3.4 из [105]. ■

Напомним, что для любого набора случайных векторов (ξ'_1, \dots, ξ'_n) в \mathbb{R}^d , удовлетворяющего всем условиям любой из Теорем 56, 57, 58, кроме условия абсолютной непрерывности, $H'_{n,d}$ обозначает выпуклую оболочку соответствующего типа.

Теорема 68. Для любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1)$ и $C = C(\varepsilon) > 0$, такие что для всех $n > e^{d/(u-\varepsilon)}$ выполнено

$$\mathbb{P}[0 \in H'_{n,d}] \geq 1 - Cn^{-\delta},$$

где $u = 1$ в случае A_{n-1} и $u = \frac{1}{2}$ в случаях B_n и D_n .

Доказательство. Если условие абсолютной непрерывности выполняется, из Теоремы 67 вытекает, что $\mathbb{P}[0 \notin H_{n,d}] \leq Cn^{-\delta}$ для некоторых $\delta \in (0, 1)$ и $C > 0$, так как $d < (u - \varepsilon) \log n$ и функция $x \log x - x + 1$ отделима от 0, если x отделим от 1. Таким образом, доказательство следует из Предложения 26. ■

Естественно предположить, что Теорема 68 точна в следующем смысле:

Гипотеза 69. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1)$ и $C = C(\varepsilon) > 0$,

такие что при всех $n < e^{d/(u+\varepsilon)}$

$$\mathbb{P}[0 \notin H'_{n,d}] \geq 1 - Cn^{-\delta},$$

где $u = 1$ в случае A_{n-1} и $u = \frac{1}{2}$ в случаях B_n и D_n .

4.7.6. Доказательства: случайные выпуклые оболочки и камеры Вейля

В этом разделе мы докажем наши основные вероятностные результаты: Теоремы 56, 57, 58 и 59, вычисляющие вероятности поглощения при условии существования плотности приращений. Мы также здесь докажем Предложение 26, в котором мы даем оценку вероятностей поглощения в общем случае. Доказательства опираются на одну общую идею, однако детали различаются. Обозначения позволяют провести доказательства Теорем 56, 57, 58 одновременно, однако доказательства оставшихся двух результатов будут приведены отдельно.

Группы отражений A_{n-1} , B_n , D_n : доказательства Теорем 56, 57 и 58

Отождествим элементы групп Коксетера A_{n-1} , B_n и D_n с ортогональными преобразованиями $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Камеры Вейля $\mathcal{C}(A_{n-1})$, $\mathcal{C}(B_n)$ и $\mathcal{C}(D_n)$ совпадают с соответствующими фундаментальными областями действий этих групп. Действие группы A_{n-1} оставляет инвариантной гиперплоскость L , задаваемую уравнением $x_1 + \dots + x_n = 0$, таким образом, $\mathcal{C}(A_{n-1}) \cap L$ является фундаментальной областью для действия A_{n-1} , ограниченного на L .

Рассмотрим случайные векторы ξ_1, \dots, ξ_n в \mathbb{R}^d (записанные как столбцы), и пусть A обозначает случайную $d \times n$ -матрицу со столбцами ξ_1, \dots, ξ_n . Можно рассматривать A как случайный линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Ядро $\text{Ker } A$ этого оператора является случайным линейным подпространством в \mathbb{R}^n . Напомним, что $H_{n,d}$ является общим обозначением для выпуклых оболочек, рассматриваемых в Теоремах 56, 57, 58.

Лемма 67. Пусть G обозначает любую из групп Коксетера A_{n-1} , B_n , D_n , и пусть C является соответствующей областью $\mathcal{C}(A_{n-1}) \cap L$, $\mathcal{C}(B_n)$ или $\mathcal{C}(D_n)$. Предположим, что набор (ξ_1, \dots, ξ_n) удовлетворяет всем условиям соответствующей из Теорем 56, 57 или 58, за исключением условия абсолютной непрерывности. Тогда для любого $g \in G$,

$$\mathbb{P}[0 \in H_{n,d}] = \mathbb{P}[\text{Ker } A \cap (g\bar{C}) \neq \{0\}].$$

Доказательство. Нас интересует вероятность события

$$E := \{\text{Ker } A \cap (g\bar{C}) \neq \{0\}\} = \{\text{Ker}(Ag) \cap \bar{C} \neq \{0\}\}.$$

Обозначим e_1, \dots, e_n стандартный базис в \mathbb{R}^n и напомним, что

$$S_1 = \xi_1, \quad S_2 = \xi_1 + \xi_2, \quad \dots, \quad S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

Тип A_{n-1} . Элементы группы A_{n-1} являются ортогональными преобразованиями вида $g_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\sigma \in \text{Sym}(n)$ обозначает перестановку n элементов и

$$g_\sigma(e_k) = e_{\sigma(k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Легко проверить, что столбцы матрицы Ag суть $\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}$. Следовательно,

$$E = \{\exists x \in \bar{C} \setminus \{0\} : \xi_{\sigma(1)}x_1 + \dots + \xi_{\sigma(n)}x_n = 0\}.$$

Существует взаимнооднозначное соответствие между $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{C} \setminus \{0\}$ и $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1} \setminus \{0\}$, заданное как

$$y_1 = x_2 - x_1, \quad \dots, \quad y_{n-1} = x_n - x_{n-1},$$

что эквивалентно

$$x_1 = y_0, \quad x_2 = y_0 + y_1, \quad \dots, \quad x_n = y_0 + \dots + y_{n-1},$$

где $y_0 \in \mathbb{R}$ выбран так, чтобы выполнялось условие $x_1 + \dots + x_n = 0$. Поэтому событие E происходит тогда и только тогда, когда для некоторых y_0, \dots, y_{n-1} ,

удовлетворяющих условию выше, выполнено

$$\xi_{\sigma(1)}y_0 + \xi_{\sigma(2)}(y_0 + y_1) + \cdots + \xi_{\sigma(n)}(y_0 + \cdots + y_{n-1}) = 0.$$

Переставляя члены, перепишем в виде

$$y_0(\xi_{\sigma(1)} + \cdots + \xi_{\sigma(n)}) + y_1(\xi_{\sigma(2)} + \cdots + \xi_{\sigma(n)}) + \cdots + y_{n-1}\xi_{\sigma(n)} = 0.$$

Так как $\xi_1 + \cdots + \xi_n = 0$ п.н., член с y_0 исчезает, и мы получаем

$$y_1\xi_{\sigma(1)} + y_2(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)}) + \cdots + y_{n-1}(\xi_{\sigma(1)} + \cdots + \xi_{\sigma(n-1)}) = 0.$$

Из условия перестановочности (4.188) на распределение (ξ_1, \dots, ξ_n) вытекает

$$(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(1)} + \cdots + \xi_{\sigma(n-1)}) \stackrel{d}{=} (S_1, S_2, \dots, S_{n-1}),$$

что приводит к требуемому соотношению

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E] &= \mathbb{P}[\exists(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1} \setminus \{0\} : y_1S_1 + y_2S_2 + \cdots + y_{n-1}S_{n-1} = 0] \\ &= \mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})]. \end{aligned}$$

Тун B_n . Элементы группы B_n являются ортогональными преобразованиями вида $g_{\sigma, \varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\sigma \in \text{Sym}(n)$ обозначает перестановку n элементов, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$ и

$$g_{\sigma, \varepsilon}(e_k) = \varepsilon_k e_{\sigma(k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Легко проверить, что столбцы матрицы Ag суть $\varepsilon_1\xi_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_n\xi_{\sigma(n)}$. Поэтому событие E можно переписать в виде

$$E = \{\exists x \in \bar{C} \setminus \{0\} : \varepsilon_1\xi_{\sigma(1)}x_1 + \cdots + \varepsilon_n\xi_{\sigma(n)}x_n = 0\}. \quad (4.231)$$

Существует взаимнооднозначное соответствие между $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{C}$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{0\}$, заданное как

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad \dots, \quad x_n = y_1 + \cdots + y_n.$$

Следовательно, условия для события E можно переписать как

$$\varepsilon_1 \xi_{\sigma(1)} y_1 + \varepsilon_2 \xi_{\sigma(2)} (y_1 + y_2) + \cdots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)} (y_1 + \cdots + y_n) = 0,$$

что эквивалентно

$$y_1(\varepsilon_1 \xi_{\sigma(1)} + \cdots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}) + y_2(\varepsilon_2 \xi_{\sigma(2)} + \cdots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}) + \cdots + y_n \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)} = 0.$$

Условие симметричной перестановочности (4.187) на распределение (ξ_1, \dots, ξ_n) влечет

$$(\varepsilon_1 \xi_{\sigma(1)} + \cdots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}, \varepsilon_2 \xi_{\sigma(2)} + \cdots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}, \dots, \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}) \stackrel{d}{=} (S_n, S_{n-1}, \dots, S_1),$$

откуда получаем требуемое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E] &= \mathbb{P}[\exists y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{0\} : y_1 S_n + y_2 S_{n-1} + \cdots + y_n S_1 = 0] \\ &= \mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1, S_2, \dots, S_n)]. \end{aligned}$$

Тун D_n . Данный случай очень похож на случай B_n , так как элементы $D_n \subset B_n$ являются ортогональными преобразованиями $g_{\sigma, \varepsilon}$, такими что $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = 1$. Существует взаимнооднозначное соответствие между $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{C} \setminus \{0\}$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1}) \setminus \{0\}$, заданное как

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = |y_1| + y_2, \quad \dots, \quad x_n = |y_1| + y_2 + \cdots + y_n.$$

Поэтому можно переписать условие, определяющее событие E из (4.231), в виде

$$\varepsilon_1 \xi_{\sigma(1)} y_1 + \varepsilon_2 \xi_{\sigma(2)} (|y_1| + y_2) + \cdots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)} (|y_1| + y_2 + \cdots + y_n) = 0.$$

Перегруппируя члены, получаем равносильное представление

$$\begin{aligned} |y_1|((\text{sgn } y_1) \varepsilon_1 \xi_{\sigma(1)} + \varepsilon_2 \xi_{\sigma(2)} + \cdots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}) \\ + y_2(\varepsilon_2 \xi_{\sigma(2)} + \cdots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}) + \cdots + y_n \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)} = 0. \end{aligned}$$

Напомним, что $S_n^* = \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} - \xi_n$. Условие инвариантности (4.199) на распределение (ξ_1, \dots, ξ_n) влечет

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 \xi_{\sigma(1)} + \dots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}, -\varepsilon_1 \xi_{\sigma(1)} + \dots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}, \\ \varepsilon_2 \xi_{\sigma(2)} + \dots + \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}, \dots, \varepsilon_n \xi_{\sigma(n)}) \stackrel{d}{=} (S_n, S_n^*, S_{n-1}, \dots, S_1). \end{aligned}$$

Поэтому мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[\exists y \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1}) \setminus \{0\} : y_1 S_n + y_2 S_{n-1} + \dots + y_n S_1 = 0 \\ \text{или } y_1 S_n^* + y_2 S_{n-1} + \dots + y_n S_1 = 0], \end{aligned}$$

откуда вытекает

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n) \text{ или } 0 \in \text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n^*)].$$

Чтобы завершить доказательство Леммы 67, надо показать, что

$$\text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n) \cup \text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n^*) = \text{conv}(S_1, \dots, S_n, S_n^*). \quad (4.232)$$

Левая часть является подмножеством правой по определению выпуклой оболочки. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольную выпуклую комбинацию

$$x = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_{n-2} S_{n-2} + \alpha_{n-1} S_{n-1} + \alpha_n S_n + \alpha_n^* S_n^*.$$

Предполагая что $\alpha_n \geq \alpha_n^*$ и используя тождество $S_n^* = 2S_{n-1} - S_n$, получаем

$$x = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_{n-2} S_{n-2} + (\alpha_{n-1} + 2\alpha_n^*) S_{n-1} + (\alpha_n - \alpha_n^*) S_n,$$

что является представлением x в виде выпуклой комбинации S_1, \dots, S_{n-1}, S_n . Аналогичным образом, при $\alpha_n \leq \alpha_n^*$ можно получить представление x в виде выпуклой комбинации $S_1, \dots, S_{n-1}, S_n^*$. ■

Завершим доказательства Теорем 56, 57 и 58. Применяя Лемму 67 ко всем $g \in G$ и беря математическое ожидание, приходим к

$$\mathbb{P}[0 \in H_{n,d}] = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \mathbb{P}[\text{Ker } A \cap (g\bar{C}) \neq \{0\}] = \frac{\mathbb{E} N}{\#G}, \quad (4.233)$$

где случайная величина

$$N := \sum_{g \in G} \mathbb{1}_{\{\text{Ker } A \cap (g\bar{C}) \neq \{0\}\}} \quad (4.234)$$

считает число камер вида $g\bar{C}$, $g \in G$, пересекающихся с $\text{Ker } A$.

В случае A_{n-1} , величина N равна числу замкнутых камер Вейля типа A_{n-1} , нетривиально пересекаемых $\text{Ker } A \cap L$, как сразу видно из уравнения $\text{Ker } A \cap (g\bar{C}) = (\text{Ker} \cap L) \cap g(\overline{C(A_{n-1})})$. В случаях B_n и D_n , величина N равна числу замкнутых камер Вейля соответствующего типа, нетривиально пересекающихся с $\text{Ker } A$.

Мы утверждаем, что с вероятностью единица:

- 1) в условиях Теоремы 56, $\text{Ker } A \cap L$ имеет коразмерность $\min(d+1, n)$ в \mathbb{R}^n и находится в общем положении относительно разбиения $\mathcal{A}(A_{n-1})$;
- 2) в условиях Теоремы 57 или 58, $\text{Ker } A$ имеет коразмерность $\min(d, n)$ в \mathbb{R}^n и находится в общем положении относительно $\mathcal{A}(B_n)$ и $\mathcal{A}(D_n)$.

По Лемме 66, из нашего утверждения будет следовать, что величина N не изменится п.н., если мы заменим \bar{C} на C в определении N . Это будет означать, что N п.н. совпадает с постоянной величиной из Теоремы 61, что докажет Теоремы 56, 57 и 58.

Таким образом, остается доказать приведенное утверждение.

Тип A_{n-1} . Прежде всего отметим, что необходимо рассматривать $\text{Ker } A \cap L$, так как $\text{Ker } A$ не находится в общем положении относительно $\mathcal{A}(A_{n-1})$. Действительно, условие $\xi_1 + \dots + \xi_n = 0$ п.н. влечет $L^\perp \subset \text{Ker } A$ п.н., в то время как L^\perp является пересечением всех гиперплоскостей из $\mathcal{A}(A_{n-1})$.

Будем использовать (x_1, \dots, x_{n-1}) в качестве координат в L . Тогда $x_n = -(x_1 + \dots + x_{n-1})$, и линейное подпространство $(\text{Ker } A) \cap L$ задается уравнением

$$\xi_1 x_1 + \dots + \xi_{n-1} x_{n-1} + (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})(x_1 + \dots + x_{n-1}) = 0,$$

что, используя обозначение $S_{n-1} = \xi_1 + \dots + \xi_{n-1}$, эквивалентно

$$(S_{n-1} + \xi_1)x_1 + \dots + (S_{n-1} + \xi_{n-1})x_{n-1} = 0. \quad (4.235)$$

Это является системой d линейных уравнений относительно x_1, \dots, x_{n-1} . Пространство его решений имеет коразмерность $\min(d, n-1)$ в \mathbb{R}^{n-1} тогда и только тогда, когда ранг системы полный. Последнее выполняется с вероятностью единица, так как случайные векторы $S_{n-1} + \xi_1, \dots, S_{n-1} + \xi_{n-1}$ имеют совместную плотность распределения в $\mathbb{R}^{d(n-1)}$. Это верно, потому что $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ имеют совместную плотность распределения в $\mathbb{R}^{d(n-1)}$ по предположению Теоремы 56, а преобразование $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \mapsto (S_{n-1} + \xi_1, \dots, S_{n-1} + \xi_{n-1})$ является невырожденным линейным преобразованием $\mathbb{R}^{d(n-1)}$ в себя. Таким образом, $(\text{Ker } A) \cap L$ имеет коразмерность $\min(d+1, n)$ в \mathbb{R}^n п.н.

Далее, для любого линейного подпространства $H \subset \mathbb{R}^n$, множество всех наборов $(S_{n-1} + \xi_1, \dots, S_{n-1} + \xi_{n-1})$, таких что $(\text{Ker } A) \cap L$ не в общем положении относительно $H \cap L$, является собственным алгебраическим подмногообразием в $\mathbb{R}^{d(n-1)}$ и, таким образом, имеет вероятность 0. Это верно, так как условие общего положения нарушается тогда и только тогда, когда система линейных уравнений, полученная из (4.235) путем добавления любых $n-1 - \dim(H \cap L)$ линейных уравнений, задающих $H \cap L$, не имеет полный ранг. Следовательно, с вероятностью единица $(\text{Ker } A) \cap L$ находится в общем положении относительно любого разбиения в \mathbb{R}^n и, в частности, относительно $\mathcal{A}(A_{n-1})$.

Типы B_n и D_n . В условиях либо Теоремы 57, либо Теоремы 58, случайные векторы ξ_1, \dots, ξ_n имеют совместную плотность распределения в \mathbb{R}^{dn} . Поэтому множество $d \times n$ -матриц A с неполным рангом $\min(d, n)$ и множество матриц A , таких что $\text{Ker } A$ не находится в общем положении к какому-нибудь фиксированному линейному подпространству $H \subset \mathbb{R}^n$, являются собственными алгебраическими подмногообразиями в \mathbb{R}^{dn} , и, таким образом, оба имеют вероятность ноль. Следовательно, с вероятностью единица линейное подпространство $\text{Ker } A$ имеет коразмерность d в \mathbb{R}^n и находится в общем положении относительно любого фиксированного разбиения гиперплоскостями, в частности, относительно $\mathcal{A}(B_n)$ и $\mathcal{A}(D_n)$.

Случайные блуждания без плотности: доказательство

Предложения 26

Для определенности, рассмотрим случай B_n и докажем только неравенство

$$\mathbb{P}[0 \in H_{n,d}] \leq \mathbb{P}[0 \in H'_{n,d}].$$

Напомним, что (ξ'_1, \dots, ξ'_n) является симметрично перестановочным набором случайных векторов в \mathbb{R}^d и $H'_{n,d} = \text{conv}(S'_1, \dots, S'_n)$ является выпуклой оболочкой частичных сумм $S'_k = \xi'_1 + \dots + \xi'_k$. Пусть A' обозначает $d \times n$ -матрицу со столбцами ξ'_1, \dots, ξ'_n . По Лемме 67,

$$\mathbb{P}[0 \in H'_{n,d}] = \frac{\mathbb{E} N'}{2^n n!},$$

где N' есть число замкнутых камер Вейля типа B_n , нетривиально пересекающихся с $\text{Ker } A'$:

$$N' := \sum_{g \in B_n} \mathbb{1}_{\{\text{Ker } A' \cap (g\bar{C}) \neq \{0\}\}}.$$

Мы не накладываем никаких условий абсолютной непрерывности на (ξ'_1, \dots, ξ'_n) , поэтому мы не можем утверждать, что $\text{Ker } A'$ находится в общем положении относительно разбиения $\mathcal{A}(B_n)$. В частности, случайная величина N' не обязательно постоянна с вероятностью единица. Более того, мы даже не знаем точной коразмерности $\text{Ker } A'$, но можем утверждать, что она не превосходит $\min(d, n)$. Пусть $F \subset \text{Ker } A'$ является произвольным случайным линейным подпространством \mathbb{R}^n коразмерности d п.н. К примеру, можно его задать следующим образом. Положим $\kappa := \min(d - \text{codim}(\text{Ker } A'), n)$ и рассмотрим $F := \bigcap_{i=1}^{\kappa} \xi_i^\perp \cap \text{Ker } A'$, где ξ_1, \dots, ξ_n суть независимые случайные векторы, равномерно распределенные на \mathbb{S}^{n-1} и независимые от A' .

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{P}[0 \in H'_{n,d}] \geq \frac{\mathbb{E} \tilde{N}}{2^n n!}, \quad \text{где } \tilde{N} := \sum_{g \in B_n} \mathbb{1}_{\{F \cap (g\bar{C}) \neq \{0\}\}}.$$

Из Леммы 66 вытекает, что $\tilde{N} \geq N$ п.н. для величины N , определенной в (4.234) с $G = B_n$, и для завершения доказательства остается воспользоваться (4.233).

Прямые произведения групп отражений: Доказательство

Теоремы 59

Группа $G := B_{n_1} \times \cdots \times B_{n_r}$ действует естественным образом на $\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_r} \cong \mathbb{R}^n$, где $n := n_1 + \cdots + n_r$. Элементы G могут быть представлены как наборы вида

$$g = (g_{\sigma^{(1)}, \varepsilon^{(1)}}, \dots, g_{\sigma^{(r)}, \varepsilon^{(r)}}),$$

где $\sigma^{(i)} \in \text{Sym}(n_i)$ суть перестановки, $\varepsilon^{(i)} := (\varepsilon_1^{(i)}, \dots, \varepsilon_{n_i}^{(i)}) \in \{-1, +1\}^{n_i}$ и $g_{\sigma^{(i)}, \varepsilon^{(i)}}$ суть ортогональные преобразования \mathbb{R}^{n_i} , определенные как

$$g_{\sigma^{(i)}, \varepsilon^{(i)}}(e_k^{(i)}) := \varepsilon_k^{(i)} e_{\sigma^{(i)}(k)}^{(i)}, \quad k = 1, \dots, n_i,$$

а $e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)}$ обозначает стандартный базис в \mathbb{R}^{n_i} . Общее число элементов группы G равно $2^{n_1} n_1! \dots 2^{n_r} n_r!$. Рассмотрим выпуклые конусы

$$C^{(i)} := \{(x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{n_i} : 0 < x_1^{(i)} < \cdots < x_{n_i}^{(i)}\} \subset \mathbb{R}^{n_i}$$

и их прямое произведение

$$C := C^{(1)} \times \cdots \times C^{(r)} \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_r} \cong \mathbb{R}^n,$$

которое совпадает с фундаментальной областью для действий группы G на \mathbb{R}^n .

Пусть A обозначает $d \times n$ -матрицу со столбцами $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)}, \dots, \xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n_r}^{(r)}$. Напомним, что $S_k^{(i)} = \xi_1^{(i)} + \cdots + \xi_k^{(i)}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq k \leq n_i$, обозначают частичные суммы. Следующий результат полностью аналогичен Лемме 67.

Лемма 68. *В условиях Теоремы 59, для любого $g \in B_{n_1} \times \cdots \times B_{n_r}$ выполнено*

$$\mathbb{P}[0 \in \text{conv}(S_1^{(1)}, \dots, S_{n_1}^{(1)}, \dots, S_1^{(r)}, \dots, S_{n_r}^{(r)})] = \mathbb{P}[\text{Ker } A \cap (g\bar{C}) \neq \{0\}].$$

Доказательство. Нас интересует вероятность события

$$E := \{\text{Ker } A \cap (g\bar{C}) \neq \{0\}\} = \{\text{Ker}(Ag) \cap \bar{C} \neq \{0\}\}.$$

Столбцы матрицы Ag суть

$$\varepsilon_1^{(1)} \xi_{\sigma^{(1)}(1)}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{n_1}^{(1)} \xi_{\sigma^{(1)}(n_1)}^{(1)}, \dots, \varepsilon_1^{(r)} \xi_{\sigma^{(r)}(1)}^{(r)}, \dots, \varepsilon_{n_r}^{(r)} \xi_{\sigma^{(r)}(n_r)}^{(r)},$$

что легко видеть вычисляя действия Ag на стандартном базисе в \mathbb{R}^n . Поэтому можно переписать событие E в виде

$$E = \left\{ \exists (x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) \in (\bar{C}^{(1)} \times \dots \times \bar{C}^{(r)}) \setminus \{0\} : \sum_{i=1}^r \left(\varepsilon_1^{(i)} \xi_{\sigma^{(i)}(1)} x_1^{(i)} + \dots + \varepsilon_{n_i}^{(i)} \xi_{\sigma^{(i)}(n_i)} x_{n_i}^{(i)} \right) = 0 \right\}. \quad (4.236)$$

Существуют взаимнооднозначные соответствия между $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)}) \in \bar{C}^{(i)}$ и $y^{(i)} = (y_1^{(i)}, \dots, y_{n_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_i}$, заданные как

$$x_1^{(i)} = y_1^{(i)}, \quad x_2^{(i)} = y_1^{(i)} + y_2^{(i)}, \quad \dots, \quad x_{n_i}^{(i)} = y_1^{(i)} + \dots + y_{n_i}^{(i)}.$$

Применяя к каждому члену в (4.236) то же преобразование, что и в доказательстве Леммы 67 в случае B_n , перепишем событие E следующим образом:

$$E = \left\{ \exists (y^{(1)}, \dots, y^{(r)}) \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_r}) \setminus \{0\} : \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} y_k^{(i)} \left(\varepsilon_k^{(i)} \xi_{\sigma^{(i)}(k)} + \dots + \varepsilon_{n_i}^{(i)} \xi_{\sigma^{(i)}(n_i)} \right) = 0 \right\}.$$

Так как условие инвариантности (4.203) влечет равенство распределений

$$\left\{ \varepsilon_k^{(i)} \xi_{\sigma^{(i)}(k)} + \dots + \varepsilon_{n_i}^{(i)} \xi_{\sigma^{(i)}(n_i)} \right\}_{k=1, \dots, n_i} \stackrel{d}{=} \left\{ S_{n_i-k+1}^{(i)} \right\}_{k=1, \dots, n_i},$$

мы приходим к

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P} \left[\exists (y_1^{(1)}, \dots, y_{n_1}^{(1)}, \dots, y_1^{(r)}, \dots, y_{n_r}^{(r)}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{0\} : \sum_{i=1}^r \left(y_1^{(i)} S_{n_i}^{(i)} + y_2^{(i)} S_{n_i-1}^{(i)} + \dots + y_{n_i}^{(i)} S_1^{(i)} \right) = 0 \right].$$

Член в правой части равен вероятности того, что совместная выпуклая оболочка $S_k^{(i)}$, $1 \leq k \leq n_i$, $1 \leq i \leq r$, содержит 0, что завершает доказательство леммы.

■

Завершим доказательство Теоремы 59, действуя точно так же, как и в предыдущем разделе в случае B_n . Равенства (4.233) и (4.234) остаются верными при $G = B_{n_1} \times \dots \times B_{n_r}$ и $H_{n,d} = \text{conv}(S_1^{(1)}, \dots, S_{n_1}^{(1)}, \dots, S_1^{(r)}, \dots, S_{n_r}^{(r)})$. Так

как случайные векторы $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)}, \dots, \xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n_r}^{(r)}$ имеют совместную плотность распределения в \mathbb{R}^{nd} , с вероятностью единица линейное подпространство $\text{Ker } A$ имеет коразмерность d в \mathbb{R}^n и находится в общем положении относительно любого фиксированного разбиения гиперплоскостями.

Очевидно, что разбиение \mathcal{A} в \mathbb{R}^n , чьими областями являются $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{gC\}_{g \in G}$, совпадает с произведением разбиений

$$\mathcal{A}(B_{n_1}) \times \dots \times \mathcal{A}(B_{n_r}) := \{H_{i_1} \times \mathbb{R}^{n-n_1}\}_{H \in \mathcal{A}(B_{n_1})} \cup \{\mathbb{R}^{n_1} \times H_{i_2} \times \mathbb{R}^{n-i_1-i_2}\}_{H \in \mathcal{A}(B_{n_2})} \cup \dots \cup \{\mathbb{R}^{n-n_r} \times H\}_{H \in \mathcal{A}(B_{n_r})}.$$

Характеристический полином такого разбиения совпадает с произведением соответствующих характеристических полиномов (см. Лемму 2.50 на стр. 43 в [173]), следовательно,

$$(-1)^n \chi_{\mathcal{A}(B_{n_1}) \times \dots \times \mathcal{A}(B_{n_r})}(-t) = \prod_{i=1}^r ((t+1)(t+3) \dots (t+2n_i-1)) = \sum_{k=0}^n P(k)t^k.$$

Из Теоремы 60 вытекает

$$N = 2(P(d+1) + P(d+3) + \dots) \quad \text{п.н.}$$

Объединение данного равенства с (4.233) завершает доказательство Теоремы 59.

4.7.7. Открытые вопросы

Наши методы, за исключением оценок в Теореме 68 и в Предложении 26, не применимы к простому случайному блужданию на решетке \mathbb{Z}^d . Следующие открытые вопросы кажутся нетривиальными даже при $d = 2$.

Задача 70. Рассмотрим простое случайное блуждание S_1, \dots, S_n на \mathbb{Z}^d , стартующее из нуля. Какова вероятность того, что $\text{conv}(S_1, \dots, S_n)$ содержит начало координат? Какова условная вероятность того, что $\text{conv}(S_1, \dots, S_{n-1})$ содержит начало координат при условии $S_n = 0$?

Задача 71. Доказать аналоги Теорем 66 и 67 для простого случайного блуждания (и моста) на \mathbb{Z}^d .

Ответ на следующий вопрос должен зависеть от распределения (для $x \neq 0$) и, по-видимому, неизвестен даже для стандартных гауссовских приращений.

Задача 72. Рассмотрим случайное блуждание S_1, \dots, S_n в \mathbb{R}^d , стартующее из нуля. Какова вероятность того, что $\text{conv}(S_1, \dots, S_n)$ содержит данную точку $x \in \mathbb{R}^d$?

Аналогичный вопрос содержателен и для броуновского движения.

Задача 73. Рассмотрим стандартное броуновское движение $\{W(t): t \geq 0\}$ в \mathbb{R}^d , выходящее из нуля. Какова вероятность того, что $\text{conv}\{W(t): 0 \leq t \leq 1\}$ содержит данную точку $x \in \mathbb{R}^d$?

4.8. Формула включений-исключений для выпуклых оболочек

4.8.1. Формулировка результатов

Результаты данного параграфа были получены совместно с Э. Каблучко и Г. Ластом.

Пусть X_1, \dots, X_n является конечной коллекцией⁵ точек в \mathbb{R}^d . Пусть Π обозначает их выпуклую оболочку:

$$\Pi := \text{conv}(X_1, \dots, X_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Кроме того, для любого множества $I \subset \{1, \dots, n\}$ обозначим

$$\Pi_I := \text{conv}(X_i : i \in I)$$

выпуклую оболочку точек $X_i, i \in I$. В этом параграфе нашей целью является получение различных принципов включения-исключения для систем многогранников Π_I , где I пробегает все возможные значения по подмножествам $\{1, \dots, n\}$.

⁵ Так как мы не требуем, чтобы точки были различными, мы используем понятие “коллекция”, “подколлекция” и т.д. вместо “множество”, “подмножество” и т.д.

Напомним, что *многогранник* – это выпуклая оболочка конечного числа точек. По определению, многогранник компактен. Пусть $\text{int } P$ обозначает внутренность многогранника P . *Относительная внутренность* многогранника P , обозначаемая $\text{relInt } P$, это внутренность P относительно его аффинной оболочки. Например, относительной внутренностью точки является сама точка. Как обычно, для стандартных обозначений и сведений из выпуклой геометрии мы отсылаем читателя к [192] или [193].

Обозначим $\mathcal{F}_k(P)$ множество k -мерных (замкнутых) граней P , и пусть $f_k(P)$ обозначает их количество. Обозначим $\dim P$ размерность P и обозначим $\mathcal{F}_\bullet(P) := \cup_{k=0}^{\dim P} \mathcal{F}_k(P)$ множество всех граней многогранника P , включая его самого. Одним из самых важных соотношений, используемых в настоящем параграфе, является классическая формула Эйлера, утверждающая, что (см. [193, стр. 626]) для любого многогранника P выполняется

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_\bullet(P)} (-1)^{\dim F} = \sum_{k=0}^{\dim P} (-1)^k f_k(P) = 1. \quad (4.237)$$

Формула Кована

Рассмотрим конечную коллекцию точек X_1, \dots, X_n в \mathbb{R}^d и зафиксируем дополнительную точку X в \mathbb{R}^d . Для $k = 1, \dots, n$ обозначим $c_k(X)$ число k -элементных подколлекций (X_1, \dots, X_n) , содержащих X в их выпуклой оболочке:

$$c_k(X) = \#\{I \subset \{1, \dots, n\} : \#I = k, X \in \Pi_I\}. \quad (4.238)$$

Здесь $\#B$ обозначает число элементов в множестве B . Кован (см. [88]) показал, что

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c_k(X) = \begin{cases} (-1)^{\dim \Pi}, & \text{если } X \in (\text{relInt } \Pi) \setminus \mathcal{E}, \\ 0, & \text{если } X \notin \text{relInt } \Pi, \end{cases} \quad (4.239)$$

где \mathcal{E} обозначает некоторое “исключительное множество” коразмерности 2. Кован также предположил, что первый случай данной формулы имеет место для *всех* $X \in \text{relInt } \Pi$, и доказал это для $d = 2$. Другое доказательство формулы

Кована можно найти в [193, стр. 309–310], однако в нем также присутствует исключительное множество, а именно, $(d - 2)$ -мерное аффинное подпространство, порожденное X_1, \dots, X_n . Наш первый результат доказывает гипотезу Кована для всех $d \in \mathbb{N}$.

Теорема 74. *Для любой конечной коллекции точек X_1, \dots, X_n в \mathbb{R}^d и для всех $X \in \mathbb{R}^d$ выполнено*

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c_k(X) = \begin{cases} (-1)^{\dim \Pi}, & \text{если } X \in \text{relInt } \Pi, \\ 0, & \text{если } X \notin \text{relInt } \Pi. \end{cases} \quad (4.240)$$

Имеет смысл сравнить данную формулу с хорошо известным принципом включения-исключения, который утверждает, что для любых подмножеств A_1, \dots, A_n множества Ω выполнено

$$\sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} \mathbb{1}_{\cap_{i \in I} A_i} = \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n}, \quad (4.241)$$

$$\sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} \mathbb{1}_{\cup_{i \in I} A_i} = \mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}, \quad (4.242)$$

где $\mathbb{1}_B$ обозначает индикаторную функцию множества B . В терминах индикаторных функций, формула Кована может быть переписана как

$$\sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} \mathbb{1}_{\Pi_I} = (-1)^{\dim \Pi} \mathbb{1}_{\text{relInt } \Pi}. \quad (4.243)$$

Это является аналогом формулы (4.242), если мы рассмотрим выпуклую оболочку в качестве аналога объединения, а внутренность выпуклой оболочки, взятой с “фазовым множителем” $(-1)^{\dim \Pi}$ – в качестве пересечения. Следующая теорема, устанавливающая “дуальную” формулу Кована, служит аналогом формулы (4.241).

Теорема 75. *Для произвольной конечной коллекции точек X_1, \dots, X_n в \mathbb{R}^d выполнено*

$$\sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} (-1)^{\dim \Pi_I} \mathbb{1}_{\text{relInt } \Pi_I} = \mathbb{1}_{\Pi}. \quad (4.244)$$

Из (4.240) можно вывести (4.244), используя формулу обращения Мебиуса (см. раздел 4.8.3). Доказательство (4.240), которое не столь тривиально, изложено в разделе 4.8.3.

Обобщенная эйлерова характеристика

Левая часть (4.240) очень похожа на эйлерову характеристику, но, по-видимому, первоначальное доказательство Кована (см. [88]) не устанавливает никакой взаимосвязи между его формулой и теорией аддитивных функционалов. Мы используем более прямой метод. Вкратце опишем наш подход (детали см. в разделе 4.8.3). Рассмотрим невырожденный симплекс с n вершинами в некотором $(n - 1)$ -мерном линейном пространстве H . Определим аффинное отображение $A : H \rightarrow \mathbb{R}^d$ путем сопоставления вершин симплекса точкам X_1, \dots, X_n . Тогда многогранники Π_I , $I \subset \{1, \dots, n\}$, являются образами граней симплекса. Переходя к преобразованиям, мы можем интерпретировать формулу Кована как утверждение о пересечении аффинных подпространств $A^{-1}(X)$ с гранями симплекса.

Следующий общий факт (который может иметь независимый интерес) является основной частью нашего доказательства. Данный факт вполне может быть известен, однако мы не смогли найти его в литературе.

Теорема 76. *Рассмотрим многогранник T в \mathbb{R}^m с непустой внутренностью $\text{int } T$. Пусть $L \subset \mathbb{R}^m$ является аффинным подпространством размерности $m - d$. Обозначим a_k число k -мерных граней T , пересекаемых L , где $k = 0, \dots, m$. Тогда*

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k a_k = \begin{cases} (-1)^d, & \text{если } L \cap \text{int } T \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } L \cap \text{int } T = \emptyset. \end{cases} \quad (4.245)$$

В частном случае $L = \mathbb{R}^m$ получаем $a_k = f_k(T)$, число k -мерных граней T , и теорема сводится к классической формуле Эйлера (4.237).

Пример 24. Рассмотрим квадрат $ABCD$ и прямую L , проходящую через A и середину стороны BC . Тогда $a_0 = 1$ (вершина A), $a_1 = 3$ (стороны AB , AD , BC) и $a_2 = 1$. Имеем $1 - 3 + 1 = -1$. Пусть L' обозначает прямую, проходящую через A и B . Тогда $a'_0 = 2$ (вершины A и B), $a'_1 = 3$ (стороны AB , AD , BC) и $a'_2 = 1$. Имеем $2 - 3 + 1 = 0$.

Если для каждой грани F многогранника $L \cap T$ существует *единственная* грань G многогранника T , такая что $G \cap L = F$, и если $\dim F = \dim G - d$, то (4.245) является следствием формулы Эйлера (4.237) для многогранника $L \cap T$. Однако несложно построить пример, в котором единственность не выполняется (например, если L является прямой, содержащей некоторые вершины T , $m \geq 2$). Таким образом, основной проблемой является рассмотрение этих случаев “не общего положения”.

Доказательство Теоремы 76 (изложенное в разделе 4.8.2) основано на расширении эйлеровой характеристики на класс ро-многогранников, введенных в рассмотрение Гремером. Данный метод может быть применен для получения других аналогичных результатов, например, следующего. Напомним, что $\mathcal{F}_k(P)$ обозначает множество всех k -мерных граней многогранника P .

Теорема 77. *Рассмотрим два многогранника $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^m$, касающиеся друг друга, т.е. такие что $(\text{relInt } T_1) \cap (\text{relInt } T_2) = \emptyset$, но $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$. Тогда*

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \#\{F \in \mathcal{F}_k(T_1) : F \cap T_2 \neq \emptyset\} = 0. \quad (4.246)$$

Формула включений-исключений для внутренних объемов

Формулу Кована возможно обобщить на случай, когда мы считаем число выпуклых оболочек, пересекающих некоторое аффинное подпространство $F \subset \mathbb{R}^d$, а не точку X . Рассмотрим конечную коллекцию точек X_1, \dots, X_n в \mathbb{R}^d . Для удобства мы предположим, что выпуклая оболочка Π этих точек имеет размерность d . Это не умаляет общности, так как в противном случае

можно заменить \mathbb{R}^d аффинной оболочкой точек X_1, \dots, X_n . Для аффинного подпространства $F \subset \mathbb{R}^d$ и $k = 1, \dots, n$ обозначим $c_k(F)$ число k -элементных подколлекций (X_1, \dots, X_n) , выпуклые оболочки которых пересекают F :

$$c_k(F) = \#\{I \subset \{1, \dots, n\} : \#I = k, F \cap \Pi_I \neq \emptyset\}.$$

Теорема 78. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c_k(F) = \begin{cases} (-1)^{d-\dim F}, & \text{если } F \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } F \cap \text{int } \Pi = \emptyset. \end{cases} \quad (4.247)$$

Данное соотношение сводится к формуле Кована, если F является точкой. В терминах индикаторных функций, Теорему 78 можно переписать следующим образом:

$$\sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} \mathbb{1}_{\{F \cap \Pi_I \neq \emptyset\}} = (-1)^{d-\dim F} \mathbb{1}_{\{F \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset\}}. \quad (4.248)$$

Обозначим $\mathbf{AffGr}(r, d)$ пространство всех r -мерных аффинных подпространств \mathbb{R}^d (аффинное многообразие Грассмана). Известно, что на $\mathbf{AffGr}(r, d)$ существует единственная (с точностью до нормировки) мера μ_r , инвариантная относительно действий группы изометрий \mathbb{R}^d (см. [193, Глава 5.1]). Внутренние объемы

$V_0(K), \dots, V_d(K)$ выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ удовлетворяют формуле Крофтона (см. [193, Теорема 5.1.1]):

$$V_r(K) = \frac{\Gamma\left(\frac{d-r+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \int_{\mathbf{AffGr}(d-r, d)} \mathbb{1}_{\{F \cap K \neq \emptyset\}} \mu_{d-r}(dF), \quad r = 0, \dots, d, \quad (4.249)$$

где мы использовали ту же нормировку для μ_r , что и в [193, Глава 5.1]. Интегрируя (4.248) по $\mathbf{AffGr}(d-r, d)$ по мере $\mu_{d-r}(dF)$, получаем формулу включений-исключений для внутренних объемов, обобщающую результат Кована (см. [88]), который рассмотрел случай $r = d$.

Теорема 79. Для любой конечной коллекции X_1, \dots, X_n точек в \mathbb{R}^d с $\dim \Pi = d$ и произвольного $r = 0, \dots, d$ выполнено

$$\sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} V_r(\Pi_I) = (-1)^r V_r(\Pi). \quad (4.250)$$

Замечание 38. Используя локальную формулу Крофтона (см. [193, Теорема 5.3.3]), можно доказать аналогичное соотношение для мер кривизны Π_I .

Так же, как и в работе Кована [88], можно вывести вероятностные приложения вышеизложенных результатов. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n являются случайными векторами в \mathbb{R}^d . Напомним, что набор (ξ_1, \dots, ξ_n) называется перестановочным, если для любой перестановки σ чисел $\{1, \dots, n\}$

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \stackrel{d}{=} (\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}). \quad (4.251)$$

Например, это условие выполнено, если ξ_1, \dots, ξ_n являются независимыми одинаково распределенными векторами (другие примеры см. в [88]). Для подмножества $I \subset \{1, \dots, n\}$ с $\#I = k$ обозначим

$$v_r(k) := \mathbb{E} V_r(\Pi_I) = \mathbb{E} V_r(\text{conv}(\xi_1, \dots, \xi_k)).$$

Заметим, что данная величина, из свойства перестановочности, не зависит от выбора I .

Теорема 80. Рассмотрим перестановочный набор (ξ_1, \dots, ξ_n) случайных векторов в \mathbb{R}^d , такой что $\dim \Pi = d$ п.н. Пусть $r \in \{0, \dots, d\}$ и $\mathbb{E} V_r(\Pi) < \infty$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} v_r(k) = (-1)^r v_r(n).$$

Замечание 39. Условие $\mathbb{E} V_r(\Pi) < \infty$ выполнено, если $\mathbb{E} |\xi_1|^r < \infty$. Это следует из того, что Π содержится в шаре радиуса $|\xi_1| + \dots + |\xi_n|$ с центром в начале координат и монотонности (см. (4.249)) и однородности внутренних объемов.

Доказательство. [Доказательство Теоремы 80] По свойству монотонности внутренних объемов, предположение $\mathbb{E} V_r(\Pi) < \infty$ влечет $v_r(k) < \infty$ при всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Беря математическое ожидание в (4.250) и замечая, что есть ровно $\binom{n}{k}$ подмножеств I с k элементами, получаем требуемый результат. ■

В случае $r = d$ Теорема 80 сводится к хорошо известному тождеству Бухты [78] (также см. [193, Теорема 8.2.6] и [39, 40, 49, 59, 77, 88]).

Формула включений-исключений для граней

Далее мы сформулируем принцип включений-исключений для граней многогранников Π_I , $I \subset \{1, \dots, n\}$. Данные формулы будут использованы для доказательства вероятностных тождеств (которые были сформулированы в качестве гипотезы Кованом в [89]) о среднем числе граней выпуклых оболочек.

Зафиксируем некоторую конечную коллекцию точек X_1, \dots, X_n в \mathbb{R}^d . Для множества $I \subset \{1, \dots, n\}$ обозначим $b_j(I)$ число j -элементных множеств $J \supset I$, таких что Π_I является гранью Π_J :

$$b_j(I) := \#\{J \subset \{1, \dots, n\} : J \supset I, \#J = j, \Pi_I \text{ является гранью } \Pi_J\}.$$

Теорема 81. *Рассмотрим непустое подмножество $I \subset \{1, \dots, n\}$, такое что⁶ $\Pi_I \cap (X_k : k \notin I) = \emptyset$. Тогда*

$$\sum_{j=\#I}^n (-1)^{j-1} b_j(I) = \begin{cases} (-1)^{\dim \Pi + \#I - 1 - \dim \Pi_I}, & \text{если } \Pi_I \text{ не является гранью } \Pi, \\ 0, & \text{если } \Pi_I \text{ является гранью } \Pi. \end{cases} \quad (4.252)$$

Сформулированное выше условие на I всегда выполняется, если $\#I = 1$ (т.е. Π_I является одиночной точкой) и точки X_1, \dots, X_n различны. Следующий пример показывает, что в общем случае (4.252) вообще говоря не верно.

Пример 25. Рассмотрим точки $X_i = i$, $i = 1, \dots, 5$, на вещественной прямой и возьмем $I = \{2, 4\}$. Очевидно, $\Pi_I = [2, 4]$ является гранью Π_J тогда и только

⁶ Мы пишем $(X_k : k \notin I)$ вместо $\{X_k : k \notin I\}$, так как точки не обязаны быть различными.

тогда, когда $J = \{2, 4\}$ или $J = \{2, 3, 4\}$. Таким образом, $b_1(I) = b_4(I) = b_5(I) = 0$ или $b_2(I) = b_3(I) = 1$. Знакопеременная сумма в (4.252) равна 0, так что (4.252) не выполняется.

Чтобы сформулировать аналог Теоремы 81 без дополнительных условий на I , рассмотрим следующую модифицированную версию $b_j(I)$:

$$b_j^*(I) := \#\{J \subset \{1, \dots, n\} : J \supset I, \#J = j, \Pi_I \text{ чистая грань } \Pi_J\},$$

где слово “чистая” означает, что $\Pi_I \cap (X_k : k \in J \setminus I) = \emptyset$.

Теорема 82. *Для любого непустого подмножества $I \subset \{1, \dots, n\}$ выполнено*

$$\sum_{j=\#I}^n (-1)^{j-1} b_j^*(I) = \begin{cases} (-1)^{\dim \Pi + \#I - 1 - \dim \Pi_I}, & \text{если } \Pi_I \text{ не является гранью } \Pi, \\ 0, & \text{если } \Pi_I \text{ является гранью } \Pi. \end{cases} \quad (4.253)$$

Если выполнено $\Pi_I \cap (X_k : k \notin I) = \emptyset$, то условия “ Π_I является гранью Π_J ” и “ Π_I является чистой гранью Π_J ” становятся эквивалентными, что означает, что Теорема 82 содержит Теорему 81 в качестве частного случая.

Пример 26. Возвращаясь к Примеру 25, мы видим, что Π_I является чистой гранью Π_J тогда и только тогда, когда $J = I = \{2, 4\}$. Следовательно, все $b_j^*(I)$ равны нулю, кроме $b_2^*(I) = 1$, и (4.253) выполнено.

Будем говорить, что коллекция точек X_1, \dots, X_n в \mathbb{R}^d находится в r -общем положении для некоторого $r \in \{1, \dots, d\}$, если любое r -мерное аффинное подпространство содержит не более $r + 1$ точку из этого множества. Напомним, что $f_r(P) = \#\mathcal{F}_r(P)$ обозначает число r -мерных граней многогранника P . Следующий результат является детерминистическим аналогом вероятностной формулы, предложенной Кованом в [89] в качестве гипотезы. Он получается путем суммирования (4.252) по всем подмножествам I с $\#I = r + 1$ (детали см. в разделе 4.8.3).

Теорема 83. Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$ и $r \in \{1, \dots, d\}$. Пусть конечная коллекция точек X_1, \dots, X_n в \mathbb{R}^d находится в r -общем положении и пусть $\dim \Pi = d$. Тогда

$$\sum_{\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J-1} f_r(\Pi_J) = (-1)^d \left(\binom{n}{r+1} - f_r(\Pi) \right). \quad (4.254)$$

В частности, если $n - d$ нечетно, тогда член $f_r(\Pi)$ возникает в обеих частях с разными знаками, и мы приходим к соотношению

$$2f_r(\Pi) = \binom{n}{r+1} + (-1)^n \sum_{\emptyset \neq J \subsetneq \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J-1} f_r(\Pi_J),$$

где член с $J = \{1, \dots, n\}$ исключен из суммирования. Если $n - d$ четно, тогда член $f_r(\Pi)$ сокращается, и мы получаем

$$\sum_{\emptyset \neq J \subsetneq \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J-1} f_r(\Pi_J) = (-1)^d \binom{n}{r+1}.$$

В качестве вероятностного приложения, получим формулу, сформулированную Кованом в [89] и доказанную им в некоторых частных случаях с помощью тождеств Дена-Сомервиля. Пусть (ξ_1, \dots, ξ_n) является перестановочным набором случайных векторов в \mathbb{R}^d (см. (4.251)). Для произвольного подмножества $I \subset \{1, \dots, n\}$ с $\#I = k$ обозначим

$$F_r(k) := \mathbb{E} f_r(\Pi_I) = \mathbb{E} f_r(\text{conv}(\xi_1, \dots, \xi_k))$$

среднее число r -мерных граней Π_I .

Теорема 84. Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$ и $r \in \{1, \dots, d\}$. Пусть (ξ_1, \dots, ξ_n) является перестановочным набором случайных векторов в \mathbb{R}^d , таким что с вероятностью единица $\dim \Pi = d$ и точки ξ_1, \dots, ξ_n находятся в r -общем положении.

Тогда

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} F_r(k) = (-1)^d \left(\binom{n}{r+1} - F_r(n) \right).$$

Доказательство. Возьмем ожидание в (4.254) и заметим, что существует ровно $\binom{n}{k}$ подмножеств J с k элементами. ■

Доказательство тождества Бухты

Бухта (см. [79]) получил несколько интересных тождеств для случайных выпуклых оболочек. Одно из них очень похоже на принцип включений-исключений, рассматриваемый в данном параграфе. Так как Теоремы 80 и 84 имеют детерминистические аналоги, возникает вопрос, нельзя ли найти нечто подобное и для тождества Бухты.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные векторы ξ_1, \dots, ξ_n в \mathbb{R}^d . Предположим, что распределение ξ_i , обозначаемое μ , неатомично (из чего следует, что ξ_1, \dots, ξ_n п.н. различны). Обозначим $N_n := f_0(\Pi)$ число вершин Π и положим

$$M_j := \mu(\text{conv}(\xi_1, \dots, \xi_j))$$

Тождество Бухты (см. [79], а также [193, Теорема 8.2.5]) имеет следующий вид: для всех $l = 1, \dots, n$ выполнено

$$\mathbb{P}[N_n = l] = (-1)^l \binom{n}{l} \sum_{j=1}^l (-1)^j \binom{l}{j} \mathbb{E} M_j^{n-j}. \quad (4.255)$$

Если μ является равномерным распределением на некотором выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^d$, тогда M_j – это просто объем $\text{conv}(\xi_1, \dots, \xi_j)$, деленный на объем K . Ниже мы сформулируем “поточечную” версию (4.255), которая окажется простой формулой включений-исключений. Наше доказательство отличается от оригинального доказательства Бухты [78].

Доказательство (4.255). Пусть $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ обозначает вероятностное пространство, на котором определены ξ_1, \dots, ξ_n . Рассмотрим некоторые события (которые определим позже) $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{F}$ и как обычно обозначим $A_i^c := \Omega \setminus A_i$ дополнение A_i . По принципу включений-исключений,

$$\mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_l \cap A_{l+1}^c \cap \dots \cap A_n^c} = \prod_{i=1}^l (1 - \mathbb{1}_{A_i^c}) \prod_{k=l+1}^n \mathbb{1}_{A_k^c} = \sum_{J \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{l-\#J} \mathbb{1}_{\cap_{i \notin J} A_i^c}, \quad (4.256)$$

где $J = \emptyset$ входит в суммирование, а пересечение по пустому множеству индексов есть Ω . Пусть теперь A_i обозначает событие $\{\xi_i \text{ является вершиной } \Pi\}$,

для $i = 1, \dots, n$. Напомним, что $\mathcal{F}_0(\Pi)$ обозначает множество вершин Π . Тогда (4.256) превращается в так называемую поточечную версию тождества Бухты:

$$\mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_0(\Pi)=\{\xi_1,\dots,\xi_l\}\}} = \sum_{J \subset \{1,\dots,l\}} (-1)^{l-\#J} \mathbb{1}_{\{\xi_i, i \notin J, \text{ не являются вершинами } \Pi\}}. \quad (4.257)$$

Беря математическое ожидание от обеих частей (4.257), приходим к (4.255), так как из перестановочности следует, что

$$\mathbb{P}[N_n = l] = \binom{n}{l} \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{\mathcal{F}_0(\Pi)=\{\xi_1,\dots,\xi_l\}\}}$$

и для любого $J \subset \{1, \dots, l\}$ с $\#J = j$ выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\xi_i, i \notin J, \text{ не являются вершинами } \Pi] &= \mathbb{P}[\{\xi_i : i \notin J\} \subset \text{conv}(\xi_k : k \in J)] \\ &= \mathbb{E} [M_j^{n-j}]. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что условная вероятность события $\{\xi_i : i \notin J\} \subset \text{conv}(\xi_k : k \in J)$ при условии $\{\xi_k : k \in J\}$ равна M_j^{n-j} .

В отличие от большинства доказательств данного параграфа, вышеизложенные аргументы почти полностью комбинаторной природы и не используют такие топологические понятия, как эйлерова характеристика.

4.8.2. Доказательство обобщенной формулы Эйлера

В этом разделе мы докажем Теоремы 76 и 77. Прежде всего, напомним некоторые факты о продолжении эйлеровой характеристики на класс ро-полиэдров (см. [123], а также [193, Глава 14.4]).

Эйлерова характеристика ро-многогранников

Ро-многогранником называется относительная внутренность некоторого многогранника. Конечное объединение ро-многогранников (необязательно одинаковой размерности) называется *ро-полиэдром*. Известно (см. [123] или [193],

стр. 625, Теорема 14.4.5) что существует единственная функция χ (*эйлерова характеристика*), заданная на семействе ро-полиэдров в \mathbb{R}^m и обладающая следующими свойствами:

- (a) $\chi(\emptyset) = 0$.
- (b) χ аддитивна, т.е. $\chi(M \cup N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N)$ для любых ро-полиэдров M и N .
- (c) Для непустого выпуклого многогранника P выполнено $\chi(P) = 1$ и $\chi(\text{relInt } P) = (-1)^{\dim P}$.

Для доказательства следующей леммы мы отсылаем читателя к Теореме 14.4.1 из [193].

Лемма 69. *Если $A_1, \dots, A_s \subset \mathbb{R}^m$ являются ро-полиэдрами, такими что $\sum_{i=1}^s a_i \mathbb{1}_{A_i} = 0$ для некоторых $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{Z}$, то*

$$\sum_{i=1}^s a_i \chi(A_i) = 0.$$

Доказательство Теоремы 76

Напомним, что $\mathcal{F}_k(T)$ обозначает множество всех k -мерных граней многогранника T и $\mathcal{F}_\bullet(T) = \cup_{k=0}^m \mathcal{F}_k(T)$ есть множество всех граней T . Заметим, что $\mathcal{F}_m(T)$ содержит ровно один элемент, сам многогранник T .

Многогранник T может быть представлен как непересекающееся объединение своих открытых граней:

$$T = \cup_{G \in \mathcal{F}_\bullet(T)} \text{relInt } G. \quad (4.258)$$

Как было замечено в [171], вместе со свойствами χ это немедленно влечет следующее эйлерово соотношение:

$$1 = \chi(T) = \sum_{G \in \mathcal{F}_\bullet(T)} \chi(\text{relInt } G) = \sum_{G \in \mathcal{F}_\bullet(T)} (-1)^{\dim G}.$$

В качестве следствия можно получить (см. [193, стр. 627, равенство (14.64)] или [125, стр. 137]), что для любой грани $G \in \mathcal{F}_\bullet(T)$, отличной от T , выполнено

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_\bullet(T): F \supset \text{relInt } G} (-1)^{\dim F} = \sum_{F \in \mathcal{F}_\bullet(T): F \supset G} (-1)^{\dim F} = 0. \quad (4.259)$$

Из (4.258) и (4.259) легко выводится формула включений-исключений для индикаторной функции внутренности T , которая выполняется поточечно:

$$\mathbb{1}_{\text{int } T} = \sum_{k=0}^m \sum_{F \in \mathcal{F}_{m-k}(T)} (-1)^k \mathbb{1}_F.$$

Домножая обе части на $\mathbb{1}_L$ и заменяя k на $m - k$, получаем

$$\mathbb{1}_{L \cap \text{int } T} = \sum_{k=0}^m \sum_{F \in \mathcal{F}_k(T)} (-1)^{m-k} \mathbb{1}_{F \cap L}.$$

Вместе с Леммой 69 это влечет

$$\chi(L \cap \text{int } T) = \sum_{k=0}^m \sum_{F \in \mathcal{F}_k(T)} (-1)^{m-k} \chi(F \cap L). \quad (4.260)$$

Левая часть (4.260) равна

$$\chi(L \cap \text{int } T) = \begin{cases} (-1)^{m-d}, & \text{если } L \cap \text{int } T \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } L \cap \text{int } T = \emptyset, \end{cases}$$

так как пересечение $L \cap \text{int } T$ либо является $(m - d)$ -мерным ромногранником (в этом случае его эйлерова характеристика равна $(-1)^{m-d}$), либо пусто (в этом случае эйлерова характеристика обнуляется). Что касается правой части (4.260), каждый член $\chi(F \cap L)$ равен либо 0 (если $F \cap L = \emptyset$), либо 1 (если $F \cap L$ является непустым многогранником), следовательно,

$$\sum_{k=0}^m \sum_{F \in \mathcal{F}_k(T)} (-1)^{m-k} \chi(F \cap L) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} a_k.$$

Объединяя все вместе, получаем требуемое соотношение.

Доказательство Теоремы 77

Как и в прошлом доказательстве, начнем с соотношения

$$\mathbb{1}_{\text{relInt } T_1} = \sum_{k=0}^m \sum_{F \in \mathcal{F}_{m-k}(T_1)} (-1)^k \mathbb{1}_F.$$

Домножая обе части на $\mathbb{1}_{T_2}$, используя $(\text{relInt } T_1) \cap T_2 = \emptyset$ и заменяя k на $m-k$, получаем

$$0 = \sum_{k=0}^m \sum_{F \in \mathcal{F}_k(T_1)} (-1)^k \mathbb{1}_{F \cap T_2}.$$

Вместе с Леммой 69 это приводит к

$$\sum_{k=0}^m \sum_{F \in \mathcal{F}_k(T_1)} (-1)^k \chi(F \cap T_2) = 0.$$

Заметим, что $F \cap T_2$ является многогранником (возможно пустым), следовательно,

$$\chi(F \cap T_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } F \cap T_2 \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } F \cap T_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Это влечет

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \#\{F \in \mathcal{F}_k(T_1) : F \cap T_2 \neq \emptyset\} = 0,$$

что завершает доказательство.

4.8.3. Доказательство формул включений-исключений

Доказательство Теоремы 74

Не умаляя общности, мы можем предположить, что $\dim \Pi = d$, иначе заменим \mathbb{R}^d аффинной оболочкой X_1, \dots, X_n . Рассмотрим линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, заданный на стандартном базисе e_1, \dots, e_n в \mathbb{R}^n следующим образом:

$$Ae_1 := X_1, \dots, Ae_n := X_n.$$

Рассмотрим стандартный $(n - 1)$ -мерный симплекс

$$S := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0, \infty)^n : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Его $(k - 1)$ -мерные грани имеют вид

$$S_{i_1, \dots, i_k} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S : \alpha_i = 0 \text{ при всех } i \notin \{i_1, \dots, i_k\}\},$$

где $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ и $k \in \{1, \dots, n\}$. Следующая лемма интерпретирует формулу Кована как утверждение о числе граней симплекса S , пересеченных аффинным подпространством $A^{-1}(X)$. Несколько похожая идея была использована в § 4.8.

Лемма 70. *Для произвольной точки $X \in \mathbb{R}^d$ и любых индексов $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ следующие утверждения эквивалентны:*

$$(i) \quad X \in \text{conv}(X_{i_1}, \dots, X_{i_k});$$

$$(ii) \quad A^{-1}(X) \cap S_{i_1, \dots, i_k} \neq \emptyset.$$

Доказательство. Множество $A^{-1}(X) \cap S_{i_1, \dots, i_k}$ непусто тогда и только тогда, когда существует $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S$, такое что $\alpha_i = 0$ при всех $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ и

$$A(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = X.$$

В силу определения A , это означает, что

$$\alpha_{i_1} X_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} X_{i_k} = X,$$

что равносильно $X \in \text{conv}(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$. ■

Перейдем к доказательству Теоремы 74. Зафиксируем $X \in \mathbb{R}^d$. Применим Теорему 76 к многограннику $T := S$, лежащему в гиперплоскости $H : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ (которую мы отождествляем с \mathbb{R}^{n-1} , т.е. $m = n - 1$) и к аффинному подпространству $L := A^{-1}(X) \cap H$.

Покажем, что коразмерность L в гиперплоскости H равна d . Напомним, что мы предположили, что $\Pi = \text{conv}(X_1, \dots, X_n)$ имеет размерность d . Следовательно, линейная оболочка векторов $X_2 - X_1, \dots, X_n - X_1$ есть все пространство \mathbb{R}^d . Это означает, что для любого $x \in \mathbb{R}^d$ существует решение (v_2, \dots, v_n) уравнения $v_2(X_2 - X_1) + \dots + v_n(X_n - X_1) = x$. Полагая $v_1 = -(v_2 + \dots + v_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$, получаем решение v уравнения $Av = x$ в гиперплоскости $H_0: v_1 + \dots + v_n = 0$. Так как $AH_0 = \mathbb{R}^d$, то $AH = \mathbb{R}^d$ и поэтому $L = A^{-1}(X) \cap H$ имеет коразмерность d в H .

По Лемме 70, $c_k(X)$, определенное в (4.238), равно a_{k-1} , числу $(k-1)$ -мерных граней S , пересекаемых L . Следовательно, из Теоремы 76 мы получаем, что

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c_k(X) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_j = \begin{cases} (-1)^d, & \text{если } L \cap \text{relInt } S \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } L \cap \text{relInt } S = \emptyset. \end{cases}$$

Остается доказать, что $L \cap \text{relInt } S \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $X \in \text{relInt } \Pi$. В самом деле, X принадлежит относительной внутренности $\text{conv}(X_1, \dots, X_n)$ тогда и только тогда, когда существует точка со строго положительными координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S$, такая что $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n = X$ (см. [192, Теорема 1.1.14]). А это эквивалентно $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in L \cap \text{relInt } S$.

Доказательство Теоремы 75

Применяя Теорему 74 в индикаторной форме (4.243) к каждой Π_I и меняя порядок суммирования, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} (-1)^{\dim \Pi_I} \mathbb{1}_{\text{relInt } \Pi_I} &= \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} \sum_{\emptyset \neq J \subset I} (-1)^{\#J-1} \mathbb{1}_{\Pi_J} \\ &= \sum_{\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J-1} \mathbb{1}_{\Pi_J} \sum_{I \supset J} (-1)^{\#I-1} \\ &= \mathbb{1}_{\Pi}, \end{aligned}$$

где на последнем шаге мы воспользовались соотношением

$$\sum_{I \supset J} (-1)^{\#I-1} = \begin{cases} (-1)^{n-1}, & \text{если } J = \{1, \dots, n\}, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Доказательство Теоремы 78

Мы можем считать, что F является собственным аффинным подпространством, так как случай, когда F является точкой, был рассмотрен в Теореме 74, в то время как случай $F = \mathbb{R}^n$ сводится к тождеству

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = 1.$$

Так как задача инвариантна относительно одновременного переноса X_1, \dots, X_n и F , мы можем предполагать, что F содержит начало координат. Идея состоит в применении формулы Кована (4.240) к спроецированным точкам $X_1|F^\perp, \dots, X_n|F^\perp$. Заметим, что для любого множества $I \subset \{1, \dots, n\}$ выпуклая оболочка $\text{conv}(X_i|F^\perp : i \in I)$ пересекает F тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка $(S(X_i) : i \in I)$ содержит начало координат. Это следует из того, что операция взятия выпуклой оболочки перестановочна с линейными отображениями. Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c_k(F) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I=k}} \mathbb{1}_{\{F \cap \Pi_I \neq \emptyset\}} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I=k}} \mathbb{1}_{\{0 \in \text{conv}(X_i|F^\perp : i \in I)\}} \\ &= \begin{cases} (-1)^{d-\dim F}, & \text{если } 0 \in \text{relInt } \Pi|F^\perp, \\ 0, & \text{если } 0 \notin \text{relInt } \Pi|F^\perp, \end{cases} \end{aligned}$$

где последний шаг следует из Теоремы 74, примененной к точкам $X_1|F^\perp, \dots, X_n|F^\perp \in F^\perp$. Для завершения доказательства заметим, что начало

координат содержится в относительной внутренности $\Pi|F^\perp = \text{conv}(X_1|F^\perp, \dots, X_n|F^\perp)$ тогда и только тогда, когда F пересекает внутренность Π . Это следует из того, что проекция внутренности Π совпадает с относительной внутренностью $\Pi|F^\perp$.

Доказательство Теоремы 82

Идея такова: мы покажем, что, по существу, Π_I является гранью Π_J тогда и только тогда, когда аффинное подпространство, порожденное Π_I , не пересекается с $\Pi_{J \setminus I}$. После этого будет возможно применить Теорему 78.

Обозначим $\text{aff } V$ аффинную оболочку коллекции точек V .

Лемма 71. *Для непустых множеств $I \subset J \subset \{1, \dots, n\}$ следующие два условия равносильны:*

(i) Π_I является чистой гранью Π_J ;

(ii) $\text{aff}(X_i: i \in I) \cap \text{conv}(X_k: k \in J \setminus I) = \emptyset$.

Доказательство. [Доказательство импликации (i) \Rightarrow (ii)] Пусть Π_I является чистой гранью Π_J . По определению грани, существует аффинная гиперплоскость H , разделяющая \mathbb{R}^d на два замкнутых подпространства H_+ и H_- , таких что $H \cap \Pi_J = \Pi_I$ и $\Pi_J \subset H_+$. Так как Π_I чистая, имеем $\Pi_I \cap (X_k: k \in J \setminus I) = \emptyset$, что влечет $H \cap (X_k: k \in J \setminus I) = \emptyset$. Поэтому $(X_k: k \in J \setminus I)$ содержится во внутренности H_+ . Следовательно, $\text{conv}(X_k: k \in J \setminus I)$ не пересекает H . Так как $\text{aff}(X_i: i \in I)$ является подмножеством H , получаем (ii). ■

Доказательство. [Доказательство импликации (ii) \Rightarrow (i)] Будем рассуждать от противного. Предположим, что Π_I не является гранью Π_J . Тогда мы можем представить некоторую точку Π_I в виде нетривиальной выпуклой комбинации двух точек из Π_J , по крайней мере одна из которых не содержится в Π_I :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i X_i = \lambda \sum_{k \in J} \beta_k X_k + (1 - \lambda) \sum_{k \in J} \gamma_k X_k,$$

где $\lambda \in (0, 1)$ и $(\alpha_i)_{i \in I}$, $(\beta_k)_{k \in J}$, $(\gamma_k)_{k \in J}$ являются коллекциями неотрицательных чисел с суммой 1 каждая. Пусть, к примеру, $\sum_{k \in J} \beta_k X_k \notin \Pi_I$. Это означает, что хотя бы для одного $k_0 \in J \setminus I$ выполнено $\beta_{k_0} > 0$. Тогда можно написать

$$\frac{1}{C} \sum_{i \in I} (\alpha_i - \lambda \beta_i - (1 - \lambda) \gamma_i) X_i = \sum_{k \in J \setminus I} \frac{\lambda \beta_k + (1 - \lambda) \gamma_k}{C} X_k,$$

где $C := \sum_{l \in J \setminus I} (\lambda \beta_l + (1 - \lambda) \gamma_l) > \lambda \beta_{k_0} > 0$. Левая часть принадлежит $\text{aff}(X_i : i \in I)$, в то время как правая часть принадлежит $\text{conv}(X_k : k \in J \setminus I)$, что является противоречием. Следовательно, Π_I является гранью Π_J . Из условия (ii) вытекает, что $\Pi_I \cap (X_k : k \in J \setminus I) = \emptyset$, поэтому Π_I является чистой гранью Π_J . \blacksquare

Доказательство. [Доказательство Теоремы 82] Как обычно, мы можем предположить, что аффинная оболочка (X_1, \dots, X_n) совпадает со всем \mathbb{R}^d (что равносильно $\dim \Pi = d$). Для непустого множества $I \subset \{1, \dots, n\}$ положим

$$S^*(I) := \{J \subset \{1, \dots, n\} : J \supset I, \Pi_I \text{ является чистой гранью } \Pi_J\}.$$

Обозначим $L = L_I$ аффинную оболочку $\{X_i : i \in I\}$. Имеем:

$$\begin{aligned} N &:= \sum_{K \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#K} \mathbb{1}_{\{\Pi_K \cap L = \emptyset\}} \\ &= \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, n\} \\ K \cap I = \emptyset}} (-1)^{\#K} \mathbb{1}_{\{\Pi_K \cap L = \emptyset\}} \\ &= \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \supset I}} (-1)^{\#J - \#I} \mathbb{1}_{\{\Pi_{J \setminus I} \cap L = \emptyset\}}, \end{aligned}$$

где в последнем выражении мы обозначили J дизъюнктное объединение I и K .

Применяя Лемму 71, получаем

$$\begin{aligned} N &= \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \supset I}} (-1)^{\#I - \#J} \mathbb{1}_{\{J \in S^*(I)\}} = (-1)^{\#I} \sum_{J \in S^*(I)} (-1)^{\#J} \\ &= (-1)^{\#I - 1} \sum_{j=\#I}^n (-1)^{j-1} b_j^*(I). \end{aligned}$$

С другой стороны, из Теоремы 78 вытекает

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{K \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#K} - \sum_{K \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#K} \mathbb{1}_{\{\Pi_K \cap L \neq \emptyset\}} \\
&= \sum_{K \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#K-1} \mathbb{1}_{\{\Pi_K \cap L \neq \emptyset\}} \\
&= \begin{cases} (-1)^{d-\dim \Pi_I}, & \text{если } L \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } L \cap \text{int } \Pi = \emptyset. \end{cases}
\end{aligned}$$

Сравнивая эти два выражения для N , получаем

$$\sum_{j=\#I}^n (-1)^{j-1} b_j^*(I) = \begin{cases} (-1)^{d+\#I-1-\dim \Pi_I}, & \text{если } L \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } L \cap \text{int } \Pi = \emptyset, \end{cases}$$

что завершает доказательство, так как $L \cap \text{int } \Pi = \emptyset$ тогда и только тогда, когда Π_I является гранью Π . ■

Доказательство Теоремы 83

Для множества $I \subset \{1, \dots, n\}$ положим

$$S(I) := \{J \subset \{1, \dots, n\} : J \supset I, \Pi_I \text{ является гранью } \Pi_J\}.$$

Условия, наложенные на X_1, \dots, X_n , означают, что каждая r -мерная грань Π_I должна иметь вид Π_I для некоторого единственного $I \subset J$ с $\#I = r + 1$.

Применяя Теорему 81, получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J-1} f_r(\Pi_J) &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I=r+1}} \sum_{J \in S(I)} (-1)^{\#J-1} \\
&= (-1)^d \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I=r+1}} \mathbb{1}_{\{\Pi_I \text{ не является гранью } \Pi\}} \\
&= (-1)^d \left(\binom{n}{r+1} - f_r(\Pi) \right),
\end{aligned}$$

где последний шаг следует из того, что существует ровно $\binom{n}{r+1}$ подмножеств I с $\#I = r + 1$.

Обозначения

$\text{cone } A$ выпуклая коническая оболочка A , page 282

$\text{conv } A$ выпуклая оболочка A , page 207

$\Delta(p)$ минимальное расстояние между нулями p , page 183

δ_x единичная масса в точке x , page 7

λ мера Лебега на \mathbb{C} , page 77

$\lambda_k(A)$ мера Хаусдорфа множества A размерности k , page 52

$\mathbf{AffGr}(k, d)$ аффинное многообразие Грассмана, page 361

$\mathbf{Gr}(k, d)$ линейное многообразие Грассмана, page 303

μ_g считающая мера нулей функции g , page 7

∇f градиент функции f , page 52

ω_k площадь k -мерной сферы, page 63

∂A граница множества A , page 52

$\text{relInt } A$ относительная внутренность A , page 286

\mathbb{S}^{d-1} единичная $(d - 1)$ -мерная сфера, page 54

$\sigma_i(\mathbf{x})$ элементарные симметрические функции, page 45

$\theta(A)$ число точек в A с целочисленными координатами, page 179

$\theta^*(A)$ число точек в A с целочисленными взаимнопростыми координатами, page 179

\mathbb{T} единичная окружность в \mathbb{C} , page 74

$v_k(\cdot)$ конический внутренний объем, page 208

A^c событие, противоположное событию A , page 26

J_f матрица Якоби отображения f , page 48

$Q(\eta; r)$ функция концентрации случайной величины η , page 15

$V_k(\cdot)$ внутренний объем множества, page 204

$k(\cdot)$ полухвостовой функционал, page 208

Список литературы

1. Д. Н. Бернштейн. Число корней системы уравнений. *Функц. анализ и его прил.*, 9:1–4, 1975.
2. В. И. Богачев. *Гауссовские меры*. Наука, 1997.
3. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. *Геометрические неравенства*. Наука, 1980.
4. А. В. Ефимов. *Математический анализ (специальные разделы). Том I*. Высшая школа, 1980.
5. Д. Н. Запорожец. О распределении числа вещественных корней случайного полинома. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 320:69–79, 2004.
6. Д. Н. Запорожец. Случайные полиномы и геометрическая вероятность. *Докл. Акад. Наук*, 71:53–57, 2005.
7. Д. Н. Запорожец. Пример случайного полинома с необычным поведением корней. *Теория вероятн. и ее примен.*, 50:549–555, 2005.
8. Д. Н. Запорожец, И. А. Ибрагимов. О площади случайной поверхности. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 384:154–175, 2010.
9. Д. Н. Запорожец, З. Каблучко. Случайные определители, смешанные объемы эллипсоидов и нули гауссовских случайных полей. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 408:187–196, 2012.
10. Д. Н. Запорожец, А. И. Назаров. Как мало бывает корней у случайного полинома в среднем? *Теория вероятн. и ее примен.*, 53:40–58, 2008.
11. И. А. Ибрагимов, Н. Б. Маслова. Среднее число вещественных корней случайных полиномов. *Докл. Акад. Наук СССР*, 199:1004–1008, 1971.
12. И. А. Ибрагимов, Н. Б. Маслова. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов. I. Коэффициенты с нулевым средним. *Теория вероятн. и ее примен.*, 16:228–248, 1971.
13. И. А. Ибрагимов, Н. Б. Маслова. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов. II. Коэффициенты с ненулевым средним. *Теория*

- вероятн. и ее примен.*, 16:495–503, 1971.
14. И. А. Ибрагимов, С. С. Подкорытов. О случайных вещественных алгебраических поверхностях. *Докл. Акад. Наук*, 343:734–736, 1995.
 15. М. Кац. *Вероятность и смежные вопросы в физике*. Мир, 1965.
 16. Д. В. Коледа. О частоте целочисленных многочленов с заданным числом близких корней. *Тр. Ин-та матем.*, 20:51–63, 2012.
 17. Д. В. Коледа. О распределении действительных алгебраических чисел второй степени *Весці НАН Беларусі*, 56:54–63, 2013.
 18. А. Н. Колмогоров. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. *Докл. Акад. Наук СССР*, 26:115–118, 1940.
 19. А. Н. Колмогоров. *Основные понятия теории вероятностей*. ФАЗИС, 1998.
 20. А. Г. Курош. *Курс высшей алгебры*. Наука, 1978.
 21. М. Лидбеттер, Г. Линдгрэн, Х. Ротсен. *Экстремумы случайных последовательностей и процессов*. Мир, 1989.
 22. А. И. Маркушевич. *Краткий курс теории аналитических функций*. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957.
 23. А. И. Маркушевич. *Теория аналитических функций. Дальнейшее построение теории. Том 2*. ЛАНЬ, 2009.
 24. В. Б. Невзоров. *Рекорды. Математическая теория*. ФАЗИС, 2000.
 25. Г. Нидеррейтер, Л. Кейперс. *Равномерное распределение последовательностей*. Наука, 1985.
 26. В. В. Петров. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*. Наука, 1987.
 27. А. М. Островский. *Решение уравнений и систем уравнений*. Издательство иностранной литературы, 1963.
 28. Б. А. Рогозин. Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин. *Теория вероятн. и ее примен.*, 6:106–108, 1961.

29. Л. Сантало. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности*. Наука, 1983.
30. В. Г. Спринджук. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S -чисел. *Изв. АН СССР*, 29:379–436, 1965.
31. В. Г. Спринджук. *Проблема Малера в метрической теории чисел*. Наука и Техника, 1967.
32. В. Н. Судаков. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. *Тр. МИАН СССР*, 141:3–191, 1976.
33. Р. Хорн, Ч. Джонсон. *Матричный анализ*. Мир, 1989.
34. Б. С. Цирельсон. Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига I. *Теория вероятн. и ее примен.*, 27:388–395, 1982.
35. Б. С. Цирельсон. Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига II. *Теория вероятн. и ее примен.*, 30:772–779, 1985.
36. Б. С. Цирельсон. Естественная модификация случайного процесса и ее приложение к случайным функциональным рядам и гауссовским мерам. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 55:35–63, 1976.
37. Д. И. Шпаро, М. Г. Шур. О распределении корней случайных полиномов. *Вестн. Моск. ун-та*, 3:40–43, 1962.
38. R. Adler and J. Taylor. *Random fields and geometry*. Springer, 2009.
39. F. Affentranger. Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points. *Elem. Math.*, 43:39–45, 1988.
40. F. Affentranger. Remarks on the note: “Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points”. *Elem. Math.*, 43:151–152, 1988.
41. F. Affentranger and R. Schneider. Random projections of regular simplices. *Discrete Comput. Geom.*, 7:219–226, 1992.
42. C. Allendoerfer. Steiner’s formulae on a general S^{n+1} . *Bull. Amer. Math. Soc.*,

- 54:128–135, 1948.
43. D. Amelunxen. *Geometric analysis of the condition of the convex feasibility problem*. PhD thesis, 2011.
 44. D. Amelunxen, M. Lotz, M. McCoy, and J. Tropp. Living on the edge: Phase transitions in convex programs with random data. *Inform. Inference*, 3:224–294, 2014.
 45. L. Arnold. Über die Nullstellenverteilung zufälliger Polynome. *Math. Z.*, 92:12–18, 1966.
 46. J.-M. Azaïs and M. Wschebor. On the Distribution of the Maximum of a Gaussian Field with d Parameters. *Ann. Appl. Probab.*, 15:254–278, 2005.
 47. J.-M. Azaïs and M. Wschebor. *Level sets and extrema of random processes and fields*. John Wiley & Sons, 2009.
 48. P. Bachmann. *Die analytische Zahlentheorie. Vol. II*, BG Teubner, 1894.
 49. E. Badertscher. An explicit formula about the convex hull of random points. *Elem. Math.*, 44:104–106, 1989.
 50. A. Baker and W. Schmidt. Diophantine approximation and Hausdorff dimension. *Proc. London Math. Soc.*, 3:1–11, 1970.
 51. A. Balakrishnan. Research problem no. 9: Geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69:737–738, 1963.
 52. A. Balakrishnan. Signal selection for space communication channels. In *Advances in Communication Systems*, 1–31. Academic Press, 1965.
 53. O. Barndorff-Nielsen and G. Baxter. Combinatorial lemmas in higher dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:313–325, 1963.
 54. E. Barnes. The genesis of the double Gamma functions. *Lond. Math. Soc. Proc.*, 31:358–381, 1899.
 55. A. Barvinok. Computing mixed discriminants, mixed volumes, and permanents. *Discrete Comput. Geom.*, 18:205–237, 1997.
 56. A. Barvinok. *A course in convexity*. AMS, 2002.
 57. H. Bateman and A. Erdélyi. *Higher transcendental functions. Vol. I*. Robert

- Krieger Publishing Company, 1981.
58. G. Baxter. A combinatorial lemma for complex numbers. *Ann. Math. Statist.*, 32:901–904, 1961.
 59. M. Beermann and M. Reitzner. Beyond the Efron-Buchta identities: distributional results for Poisson polytopes. *Discrete Comput. Geom.*, 53:226–244, 2015.
 60. V. Bentkus, B.-Y. Jing, Q.-M. Shao, and W. Zhou. Limiting distributions of the non-central t -statistic and their applications to the power of t -tests under non-normality. *Bernoulli*, 13:346–364, 2007.
 61. V. Beresnevich. On approximation of real numbers by real algebraic numbers. *Acta Arith.*, 90:97–112, 1999.
 62. V. Beresnevich, V. Bernik, and F. Götze. The distribution of close conjugate algebraic numbers. *Compos. Math.*, 146:1165–1179, 2010.
 63. V. Beresnevich, V. Bernik, and F. Götze. Integral polynomials with small discriminants and resultants. *Preprint, arXiv:1501.05767*, 2015.
 64. V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze, and O. Kukso. Distribution of algebraic numbers and metric theory of diophantine approximation. In *Limit Theorems in Probability, Statistics and Number Theory*, 23–48. Springer, 2013.
 65. V. Bernik, F. Götze, and O. Kukso. Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants. *Acta Arith.*, 133:375–390, 2008.
 66. A. Bharucha-Reid and M. Sambandham. *Random polynomials*. Academic Press, 1986.
 67. P. Biane and G. Letac. The mean perimeter of some random plane convex sets generated by a Brownian motion. *J. Theoret. Probab.*, 24:330–341, 2011.
 68. P. Biane, J. Pitman, and M. Yor. Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 38:435–465, 2001.
 69. P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons Inc., 1999.

70. N. Bingham, C. Goldie, and J. Teugels. *Regular variation*. Cambridge University Press, 1987.
71. P. Bleher and X. Di. Correlations between zeros of a random polynomial. *J. Statist. Phys.*, 88:269–305, 1997.
72. P. Bleher and X. Di. Correlations between zeros of non-Gaussian random polynomials. *Int. Math. Res. Not.*, 46:2443–2484, 2004.
73. A. Bloch and G. Pólya. On the roots of certain algebraic equations. *Proc. London Math. Soc.*, 33:102–114, 1932.
74. T. Bloom and B. Shiffman. Zeros of random polynomials on \mathbb{C}^m . *Math. Res. Lett.*, 14:469–479, 2007.
75. C. Bordenave, P. Caputo, and D. Chafaï. Spectrum of non-Hermitian heavy tailed random matrices. *Comm. Math. Phys.*, 307:513–560, 2011.
76. C. Bordenave and D. Chafaï. Around the Circular Law. *Probab. Surv.*, 9:1–89, 2012.
77. C. Buchta. On a conjecture of R. E. Miles about the convex hull of random points. *Monatsh. Math.*, 102:91–102, 1986.
78. C. Buchta. Distribution-independent properties of the convex hull of random points. *J. Theoret. Probab.*, 3:387–393, 1990.
79. C. Buchta. An identity relating moments of functionals of convex hulls. *Discrete Comput. Geom.*, 33:125–142, 2005.
80. Y. Bugeaud and A. Dujella. Root separation for irreducible integer polynomials. *Bull. London Math. Soc.*, 162:1239–1244, 2011.
81. Y. Bugeaud and A. Dujella. Root separation for reducible integer polynomials. *Acta Arith.*, 162:393–403, 2014.
82. Y. Bugeaud and M. Mignotte. On the distance between roots of integer polynomials. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 47:553–556, 2004.
83. Y. Bugeaud and M. Mignotte. Polynomial root separation. *Int. J. Number Theor.*, 6:587–602, 2010.
84. S. Chatterjee. An error bound in the Sudakov–Fernique inequality. *Preprint*,

- arXiv:0510424*, 2005.
85. S. Chatterjee. *Superconcentration and related topics*. Springer, 2014.
 86. S. Chevet. Processus gaussiens et volumes mixtes. *Probab. Theory and Related Fields*, 36:47–65, 1976.
 87. T. Cover and B. Gopinath. *Open problems in communication and computation*. Springer, 2012.
 88. R. Cowan. Identities linking volumes of convex hulls. *Adv. Appl. Probab.*, 39:630–644, 2007.
 89. R. Cowan. Recurrence relationships for the mean number of faces and vertices for random convex hulls. *Discrete Comput. Geom.*, 43:209–220, 2010.
 90. D. Darling. The influence of the maximum term in the addition of independent random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73:95–107, 1952.
 91. H. Davenport. On a principle of Lipschitz. *J. London Math. Soc.*, 26:179–183, 1951.
 92. V. de la Peña, T. Lai, and Q.-M. Shao. *Self-normalized processes. Limit theory and statistical applications*. Springer, 2009.
 93. P. G. L. Dirichlet. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen. *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, 1842.
 94. M. Drton and C. Klivans. A geometric interpretation of the characteristic polynomial of reflection arrangements. *Proc. Am. Math. Soc.*, 138:2873–2887, 2010.
 95. F. Dyson. The approximation to algebraic numbers by rationals. *Acta Math.*, 79:225–240, 1947.
 96. A. Edelman and E. Kostlan. How many zeros of a random polynomial are rear? *Bull. Amer. Math. Soc.*, 32:1–37, 1995.
 97. R. Eldan. Extremal points of high-dimensional random walks and mixing times of a Brownian motion on the sphere. *Ann. Inst. H. Poincaré Sec. B*, 50:95–110, 2014.

98. R. Eldan. Volumetric properties of the convex hull of an n -dimensional Brownian motion. *Electron. J. Probab*, 19:1–34, 2014.
99. C. Esseen. On the concentration function of a sum of independent random variables. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 9:290–308, 1968.
100. S. Evans. On the hausdorff dimension of Brownian cone points. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 98:343–353, 1985.
101. J.-H. Evertse. Distances between the conjugates of an algebraic number. *Publ. Math. Debrecen*, 65:323–340, 2004.
102. K. Farahmand. *Topics in random polynomials*. Longman, 1998.
103. H. Federer. Curvature measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:418–491, 1959.
104. W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. II*. Wiley, 1966.
105. V. Féray, P.-L. Méliot, and A. Nikeghbali. *Mod- ϕ convergence and precise deviations*. Springer, 2015.
106. S. Finch. Mean width of a regular cross-polytope. *Preprint, arXiv:1112.0499*, 2011.
107. S. Finch. Mean width of a regular simplex. *Preprint, arXiv:1111.4976*, 2011.
108. S. Finch. Width distributions for convex regular polyhedra. *Preprint, arXiv:1110.0671*, 2011.
109. P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
110. P. Forrester and G. Honner. Exact statistical properties of the zeros of complex random polynomials. *J. Phys. A*, 32:2961–2981, 1999.
111. F. Gao. The mean of a maximum likelihood estimator associated with the Brownian bridge. *Elect. Comm. in Probab.*, 8:1–5, 2003.
112. F. Gao, D. Hug, and R. Schneider. Intrinsic volumes and polar sets in spherical space. *Math. Notae*, 41:159–176, 2003.
113. F. Gao and R. Vitale. Intrinsic volumes of the Brownian motion body. *Discrete Comput. Geom.*, 26:41–50, 2001.

114. E. Gilbert. A comparison of signalling alphabets. *Bell Syst. Tech. J.*, 31:504–522, 1952.
115. L. Goldstein, I. Nourdin, and G. Peccati. Gaussian phase transitions and conic intrinsic volumes: Steining the Steiner formula. *Preprint, arXiv:1411.6265*, 2014.
116. N. Goodman. The distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix. *Ann. Math. Stat.*, 34:178–180, 1963.
117. F. Götze, D. Kaliada, and M. Korolev. On the number of integral quadratic polynomials with bounded heights and discriminants. *Preprint, arXiv:1308.2091*, 2013.
118. F. Götze, D. Kaliada, and D. Zaporozhets. Correlation functions of real zeros of random polynomials. *Preprint, arXiv:1510.00025*, 2015.
119. F. Götze, D. Kaliada, and D. Zaporozhets. Correlations between real conjugate algebraic numbers. *Чебышевский сб.*, 16:90–99, 2015.
120. F. Götze, D. Kaliada, and D. Zaporozhets. Distribution of complex algebraic numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145:61–67, 2017.
121. F. Götze and D. Zaporozhets. Discriminant and root separation of integral polynomials. *Зан. научн. сем. ПОМИ*, 441:144–153, 2015.
122. P. Gritzmann and V. Klee. On the complexity of some basic problems in computational convexity II: Volume and mixed volumes. *NATO Adv. Sci. Inst.*, 440:373–466, 1994.
123. H. Groemer. Eulersche Charakteristik, Projektionen und Quermaßintegrale. *Math. Ann.*, 198:23–56, 1972.
124. L. Grove and C. Benson. *Finite reflection groups*. Springer, 1985.
125. B. Grünbaum. *Convex polytopes*. Springer, 2003.
126. J. Hammersley. The zeros of a random polynomial. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. II*, 89–111. University of California Press, 1956.
127. G. Hardy. On the zeroes certain classes of integral Taylor series. Part I. On

- the integral function $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\phi(n)}}{\{\phi(n)\}!}$. *Proc. London Math. Soc.*, 2:332–339, 1905.
128. G. Herglotz. Über die Steinersche Formel für Parallellflächen. *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.*, 15:165–177, 1943.
129. J. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres, and B. Virág. *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*. AMS, 2009.
130. D. Hug and R. Schneider. Random conical tessellations. *Preprint, arXiv:1508.07768*, 2015.
131. C. Hughes and A. Nikeghbali. The zeros of random polynomials cluster uniformly near the unit circle. *Compos. Math.*, 144:734–746, 2008.
132. I. Ibragimov and D. Zaporozhets. On distribution of zeros of random polynomials in complex plane. In *Prokhorov and Contemporary Probability Theory*, pages 303–323. Springer, 2013.
133. I. Ibragimov and O. Zeitouni. On roots of random polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349:2427–2441, 1997.
134. Z. Kabluchko, A. Litvak, and D. Zaporozhets. Mean width of regular polytopes and expected maxima of correlated Gaussian variables. *Зан. научн. сем. ПО-МИ*, 442:75–96, 2015.
135. Z. Kabluchko, V. Vysotsky, and D. Zaporozhets. Convex hulls of random walks, hyperplane arrangements, and Weyl chambers. *Preprint, arXiv:1510.04073*, 2014.
136. Z. Kabluchko and D. Zaporozhets. Roots of random polynomials whose coefficients have logarithmic tails. *Ann. Probab.*, 41:3542–3581, 2013.
137. Z. Kabluchko and D. Zaporozhets. Intrinsic volumes of Sobolev balls with applications to Brownian convex hulls. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368:8873–8899, 2016.
138. M. Kac. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:314–320, 1943.
139. M. Kac. On the average number of real roots of a random algebraic equation II. *Proc. London Math. Soc.*, 2:390–408, 1948.

140. D. Kaliada. On the density function of the distribution of real algebraic numbers. *Preprint, arXiv:1405.1627*, 2014.
141. D. Kaliada, F. Götze, and O. Kukso. The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants. *Preprint, arXiv:1307.3983*, 2013.
142. J. Kampf. *Das Parallelvolumen und abgeleitete Funktionale*. PhD thesis, 2009.
143. J. Kampf, G. Last, and I. Molchanov. On the convex hull of symmetric stable processes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140:2527–2535, 2012.
144. W. Karl, G. Verghese, and A. Willsky. Reconstructing ellipsoids from projections. *CVGIP*, 56:124–139, 1994.
145. H. Kesten and R. Maller. The effect of trimming on the strong law of large numbers. *Proc. London Math. Soc.*, 3:441–480, 1995.
146. D. Klain and G.-C. Rota. *Introduction to geometric probability*. Cambridge University Press, 1997.
147. C. Klivans and E. Swartz. Projection volumes of hyperplane arrangements. *Discrete Comput. Geom.*, 46:417–426, 2011.
148. J. Koksma. Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen. *Monatsh. Math.*, 48:176–189, 1939.
149. E. Kostlan. On the distribution of roots of random polynomials. In *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*, 419–431. Springer, 1993.
150. E. Kowalski and A. Nikeghbali. Mod-Poisson convergence in probability and number theory. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 18:3549–3587, 2010.
151. M. Krishnapur and B. Virág. The Ginibre ensemble and Gaussian analytic functions. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 6:1441–1464, 2014.
152. H.-H. Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Springer, 2006.
153. H. Landau and L. Shepp. On the supremum of a Gaussian process. *Sankhya*, 32:369–378, 1970.

154. A. Ledoan, M. Merkli, and S. Starr. A universality property of Gaussian analytic functions. *J. Theor. Probab.*, 25:496–504, 2012.
155. M. Lifshits. *Gaussian random functions*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
156. J. Liouville. Nouvelle démonstration d'un théoreme sur les irrationnelles algébriques inséré dans le compte rendu de la dernière séance. *CR Acad. Sci. Paris*, 18:910–911, 1844.
157. J. Liouville. Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques. *J. Math. Pures Appl.*, 133–142, 1851.
158. J. Littlewood and A. Offord. On the number of real roots of a random algebraic equation. *J. London Math. Soc.*, 13:288–295, 1938.
159. J. Littlewood and A. Offord. On the number of real roots of a random algebraic equation II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 35:133–148, 1939.
160. J. Littlewood and A. Offord. On the number of real roots of a random algebraic equation III. *Mam. cb.*, 12:277–286, 1943.
161. J. Littlewood and A. Offord. On the distribution of the zeros and a-values of a random integral function I. *J. Lond. Math. Soc.*, 20:120–136, 1945.
162. J. Littlewood and A. Offord. On the distribution of zeros and a-values of a random integral function II. *Ann. Math.*, 49:885–952, 1948.
163. B. Logan and L. Shepp. Real zeros of random polynomials. *Proc. London Math. Soc.*, 3:29–35, 1968.
164. B. Logan and L. Shepp. Real zeros of random polynomials II. *Proc. London Math. Soc.*, 3:308–314, 1968.
165. I. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford University Press, 1998.
166. K. Mahler. An inequality for the discriminant of a polynomial. *Mich. Math. J.*, 11:257–262, 1964.
167. S. Majumdar, A. Comtet, and J. Randon-Furling. Random convex hulls and

- extreme value statistics. *J. Stat. Phys.*, 138:955–1009, 2010.
168. M. McCoy and J. Tropp. From Steiner formulas for cones to concentration of intrinsic volumes. *Discrete Comput. Geom.*, 51:926–963, 2014.
169. M. Mignotte. Some useful bounds. In *Computer Algebra*, 259–263. Springer, 1983.
170. H. Minkowski. Theorie der Konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. *Ges. Abh.*, 2:131–229, 1911.
171. W. Nef. Zur Einführung der Eulerschen Charakteristik und Begründung des Satzes von Euler-Schläfli. *Monatsh. Math.*, 92:41–46, 1981.
172. E. Omey and S. van Gulck. Domains of attraction of the real random vector (X, X^2) and applications. *Publ. Inst. Math.*, 86:41–53, 2009.
173. P. Orlik and H. Terao. *Arrangements of hyperplanes*. Springer-Verlag, 1992.
174. G. Paouris and P. Pivovarov. Small-ball probabilities for the volume of random convex sets. *Discrete Comput. Geom.*, 49:601–646, 2013.
175. G. Paouris, P. Pivovarov, and J. Zinn. A central limit theorem for projections of the cube. *Probab. Theory Related Fields*, 159:701–719, 2014.
176. J. Pickands. Moment convergence of sample extremes. *Ann. Math. Stat.*, 881–889, 1968.
177. J. Pitman and M. Yor. Infinitely divisible laws associated with hyperbolic functions. *Canad. J. Math.*, 55:292–330, 2003.
178. C. Qualls. On the number of zeros of a stationary Gaussian random trigonometric polynomial. *J. London Math. Soc.*, 2:216–220, 1970.
179. H. Rademacher. *Lectures on elementary number theory*. Krieger Pub Co, 1977.
180. Q. Rahman and G. Schmeisser. *Analytic theory of polynomials*. Oxford University Press, 2002.
181. J. Randon-Furling, S. Majumdar, and A. Comtet. Convex hull of N planar Brownian motions: exact results and an application to ecology. *Phys. Rev. Lett.*, 103:140602, 2009.
182. S. Resnick. *Extreme values, regular variation, and point processes*,

- Springer–Verlag, 1987.
183. S. Resnick. *Heavy-tail phenomena*. Springer, 2007.
 184. S. Rice. Mathematical analysis of random noise. *Bell Syst. Tech. J.*, 24:46–156, 1945.
 185. I. Rivin. Surface area and other measures of ellipsoids. *Adv. in Appl. Math.*, 39:409–427, 2007.
 186. K. Roth. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 168:1–20, 1955.
 187. H. Rubin and O. Wesler. A note on convexity in euclidean n-space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:522–523, 1958.
 188. E. Saff and V. Totik. *Logarithmic potentials with external fields*. Springer–Verlag, 1997.
 189. L. Santaló. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, 1976.
 190. G. Schehr and S. Majumdar. Condensation of the roots of real random polynomials on the real axis. *J. Stat. Phys.*, 135:587–598, 2009.
 191. L. Schläfli. Theorie der vielfachen kontinuierität. In *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 167–387. Springer, 1950.
 192. R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*. Cambridge University Press, 1993.
 193. R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and integral geometry*. Springer–Verlag, 2008.
 194. L. Shepp and K. Farahmand. Expected number of real zeros of a random polynomial with independent identically distributed symmetric long-tailed coefficients. *Теория вероятн. и ее примен.*, 55:196–204, 2011.
 195. L. Shepp and R. Vanderbei. The complex zeros of random polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347:4365–4384, 1995.
 196. B. Shiffman and S. Zelditch. Distribution of zeros of random and quantum chaotic sections of positive line bundles. *Comm. Math. Phys.*, 200:661–683,

- 1999.
197. B. Shiffman and S. Zelditch. Equilibrium distribution of zeros of random polynomials. *Int. Math. Res. Not.*, 1:25–49, 2003.
198. M. Shub and S. Smale. Complexity of Bézout’s theorem II. Volumes and probabilities. In *Computational algebraic geometry*, 267–285. Springer, 1993.
199. C. Siegel, K. Chandrasekharan, and H. Maaß. Approximation algebraischer Zahlen. *Math. Z.*, 10:173–213, 1924.
200. N. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
201. T. Snyder and J. Steele. Convex hulls of random walks. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117:1165–1173, 1993.
202. M. Sodin. Zeroes of Gaussian analytic functions. In *European Congress of Mathematics*, 445–458. Eur. Math. Soc., 2005.
203. M. Sodin and B. Tsirelson. Random complex zeroes I. Asymptotic normality. *Israel J. Math.*, 144:125–149, 2004.
204. K. Söze. Real zeroes of random polynomials I: Flip-invariance, Turán’s lemma, and the Newton-Hadamard polygon. *Preprint, arXiv:1601.04850*, 2016.
205. K. Söze. Real zeroes of random polynomials II: Descartes’ rule of signs and anti-concentration on the symmetric group. *Preprint, arXiv:1601.04858*, 2016.
206. E. Sparre Andersen. On the number of positive sums of random variables. *Skand. Aktuarietidskr.*, 32:27–36, 1949.
207. E. Sparre Andersen. On the fluctuations of sums of random variables II. *Math. Scand.*, 2:195–223, 1954.
208. F. Spitzer and H. Widom. The circumference of a convex polygon. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12:506–509, 1961.
209. R. Stanley. *An introduction to hyperplane arrangements*. IAS/Park City Mathematics Institute, 2007.
210. J. Steiner. Einige gesetze über die theilung der ebene und des raumes. *J. Reine Angew. Math.*, 1:349–364, 1826.

211. R. Suter. Two analogues of a classical sequence. *J. Integer Seq.*, 3:Article 00.1.8, 2000.
212. G. Szegő. Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe. *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, 23:50–64, 1924.
213. T. Tao and V. Vu. Random matrices: universality of ESDs and the circular law. With an appendix by M. Krishnapur. *Ann. Probab.*, 38:2023–2065, 2010.
214. K. Tikhomirov and P. Youssef. When does a discrete-time random walk in R^n absorb the origin into its convex hull? *Preprint, arXiv:1410.0458*, 2014.
215. K. Tikhomirov and P. Youssef. Minimax of an n -dimensional Brownian motion. *Preprint, arXiv:1504.01778*, 2015.
216. G. Valiron. *Lectures on the general theory of integral functions*. Chelsea Publishing Company, 1923.
217. B. van der Waerden. Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und der Gleichungen mit Affekt. *Monatsh. Math.*, 43:133–147, 1936.
218. V. Vysotsky and D. Zaporozhets. Convex hulls of multidimensional random walks. *Preprint, arXiv:1506.07827*, 2015.
219. C. Weber. *Elements of detection and signal design*. Springer, 2012.
220. J. Wendel. A problem in geometric probability. *Math. Scand.*, 11:109–111, 1962.
221. H. S. Wilf. The asymptotic behavior of the Stirling numbers of the first kind. *J. Comb. Theory*, 64:344–349, 1993.
222. S. Wilks. Moment-generating operators for determinants of product moments in samples from a normal system. *Ann. Math.*, 35:312–340, 1934.
223. D. Zaporozhets and F. Götze. On the distribution of complex roots of random polynomials with heavy-tailed coefficients. *Теория вероятн. и ее примен.*, 56:812–818, 2011.
224. T. Zaslavsky. *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes*. AMS, 1975.