САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЛОГУНОВ Александр Андреевич

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физ.-мат. наук, профессор

В.П. Хавин

Санкт-Петербург – 2015

Оглавление

Введение.

Теория гармонических функций играет значительную роль в математике, физике и прикладных областях. В двумерном эвклидовом пространстве эта теория связана с комплексным анализом, средствами которого успешно развита. А в старших размерностях ситуация усложняется: отсутствует комплексное умножение и конформные отображения, играющие важную роль в двумерном случае, вопросы о нулях гармонических функций в значительной степени открыты. Из этой обширной области в диссертации затронуты следующие темы: отношения гармонических функций с общим множеством нулей, теорема Левинсона о повторном логарифме, тауберовы теоремы для положительных гармонических функций. Основные цели данной работы – получение неравенства Гарнака и оценки градиента для частного гармонических функций с общим множеством нулей, доказательство многомерного гармонического аналога теоремы Левинсона, изучение граничных свойств положительных решений эллиптических дифференциальных уравнений.

Отношения гармонических функций.

В главе 1 настоящей работы изучаются частные гармонических функций, у которых совпадают множества нулей. Наш интерес к теме отношений гармонических функций мотивирован недавней работой [1], где был получен следующий результат в размерности два:

Теорема (Мангуби, 2013)**.** *Пусть множество* $Z \subset B_2 = \{x : |x| < 2\} \subset \mathbb{R}^2$*. Положим*

$$\mathcal{F}(Z) = \{u : B_2 \to \mathbb{R}, \Delta u = 0, Z(u) = Z\}.$$

$Z(u)$ *обозначает множество нулей функции* u*.*

Тогда для любых $u, v \in \mathcal{F}(Z)$ *частное* $f = u/v$ *продолжается до гладкой, нигде не исчезающей функции в* B_2*, и существует такая постоянная* $C_Z > 0$*, зависящая только от* Z*, что* $|\nabla \log |f|| \leq C_Z$ *в* B_1*.*

Это утверждение может быть воспринято как обобщение классического неравенства Гарнака на гармонические функции, меняющие знак. Классическое неравенство Гарнака соответствует $Z = \emptyset$, $v \equiv 1$. Неравенство Гарнака и его следствие утверждают, что если K есть компактное подмножество области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то существует положительное число $C = C(K, \Omega)$, такое что для любой положительной и гармонической в Ω функции u выполнено

$$\inf_K u \geq C \sup_K u \quad \& \quad \inf_K u \geq C \sup_K |\nabla u| \,.$$

Для того, чтобы найти подходящее обобщение этого принципа для гармонических функций, меняющих знак, мы будем рассматривать отношения гармонических функций с общим множеством нулей. Пусть u и v – гармонические функции в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а $Z(u)$ и $Z(v)$ есть множества всех нулей u и v соответственно, которые мы будем называть нодальными множествами функции u (и v). Мы будем предполагать, что нодальные множества функций u и v совпадают, т.е. $Z(u) = Z(v) = Z$. Мы будем изучать частное $f = u/v$. Для общего случая вещественно-аналитических функций с общим множеством вещественных нулей частное не всегда корректно определено, оно может не быть непрерывным. Также есть примеры, когда такое частное есть непрерывная, но не гладкая функция (начиная с размерности два). Все меняется, если мы предположим, что функции u и v гармонические. Первый результат главы 1, так называемая локальная теорема о делении, говорит, что отношение двух гармонических функций с общим множеством нулей вещественно-аналитично в Ω. Эта теорема влечет, что если вещественные нули двух гармонических функций совпадают, то и комплексные нули тоже совпадают в некоторой комплексной окрестности вещественной области определения. Двумерный случай теоремы об аналитичности частного гармонических функций обсуждался в работах [2] и [3].

Наш второй результат говорит, что при $n = 3$ существует константа

$C = C(Z, K, \Omega)$, такая что

$$(a)\ \inf_K |f| \geq C \sup_K |f| \quad \& \quad (b)\ \inf_K |f| \geq C \sup_K |\nabla f|, \tag{1}$$

где функция $f = u/v$ есть отношение гармонических в Ω функций u и v таких, что $Z(u) = Z(v) = Z$. Если Z – пустое множество, то последнее утверждение следует из классического принципа Гарнака. Когда $Z = Z(v)$, и v гармонична, мы получим неравенство Гарнака для положительных решений уравнения $\mathrm{div}(v^2 \nabla f) = 0$, которому удовлетворяет частное $f = u/v$. Это уравнение можно рассматривать как сильно вырожденное эллиптическое уравнение, и совсем неочевидно, когда такое уравнение имеет непостоянные положительные решения. Неравенство Гарнака для общих равномерно эллиптических операторов было получено Мозером [4] и обобщено на различные классы вырожденных эллиптических операторов, см. [5–7]. Отношения гармонических функций часто фигурируют в классической теории потенциала, в том числе в связи с границей Мартина, (граничным) неравенством Гарнака (см., например, [8],[9]) и функцией Грина (3G-неравенства, см. [10]).

Теорема Левинсона о повторном логарифме.

Теорема Левинсона о повторном логариме, варианты которой принадлежат Берлингу, Шобергу, Карлеману и другим математикам, есть критерий нормальности семейства голоморфных функций, ограниченных по модулю некоторой мажорантой, зависящей, скажем, только от одной координаты, при условии, что мажоранта удовлетворяет некоторому интегральному условию. Первое утверждение такого рода принадлежит Карлеману (см. [11]), которое обобщает классическую теорему Лиувилля.

Теорема (Карлеман, 1926). *Пусть неотрицательная функция M такова, что*

$$\int_o^{2\pi} \log^+ \log^+ M(\theta) d\theta < +\infty,$$

где $\log^+ x := \begin{cases} \log x, & x \geq 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$. *Если целая (голоморфная) функция* f *имеет оценку на модуль*

$$|f(re^{i\theta})| \leq M(\theta)$$

для всех $\theta \in [0, 2\pi]$ *и любого* $r \geq r_0$*, то* $f \equiv const$.

Самое знаменитое утверждение, где фигурирует условие сходимости интеграла с повторным логарифмом, есть следующая локальная теорема, известная как теорема Левинсона о повторном логарифме.

Теорема. *Пусть* P *обозначает прямоугольник* $(-a, a) \times (-b, b)$ *в* $\mathbb{R}^2$*, а функция* $M : (0, b) \to [e, +\infty)$ *не возрастает. Рассмотрим множество* $\mathcal{F}_M$ *всех функций* f*, голоморфных в* P*, таких что* $|f(x, y)| \leq M(|y|)$*,* $(x, y) \in P$*. Если* $\int\limits_0^b \log\log M(y)dy < +\infty$*, то* $\mathcal{F}_M$ *является нормальным семейством функций в* P*, т.е.* $\mathcal{F}_M$ *равномерно ограничено на любом компактном подмножестве прямоугольника* P.

Есть несколько разных теорем типа теоремы Левинсона, а доказательств – значительно больше. Эти теоремы и методы их доказательств служат мощными инструментами в комплексном анализе. Мы кратко обсудим возможные подходы к этой задаче. Некоторые ранние доказательства – комплексной природы и требуют дополнительных технических условий на мажоранту M. Впоследствии было несколько работ, существенно упрощающих оригинальное доказательство Левинсона (см. [12]) и не требующих условия регулярности на мажоранту. В работе Гурария [13] основным инструментом служила теорема Альфорса об искажении. В этом доказательстве нет слов "гармоническая мера", но по сути речь шла именно об оценках гармонической меры в узких областях типа каспа. В относительно недавних работах Рашковского [14, 15] было получено описание радиальных проекций гармонических мер в звездных областях, что дало общий метод доказывать теоремы типа Левинсона. Берлинг предложил подход, связавший теорему о повторном логарифме с квазианалитическими классами функций, но его доказательство в течении долгого времени не было опубликовано. Совсем простым и в то же время крайне полезным является метод Домара, который хорошо изложен в [16]. Подход Домара не использует комплексного анализа, а теорема Домара есть утверждение про субгармонические функции, к которому сводится теорема Левинсона при использовании субгармоничности $\log|f|$ для голоморфных функций f. Этот подход работает и для гармонических функций u двух переменных в силу субгармоничности $\log|\nabla u|$. А именно, в теореме Левинсона можно заменить класс голоморфных функций на класс гармонических функций, и утверждение останется верным.

Возникает естественный вопрос об истинности этого утверждения для гармонических функций в старших размерностях, где есть дополнительные сложности, связанные с тем, что логарифм модуля градиента гармонической функции в размерности три и выше не всегда является субгармоничекой функцией. Это создает большую разницу с двумерной ситуацией, и многомерный случай требует новых идей. Первый результат подобного рода при некоторых дополнительных предположениях о мажоранте был получен Дынькиным в работе [17] как следствие исследований по асимптотической задаче Коши для уравнения Лапласа.

В работе автора [18] доказана следующая теорема, которая обобщает теорему Левинсона на гармонические функции и является главным результатом главы 2.

Теорема. *Пусть Ω обозначает множество $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, y \in \mathbb{R}, |x| < R, |y| < H\}$, где R и H – положительные числа. Предположим, что функ-*

ция $M\colon (0,H) \to \mathbb{R}_+$ *не возрастает и*

$$\int\limits_0^H \log^+ \log^+ M(y)dy < +\infty.$$

Тогда множество $\mathcal{H}_M$ *всех функций* u*, гармонических в* Ω *и таких, что* $|u(x,y)| \leq M(|y|)$*,* $(x,y) \in \Omega$*, является нормальным семейством в* Ω*, т.е. равномерно ограничено на любом компактном подмножестве цилиндра* Ω*.*

В недавних работах [19], [18] теорема Левинсона для голоморфных функций и ее аналог для гармонических функций применяются для изучения граничных свойств универсальных рядов Тейлора голоморфных и гармонических функций.

Тауберовы теоремы о граничном поведении положительных решений эллиптических уравнений в частных производных.

Пусть μ – заряд на окружности $T = \{|z| = 1\}$, а u – гармоническое продолжение этого заряда внутрь единичного диска:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t) + r^2} d\mu(e^{it}).$$

Говорят, что μ дифференцируем в точке e^{ia}, $a \in [0, 2\pi]$, если существует конечный предел $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\mu(\{e^{i\theta}, \theta \in [a-t, a+t]\})}{2t}$, а сам этот предел называют производной заряда μ в точке a.

Классическая теорема Фату говорит, что если μ дифференцируем в точке e^{ia}, то у функции u_μ существует предел вдоль нормали $\lim\limits_{r \to 1-0} u(re^{ia})$, и этот предел равен производной заряда μ в точке e^{ia}. Обратное утверждение неверно: из существования предела $\lim\limits_{r \to 1-0} u(re^{ia})$ не следует дифференцируемость заряда μ в точке e^{ia}. Но это утверждение становится верным, если сделать дополнительное предположение: для *неотрицательных* зарядов μ существование радиального предела и производной граничной меры равносильны. Эта тауберова теорема с положительностью в роли тауберова условия была доказана в работе Люмиса [20] в размерности два, обобщена Рудиным на старшие размерности в [21]. А в работе [22] был получен аналогичный критерий существования некасательного предела положительной гармонической функции.

Пусть u – положительная гармоническая функция в единичном шаре $B \subset \mathbb{R}^n$. Для любой такой функции существует единственная мера (неотрицательный заряд) μ на границе этого шара, гармоническое продолжение которой (внутрь шара) совпадает с u. Мера μ называется граничной мерой функции u. Для точки $x \in \partial B$ будем обозначать через $\bar{n}(x)$ внутреннюю нормаль к ∂B в точке x. Зафиксируем числа $\alpha \in (-1, n-1]$ и $A \in [0, +\infty)$. Мы докажем, что $u(x + \bar{n}(x)t)t^\alpha \to A$ при $t \to +0$ если, и только если $\frac{\mu(B_r(x))}{r^{n-1}} r^\alpha \to C_\alpha A$ при $r \to +0$, где $C_\alpha = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n-\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}$. В случае $\alpha = 0$ мы получим критерий существования предела функции u вдоль нормали, этот случай изучался в работах Люмиса и Рудина. При $\alpha = n-1$ речь идет о величине точечной нагрузки граничной меры μ в точке x. Отметим, что этот случай легко следует из принципа минимальности Берлинга, изучавшийся в работах Берлинга, Мазьи и Дальберга. Этот принцип можно интерпретировать как условие на рост положительной гармонической функции вдоль последоватльности точек, стремящихся к фиксированной точке границы, которое гарантирует наличие точечной нагрузки у граничной меры.

При $\alpha \in [0, n-1]$ мы обобщим этот результат и критерий существования некасательного предела положительной гармонической функции на случай областей с достаточно гладкой границей и эллиптических операторов второго порядка с переменными гельдеровыми коэффициентами при помощи асимптотических оценок гармонической меры.

Структура диссертации. В главе 1 изучаются отношения гармонических функций с общим множеством нулей. В разделе 1.1 мы формулируем главные результаты этой главы: локальную теорему о делении, неравенство

Гарнака и оценку частных производных для отношений гармонических функций. В разделе 1.2 представлен план доказательства этих результатов. Граничное неравенство Гарнака сформулировано, а также кратко изложена его история в разделе 1.3. В разделе 1.4 доказывается вещественная аналитичность частного гармонических функций с общим множеством нулей. Сначала мы обсудим частный случай, когда функции – однородные гармонические полиномы, в этом случае частное тоже оказывается однородным полиномомом (уже необязательно гармоническим). Главным инструментом служит теорема Брело–Шоке, утверждающая, что непостоянный делитель однородного гармонического полинома меняет знак. Затем мы покажем, что если вещественно-аналитическая функция исчезает на множестве нулей гармонической функции, то первую функцию можно поделить на вторую как формальные степенные ряды. После этого будет доказано, что ряд Тейлора частного имеет положительный радиус сходимости, что даст вещественную аналитичность частного. Принципы максимума и минимума для отношений гармонических функций обсуждаются в разделе 1.5. Они используются вместе с граничным неравенством Гарнака в доказательстве неравенства Гарнака для отношений гармонических функций в размерности три, изложенным в разделе 1.6. Затем полученное неравенство Гарнака для отношений в комбинации с локальной теоремой о делении дадут оценку градиента и частных производных старшего порядка для отношений гармонических функций с общим множеством нулей. В разделе 1.7 мы собрали несколько примеров двумерных и многомерных гармонических функций с общим множеством нулей. Расширенный список примеров в размерности два содержится в работе [1]. В разделе 1.8 мы собрали несколько заключительных замечаний и дополнений к основному тексту главы: привели пример гармонической функции с нодальными областями, у которых граница не представима локально в виде графика липшицевой функции, кратко обсудили сильно вырожденное дифференциальное эллиптическое уравнение, которому удовлетворяет частное гармонических функций, также мы предложили доказательство леммы о делении гармонических полиномов, сделали замечание о совпадении комплексных нулей гармоничеких функций, сформулировали вопрос о нормальности семейства гармонических функций с фиксированных нодальным множеством.

Вторая глава посвящена теореме Левинсона о повторном логарифме. Главный результат этой главы – аналог теоремы Левинсона для гармонических функций в старших размерностях. Мы кратко опишем идею доказательства Домара классической теоремы Левинсона в разделе 2.1. Раздел 2.2 посвящен осесимметричным гармоническим функциям, в этом разделе описаны два приема: первый позволяет сводить вопросы об осесимметричных гармонических функциях в размерности 4 к обычным гармоническим функциям двух переменных, а второй прием позволит свести случай нечетных размерностией к трехмерной ситуации в гармоническом аналоге теоремы Левинсона, которая будет доказана в разделе 2.3. В разделе 2.4 мы задаем вопрос об односторонних оценках в теореме Левинсона, а в разделе 2.5 формулируем одно приложение этой теоремы к граничным свойствам универсальных рядов Тейлора гармонических функций.

В третей главе речь пойдет о тауберовых теоремах для положительных гармонических функций и положительных решений эллиптических дифференциальных уравнений. В разделе 3.1 мы кратко излагаем историю вопроса и вводим определения граничной меры и класса эллиптических операторов $\mathrm{L}^+(\lambda, \alpha, \Omega)$, также мы формулируем и обсуждаем критерий степенного роста положительной гармонической функции (теорема 15). В разделе 3.2 мы докажем теорему 15 с помощью тауберовой теоремы Винера. В разделе 3.3 мы сформулируем несколько известных оценок функции Грина G_L и L-гармонической меры. Раздел 3.4 посвящен асимптотической оценке L-гармонической меры, когда расстояние между полюсом гармонической меры и точкой, где вычисляется плотность гармонической меры, стремится к нулю. Эта информация будет использована в разделах 3.5, 3.6, где теорема 15 будет обобщена на гладкие области и эллиптические операторы из класса $\mathrm{L}^{+}(\lambda, \alpha, \Omega)$. А также будет обобщен критерий Рэми–Ульриха существования некасательного предела на L-гармонические функций. В разделе 3.7 мы формулируем принцип минимальности Берлинга, а затем обобщаем его на некоторый класс эллиптических операторов второго порядка в недивергентной форме.

Все результаты, представленные в работе, опубликованы в 2014-2015 гг. в работах автора [18, 23] и в совместной работе [24] с Е. В. Малинниковой. По мнению соавторов их вклад в последнюю работу равный. Эти результаты докладывались на семинаре по теории операторов и теории функций в ПОМИ РАН (Санкт-Петербург), на семинарах лаборатории Чебышева (Санкт-Петербург), на семинарах по анализу в Норвежском Институте Естественных и Технических Наук (Норвегия, г. Тронхейм), на конференции "Perspectives of Modern Complex Analysis"(Польша, г.Бедлево), на конференции "XXIII St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis"(Санкт-Петербург), на конференции "Spaces of Analytic Functions and Singular Integrals"(Санкт-Петербург).

Глава 1

Отношения гармонических функций

Пусть u и v – гармонические в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, множество всех нулей которых совпадают и равны Z. Мы покажем, что отношение f этих функций всегда корректно определено и есть вещественно-аналитическая функция. Кроме того, оно удовлетворяет принципам максимума и миинимума. В случае размерности $n = 3$ мы докажем неравенство Гарнака и оценку градиента для отношений гармонических функций, а именно, что верны неравенства

$$\sup_K |f| \leq C \inf_K |f| \quad \& \quad \sup_K |\nabla f| \leq C \inf_K |f|$$

для любого компактного множества $K \subset \Omega$, где C– константа, которая зависит только от K, Z, Ω. В размерности два первое неравенство следует из граничного неравенства Гарнака, а второе из следующей оценки, недавно полученной в работе [1].

Теорема (Мангуби, 2013). *Пусть $Z \subset B_2 = \{x : |x| < 2\} \subset \mathbb{R}^2$, положим*

$$\mathcal{F}(Z) = \{u : B_2 \to \mathbb{R}, \Delta u = 0, Z(u) = Z\}.$$

Тогда для любых $u, v \in \mathcal{F}(Z)$ частное $f = u/v$ продолжается до гладкой, нигде не исчезающей функции в B_2 и существует константа $C_Z > 0$, такая что $|\nabla \log |f|| \leq C_Z$ в B_1.

В старших размерностях ($n \geq 4$) справедливость этих неравенств – открытый вопрос.

1.1. Основные результаты главы 1

Далее мы дадим точные формулировки основных результатов этой главы. Первая теорема содержит утверждение об аналитичности и принцип максимума для частного гармонических функций.

Теорема 1. *Пусть u и v – гармонические функции в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Если $Z(v) \subset Z(u)$, то существует вещественно-аналитическая функция f в Ω, такая что $u = vf$. Более того, f удовлетворяет принципам максимума и минимума, т.е. для любой подобласти $O \Subset \Omega$*

$$\max_{\partial O} f = \max_{\bar{O}} f \quad \& \quad \min_{\partial O} f = \min_{\bar{O}} f.$$

Следующая торема дает неравенство Гарнака для отношений гармонических функций в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 2. *Пусть w – гармоническая функция в единичном шаре $B \subset \mathbb{R}^3$. Для любого компактного множества $K \subset B$ существует такая константа C, зависящая только от w и K, что для любых гармонических функций u, v в B с $Z(u) = Z(v) = Z(w)$ выполнено*

$$\left|\frac{u}{v}(x)\right| \leq C \left|\frac{u}{v}(y)\right|.$$

для любых точек $x, y \in K$.

Это утверждение в комбинации с локальной теоремой о делении повлечет оценки производных частного гармонических функций.

Теорема 3. *Предположим, что функции u и v гармоничны в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Если $Z(v) = Z(u) = Z$, то существует вещественно-аналитическая функция f, такая что $u = vf$. Если мы зафиксируем $x_0 \in \Omega$ и предположим, что $\frac{u}{v}(x_0) = 1$, тогда для любого компактного множества $K \subset \Omega$ существуют* *положительные числа A и R, зависящие только от K, Z и Ω, такие что для любого $x \in K$ и любого мультииндекса α верно*

$$\left| D^\alpha \left(\frac{u}{v} \right) (x) \right| \leq \alpha! A R^{|\alpha|}.$$

Обобщение оценки Мангуби $|\nabla \log |f||$ на размерность три немедленно следует из теоремы 2 и теоремы 3.

1.2. План доказательства.

Для изучения отношений гармонических функций нам хочется понять как локально ведет себя гармоническая функция рядом с точкой, где функция обращается в ноль. В старших размерностях структура нулевого множества гармонической функции может быть крайне сложной. Однако следующие ключевые соображния все еще выполняются: (i) локально нулевое множество напоминает нодальное множество однородного гармонического полинома (по крайней мере в некотором смысле, см. лемму 2 и контрпример 8), (ii) если P и Q – такие однородные гармонические полиномы, что $Z(Q) \subset Z(P)$, то P/Q тоже полином. Наш первый шаг состоит в делении гармонических полиномов с общим множеством нулей. Главный инструмент есть теорема Брело–Шоке, которая утвеждает, что любой непостоянный делитель гармонического полинома меняет знак, см. [25]. Лемма о делении, которая нам нужна, следует из результатов работы [26]; некоторые факты о делении полинимов, близкие к тому, чем мы пользуемся, могут быть также найдены в [27, параграф 5], где деление гармонических полиномов применяется к оценкам максимальных сингулярных интегральных операторов.

Результат о делении гармонических полиномов позволяет нам записать отношение двух гармонических функций с общим нулевым множеством Z как формальный степенной ряд с центром в любой точке из Z. А затем мы покажем, что ряд имеет положительный радиус сходимости, и следовательно отношение есть вещественно-аналитическая функция. Далее мы докажем принцип максимума и минимума для отношений гармонических функций. Это простое, но оказавшееся полезным утверждение.

Следующий шаг состоит в доказательстве теоремы 2. Главная идея состоит в комбинации принципа максимума и граничного неравенства Гарнака. В размерности три мы докажем следующую структурную лемму о нодальных множествах: существует счетное множество D с локально конечным числом точек сгущения, такое что для любой окрестности V множества D вблизи любой точки из $Z \backslash V$ границы нодальных множеств являются графиками липшицевых функций. После доказательства этой структурной леммы, оставшаяся часть рассуждения относительно простая. Мы выбираем шар B_r, содержащий K, и такой, что $S_r = \partial B_r$ не содержит точек из D и точек накопления множества D. Применяя граничное неравенство Гарнака для кусков нодальных множеств рядом с S_r, мы получим, что $\max\limits_{S_r} |f| \leq C \min\limits_{S_r} |f|$. Наконец, применяя принцип максимума и минимума для f, мы продолжаем это неравенство внутрь шара и получаем искомое неравенство Гарнака для частных гармонических функций. Оценка градиента и старших производных отношения гармонических функций будет выводиться из теоремы 2 и локальной теоремы о делении.

1.3. Граничное неравенство Гарнака

Рассмотрим область Ω в $\mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что граница области обладает некоторым свойством регулярности, скажем, $\partial\Omega$ локально может быть представлена графиком липшицевой функции. Предположим, что гармонические функции u, v положительны в Ω и одновременно исчезают на $\partial\Omega \cap B_r(w)$, где $B_r(w)$ – это шар радиуса r с центром $w \in \partial\Omega$. Граничное неравенство Гарнака говорит, что

$$\sup_{\Omega\cap B_{\frac{r}{2}}(w)} \frac{u}{v} \leq C \inf_{\Omega\cap B_{\frac{r}{2}}(w)} \frac{u}{v}, \tag{1.1}$$

где константа C зависит только от Ω,$B_{\frac{r}{2}}(w)$ и не зависит от u и v. Более того, отношение $\frac{u}{v}$ удовлетворяет условию Гельдера рядом с участком границы, где u и v равны нулю:

$$|\frac{u}{v}(x) - \frac{u}{v}(y)| \leq C\frac{u}{v}(x)|x-y|^{\alpha}$$

для любых $x, y \in \Omega \cap B_{\frac{r}{2}}(w)$. Константы C и $\alpha \in (0,1)$ зависят только от Ω, r и w.

Обращаем внимание на работы [5, 9, 28–31] и ссылки внутри этих работ, где освещена история граничного неравенства Гарнака, доказаны многочисленные обобщения этого принципа на другие виды областей, равномерно эллиптические операторы второго порядка, p-гармонические функции и решения вырожденных эллиптических уравнений в частных производных с A_2 условием на коэффициенты.

Пусть Z– это множество нулей гармонических в единичном шаре B функций u и v: $Z = Z(u) = Z(v)$. Любую компоненту связности Ω множества $B \setminus Z$ будем называть нодальной областью. В размерности два $\partial\Omega \cap B$ может быть представлена локально графиком липшицевой функции, и можно применить граничное неравенство Гарнака для липшицевых областей (см., например [8]) и получить, что $u = fv$ для некоторой локально ограниченной функции f, которая не меняет знак. В старших размерностях геометрия нодальных множеств существенно усложняется. Мы приведем пример, показывающий, что уже в размерности три нодальные множества могут не удовлетворять условию цепи Гарнака (см. [9, 30]). Таким образом, существует гармоническая функция v, такая что $B \setminus Z(v)$ имеет компоненты, которые не являются NTA областями (см. [30]); это создает препятствие в том, что мы не можем прямо применить граничное неравенство Гарнака, что влекло бы ограниченность f. Но все же локальная теорема о делении говорит, что отношение f всегда непрерывно и вещественно-аналитично. Также наше доказательство локальной теоремы о делении показывает, что неравенство Гарнака для отношений (1a) влечет оценку на градиент частного. Таким образом, главная проблема в обобщении теоремы об оценке градиента на старшие размерности сведена к (1a). Мы смогли доказать это неравенство только в размерности три, в этом случае структура критического множества гармонической функции (где функция и ее градиент одновременно исчезают) менее сложна чем в старших размерностях.

1.4. Деление на гармонический полином и на гармоническую функцию

В этом разделе мы будем изучать частные гармонических функций с общим множеством нулей Z внутри области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Мы покажем, что для любого $a \in \Omega$ существует формальный степенной ряд f_a, такой что выполнено равенство формальных степенных рядов $u(x) = v(x) f_a(x)$ с центром в точке a. Выберем точку $a \in Z$ и предположим, что $a = 0$, для упрощения обозначений.

1.4.1. Деление гармонических полиномов и формальные степенные ряды

Пусть P и Q – полиномы из $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Нас интересуют условия на P и Q, которые гарантируют делимость P на Q. Если P делится на Q, тогда, конечно, $Z(Q) \subset Z(P)$. Обратное утверждение неверно в общем случае, но становится верным, если Q есть однородный гармонический полином.

Лемма 1 (Лемма о делении на гармонический полином)**.** *Пусть Q – однородный гармонический полином, а полином P таков, что $Z(Q) \subset Z(P)$. Тогда $P = QR$ для некоторого полинома R.*

Лемма 1 следует из теоремы 2 и леммы 4 из [26]. Мы докажем эту лемму в разделе 1.8.3 для удобства читателя.

Мы обобщим деление на общий случай и научимся делить вещественно-аналитическую функцию на гармоническую функцию. До конца этого раздела мы будем обозначать через u вещественно-аналитическую функцию, а через v гармоническую функцию в области, содержащей начало координат. Рассмотрим разложения функций u и v в ряды Тейлора в начале координат

$$u = \sum_{i=k}^{\infty} u_i, \quad v = \sum_{i=l}^{\infty} v_i,$$

где u_i и v_i обозначают однородные гармонические полиномы степени i, а u_k и v_l – первые ненулевые полиномы.

Лемма 2. *Если $Z(v) \subset Z(u)$, то $Z(v_l) \subset Z(u_k)$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть y – это такая точка, что $u_k(y) \neq 0$, а $v_l(y) = 0$. Мы можем предположить, что $u_k(y) > 0$, тогда существует открытый выпуклый конус Γ (с вершиной в начале координат), содержащий y, и $\varepsilon > 0$, такое что $u_k(x) > \varepsilon|x|^k$ для любого $x \in \Gamma$. Поскольку $u(x) = u_k(x) + o(|x|^k)$ при $|x| \to 0$, то существует $r > 0$, такое что для любых $x \in \Gamma$ с $|x| < r$ неравенство $u(x) > 0$ выполнено.

Очевидно, v_l есть гармонический полином. Согласно принципу максимума и минимума существуют точки y_+, y_- сколь угодно близко к y, такие что $v_l(y_+) > 0$ и $v_l(y_-) < 0$, возьмем y_+, y_- внутри Γ. Рассмотрим ty_+ и ty_-, где t – положительное вещественное число. Если t достаточно мало, тогда $v(ty_+) > 0$,$v(ty_-) < 0$, $|ty_+| < r$ и $|ty_-| < r$. Выберем t, так чтобы все четыре предыдущих неравенства выполнялись, тогда существует x на отрезке, соединяющим ty_+ и ty_-, такое что $v(x) = 0$. Ясно, что $x \in \Gamma$ и $|x| < r$, следовательно $u(x) > 0$. Таким образом, мы получили противоречием с тем, что $Z(v) \subset Z(u)$. □

Теперь мы можем делить вещественно-аналитическую функцию на гармоническую, как формальные ряды Тейлора.

Лемма 3. *Если $a \in Z(v) \subset Z(u)$, то существует формальный степенной ряд f, такой что $u = vf$, как формальные степенные ряды с центром в a.*

Доказательство. Не умаляя общности, положим $a = 0$. Согласно лемме 2 $Z(v) \subset Z(u)$ влечет $Z(v_l) \subset Z(u_k)$, и согласно лемме 1 u_k делится на v_l. Отношение u_k и v_l есть однородный полином степени $k-l$, который мы обозначим через f_{k-l} и положим $\tilde{u} := u - vf_{k-l}$. Заметим, что $Z(v) \subset Z(\tilde{u})$, и степень первого ненулевого полинома в ряде Тейлора $\tilde{u}$ по крайней мере $k+1$. Повторяя этот шаг для $\tilde{u}$ и v (вместо u и v), мы можем найти полином f_{k-l+1}, такой что $\tilde{u}_{k+1} = f_{k-l+1}v_l$. Далее мы положим $\tilde{\tilde{u}} := \tilde{u} - vf_{k-l+1}$, тогда степень первого полинома в разложении $\tilde{\tilde{u}}$ по крайней мере $k+2$. Применяя этот шаг бесконечно много раз, мы построим формальный степенной ряд $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_{k-l+j}$, такой что $u = vf$ (формально). □

1.4.2. Оценки степенных рядов

В предыдущем разделе мы получили равенство формальных степенных рядов $u = vf$. Теперь мы собираемся получить оценки на коэффициенты f и показать, что ряд f сходится к вещественно-аналитической функции в некоторой окрестности начала координат.

Мы будем использовать стандартное обозначение для мультииндекса: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$; множество мультииндексов наделим отношением частичного порядка: $\alpha \le \beta$, если $\alpha_i \le \beta_i$ для каждого i: $1 \le i \le n$.

Лемма 4. *Пусть* $u = \sum\limits_{\alpha} u_\alpha x^\alpha$, $v = \sum\limits_{\alpha} v_\alpha x^\alpha$, $f = \sum\limits_{\alpha} f_\alpha x^\alpha$ *– это формальные степенные ряды, такие что* $u = vf$. *Предположим, что* $|v_\alpha| \le ar^{|\alpha|}$, $|u_\alpha| \le ar^\alpha$ *для некоторых положительных* a *и* r *и всех* α. *Также предположим, что* $|v_{(k,0,\cdots,0)}| = c > 0$ *и* $v = \sum\limits_{|\alpha|\ge k} v_\alpha$. *Тогда существуют* A *и* $R = (R_1, R_2, \cdots, R_n)$, *зависящие только от* a, c, r, k *и* n, *такие что*

$$|f_\beta| \le AR^\beta \quad (R^\beta := R_1^{\beta_1} R_2^{\beta_2} \cdots R_n^{\beta_n}) \tag{1.2}$$

для всех мультииндксов β. *Следовательно* f *представляет собой вещественно-аналитическую функцию в окрестности начала координат.*

Обозначим $(k, 0, \ldots, 0)$ через $\tilde{k}$. Согласно равенству формальных степенных рядов $u = vf$ мы имеем

$$u_{\beta+\tilde{k}} = \sum_{\gamma \le \beta+\tilde{k}, |\gamma| \le |\beta|} f_\gamma v_{\beta+\tilde{k}-\gamma} \quad \text{для любого мультииндекса } \beta. \tag{1.3}$$

Нам понадобится вспомогательное утверждение для оценки $|f_\beta|$.

Предложение 4. *Для любых* a_0, $r > 0$ *существует* $A = A(a_0, r)$ *и* $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n) = R(a_0, r)$, *такие что для каждого мультииндекса* β

$$a_0 r^{|\beta+\tilde{k}|} + a_0 A \sum_{\gamma \le \beta+\tilde{k}, |\gamma| \le |\beta|, \gamma \ne \beta} R^\gamma r^{|\beta+\tilde{k}-\gamma|} \le AR^\beta. \tag{1.4}$$

Мы отложим доказательство этого предложения. А сначала, мы докажем при помощи него лемму 4 с $A = A(ac^{-1}, r)$ и $R = R(ac^{-1}, r)$. Мы докажем (1.2) по индукции по лексикографическому порядку на мультииндексах.

Рассмотрим множество мультииндексов $\mathbb{A} := \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{Z}_+\}$ с отношением порядка $\prec$, определенным по правилу

$$\gamma \prec \beta \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \gamma_n < \beta_n \\ \gamma_n = \beta_n, \;\; \gamma_{n-1} < \beta_{n-1} \\ \quad\vdots \\ \gamma_n = \beta_n, \;\; \gamma_{n-1} = \beta_{n-1} \;\; \cdots \;\; \gamma_2 = \beta_2, \;\; \gamma_1 < \beta_1. \end{array} \right.$$

Тогда $(\mathbb{A}, \prec)$ есть вполне упорядоченное множество.

Доказательство леммы 4. Обозначим через S множество мультииндексов α с $|f_\alpha| > AR^\alpha$. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что S пусто. Предположим, что S непусто, тогда S имеет наименьший элемент в порядке $\prec$, обозначим его через β. Будем писать $\bigstar$ вместо следующего условия суммирования $\gamma \le \beta + \tilde{k}, |\gamma| \le |\beta|, \gamma \ne \beta$; очевидно, это условие влечет $\gamma \prec \beta$. Тогда (1.3) можно переписать как

$$v_{\tilde{k}} f_\beta = u_{\beta+\tilde{k}} - \sum_{\bigstar} f_\gamma v_{\beta+\tilde{k}-\gamma}.$$

Заметим, что $|f_\gamma| \le AR^\gamma$ для всех $\gamma \prec \beta$. Держа в уме, что $|v_{\tilde{k}}| = c > 0$, мы получаем

$$|f_\beta| \le c^{-1}|u_{\beta+\tilde{k}}| + c^{-1}\sum_{\bigstar} |f_\gamma v_{\beta+\tilde{k}-\gamma}| \le$$

$$c^{-1}ar^{|\beta+\tilde{k}|} + c^{-1}\sum_{\bigstar} AR^\gamma ar^{|\beta+\tilde{k}-\gamma|} \overset{(1.4)}{\le} AR^\beta.$$

Следовательно $|f_\beta| \le AR^\beta$ и $\beta \notin S$. Таким образом, S пусто, и доказательство завершено. □

Доказательство предложения 4. Будем писать r^α вместо $r^{\sum \alpha_i}$, где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Поделив обе части неравенства (1.4) на AR^β, мы сводим его к следующему неравенству

$$\frac{a_0 r^k}{A}\frac{r^\beta}{R^\beta} + a_0 r^k \sum_{\bigstar} \frac{R^\gamma r^{\beta-\gamma}}{R^\beta} \le 1. \tag{1.5}$$

Первое слагаемое можно сделать меньше $1/2$ для всех β, если мы выберем A и $R = (R_1, ..., R_n)$ достаточно большими и такими, что

$$\frac{a_0 r^k}{A} \le 1/2 \text{ и } R_i \ge r \text{ для всех } i \in [1, n].$$

Осталось добиться
$$\sum_{\bigstar} \frac{R^\gamma r^{\beta-\gamma}}{R^\beta} \le \frac{1}{2a_0 r^k},$$
чтобы обеспечить неравенство (1.5). Согласно $\bigstar$ мы имеем $\beta_i \ge \gamma_i$ для любого $i \in [2,n]$ и $|\beta| \ge |\gamma|$; обозначим $\beta_i - \gamma_i$ через δ_i и $|\beta| - |\gamma|$ через δ. Легко видеть, что
$$\sum_{\bigstar} \frac{R^\gamma r^{\beta-\gamma}}{R^\beta} \le \sum_{\bullet} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{\delta_3} \cdots \left(\frac{R_1}{R_n}\right)^{\delta_n} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\delta}, \tag{1.6}$$
где $\bullet$ есть следующее условие:
$$\delta, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n \in \mathbb{Z}_+, \quad \delta + \sum_{i\ge 2} \delta_i > 0.$$
Заметим, что правая часть (1.6) есть сумма геометрической прогрессии без первого слагаемого 1. Следовательно
$$\sum_{\bullet} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{\delta_3} \cdots \left(\frac{R_1}{R_n}\right)^{\delta_n} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\delta} =$$
$$\frac{1}{1-\frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{1-\frac{R_1}{R_3}} \cdots \frac{1}{1-\frac{R_1}{R_n}} \frac{1}{1-\frac{r}{R_1}} - 1.$$
А последнее выражение можно сделать сколь угодно малым при правильном выборе R (можно сделать так, чтобы $r << R_1, R_1 << R_2 = R_3 = \cdots = R_n$). □

1.4.3. Деление на гармоническую функцию

Лемма 4 в комбинации с леммой 3 приводит нас к следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть u – вещественно-аналитическая функция, а v есть гармоническая функция, обе функции имеют область определения $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Если $Z(v) \subset Z(u)$, то существует вещественно-аналитическая функция f в Ω, такая что $u = vf$.*

Доказательство. Действительно, для любой точки $x_0 \in \Omega$ мы знаем, что ряд Тейлора с центром в x_0 функции v есть делитель ряда Тейлора с центром в x_0 функции u. Единственное препятствие состоит в том, чтобы показать, что формальный степенной ряд $f = u/v$ с центром в x_0 имеет положительный радиус сходимости. И здесь лемма 4 вступает в игру. Представим v как сумму мономов: $v = \sum v_\alpha (x - x_0)^\alpha$. Если v не равно тождественно нулю, мы можем взять такое $k \geq 0$, что $v_\alpha = 0$ для любого мультииндекса α с $|\alpha| < k$, и существует α с $|\alpha| = k$: $v_\alpha \neq 0$. Далее мы можем изменить систему координат, получив $v_{(k,0,\ldots,0)} \neq 0$ и применить лемму 4. Наконец, оценка (1.2) влечет абсолютную сходимость формального степенного ряда f, который будет удовлетворять равенству функций $u = fv$ в некоторой окрестности x_0. $\square$

1.5. Принципы максимума и минимума для отношений гармонических функций.

Пусть u и v – гармонические функции в Ω, такие что $Z(u) \supset Z(v)$. Мы уже знаем, что существует функция f, вещественно-аналитическая в Ω, такая что $u = fv$.

Теорема 6. *Функция f удовлетворяет принципу максимума и минимума, т.е. для любой подобласти $O \Subset \Omega$ выполнено*

$$\max_{\partial O} f = \max_{\bar{O}} f \quad \& \quad \min_{\partial O} f = \min_{\bar{O}} f.$$

Доказательство. Положим $M := \max\limits_{\partial O} f$ и $m := \min\limits_{\partial O} f$. Пусть $D \subset \Omega$ – любая нодальная область функции v, которая пересекает O. Символ Γ_0 будет обозначать $O \cap \partial D$, а через Γ_1 обозначим $\bar{D} \cap \partial O$. Предположим, что v положительна в D. Очевидно, что $mv \leq u \leq Mv$ на Γ_1 и $mv \leq u \leq Mv$ на Γ_0, т.к. u и v исчезают на Γ_0. Следовательно $mv \leq u \leq Mv$ на $D \cap O$

по обычному принципу максимума для гармонических функций. Мы, таким образом, получаем, что $m \le f \le M$ всюду в $\bar{O}$. Значит $\max\limits_{\bar{O}} f = \max\limits_{\partial O} f$ и $\min\limits_{\bar{O}} f = \min\limits_{\partial O} f$. □

Замечание 1. Верен строгий принцип максимума для отношений гармонических функций, т.е. локальный минимум или максимум может достигаться во внутреннй точке области только тогда, когда f есть постоянная функция. Чтобы доказать это, достаточно показать, что если $f = 0$ в некоторой внутренней точке области, тогда f меняет знак. Последнее утверждение может быть получено при помощи предложения 9.

1.6. Доказательство неравенства Гарнака и оценки градиента для отношений гармонических функций в $\mathbb{R}^3$

В этом разделе мы докажем теорему 2, а затем с ее помощью выведем теорему 3. Зафиксируем гармоническую функцию w в области Ω в $\mathbb{R}^3$.

1.6.1. Структура нодального множества гармонической функции в размерности три

Пусть $Z = Z(w) \subset \Omega$. Будем говорить, что точка $x \in Z$ хорошая, если для каждой нодальной области Ω_i функции w с $\partial\Omega_i \ni x$ выполняется следующее: существует окрестность W точки x, такая что $\partial\Omega_i \cap W$ можно параметризовать графиком липшицевой функции, т.е. граница каждой нодальной области $\partial\Omega_i$ является липшицевой в некоторой окрестности точки x. Будем называть точку $x \in Z$ плохой, если она не является хорошей.

Нодальное множество можно представить в виде объединения: $Z = Z_0 \cup Z_1$, где $Z_0 = \{x : w(x) = 0, \nabla w(x) \neq 0\}$ и $Z_1 = \{x : w(x) = 0, \nabla w(x) = 0\}$.

В некоторой окрестности каждой точки из Z_0 нодальное множество есть гладкая поверхность, и поэтому все точки множества Z_0 хорошие; а Z_1, критическое множество функции w, локально можно представить в виде конечного объединения аналитических кривых и дискретного множества точек. В этом месте мы ссылаемся на общую структурную теорему Лоясевича о вещественно-аналитических многообразиях, см. [32] и [33, параграф 6.3]. Рассмотрим любую аналитическую кривую Γ в Z_1. Для точки $x \in Z$ будем обозначать через $d(x)$ глубину нуля в x, точнее $d(x)$ есть степень первого ненулевого однородного полинома в ряде Тэйлора функции w с центром в точке x. Предположим, что последовательность точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ из Γ сходится к внутренней точке x_∞ кривой Γ, и $d(x_i) \geq k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда из вещественной-аналитичности функции w и Γ следует, что $d(x) \geq k$ для любого $x \in \Gamma$. Следовательно существует $k \in \mathbb{N}$, такое что $d(x) = k$ для всех $x \in \Gamma$ кроме не более чем счетного множества точек на Γ с не более чем двумя точками накопления на концах этой кривой (см. также доказательство леммы 2.4 в [34], где похожим образом представляют критическое множество).

Лемма 5. *Пусть X – это внутренняя точка кривой Γ, а U есть окрестность точки X, такая что для любого $Y \in \Gamma \cap U$: $d(Y) = k$. Тогда точка X хорошая.*

Идея доказательства леммы состоит в том, чтобы рассмотреть первый однородный полином в ряде Тейлора функции w с центром в каждой точке $Y \in \Gamma \cap U$, окажется, что это есть однородный гармонический полином степени k, зависящий только от двух переменных в плоскости ортогональной к Γ в Y, а модуль градиента этого полинома, суженного на плоскость, ограничен снизу $(k-1)$-ой степенью расстояния до Y.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $X = 0$. Пусть I – это интервал вещественной прямой, содержащий ноль, а $\Gamma : I \to \Omega$ – параметризация кривой Γ, такая что $\Gamma(0) = 0, \Gamma(t) = (x(t), y(t), t)$. Считаем, что $\Gamma'(0) = (0, 0, 1)$. Также предположим, что $d(\Gamma(t)) = k$ для всех $t \in (-r, r)$. Пусть $p_t(x, y, z)$ есть k-ый однородный полином в разложении w в ряд Тейлора в точке $\Gamma(t)$,

$$w(x, y, z) = p_t(x - x(t), y - y(t), z - t) + q_t(x - x(t), y - y(t), z - t),$$

где q_t есть остаток ряда Тейлора. Используя классические оценки производных гармонических функций, мы получаем, что $|q_t(X)| \leq C|X|^{k+1}$ и $|\nabla q_t(X)| \leq C|X|^k$ при достаточно малых t, где X обозначает (x, y, z). Очевидно, что p_t есть однородный гармонический полином степени k, чьи коэффициенты аналитическим образом зависят от t.

Зафиксируем точку $t_0 \in (-r, r)$, и пусть $v_0 = \nabla\Gamma(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), 1)$ есть касательный вектор к Γ в точке $\Gamma(t_0)$. Рассмотрим частную производную функции w порядка $k - 1$: $f = \partial^\alpha w$, $|\alpha| = k - 1$. Тогда $f(\Gamma(t)) = 0$ при $-r < t < r$, следовательно $\langle \nabla f(\Gamma(t_0)), v_0 \rangle = 0$. С другой стороны $(\nabla f)(\Gamma(t_0)) = \nabla(\partial^\alpha p_{t_0})(0)$, и все частные производные порядка k полинома p_{t_0} есть константы. Следовательно $\langle \nabla \partial^\alpha p_{t_0}, v_0 \rangle = 0$. Мы знаем, что $p_{t_0}(\xi)$ – однородный полином порядка k. Тогда $\langle \nabla p(\xi), v_0 \rangle$ есть однородный полином порядка $k - 1$, и его можно записать как $\sum\limits_{|\alpha|=k-1} c_\alpha \xi^\alpha$. Коэффициент c_α этого полинома равен $(\alpha!)^{-1}\partial^\alpha \langle \nabla p_{t_0}, v_0 \rangle = 0$. Следовательно $p(\xi)$ не зависит от $\langle \xi, v_0 \rangle$ (т.е. $p_{t_0}(\xi + s v_0) = p_{t_0}(\xi)$ для любого $s \in \mathbb{R}$). Другими словами, $p(\xi)$ есть однородный полином степени k, зависящий только от двух переменных в подходящей системе координат. Тогда существует ортогональный базис $\{a(t_0), b(t_0), v(t_0)\}$, такой что $p(t_0)(X) = c(t_0)\mathrm{Re}\left\{(\langle X, a(t_0)\rangle + i\langle X, b(t_0)\rangle)^k\right\}$, $c(t_0) \neq 0$.

Также можно считать, что $a(t), b(t), c(t)$ – вещественно-аналитические векторнозначные функции от t при достаточно малых $|t|$, и $|c(t)| > c_0 > 0$. Введем обозначение $v(t) = \nabla\Gamma(t) = (x'(t), y'(t), 1)$ и заметим, что $|v(t)| < 1+\delta$

при малых $|t|$. Проекции $a(t)$ и $b(t)$ на плоскость $\{z = 0\}$ обозначим через $a_1(t)$ и $b_1(t)$ соответственно. Нам также понадобится обозначение $A(t) \in M_2$ для обратной матрицы 2×2 к матрице $[a_1(t), b_1(t)]$, она существует при достаточно малых t и аналитически зависит от t.

Наша цель показать, что каждая нодальная область функции w рядом с началом координат липшицева. Мы сделаем диффеоморфные преобразования координат, чтобы упростить геометрию нодального множества рядом с началом координат. Начиная с этого места, мы не будем пользоваться тем, что w гармонична.

Сначала мы рассмотрим отображение $F(x, y, z) = (x + x(z), y + y(z), z)$ в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^2 \times (-r, r)$ начала координат; очевидно, это диффеоморфизм. Мы определим $w_1 = w \circ F$. Тогда w_1 исчезает на оси z вместе со совим производными порядка не больше $k - 1$. Положив $X = (x, y, z)$, мы имеем

$$w_1(x, y, z + t) = p_t(x + x(z + t) - x(t), y + y(z + t) - y(t), z) + O(|X|^{k+1}) = \\ p_t(x + x'(t)z, y + y'(t)z, z) + O(|X|^{k+1}),\ |X| \to 0.$$

Далее отметим, что

$$p_t(x + x'(t)z, y + y'(t)z, z) = \\ c(t)\mathrm{Re}\left\{(\langle(x, y, 0) + zv(t), a(t)\rangle + \langle(x, y, 0) + zv(t), b(t)\rangle)^k\right\}.$$

Принимая во внимание, что $a(t)$ и $b(t)$ ортогональны $v(t)$, мы заключаем, что $w_1(x, y, z + t) = c(t)\mathrm{Re}\{((X, a_1(t)) + i(X, b_1(t)))^k\} + Q_t(X)$, где $|Q_t(X)| \leq C|X|^{k+1}$ и $|\nabla Q_t(X)| \leq C|X|^k$.

Теперь рассмотрим преобразование $G(x, y, z) = (A(z)(x, y), z)$, это есть диффеоморфизм в некоторой окрестности начала координат, мы рассмотрим отображение $w_2(x, y, z) = c^{-1}(z)(w_1 \circ G)(x, y, z)$. Тогда w_2 исчезает на $(0, 0, z)$

для малых z вместе со всеми своими производными до порядка $k-1$, а k-ый однородный полином в разложении функции w_2 в каждой точке $(0,0,z)$ есть $\mathrm{Re}(x+iy)^k$. Достаточно доказать, что нодальные области функции w_2 липшицевы в окрестности начала координат.

Зафиксируем точку z_0 и рассмотрим плоскость (x,y,z_0); ограничение функции w_2 на эту плоскость имеет вид $\mathrm{Re}(x+iy)^k+\tilde{q}_{z_0}(x,y)$, где побочное слагаемое удовлетворяет $|\nabla\tilde{q}_{z_0}(x,y)| \le C(x^2+y^2)^{k/2}$, а модуль градиента главного слагаемого не меньше $c(x^2+y^2)^{(k-1)/2}$. Это означает, что градиент w_2 не исчезает в $(B\setminus\{0\})\times(-r_1,r_1)$, где B есть достаточно малый двумерный шар с центром в нуле, а r_1 – некоторое положительное число.

Пусть D_0 – это нодальная область функции w_2 в $B_{2s}(0)$, которая содержит точку $(s,0,0)$ при достаточно малом $s>0$. Рассмотрим любые углы ϕ_1,ϕ_2, удовлетворяющие $0<\phi_1<\frac{\pi}{2k}<\phi_2<\frac{\pi}{k}$, и область

$$U=\{(x,y,z):\ |z|<r_0,\ 0<x<x_0,\ x\tan\phi_1<|y|<x\tan\phi_2\},$$

которая состоит из двух связных компонент. Мы хотим показать, что $U\cup\{z=0\}$ содержит $\partial D_0\cap V$ для некоторой окрестности V начала координат. Заметим, что при $x_0,r_0>0$ достаточно малых в U верно

$$w_2(x,x\tan\phi,z)=x^k(\cos\phi)^{-k}\cos k\phi+O(|x|^{k+1})>0,\ |\phi|\le\phi_1,$$
$$w_2(x,\pm x\tan\phi_2,z)=x^k(\cos\phi_2)^{-k}\cos k\phi_2+O(|x|^{k+1})<0,\qquad \text{и}$$
$$\partial_x w_2(x,y,z)\ge c(|x|^2+|y|^2)^{(k-1)/2}>0\ \text{ в }\Omega.$$

Тогда $(\partial D_0\cap B_\varepsilon)\setminus(\{0,0,z\})\subset\Omega$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало. Далее мы получаем, что ∂D_0 есть график над плоскостью $(0,y,z)$, и по теореме о неявной функции, если задать ∂D_0 через $(g(y,z),y,z)$, то

$$|\nabla g(y,z)|\le|\nabla w_2(g(y,z),y,z)|/|\partial_x w_2(g(y,z),y,z)|\le C,\quad \text{при}\quad y\ne0.$$

Тогда $g(y,z)$ есть нерперывная функция дифференцирумая везде кроме прямой $\{y=0\}$ с равномерно ограниченной производной, следовательно она липшицева в B_ε. Рассуждение выше показывает, что есть ровно $2k$ нодальных областей в B_ε, и граница каждой из них может быть представлена графиком липшицевой функции. □

Доказательство, изложенное выше, наводит на мысль, что существует окрестность V нуля и диффеоморфизм $H : V \to B$, такой что $w(x, y, z) = g_k(H(x, y, z))$, где $g_k(x, y, z) = \mathrm{Re}(x + iy)^k$. Мы предполагаем, что этот диффеоморфизм может быть построен так же как в доказательстве теоремы Квипера-Куо из работы [35]. Разница состоит в том, что необходимо применять подход из указанной работы к семейству функций, аналитически зависящих от одномерного параметра. Но мы не смогли найти подобной конструкции в литературе.

1.6.2. Доказательство теоремы 2

Лемма 5 влечет полезное следствие.

Следствие 1. *Множество плохих точек в $Z \cap V$ есть не более чем счетное множество с конечным множеством точек накопления.*

Это следствие будет использовано в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть u и v – такие гармонические функции в Ω, что $Z(u) = Z(v) = Z$. Зафиксируем точку x_0 в Z. Пусть f есть отношение u и v. Тогда существует положительная константа $C = C(Z, x_0)$ и шар $B_r(x_0) \subset \Omega$ с центром в x_0 и радиусом $r = r(Z, x_0)$, таким что*

$$\inf_{B_r(x_0)} |f| \geq C \sup_{B_r(x_0)} |f|.$$

Доказательство. Из теоремы 5 мы узнаем, что f непрерывна в Ω. Следствие 1 влечет, что существует сферический слой $Q := B_R(x_0) \setminus \overline{B_r}(x_0)$ с $R > r \geq 0$ и $\overline{B_R}(x_0) \subset \Omega$, такой что каждая точка $x \in Q \cap Z$ хорошая. Рассмотрим сферу

S радиуса $\frac{r+R}{2}$ и с центром x_0. Пусть Ω_i – это любая нодальная область, пересекающаяся а S, а S_i обозначает $S \cap \overline{\Omega}_i$. Заметим, что S_i – это компактное подмножество Q. Согласно граничному неравенству Гарнака для липшицевых областей (см. раздел 1.3 и [9], [8, параграф 8.7]), существует константа C_i, что $\max\limits_{S_i} |f| \leq C_i \min\limits_{S_i} |f|$. Положим $C := \prod\limits_i C_i$. Легко проверить методом математической индукции по количеству нодальных областей в Q, что

$$\max_S |f| \leq C \min_S |f|.$$

По принципу максимума и минимума для отношений гармонических функций мы имеем $\sup_{B_r} |f| \leq \max_S |f|$ и $\inf\limits_S |f| \leq \inf\limits_{B_r} |f|$. Таким образом,

$$\sup_{B_r(x_0)} |f| \leq C \inf_{B_r(x_0)} |f|.$$

$\square$

Теорема 2 мгновенно следует из предыдущей теоремы и компактности множества K.

1.6.3. Доказательство теоремы 3

Пусть Z – это нулевое множество некоторой гармонической функции w в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Зафиксируем точку $x_0 \in \Omega \setminus Z$ и определим

$$\mathcal{F}_0(Z) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \Delta u = 0, Z(u) = Z, u(x_0) = w(x_0)\}.$$

Очевидно, для любой гармонической в Ω функции u с нодальным множеством $Z(u) = Z$ существует константа c_u, такая что $c_u u \in \mathcal{F}_0(Z)$.

Лемма 6. *Для любой точки $y \in \Omega$ существует ее окрестность V_y , $V_y \subset \Omega$, и положительные константы A_y, R_y, такие что для любой точки $x \in V_y$ неравенство*

$$\frac{|D^\alpha(f)|}{\alpha!}(x) \leq A_y R_y^{|\alpha|}$$

выполнено для любого $f = u/v$, где $u, v \in \mathcal{F}_0(Z)$.

Доказательство. Для упрощения обозначений положим $y = 0$. По теореме 2 существует константа $C = C(y, w)$ и окрестность V точки 0, такие что $\frac{1}{C} \leq |\frac{u}{w}|(x) \leq C$ и $\frac{1}{C} \leq |\frac{v}{w}|(x) \leq C$ для любого $x \in V$. Пусть $M = \sup\limits_V |w|$, тогда $|u|$ и $|v|$ ограничены числом CM в V. Согласно стандартным оценкам Коши существует положительные числа $a = a(y, w)$ и $r = r(y, w)$, такие что

$$|u_\alpha| \leq ar^{|\alpha|} \text{ и } |v_\alpha| \leq ar^{|\alpha|}. \tag{1.7}$$

Пусть $w = \sum\limits_{i=k}^{\infty} w_i$ есть разложение функции w в сумму однородных гармонических полиномов, а w_k – первый ненулевой полином степени k в этом разложении. Сделав замену координат, мы можем считать, что $w_{(k,0,\ldots,0)} \neq 0$ ($w_{(k,0,\ldots,0)} := \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} w(0)$). Далее рассмотрим $u = \sum\limits_{i=l}^{\infty} u_i$ и $v = \sum\limits_{i=m}^{\infty} v_i$ – аналогичные разложения в сумму однородных гармонических полиномов функций u и v. Из леммы 2 получаем $Z(w_k) = Z(u_l) = Z(v_m)$, а затем при помощи леммы 1 получаем, что $k = l = m$ и $u_k = c_1 w_k$, $v_k = c_2 w_k$, где c_1, c_2 – некоторые ненулевые числа. По правилу Лопиталя $\frac{v_{(k,0,\ldots,0)}}{w_{(k,0,\ldots,0)}} = \frac{v}{w}(0)$. Т.к. $\frac{1}{C} \leq |\frac{v}{w}|(x) \leq C$, мы получаем, что $|v_{(k,0,\ldots,0)}| \geq C^{-1}|w_{(k,0,\ldots,0)}|$. Доказательство завершается применением леммы 4, константы A_y, R_y зависят от y, w, но не зависят от u и v.

□

Далее мы получим теорему 3 как следствие предыдущей леммы и компактности множества K.

Доказательство теоремы 3. Вещественная аналитичность функции f была доказана в теореме 5. А лемма 3 утверждает, что для любого y существуют A_y и R_y, такие что $\frac{|D^\alpha f(y)|}{\alpha!} \leq A_y R_y^\alpha$ для любого мультииндекса α. Поскольку f вещественно-аналитична, то существует окрестность точки y, обозначим которую через V_y, и числа $\tilde{A}_y$, $\tilde{R}_y$, такие что $\frac{|D^\alpha f(x)|}{\alpha!} \leq \tilde{A}_y(\tilde{R}_y)^\alpha$ для любого $x \in V_y$. Заметим, что $K \subset \bigcup\limits_{y \in K} V_y$. Поскольку K есть компактное множество, то существует конечное множество $\{y_1, y_2 \dots, y_m\}$, такое что $K \subset \bigcup_{i\in\{1,\dots,m\}} V_{y_i}$. Возьмем $A := \max_i\{\tilde{A}_{y_i}\}$ и $R := \max_i\{\tilde{R}_{y_i}\}$. $\square$

1.7. Примеры гармонических функций с общим множеством нулей

1.7.1. Примеры в размерности два

Рассмотрим произвольную область $\Omega \subset \mathbb{C}$, которая содержит 0. Пусть $f = u + iv$ – это голоморфная функция, и $f : \Omega \to D = \{|z| < 1\}$. Допустим, что $f(0) = 0$. Далее мы построим семейство гармонических функций в Ω с таким же множеством нулей, как $Z(u)$.

Рассмотрим произвольную гармоническую функцию h в D со следующим свойством: $h(x + iy) > 0$ при $x > 0$, и $h(x + iy) < 0$ при $x < 0$. Определим функцию $H(z) = h(f(z))$. Тогда H будет гармонической функцией в Ω, которая имеет такой же знак, как и u. Действительно,

$$H(z) > 0 \iff h(f(z)) > 0 \iff Re(f(z)) > 0 \iff u > 0.$$

Таким образом, H и u имеют одинаковое множество нулей.

В описанной конструкции выше множество гармонических функций с общим множеством нулей довольно обширно в силу свободы выбора функции h. Однако глобально целая гармоническая функция определяется своим множеством нулей в $\mathbb{C}$ с точностью до двух (или одного) вещественных параметров. Любые три вещественнозначные гармонические функции с общим ножеством нулей в $\mathbb{C}$ линейно зависимы (см. [36]).

Мы также обращаем внимание на работу [1], где представлен обширный список конкретных двумерных примеров гармонических функций с общим нодальным множеством. Отметим, что в размерности два любой однородный гармонический полином p можно записать как $p_k = \mathrm{Im}((x+iy)^k)$ после замены координат. Этот полином делит бесконечно много гармонических полиномов $p_{lk} = \mathrm{Im}((x+iy)^{lk})$. Если есть два гармонических полинома, один из который делит другой, можно построить гармонические полиномы и функции с одинаковым множеством нулей в некотором шаре, например, $p_k(x,y)$ и $p_k(x,y) + cp_{lk}(x,y)$.

1.7.2. Старшие размерности

Далее мы представим несколько примеров гармонических функций с общим множеством нулей в старших размерностях, где ситуация более деликатна, и нет какой-либо общей конструкции. Очевидно, любой двумерный пример порождает пример в старших размерностях, если рассматривать функции, которые не зависят от некоторых координат. Интересны примеры, которые не сводятся к двумерным. Конструкция гармонических функций с общим множеством нулей при помощи нахождения пары гармонических полиномов, один из которых делится на другой, только сводит задачу к другой, которая не имеет хорошего ответа. Совсем неочевидно, для каких полиномов в размерности три существует бесконечное семейство гармонических полиномов с таким же множеством нулей в фиксированном шаре. Например, мы не знаем, делит ли гармоничесикй полином $h(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^3 - 3x^2z$ какие-либо другие гармонические полиномы. Вопрос о том, какие гармонические полиномы делятся на данный полином широко известен и крайне труден, см. [37, 38]. Довольно легко построить примеры, избегая вопрос о делимости гармонических полиномов, если множество нулей простое, например, невырожденная аналитическая поверхность или объединение параллельных гиперплоскостей. Для более сложных множеств нулей нет какой-либо общей конструкции.

Пример 1. Рассмотрим произвольную вещественно-аналитическую невырожденную гиперповерхность Γ и зафиксируем точку $O \in \Gamma$. Пусть $f_{1,2}$ – это пара положительных вещественно-аналитических функций на Γ. Согласно теореме Коши-Ковалевской мы можем найти гармонические функции $u_{1,2}$ в некоторой окрестности $B_\varepsilon(O)$ точки O со следующими данными Коши:

$$\begin{cases} u_i = 0 & \text{на } \Gamma \cap B_\varepsilon(O), \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = f_i & \text{на } \Gamma \cap B_\varepsilon(O). \end{cases}$$

Тогда в чуть меньшей окрестности V точки O функции u_1 и u_2 имеют одинаковое множество нулей $\Gamma \cap V$.

Пример 2. В размерности три и выше существует бесконечное семейство линейно независимых функций с одинкавым нодальным множеством в $\mathbb{R}^n$. Простой пример: $h_{a,b}(x, y, z) = \sin x \exp(ay) \exp(bz)$, $a^2 + b^2 = 1$. Этот пример показывает разницу с двумерной ситуацией, где любые три целые гармонические функции с общим множеством нулей в $\mathbb{R}^2$ линейно зависимы, см. [36].

Пример 3 (Осесимметричные гармонические функции в $\mathbb{R}^4$).

Для числа $k \in \mathbb{N}$ определим функцию $u_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\operatorname{Im}(x_4 + i\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})^{3k}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$. Оказывается, что u_k есть однородный гармонический полином степени $3k - 1$, который делится на $3x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = u_1$. Тогда $u_k + u_1$ и u_1 имеют одинаковое множество нулей в некоторой окрестности начала координат.

Далее мы объясним, откуда взялся пример выше. Функция $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ называется осесимметричной относительно, скажем, оси x_4, если она инварианта относительно ортогональных преобразований первых трех координат. Другими словами, $u = u(\rho, h)$, где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $h = x_4$. Осесимметричные гармонические функции в размерности 4 можно свести в к обычным гармоническим функциям двух переменных: функция

$$v(\rho, h) = \rho u(|\rho|, h) \tag{1.8}$$

оказывается гармоничной относительно координат ρ, h, причем она нечетна относительно ρ. Если даны две нечетные относительно первой координаты гармонические функции с общим множеством нулей, то мы можем использовать (1.8) и построить две осесимметричные гармонические функции в размерности 4, которые имеют одинаковое нодальное множество.

Пример 4. Из принципа симметрии следует, что существует много гармонических функций в единичном шаре в $\mathbb{R}^3$, которые исчезают на множестве $xyz = 0$. Можно рассмотреть любую непрерывную функцию на единичной сфере, нечетную относительно координат x, y, z, и продолжить ее гармонически внутрь шара. Полученная гармоническая функция будет равна нулю на множестве $xyz = 0$. Например, для любых $a, b > 0$: $a^2 + b^2 = 1$, функция $\sin(ax)\sin(by)\sinh(z)$ подходит под описание выше. Таким образом, гармонический полином xyz делит бесконечно много гармонических полиномов.

Пример 5. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Определим функцию

$$u_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) =$$

$$\frac{\sin(3k\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})\sin(4k\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2})\sinh(5k\sqrt{x_7^2 + x_8^2 + x_9^2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}\sqrt{x_7^2 + x_8^2 + x_9^2}}.$$

Функцию u_k можно доопределить до непрерывной и гармонической функции во всем $\mathbb{R}^9$. Нулевое множество функции u_k содержит нулевое множество функции u_1. Для любого шара B можно выбрать такое малое $c_k > 0$, что $Z(u_1 + c_k u_k) \cap B = Z(u_1) \cap B$.

Далее мы объясним, почему оказалось, что u_k – гармоническая функция. Из принципа симметрии следует, что существует бесконечно много гармонических функций в единичном шаре в $\mathbb{R}^3$, которые исчезают на множестве $xyz = 0$. Зафиксируем такую функцию $v(x, y, z)$, тогда по теореме о делении гармонических функций $\frac{v(x,y,z)}{xyz}$ вещественно-аналитична в единичном шаре.

Прямое вычисление показывает, что функция

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) =$$

$$\frac{v(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}, \sqrt{x_7^2 + x_8^2 + x_9^2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}\sqrt{x_7^2 + x_8^2 + x_9^2}}$$

гармонична в единичном шаре в $\mathbb{R}^9$.

Пример 6. Предположим, что u_1 и u_2 – гармонические функции с общим множеством нулей в единичном диске D, также предположим, что $u_{1,2}(x, y) = 0$ при $xy = 0$. Тогда u_1 и u_2 нечетны относительно x и y, а функции $\frac{u_i(x,y)}{xy}, i = 1, 2$ непрерывны в D. Определим

$$U_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{u_i(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}}, i = 1, 2.$$

Легко видеть, что U_1 и U_2 непрерывны в единичном шаре B в $\mathbb{R}^6$, и их нодальные множества совпадают. Прямое вычисление показывает, что U_1 и U_2 удовлетворяют уравнению Лапласа в B кроме множества, где $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2} = 0$, которое является устранимой особенностью для гармонических функций. Следовательно U_1 и U_2 гармоничны в B.

1.8. Заключительные замечания

1.8.1. Нодальные множества гармонических функций и гармонических полиномов

Интересный вопрос состоит в том, в какой степени нодальное множество гармонической функции (или решения более общего эллиптического уравнения) похоже на нодальное множество первого ненулевого однородного полинома в разложении функции в ряд, см. [34] и ссылки внутри. В размерности два нодальное множество гармонических функций и решений эллиптических уравнений локально есть регулярное пересечение нескольких кривых.

В старших размерностях мы неявно использовали некоторую информацию о нодальных множествах, чтобы поделить гармонические функции с общим множеством нулей в $\mathbb{R}^n$ и доказали, что в размерности три рядом с большинством точек граница нодального множества представима в виде графика липшицевой функции. Однако следующий пример показывает, что уже начиная с размерности три нодальные множества могут иметь сложную локальную структуру.

Пример 8. *Пусть $H(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^3 - 3x^2 z$, очевидно, это есть гармонический полином. Пересечение его нодального множества с плоскостью $\{(x,y,z) : z = z_0\}$ есть объединение двух ортогональных прямых, когда $z_0 = 0$, и двух гипербол, когда $z_0 \neq 0$. Есть только две нодальные области Ω_1 и Ω_2 (а не четыре как в случае полинома $x^2 - y^2$), эти нодальные области не являются липшицевыми. Более того, условие цепи Гарнака не выполнено для $\Omega_{1,2}$ (см. [9, 30]).*

1.8.2. Дифференциальное уравнение для частного

Можно думать об отношении f как о положительном решении следующего вырожденного эллиптического уравнения в частных производных второго порядка

$$\operatorname{div}(v^2 \nabla f) = 0.$$

К сожалению, коэффициент очень сингулярен, v^2 не лежит в классе Макенхаупта A_2, когда v меняет знак, и мы не можем применять неравенство Гарнака для вырожденных эллиптических операторов с A_2 условием на вес (см. [5]) здесь. Было бы интересным, если бы удалось использовать гармоничность v, чтобы получить неравенство Гарнака для положительных решений таких уравнений в $\mathbb{R}^n$. Более тонкие уравнения для $\log f$ использовалось в [1] в размерности два.

Другой интересный вопрос состоит в том, когда уравнение выше допускает какие-либо нетривиальные положительные решения, и насколько велико семейство таких решений.

1.8.3. Нули и деление вещественно-аналитических полиномов нескольких переменных

Мы предлагаем доказательство леммы 1 в этом параграфе. Следующая лемма следует из общих результатов алгебраической геометрии, мы позаимствовали эту лемму из [27, параграф 5]. Символ H^{n-1} будет обозначать $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа.

Лемма (Лемма о делении). *Пусть Q и P – это полиномы в $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Предположим, что $H^{n-1}(Z(P) \cap Z(Q)) > 0$ и Q неприводим. Тогда существует $R \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, такое что $P = QR$.*

Мы собираемся заменить условие неприводимости полинома Q на условие гармоничности и доказать лемму 1.

Будем писать $S \sqsubset T$ в случае, когда множества S, $T \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют $H^{n-1}(S \setminus T) = 0$. Лемма 1 следует из двух предложений ниже.

Предложение 9. *Если Q – ненулевой однородный гармонический полином, а Q_1 -непостоянный делитель Q, тогда Q_1 меняет знак и $H^{n-1}(Z(Q_1)) > 0$.*

Предложение 10. *Предположим, что полиномы P и Q обладают следующими свойствам:*

1. *$Z(Q) \sqsubset Z(P)$,*

2. *Если Q_1 есть непостоянный делитель Q, тогда Q_1 меняет знак.*

Тогда P делится на Q.

Доказательство предложения 9. Если Q_1 меняет знак, то $H^{n-1}(Z(Q_1)) > 0$ (см. [27, параграф 5]). Мы далее можем предполагать, что $Q_1 \geq 0$ и попытаемся получить противоречие. Пусть $Q = Q_1 Q_2$, тогда $Q_2 Q = Q_1 Q_2^2 \geq 0$. Степень Q_2 строго меньше степени Q. Поскольку однородный гармонический полином ортогонален на сфере любому полиному меньшей степени, то $\int\limits_{S_r} Q_2(x)Q(x)d\sigma(x) = 0$, где S_r есть $(n-1)$-мерная сфера с центром 0 и радиусом r, а σ обозначает поверхностную меру Лебега. Помня, что $Q_2 Q \geq 0$, получаем $Q_2 Q = 0$ всюду на S_r. Поскольку r можно выбирать произвольным положительным числом, то $Q_2 Q \equiv 0$. Противоречие. $\square$

Доказательство предложения 10. Если P или Q – постоянная функция, то утверждение тривиально. Мы будем доказывать утверждение индукцией по степени Q. Рассмотрим любой неприводимый непостоянный делитель полинома Q и обозначим его через Q_1. Мы знаем, что $Z(Q_1) \subset Z(Q) \sqsubset Z(P)$ и $H^{n-1}(Z(Q_1)) > 0$, следовательно $H^{n-1}(Z(P) \cap Z(Q_1)) > 0$. Применяя лемму о делении (см. выше) к P и Q_1, мы видим, что P делится на Q_1. Положим $\tilde{P} := P/Q_1$ и $\tilde{Q} := Q/Q_1$. Заметим, что $\tilde{Q}$ обладает свойством (2). Теперь мы покажем, что $Z(\tilde{Q}) \sqsubset Z(\tilde{P})$. Предположим, что это неправда, т.е. $H^{n-1}(Z(\tilde{Q}) \setminus Z(\tilde{P})) > 0$. Очевидно, что $Z(P) = Z(\tilde{P}) \cup Z(Q_1)$, и по свойству (1), $H^{n-1}(Z(Q) \setminus Z(P)) = 0$. Следовательно $H^{n-1}(Z(Q \setminus Q_1) \cap Z(Q_1)) > 0$. Тогда по лемме 1.8.3, $Q_1 | (Q/Q_1)$ и $Q_1^2 | Q$, что противоречит свойству (2).

Мы видим, что $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ обладают свойствами (1) и (2). Поскольку степень полинома $\tilde{Q}$ меньше степени Q, то по индукционному предположению мы получаем $\tilde{P} = \tilde{Q}R$, следовательно $P = QR$. $\square$

Замечание 2. Внимательный читатель может увидеть, что в теореме 5 можно заменить условие $Z(v) \subset Z(u)$ на $Z(v) \sqsubset Z(u)$:

Предположим, что функция u есть вещественно-аналитическая функция, а v – гармоническая функция, обе функции определены в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Если $Z(v) \sqsubset Z(u)$, тогда существует вещественно-аналитическая функция f в Ω, такая что $u = vf$.

На самом деле $Z(v) \sqsubset Z(u)$ влечет $Z(v) \subset Z(u)$, если v гармонична, а u вещественно-аналитична. Предудыщее замечание сделано со следующей целью: если применить его несколько раз, то получается такая теорема.

Теорема 11. *Пусть u – вещественно-аналитичекая функция, а $v_1, v_2, \ldots, v_k$ – гармонические функции, все функции определены в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Если $Z(v_i) \subset Z(u)$ для каждого $i \in [1, k]$, и $H^{n-1}(Z(v_i) \cap Z(v_j)) = 0$ для $i \neq j$, то существует вещественно-аналитическая функция f в Ω, такая что $u = f \prod_{i=1}^{k} v_i$.*

1.8.4. Вещественные и комплексные нули гармонических функций

Наши результаты показывают, что если гармонические функции u и v имеют одинаковое множество нулей Z в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, тогда их нодальные множества в $\mathbb{C}^n$ совпадают по крайней мере в некоторой комплексной окрестности шара B. Более того, если вещественно-аналитическая функция исчезает на множестве нулей гармонической функции, то ее множество комплексных нулей содержит множество комплексных нулей гармонической функции в некоторой комплексной окрестности вещественных нулей. Если $n = 2$ или 3, то теорема 3 влечет, что эта окрестность может быть выбрана зависящей только от Z и не зависит от u и v, т.е. вещественные нули гармонической функции определяют ее комплексные нули в некоторой комплексной окрестности. Было бы интересным узнать, как размер этой окрестности зависит от нодального множества Z.

1.8.5. Вопрос о нормальности семейства гармонических функций с фиксированным нулевым множеством.

Общеизвестный факт состоит в том, что семейство положительных гармоническийх функций в B_1 со значением 1 в центре есть нормальное семейство. Пусть Z – это любое подмножество B_1. Рассмотрим множество F_Z всех гармонических в B_1 функций u, таких что $Z(u) = Z$, и $u(0) = 1$. Мы верим, что в любой размерности F_Z есть нормальное семейство функций в B_1. В размерности $n = 2, 3$ это следует из неравенства Гарнака для отношений гармонических функций.

Глава 2

Теорема Левинсона о повторном логарфиме и ее многомерный аналог для гармонических функций.

Теорема Левинсона о повторном логариме, которую также приписывают Берлингу, Шобергу, Карлеману и другим математикам, есть критерий нормальности семейства голоморфных функций, ограниченных по модулю некоторой мажорантой, зависящей, скажем, только от одной координаты, при условии, что мажоранта удовлетворяет некоторому интегральному условию.

Теорема 12 (Теорема Левинсона о повторном логарифме)**.** *Пусть P обозначает прямоугольник $(-a, a) \times (-b, b)$ на эвклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, а функция $M : (0, b) \to [e, +\infty)$ не возрастает. Рассмотрим множество $\mathcal{F}_M$ всех функций f, голоморфных в P, таких что $|f(x, y)| \leq M(|y|)$, $(x, y) \in P$. Если $\int\limits_0^b \log\log M(y)dy < +\infty$, то $\mathcal{F}_M$ есть нормальное семейство функций в P, т.е. $\mathcal{F}_M$ равномерно ограничено на любом компактном подмножестве прямоугольника P.*

Это утверждение является точным. Для регулярных (непрерывных и убывающих) мажорант M семейство $\mathcal{F}_M$ является нормальным тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^b \log\log M(y)dy < +\infty$ (см. [16],стр.379–383 и [39]). Укажем несколько источников [11–17, 39–44], где приведены разнообразные доказательства и приложения этой теоремы.

Теорему Левинсона можно доказывать, пользуясь субгармоничностью функции $\log|f|$, и этот подход работает и для гармонических функций h в плоских областях ввиду того, что $\log|\nabla h|$ тоже есть субгармоническая функция. Это свойство гармонических функций верно лишь в размерности два, и случай гармонических функций большего числа переменных требует новых идей. Дынькин доказал результат такого типа (см. [17]) как приложение его исследований по асимптотической задаче Коши, но с дополнительными техническими условиями на мажоранту. В работе автора [18] разработан новый подход, позволивший обобщить теорему Левинсона на гармонические фукции любого числа переменных. Следующая теорема является главным результатом этой главы.

Теорема 13. *Пусть* Ω *обозначает множество* $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, y \in \mathbb{R}, |x| < R, |y| < H\}$, *где* R *и* H *– положительные числа. Предположим, что функция* $M\colon (0,H) \to \mathbb{R}_+$ *не возрастает и*

$$\int\limits_0^H \log^+ \log^+ M(y) dy < +\infty, \tag{2.1}$$

где $\log^+ x := \begin{cases} \log x, & x \geq 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$. *Тогда множество* $\mathcal{H}_M$ *всех функций* u, *гармонических в* Ω *и таких, что* $|u(x,y)| \leq M(|y|)$, $(x,y) \in \Omega$, *является нормальным семейством в* Ω.

Для компактного множества $K \subset \Omega$ наш подход позволит дать оценку в явном виде для $\sup\limits_{u \in \mathcal{H}_M} \sup\limits_K |u|$ в терминах M, K и Ω. Мы получим теорему 13 как следствие "голоморфной"теоремы Левинсона путем сведения к осесимметричным функциям. Сначала мы докажем теорему 13 в размерности 4, из чего будет следовать трехмерный случай. А затем мы сведем случай нечетных n к случаю $n = 3$. А случай четного n получается из нечетного добавлением одной фиктивной координаты. Главное препятствие, возникающее в старших размерностях, есть то обстоятельство, что $\log |\nabla u|$ уже необязательно субгармоничен для гармонической функции u в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$.

Некоторые доказательства "голоморфной"теоремы Левинсона о повторном логарифме опираются на методы комплексного анализа, некоторые явно и неявно используют оценки гармонической меры в узких областях типа каспа, но большинство доказательств использует условие монотонности M. Исключение состовляет красивый подход Домара (см. [16],[40],[41]), который не требует никаких условий регулярности на M, в том числе монотонности. Мы кратко опишем идею доказательства Домара в разделе 2.1, а позже будем использовать ее для получения равномерных явных оценок для $\mathcal{H}_M$ в старших размерностях. Будем обозначать через $d(x,y)$ обычное эвклидово расстояние между точками x и y в $\mathbb{R}^n$. Также для любых множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ положим $d(X,Y) := \inf\{d(x,y) : x \in X, y \in Y\}$. Символ λ_n будет обозначать n-мерную меру Лебега.

2.1. Прием Домара.

Теорема 12 немедленно следует из леммы ниже в силу субгармоничности $\log|f|$.

Лемма 7. *Пусть v – субгармоническая функция в прямоугольнике $P := (-a,a) \times (-b,b)$. Предположим, что функция $\tilde{M} : (-b,b) \to [-\infty, +\infty]$ удовлетворяет $\int\limits_{-b}^{b} \log^+ \tilde{M}(y)dy < +\infty$, а также $v(x+iy) \le \tilde{M}(y)$ для всех $(x,y) \in P$. Тогда для любого компактного множества $K \subset P$ существует константа $C = C(\tilde{M}, d(K, \partial\Omega))$, такая что $\sup\limits_K v \le C$.*

Трюк Домара.

Пусть $F(t) := \lambda_1(\{y \in (-b,b) \colon \tilde{M}(y) \ge t\})$ обозначает кумулятивную функцию распределения функции $\tilde{M}(y)$. Интегральное условие $\int\limits_{-b}^{b} \log^+ \tilde{M}(y)dy < +\infty$ можно переформулировать в терминах F, а именно

$\sum\limits_{i=0}^{+\infty} F(2^i) < +\infty$, если $\int\limits_{-b}^{b} \log^+ \tilde{M}(y)dy < +\infty$ (см. [16], стр.378–379). Тогда существует положительное число C, такое что

$$\sum_{i=-1}^{+\infty} F(2^i C) < \frac{\pi}{8} d(K, \partial P). \tag{2.2}$$

Наша цель показать, что $\sup\limits_K v \leq C$. Предположим противное. Пусть существует точка $z_0 \in K$, такая что $v(z_0) > C$. Обозоначим через A_t множество $\{z \in P : v(z) \geq t\}$.

Предложение 1. *Если точка $z \in P$ такова, что $v(z) \geq \mathcal{C}$ для некоторого $\mathcal{C} > 0$, и $d(z, \partial P) > \frac{8}{\pi} F(\mathcal{C}/2)$, то существует точка $\zeta \in P$, такая что $d(z, \zeta) \leq \frac{8}{\pi} F(\mathcal{C}/2)$ и $v(\zeta) \geq 2\mathcal{C}$.*

Рассмотрим шар B с центром z и радиусом $r = \frac{8}{\pi} F(\mathcal{C}/2)$. Заметим, что $B \subset P$, т.к. $d(z, \partial P) > \frac{8}{\pi} F(\mathcal{C}/2)$. Теперь мы воспользуемся субгармоничностью v :

$$\mathcal{C} \leq v(z) \leq \frac{1}{\lambda_2(B)} \int\limits_B v = \frac{1}{\lambda_2(B)} (\int\limits_{B \setminus A_{\mathcal{C}/2}} v + \int\limits_{B \cap A_{\mathcal{C}/2}} v) \leq \mathcal{C}/2 + \frac{1}{\lambda_2(B)} \int\limits_{B \cap A_{\mathcal{C}/2}} v.$$

Следовательно

$$\mathcal{C}/2 \leq \frac{1}{\lambda_2(B)} \int\limits_{B \cap A_{\mathcal{C}/2}} v \leq \frac{1}{\pi r^2} \sup_B v \cdot \lambda_2(B \cap A_{\mathcal{C}/2}) \leq$$

$$\frac{1}{\pi r^2} \sup_B v \cdot \lambda_1(\{x | \ \exists \ y : (x, y) \in B \cap A_{\mathcal{C}/2}\}) \cdot \lambda_1(\{y : \ \exists \ x : (x, y) \in B \cap A_{\mathcal{C}/2}\}) \leq$$

$$\frac{1}{\pi r^2} \sup_B v \cdot 2r F(\mathcal{C}/2) = \frac{1}{4} \sup_B v.$$

Таким образом, $2\mathcal{C} \leq \sup\limits_B v$, и предложение доказано. Используя это предложение, взяв z_0 в качестве z и C вместо $\mathcal{C}$, мы получаем точку z_1, такую что $v(z_1) \geq 2C$ и $d(z_1, z_0) \leq \frac{8}{\pi} F(C/2)$. Напомним, что $d(z_0, \partial P) > \frac{8}{\pi} \sum\limits_{i=-1}^{+\infty} F(2^i C)$, отсюда следует $d(z_1, \partial P) > \frac{8}{\pi}\sum\limits_{i=0}^{+\infty} F(2^i C)$. Применяя предложение бесконечно много раз, мы получаем последовательность $\{z_i\}_{i=0}^{+\infty}$, такую что $v(z_i) \geq 2^i C$ и $d(z_i, z_{i+1}) \leq \frac{8}{\pi} F(2^{i-1}C)$. Согласно (2.2) последовательность $\{z_i\}$ имеет предельную точку $z \in P$, тогда $v(z) \geq \lim\limits_{i\to\infty} v(z_i) = +\infty$. Противоречие.

Замечание 3. Прием Домара также дает явные оценки в теореме 12. Положим $F(t) := \lambda_1(\{y : \log^+ M(y) \geq t\})$. Если $C > 0$ и $d(K, \partial P) > \frac{8}{\pi}\sum_{i=-1}^{+\infty} F(2^i C)$, тогда $|f| \leq \exp(C)$ на K.

2.2. Осесимметричные гармонические функции.

Рассмотрим $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$. Будем обозначать через ρ величину $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2}$ и положим $h := x_n$. Функция u в $\mathbb{R}^n$ называется осесимметричной, если $u = u(\rho, h)$, т.е. u инвариантно относительно ортогональных преобразований первых $(n-1)$-ой координат. Осесимметричные гармонические функции u удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению (уравнение для осесимметричных потенциалов):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{n-2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0. \tag{2.3}$$

Далее будут сформулированы две идеи. Первая сводит осесимметричные гармонические функции в $\mathbb{R}^4$ к обычным гармоничечким функциям в $\mathbb{R}^2$. Второй прием сводит осесимметричные гармонические функции в $\mathbb{R}^{2k+3}$ к гармоническим функциям в $\mathbb{R}^3$. См. [45], [46], [47], [48], [49], [50], где подобные идеи используются в другом контексте.

2.2.1. Из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^2$

Предположим, что u есть осесимметричная гармоническая функция в осесимметричной области $\Omega \subset \mathbb{R}^4$. Рассмотрим множество $\tilde{\Omega}_+ \subset \mathbb{R}^2$, определяемое по правилу $x \in \Omega \iff (\rho(x), h(x)) \in \tilde{\Omega}_+$. Легко видеть из уравнения (2.3), что функция

$$\tilde{u}(\rho, h) = \rho u(|\rho|, h) \tag{2.4}$$

гармонична во внутренности $\tilde{\Omega}_+$. Определим $\tilde{\Omega}_- \subset \mathbb{R}^2$ соотношением $x \in \Omega \iff (-\rho(x), h(x)) \in \tilde{\Omega}_-$. Пусть $\tilde{\Omega}$ есть объединение $\tilde{\Omega}_+$ и $\tilde{\Omega}_-$. Тогда $\tilde{\Omega}$ есть область в $\mathbb{R}^2$, симметричная относительно прямой $\rho = 0$. Согласно принципу симметрии Шварца мы видим, что уравнение (2.4) определяет нечетную (относительно координаты ρ) гармоническую функцию в $\tilde{\Omega}$.

2.2.2. Из $\mathbb{R}^{2k+3}$ в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $u = u(\rho, h)$ есть осесимметричная гармоническая функция в $\mathbb{R}^{2k+3}$. Положим

$$v(\varphi, \rho, h) = \rho^k e^{ik\varphi} u(\rho, h), \tag{2.5}$$

где (φ, ρ, h) – это цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Тогда v является гармонической (комплекснозначной) функцией в $\mathbb{R}^3$. Действительно, $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial h^2} = 0 + \rho^k e^{ik\varphi}(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{2k+1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}) = 0$. Последнее вычисление показывает, что v гармонична в $\mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}$. Заметим, что v непрерывна вплоть до прямой $\{\rho = 0\}$, которая является устранимой особенностью для ограниченных гармонических функций (см. [51],стр.200). Таким образом, v гармонична в $\mathbb{R}^3$.

2.3. Доказательство теоремы 13.

Доказательство в случае $n = 4$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$: $R, H > \varepsilon$. Выберем любую точку $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, такую что $|x_0| < R - \varepsilon$. Рассмотрим произвольную функцию u из семейства $\mathcal{H}_M$. Достаточно проверить, что существует такая константа $C = C(M, H, \varepsilon)$, что $|u(x_0, h)| \leq C$ для любого h:

$|h| < H - \varepsilon$. Обозначим множество $\{(x, y) \colon x \in \mathbb{R}^{n-1}, y \in \mathbb{R}, |x| < \varepsilon, |y| < H)\}$ через P_ε и рассмотрим функцию $\tilde{u} : P_\varepsilon \to \mathbb{R}$, определенную формулой $\tilde{u}(x, y) = u(x - x_0, y)$. Заметим, что $|\tilde{u}(x, y)| \le M(|y|)$ в P_ε.

Далее будет сделан шаг, который сведет вопрос к осесимметричным функциям. Обозначим через $O(3)$ группу ортогональных преобразований $\mathbb{R}^3$, пусть dS – мера Хаара на $O(3)$. Для данного преобразования $g \in O(3)$ мы будем обозначать через $\tilde{u}_g$ функцию $\tilde{u}(gx, y)$. Очевидно, что $\tilde{u}_g$ гармонична в P_ε, $\tilde{u}_g(0, y) = \tilde{u}(0, y) = u(x_0, y)$, а также $|u_g(x, y)| \le M(|y|)$ на P_ε. Определим функцию $w(x, y) := \int\limits_{O(3)} u_g(x, y) dS(g)$, $(x, y) \in P_\varepsilon$, очевидно, что w тоже обладает свойствами из предыдущего предложения. Кроме того $w = w(\rho, h)$ осесимметричная. Мы свели четырехмерный случай к следующей лемме:

Лемма 8. *Предположим, $w = w(\rho, h)$ – осесимметричная гармоническая функция в усеченном цилиндре P_ε и $|w(x, y)| \le M(|y|)$. Тогда существует константа $C = C(M, H, \varepsilon)$, такая что $|w(0, y)| < C$ для любого $y \in (-H + \varepsilon, H - \varepsilon)$.*

Положим $v(\rho, h) := \rho w(|\rho|, h)$. Согласно параграфу 2.2.1 функция v гармонична на множестве $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-H, H)$. Обозначим $\rho + ih$ через ζ и $\frac{\partial v}{\partial \rho} - i\frac{\partial v}{\partial h}$ через f. Тогда f есть голоморфная функция в $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-H, H)$. Обозначим множество $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2) \times (-H + \varepsilon/2, H - \varepsilon/2)$ через $\tilde{P}_{\varepsilon/2}$.

Пусть точка $\zeta = (\rho, h) \in \tilde{P}_{\varepsilon/2}$ и $h \le \varepsilon$. Рассмотрим диск $B_{h/2}(\zeta) := \{z : |z - \zeta| < h/2\}$. Так как $|v(\rho, h)| \le M(|h|)$ и M не возрастает, то $\sup\{|v|(x) \colon x \in B_{h/2}(\zeta)\} \le M(h/2)$. Применяя оценки Коши производных гармонических функций, получаем

$$|\nabla v|(\zeta) \le C_1 \frac{\sup\{|v|(x) \colon x \in B_{h/2}(\zeta)\}}{h/2} \le C_2 \frac{M(h/2)}{h}.$$

Символами C_1, C_2, C_3 мы будем обозначать абсолютные положительные константы, значение которых меньше 100. Отметим, что $|f| = |\nabla v|$, отсюда следует $|f|(\zeta) \leq C_2 \frac{M(h/2)}{h}$.

Если $\zeta \in \tilde{P}_{\varepsilon/2}$ и $h \geq \varepsilon$, тогда $B_{\varepsilon/4}(\zeta) \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-H, H)$. Используя подобным образом оценки Коши, мы получаем $|f(\zeta)| \leq C_3 \frac{M(h/2)}{\varepsilon}$.

Таким образом, $|f(\zeta)| \leq \max(\frac{100}{\varepsilon}, \frac{100}{h}) M(h/2)$ для любого $\zeta \in \tilde{P}_{\varepsilon/2}$. Обозначим $\max(\frac{100}{\varepsilon}, \frac{100}{h}) M(h/2)$ через $\tilde{M}(h)$. Из неравенства

$$\log^+ a + \log^+ b + \log 2 \geq \log^+(a+b)$$

легко получить, что неравенство $\int\limits_{-H}^{H} \log^+ \log^+ M(y) dy < +\infty$ влечет $\int\limits_{-H+\varepsilon/2}^{H-\varepsilon/2} \log^+ \log^+ \tilde{M}(y) dy < +\infty$.

Теперь мы можем применить теорему 12 к функции f, голоморфной в $\tilde{P}_{\varepsilon/2}$ и мажорирумой $\tilde{M}$. Значит, существует положительная константа $C = C(M, H, \varepsilon)$, такая что $|f(0,h)| < C$ для всех $h \in (-H+\varepsilon, H-\varepsilon)$. Напоминаем, что $v(\rho, h) = \rho w(\rho, h)$, это влечет $|w(0,h)| = |v_\rho(0,h)| \leq |f(0,h)| \leq C(M, H, \varepsilon)$.

Замечание 4. Пусть $\tilde{F}(t)$ обозначает $\lambda_1(\{h \in (-H+\varepsilon/2, H-\varepsilon/2) : \max(\frac{100}{\varepsilon}, \frac{100}{h}) M(h/2) \geq \exp(t)\})$. Тогда константу $C(M, H, \varepsilon)$ можно предъявить явно в терминах $\tilde{F}$, воспользовавшись замечанием 3. А именно, если $\varepsilon/2 > \frac{8}{\pi} \sum\limits_{i=-1}^{+\infty} \tilde{F}(2^i C)$ для положительной константы C, тогда $u(x,y) \leq \exp(C)$ для всех (x,y), удовлетворяющих $|x| \leq R-\varepsilon, |h| \leq H-\varepsilon$.

Замечание 5. Четырехмерный случай теоремы 13 влечет трехмерный (и двухмерный), т.к. мы можем добавить фиктивную координату к $\mathbb{R}^3$.

Доказательство в случае $n \geq 5$. Мы будем рассматривать только случай нечетного $n = 2k+3$. Случай четных n следует немедленно путем добавления фиктивной координаты. Теперь мы знаем, что теорема 13 верна для $n = 2, 3, 4$. Мы докажем случай нечетных $n = 2k+3$, сведя его к случаю $n = 3$, при помощи идеи, сформулированной в параграфе 2.2.2.

Так же как и в доказательстве четырехмерного случая, мы можем воспроизвести осесимметризующий шаг и свести теорему 13 к следующей лемме.

Лемма 9. *Предположим, что* $u = u(\rho, h)$ *– осесимметричная гармоническая функция в усеченном цилиндре* $P_\varepsilon = \{(x \in \mathbb{R}^{n-1}, y \in \mathbb{R}, |x| < \varepsilon, |y| < H)\}$*, такая что* $|u(x,y)| \leq M(|y|)$*. Тогда существует константа* $\mathcal{C} = \mathcal{C}(n, M, H, \varepsilon)$*, такая что* $|u(0,y)| < \mathcal{C}$ *для всех* $y \in (-H+\varepsilon, H-\varepsilon)$*.*

Следуя параграфу 2.2.2, мы рассмотрим функцию v, определяемую соотношением $v(\varphi, \rho, h) = Re(\rho^k e^{ik\varphi} u(\rho, h))$ на множестве $\{\varphi \in [0, 2\pi), \rho \in [0, \varepsilon), h \in (-H+\varepsilon, H+\varepsilon)\}$, где v гармонична. При помощи трехмерного случая теоремы 13 мы получаем $|v(\varphi, \rho, h)| < C(M, H, \varepsilon/2)$ для $\varphi \in [0, 2\pi), \rho \in [0, \varepsilon/2), h \in (-H+\varepsilon/2, H-\varepsilon/2)$. Тогда для любого $h \in (-H+\varepsilon, H-\varepsilon)$ и шара B с центром в точке $(0,0,h)$ и радиуса $\varepsilon/2$ выполнено $\sup_B |v| \leq C(M, H, \varepsilon/2)$. Применяя стандартные оценки старших производных гармонических функций, получаем неравенство $\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} v \leq C(k) \frac{C(M,H,\varepsilon/2)}{(\varepsilon/2)^k}$, выполненное на множестве $\{\varphi \in [0, 2\pi), \rho = 0, h \in (-H+\varepsilon/2, H-\varepsilon/2)\}$, где константа $C(k)$ зависит только от размерности ($n = 2k+3$). Возьмем $\varphi = \rho = 0$ и увидим, что $\frac{\partial^k v}{\partial \rho^k}(0,0,h) = k! u(0,h)$. Следовательно, $|u(0,h)| \leq C(k) \frac{C(M,H,\varepsilon/2)}{(\varepsilon/2)^k}$ для $h \in (-H+\varepsilon, H+\varepsilon)$. Доказательство теоремы завершено.

2.4. Вопрос об односторонних оценках.

Предположим, что z_0 – точка в $Q = (-1,1) \times (-1,1)$, а M – положительная (убывающая и регулярная) функция на $(0,1)$. При каких условиях на M семейство F_M^+ всех функций f, голоморфных в Q и удовлетворяющих $Im(f(z)) \leq M(|Im(z)|)$, $f(z_0) = 0$, есть нормальное семейство в Q?

2.5. Приложение к универсальным рядам гармонических полиномов.

Рассмотрим единичный шар $\mathbb{B} := B_1(0)$ в $\mathbb{R}^n$. Любая функция h, гармоническая в $\mathbb{B}$, представима в виде $h = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} h_n$, где h_n есть однородный гармонический полином степени n. Говорят, что функция h принадлежит множеству U_H, гармонических функций в B с универсальным рядом однородных гармонических полиномов, если для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}$ с односвязным дополнением и функции u, гармонической в некоторой окрестности K, существует подпоследовательность $\{N_k\}$ натуральных чисел, такая что $\sum\limits_{0}^{N_k} h_n \to u$ равномерно на K. Этот класс универсальных функций изучался в работах [52], [19], [53], [54]. Следующее утверждение улучшает теорему 7 из работы [19] о граничном поведении функций из класса U_H.

Теорема 14. *Пусть* $\psi : [0, 1) \to \mathbb{R}^+$ *– неубывающая функция, такая что* $\int\limits_0^1 \log^+ \log^+ \psi(t)dt < +\infty$. *Если* $h = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} h_n$ *такова, что* $|h(x)| \leq \psi(|x|)$ *на* $B_r(\omega) \cap \mathbb{B}$ *для некоторого* $\omega \in \partial\mathbb{B}$ *и* $r > 0$, *то* $f \notin U_H$.

Мы не будем доказывать теорему 14 здесь, потому что все необходимые ингредиенты доказательства с одним исключением даны в работе [19], где теорема 14 доказана при более сильном предположении $\int\limits_0^1 \log^+ \psi(t)dt < +\infty$ вместо $\int\limits_0^1 \log^+ \log^+ \psi(t)dt < +\infty$. Единственный недостающий ингредиент, которого не хватало в [19], чтобы log заменить двойным логарифмом, есть "гармонический"аналог теоремы Левинсона о пвторном логарифме $\log\log$ в старших размерностях (точнее, ее версии в шаре, которая следует из теоремы 13 применением преобразования Кельвина).

Глава 3

Тауберовы теоремы о граничном поведении положительных решений эллиптических уравнений в частных производных.

3.1. Предварительные сведения и обозначения

Обозначим через $K(x,t) := \frac{ct}{(|x|^2+t^2)^{n/2}}$ ядро Пуассона в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, t > 0\}$, константа c равна $\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}$. Рассмотрим положительную гармоническую в $\mathbb{R}^n_+$ функцию u. Любая такая функция единственным образом может быть представлена в следующем виде (см., например, [21])

$$u(x,t) = Ct + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x-\xi,t)d\mu(\xi) \tag{3.1}$$

для некоторой неотрицательной константы C и борелевской меры μ, такой что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(|x|^2+1)^{n/2}} d\mu(x) < +\infty. \tag{3.2}$$

Мера μ называется граничной мерой функции u. Если u непрерывна вплоть до границы полупространства $\mathbb{R}^n_+$, то $\mu = u|_{\partial\mathbb{R}^n_+} \cdot S$, где S – мера Лебега на $\partial\mathbb{R}^n_+$. Если константа C в представлении (3.1) равна 0, то мы будем писать $u = u_\mu$. Классичекая теорема Фату [55] утверждает, что если μ имеет производную в некоторой точке границы, то u_μ имеет предел вдоль нормали в этой точке. В теореме Фату можно убрать условие положительности μ, т.е. разрешить μ быть зарядом. Обратная импликация в теореме Фату не верна для общих зарядов μ (см. [20]), но становится верной для положительных гармонических функций в $\mathbb{R}^n_+$ (при любом $n = 2, 3, \dots$). Оказывается, что u_μ имеет конечный предел вдоль нормали в точке x тогда и только тогда, когда граничная мера μ дифференцируема в точке x (см. [20], [21],[22]), т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{r\to+0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^{n-1}}$, где $B_r(x)$ обозначет шар радиуса r с центром в точке x.

Следующая теорема представляет собой критерий степенного роста положительной гармонической функции u вдоль нормали в точке границы.

Теорема 15. *Пусть $\alpha \in (-1, n-1)$, а неотрицательные числа a, b таковы, что*

$$a = b\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\pi^{n/2}}.$$

Следуюшие утверждения эквивалентны:

(i) Предел $\lim\limits_{t\to+0} u(0,t)t^\alpha$ существует и равен a.

(ii) $\frac{\mu(B(r))}{r^{n-1}}r^\alpha \to b$, когда $r \to +0$.

Сделаем несколько замечаний, поясняющих условие $\alpha \in (-1, n-1)$.

Определение 1. Будем говорить, что порядок роста функции u вдоль нормали в точке $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$ равен α, если $\alpha = \inf\{\kappa : u(x + t \cdot \bar{n}(x))t^\kappa \to 0$ при t, стремящемся к $0\}$.

Замечание 6. Порядок роста положительной гармонической функции не может быть меньше -1: если $\frac{u(x+t\cdot\bar{n}(x))}{t} \to 0$ при $t \to +0$, то $u \equiv 0$.

Замечание 7. Порядок роста положительной гармонической функции не превосходит $n-1$.

Оба замечания – простые следствия из (3.1) и (3.2). Теорема 15 влечет другое (эквивалентное) определение порядка роста:

Замечание 8. Порядок роста функции u в точке O равен $\inf\{\kappa : \frac{\mu(B(r))}{r^{n-1}}r^\kappa \to 0$ при $r \to +0\}$.

Теорема 15 верна и для $\alpha = n - 1$. В этом случае речь идет о величине точечной нагрузки у граничной меры, этот случай следует из принципа минимальности Берлинга, который будет сформулирован в разделе 3.7. Для $\alpha = -1$ теорема неверна. Когда $\alpha = 0$, теорема говорит о существовании предела функции u вдоль нормали, этот случай изучался в работах [20] ($n = 2$) и [21] ($n \geq 3$). В работе [21] главным рабочим инструментом служила тауберова теорема Винера, которая также будет нами использована в доказательстве теоремы 15. Стоит отметить,что этот прием сильно использует то, что граница области есть гиперплоскость, а именно наличие алгебраической структуры на границе области. Возникает препятствие, которое не позволяет применить этот прием к областям, отличным от шара и полупространства. В размерности 2 техника конформных отображений позволяет легко обойти это препятствие и обобщить этот результат на произвольные области с достаточно гладкой границей. Главная сложность возникает при $n \geq 3$ из-за недостатка конформных отображений. Эту сложность удаётся обойти при $\alpha \in [0, n-1]$ благодаря оценкам гармонической меры. Мы не будем рассматривать случай $\alpha \in (-1, 0)$. Применяя замену координат, можно выпрямить кусок гладкой границы области, сделав ее плоской в окрестности фиксированной точки границы. Произведя этот шаг, мы потеряем гармоничность рассматриваемой функции и будем работать с положительными решениями эллиптических дифференциальных уравнений с помощью асимптотических оценок функции Грина.

Обозначим через Ω область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей. Пусть L – это эллиптический оператор второго порядка с переменными коэффициентами,

$$L := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

где a_{ij}, b_i и c – это функции, определенные в $\overline{\Omega}$. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $\lambda \geq 1$.

Определение 2. Обозначим через $\mathrm{L}^+(\lambda, \alpha, \Omega)$ множество всех таких операторов L, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) $\lambda|\xi|^2 \geq \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda^{-1}|\xi|^2$ для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| + \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i(x) - b_i(y)| + |c(x) - c(y)| \leq \lambda|x-y|^\alpha$ для всех $x, y \in \overline{\Omega}$.

(c) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)| + \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i(x)| + |c(x)| \leq \lambda$ для любого $x \in \overline{\Omega}$.

(d) $c(x) \leq 0$ для любого $x \in \overline{\Omega}$.

Определение 3. Функция $u \in C^2(\Omega)$ называется L-гармонической, если $Lu = 0$ в Ω.

Любая положительная L-гармоническя функция u может быть представлена в виде

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G_L(\xi, x)}{\partial\nu(\xi)} d\mu(\xi), x \in \Omega \tag{3.3}$$

для некоторой борелевской меры (неотрицательного заряда) $\mu = \mu_u$ на $\partial\Omega$ (мы предполагаем, что Ω есть ограниченная область с $C^{2,\varepsilon}$-гладкой границей, $L \in \mathrm{L}^+(\lambda, \alpha, \Omega)$). Меру μ будем называть граничной мерой функции u, а через G_L будем обозначать функцию Грина оператора L в области Ω (см. [28], [56]); $\bar{n}(x)$ и $\nu(x) := \Big(a_{ij}(x)\Big)\bar{n}(x)$ есть нормаль и конормаль в точке $x \in \partial\Omega$. Мы будем неявно пользоваться гладкостью функции Грина $G_L(x, y)$ вплоть до границы Ω как функции от x при $x \neq y$ (см. [57], лемма 2.1). Отметим, что формула (3.3) может быть в значительной степени обобщена в терминах границы Мартина (см. [28], теорема 6.3). Это обобщение влечет частный случай (3.3) в силу гладкости функции Грина вплоть до границы.

Зафиксируем точку P на границе области Ω. Нас будет интересовать, какие условия на μ необходимы и достаточны для существования некасательного предела функции u в точке P. В работе [22] исследовался случай, когда Ω есть полупространство, а L– оператор Лапласа, и был получен критерий в терминах гладкости граничной меры, а при $n = 2$ вопрос был исследован раньше, см. [20]. Элегантный метод в работе [22] не использует тауберову теорему Винера, а использует инвариатность границы области относительно гомотетии с центром в начале координат. Гладкость граничной меры трактуется как слабая сходимость ее нормированных дилатаций к мере Лебега, а существование некасательного предела функции u как нормальная сходимость дилатаций u к константе, равной некасательному пределу. В теореме 24 нами будет получено обобщение этого критерия на класс положительных решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с гладкой границей. Было бы интересным найти некасательный аналог теоремы 15 в старших размерностях, в размерности 2 такой аналог доказан в [58],[59].

Кратко опишем план этой главы. В разделе 3.2 мы докажем теорему 15 с помощью тауберовой теоремы Винера, в разделе 3.3 мы сформулируем несколько известных оценок функции Грина G_L и L-гармонической меры, что есть $\frac{\partial G_L(x,\xi)}{\partial \nu(\xi)} dS(\xi)$, где dS обозначает поверхностную меру Лебега на $\partial\Omega$), раздел 3.4 посвящен асимптотической оценке L- гармонической меры, когда расстояние между полюсом гармонической меры и точкой, где вычисляется плотность гармонической меры, стремится к нулю. Эта информация будет использована для того, чтобы компенсировать отсутствие нужных конформных отображений в старших размерностях и свести вопросы о росте положительных L-гармонических функций к вопросам о обычных Δ-гармонических функциях, что будет сделано в разделах 3.5, 3.6, 3.7, где теорема 15 будет обобщена на гладкие области, также будет доказан критерий существования некасательного предела L-гармонических функций и будет сформулирован принцип минимальности Берлинга (см. также [60],[61],[62]), который можно интерпетировать как условие на рост положительной гармонической функции вдоль последоватльности точек, стремящихся к фиксированной точке границы, которое гарантирует наличие точечной нагрузки у граничной меры. Отметим, что случай $\alpha = n - 1$ теоремы 15 мгновенно следует из этого принципа.

Скажем в заключение о роли условия положительности, фигурирующего в утверждениях, сформулированных выше. Существование предела интеграла Пуассона конечного заряда μ вдоль нормали гарантируется существованием симметричной производной заряда μ в точке P. Этот факт есть теорема Фату. Но обратное утверждение к теореме Фату для произвольных зарядов неверно, см. контрпример в [20]. Таким образом, эти результаты можно интерпретировать как тауберовы теоремы с положительностью в роли тауберова условия (см. параграф 12.12 в [63] для подобных утверждений, в том числе влекущих аналогичную тауберову теорему для положительных решений уравнения теплопроводности). Существуют и другие тауберовы условия, для которых обратная теорема Фату верна, см. [22],[64], [65], [66].

3.2. Доказательство теоремы 15

Обозначим через G мультипликативную группу положительных вещественных чисел. Мы будем использовать знак $\star$ для свертки функций на G:

$$(f \star g)(t) = \int\limits_0^{+\infty} f(t/s) g(s) d\ln(s). \tag{3.4}$$

Обозначим через $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ семейство функций на G:

$$F_\alpha(t) := t^\alpha. \tag{3.5}$$

Легко видеть, что для любой функции $g \in L^1(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t^{\alpha+1}})$ выполнено

$$F_\alpha \star g = F_\alpha \cdot \int\limits_0^{+\infty} g(t) \frac{dt}{t^{\alpha+1}}. \tag{3.6}$$

Нам понадобятся следующие свойства операции $\star$:

Предложение 2. *Предположим, что функции f, g таковы, что $\frac{f}{F_\alpha} \in L^\infty(\mathbb{R}_+, dt)$ и $\frac{g}{F_\alpha} \in L^1(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$. Тогда*

(i) $\frac{f}{F_\alpha} \star \frac{g}{F_\alpha} = \frac{f\star g}{F_\alpha}$.

(ii) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |\frac{(f\star g)(t)}{t^\alpha}| \le \|\frac{f}{F_\alpha}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dt)} \cdot \|\frac{g}{F_\alpha}\|_{L^1(\mathbb{R}_+,d\ln(t))}$.

(iii) Если $\frac{f(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\to} a$ *для некоторого* $a \in \mathbb{R}$, *то*

$$\frac{(f\star g)(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\to} a \int\limits_0^{+\infty} g(t)\frac{dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Далее мы сформулируем тауберову теорему Винера (см. [63]).

Теорема 16. *Предположим, что преобразование Фурье (на G) функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$, т.е. $\hat{f}(y) := \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{-iy} d\ln(t)$, не равно нулю при всех $y \in \mathbb{R}$. Тогда*

1. *Множество $Lin(\{f(\lambda t)\}_{t\in\mathbb{R}})$ плотно в $L^1(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$.*

2. *Если $(f\star g)(t) \underset{t\to 0}{\to} a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$ и $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$, то для любого $h \in L^1(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$*

$$(h\star g)(t) \underset{t\to 0}{\to} a \cdot \frac{\hat{h}(0)}{\hat{f}(0)}.$$

Слудеющее утверждение есть прямое следствие теоремы 16 и тождества (i) из предложения 2.

Следствие 2. *Зафиксируем вещественное число α. Предположим, что функция f такова, что*

(a) $\frac{f}{F_\alpha} \in L^1(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$,

(b) Преобразование Фурье функции $\frac{f}{F_\alpha}$ *не обращается в ноль.*

Если $\frac{f\star g}{F_\alpha}(t) \underset{t\to+0}{\to} a$ *для некоторого* $a \in \mathbb{R}$ *и функции* g, *такой что* $\frac{g}{F_\alpha} \in L^\infty(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$, *тогда для любого* $h \in L^1(\mathbb{R}_+, \frac{d\ln(t)}{t^\alpha})$ *выполнено*

$$\frac{h\star g}{F_\alpha}(t) \underset{t\to 0}{\to} a\cdot \frac{\int\limits_{\mathbb{R}_+} h(t)\frac{d\ln(t)}{t^\alpha}}{\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)\frac{d\ln(t)}{t^\alpha}}.$$

Теперь мы перейдем к доказательству теоремы 15.

Можно считать, что константа C в разложении (3.1) функции u равна нулю, и μ – конечная мера с носителем внутри единичного шара B_1. Мы будем предполагать, что μ не имеет точечной нагрузки в точке O (иначе ни (i), ни (ii) в теореме 15 не может быть выполнено). Представление (3.1) влечет $u(0,t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ct}{(r^2+t^2)^{\frac{n}{2}}} d\mu(B(r))$, где $c = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}$. Интегрируя по частям, получаем

$$u(0,t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ncrt}{(r^2+t^2)^{\frac{n}{2}+1}} \mu(B(r))dr. \tag{3.7}$$

Перепишем это в следующей форме:

$$u(0,t) = (k\star M)(t), \tag{3.8}$$

где $M(r) := \frac{\mu(B(r))}{r^{n-1}}$ и $k(t) := \frac{nct}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}}$. Отметим, что $M(r) \le \frac{K}{r^{n-1}}$, где K равна полной вариации μ.

Далее мы докажем импликацию **(ii)** $\Longrightarrow$**(i)** в теореме 15. Используя (ii) и неравенство $M(t) \le \frac{K}{t^{n-1}}$, получаем $M(t)t^\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$. Поскольку $k(t)t^\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$, то мы вправе применить предложение 2 (используя тождество (3.8)). Получим (i), причем пределы в формулах (i) и (ii) связаны соотношением

$$a = b\cdot \int\limits_0^{+\infty} k(t)t^\alpha d\ln(t) = b\cdot \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\pi^{n/2}}.$$

Последнее равенство будет доказано позже, когда будет вычисляться преобразование Фурье функции $k(t)t^\alpha$.

Перейдём к доказательству импликации **(ii)** $\Longleftarrow$**(i)** . Сначала заметим, что $u(0,t) \geq \int\limits_t^{2t} \frac{ncrt}{(r^2+t^2)^{\frac{n}{2}+1}}\mu(B(r))dr \geq K_1\frac{\mu(B(t))}{t^{n-1}} = K_1 M(t)$, где K_1 – положительная константа, зависящая только от размерности n. Следовательно $\limsup\limits_{t\to+0} M(t)t^\alpha \leq \frac{1}{K_1}\lim\limits_{t\to+0} u(0,t)t^\alpha$. Используя последнее наблюдение и неравенство $M(t) \leq \frac{K}{t^{n-1}}$, получаем $M(t)t^\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$. Ранее отмечалось, что $k(t)t^\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+, d\ln(t))$, и чтобы применить тауберову теорему Винера, мы должны проверить, что преобразование Фурье функции $k(t)t^\alpha$ не обращается в ноль:

$$\widehat{kF_\alpha}(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{nct}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}} t^\alpha t^{-iy}\frac{dt}{t} \overset{s=\frac{1}{1+t^2}}{=\!=\!=} \int\limits_0^1 \frac{nc}{2} s^{\frac{n}{2}-1}\Big(\frac{1-s}{s}\Big)^{\alpha/2-iy/2-1/2} ds =$$

$$\frac{nc}{2}B(\frac{n-\alpha+iy+1}{2}, \frac{\alpha-iy+1}{2}) = \frac{n}{2}\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}B(\frac{n-\alpha+iy+1}{2}, \frac{\alpha-iy+1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha+iy+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha-iy+1}{2})}{\pi^{n/2}}.$$

Последнее выражение не обращается в ноль, поэтому в силу следствия 2 получаем, что

$$t^\alpha(M\star g)(t) \underset{t\to+0}{\to} a\frac{\int\limits_{\mathbb{R}_+} g(t)t^\alpha d\ln(t)}{\int\limits_{\mathbb{R}_+} k(t)t^\alpha d\ln(t)} \tag{3.9}$$

для любой $g \in L^1(\mathbb{R}_+, t^\alpha d\ln(t))$. Последний шаг состоит в том, чтобы вывести (ii) из слабой сходимости (3.9). Заметим, что из монотонности $\mu(B(r))$ следует неравенство

$$M(t_1)t_1^{n-1} \leq M(t_2)t_2^{n-1} \text{ для любых } t_1,\ t_2\text{: } 0 < t_1 \leq t_2. \tag{3.10}$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Рассмотрим пару функций g_ε, $g_{-\varepsilon}$:

$$g_\varepsilon(t) := \begin{cases} \varepsilon^{-1}, & t \in [1, 1+\varepsilon] \\ 0, & t \notin [1, 1+\varepsilon] \end{cases}$$

$$g_{-\varepsilon}(t) := \begin{cases} \varepsilon^{-1}, & t \in [1-\varepsilon, 1] \\ 0, & t \notin [1-\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Неравенство (3.10) влечет $\frac{(M \star g_\varepsilon)(t)}{(1+\varepsilon)^{n-1}} \leq M(t) \leq \frac{(M \star g_{-\varepsilon})(t)}{(1-\varepsilon)^{n-1}}$. Учитывая (3.9), заметим

$$\frac{a}{(1+\varepsilon)^{n-1}} \frac{\int\limits^{\mathbb{R}_+} g_\varepsilon(t) t^\alpha d\ln(t)}{\int\limits_{\mathbb{R}_+} k(t) t^\alpha d\ln(t)} \leq \liminf_{t \to +0} M(t) F_\alpha(t) \leq$$

$$\leq \limsup_{t \to +0} M(t) F_\alpha(t) \leq \frac{a}{(1-\varepsilon)^{n-1}} \frac{\int\limits^{\mathbb{R}_+} g_{-\varepsilon}(t) t^\alpha d\ln(t)}{\int\limits_{\mathbb{R}_+} k(t) t^\alpha d\ln(t)}.$$

Устремляя ε к 0, мы зарабатываем (ii), потому что $\int\limits_{\mathbb{R}_+} g_{\pm\varepsilon}(t) t^\alpha d\ln(t) \to 1$. ■

Доказательство сильно использует наличие групповой структуры на границе области. Используя преобразование Кельвина, легко можно заменить полупространство на шар в формулировке теоремы 15. В целях обобщения этого результата на гладкие области нам потребуются оценки гармонической меры и функции Грина.

3.3. Оценки функции Грина.

Из огромной литературы об оценках функции Грина мы укажем лишь несколько источников: [67], [68], [56], [69], [60], [70], [71]. Мы сформулируем несколько известных оценок функции Грина в геометрических терминах , которые далее будут нами использованы.

Теорема 17. *Пусть Ω – это $C^{1,1}$-гладкая и ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и $G(x,y)$ будет обозначать функцию Грина для оператора Лапласа в этой области. Существует такая положительная константа K, что выполнены следующие неравенства:*

(i) $G(x,y) \leq K \min(1, \frac{d(x,\partial\Omega)}{|x-y|}) \min(1, \frac{d(y,\partial\Omega)}{|x-y|}) |x-y|^{2-n}$,

(ii) $G(x,y) \geq \frac{1}{K}\min(1, \frac{d(x,\partial\Omega)}{|x-y|})\min(1, \frac{d(y,\partial\Omega)}{|x-y|})|x-y|^{2-n}$

для любых x, $y \in \overline{\Omega}$.

Теорема 17 остается верной, если заменить оператор Лапласа оператором из класса $L^+(\lambda,\alpha,\Omega)$. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 18 ([56]). *Пусть область* Ω *та же, что и в теореме 17, оператор* $L \in L^+(\lambda,\alpha,\Omega)$*, а* G_L *обозначает функцию Грина для* L *в этой области. Тогда существует такая положительная константа* $K = K(L,\Omega)$*, что*

$$K^{-1}G_{\triangle}(x,y) \leq G_L(x,y) \leq KG_{\triangle}(x,y), \quad x,y \in \overline{\Omega}. \tag{3.11}$$

Нам понадобится сравнивать функции Грина двух эллиптических операторов с переменными коэффициентами , у которых разность коэффициентов равномерно мала во всей области.

Теорема 19 ([57]). *Пусть* Ω *– это* $C^{2,\alpha}$*-гладкая ограниченная область, а* $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ *есть последовательность операторов из класса* $\mathrm{L}^+(\lambda,\alpha,\Omega)$*, таких что коэффицинты* L_n *сходятся при* $n \to +\infty$ *к соответствующим коэффициентам некоторого оператора* $L \in \mathrm{L}^+(\lambda,\alpha,\Omega)$ *равномерно в* $\overline{\Omega}$*. Тогда существует последовательность чисел* $K_n \to 1$*, таких что* $K_n \geq 1$ *и*

$$K_n^{-1}G_{L_n}(x,y) \leq G_L(x,y) \leq K_nG_{L_n}(x,y), n = 1,2,\ldots,x,y \in \overline{\Omega}.$$

Другими словами, $G_{L_n}(x,y) = G_L(x,y)(1+o(1))$*, где* $o(1)$ *равномерно по переменным* $x,y \in \overline{\Omega}$.

Далее сформулировано простое следствие теорем 17, 18, которое дает двусторонние оценки ядра Пуассона для оператора L.

Следствие 3 ([69], [70], [67]). *Пусть* Ω, L, G_L *те же, что и в теоремах 17, 18, а* $\nu(x)$ *обозначает внутреннюю конормаль в точке* $x \in \partial\Omega$ *относительно* L. *Тогда существует положительная константа* K, *такая что следующие неравенства выполнены для всех* $x \in \partial\Omega$, $y \in \Omega$:

$$\frac{1}{K}\frac{d(y,\partial\Omega)}{|x-y|^n} \leq \frac{\partial G_L(x,y)}{\partial\nu(x)} \leq K\frac{d(y,\partial\Omega)}{|x-y|^n}.$$

Обозначим через S поверхностную меру Лебега на $\partial\Omega$, а $d\omega_y$ будет обозначать L-гармоническую меру в Ω с полюсом $y \in \Omega$. Если область Ω достаточно гладкая, то L-гармоническая мера абсолютно непрерывна относительно поверхностной меры Лебега. Будем использовать обозначение $P_L(x, y, \Omega)$ для плотности ω_y относительно S (см. (3.3)). Иногда мы будем опускать индексы Ω и L, и будем писать $P(x, y)$ или $P_L(x, y)$. Заметим, что $\frac{\partial G_L(x,y)}{\partial\nu(x)} = \kappa P_L(x, y)$, где константа κ зависит только от нормировки функции Грина. Следствие 3 можно переписать в следующем виде

$$\frac{1}{K}\frac{d(y,\partial\Omega)}{|x-y|^n} \leq P_L(x,y) \leq K\frac{d(y,\partial\Omega)}{|x-y|^n}. \tag{3.12}$$

Ниже сформулировано простое следствие из теоремы 19 и следствия 3.

Следствие 4. *Пусть* Ω, $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* L *те же, что в теореме 19. Тогда*

$$P_{L_n}(x,y) = P_L(x,y)(1 + o(1)),$$

где $o(1)$ *равномерно по* $x \in \partial\Omega$, $y \in \Omega$.

3.4. Асимптотика плотности L-гармонической меры

На протяжении всего этого раздела Ω будет обозначать $C^{2,\alpha}$-гладкую ограниченную область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, а оператор L будет принадлежать классу $\mathrm{L}^+(\lambda, \alpha, \Omega)$. Цель этого раздела – получить асимптотическую формулу для плотности гармонической меры, когда расстояние от полюса до границы области стремится к нулю.

Теорема 20. *Пусть начало координат O принадлежит $\partial\Omega$ и $\big(a_{ij}(O)\big)_{i,j=1}^{n}$ есть единичная матрица. Положим $\kappa_n := \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}$. Тогда имеют место следующие асимптотические равенства:*

(i)

$$P_L(x,y) \sim \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n}$$

при $x, y \to O, y \in \Omega, x \in \partial\Omega$.

(ii)

$$P_L(x,y) = \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n}(1 + o(1)) + o(1)$$

при $y \to O, y \in \Omega$, оба $o(1)$ равномерны по $x \in \partial\Omega$.

(iii)

$$\left\| P_L(\cdot,y) - \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(\cdot,y)^n} \right\|_{L^1(\partial\Omega,dS)} \xrightarrow[]{\substack{y \in \Omega \\ y \to O}} 0.$$

Мы докажем эту теорему при помощи теоремы 19 о сходимости функций Грина и ее следствия 4. Отметим, что эти асимптотческие равенства также могут быть получены методами из работ [70] и [60], где встречаются подобные оценки. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 10. *Предположим, что $C^{2,\alpha}$- гладкая ограниченная область $\Omega_1 \subset \Omega$, $O \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_1$, причем $B_r(O) \cap \Omega_1 = B_r(O) \cap \Omega$ для некоторого $r > 0$. Тогда*

$$P_L(x,y,\Omega) \sim P_L(x,y,\Omega_1)$$

при $x, y \to O, y \in \Omega, x \in \partial\Omega$.

Доказательство леммы 10. Обозначим через $G_L(x,y,\Omega)$ и через $G_L(x,y,\Omega_1)$ функции Грина оператора L в областях Ω и Ω_1 соответственно. Рассмотрим функцию $H(x,y) := G_L(x,y,\Omega) - G_L(x,y,\Omega_1)$. Для $x \in \Omega_1$

функция $H(x,y) := G_L(x,y,\Omega) - G_L(x,y,\Omega_1)$ является неотрицательной L-гармоничной и непрерывной в $\overline{\Omega}_1$ как функция от y. Следовательно,

$$H(x,y) = \int\limits_{\partial\Omega_1} H(x,\xi) P_L(\xi,y,\Omega_1) dS(\xi)$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1} \left(G_L(x,\xi,\Omega) - G_L(x,\xi,\Omega_1)\right) P_L(\xi,y,\Omega_1) dS(\xi)$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1 \setminus B_r(O)} G_L(x,\xi,\Omega) P_L(\xi,y,\Omega_1) dS(\xi).$$

Пусть x, y – это произвольные точки в $B_{r/2}(O) \cap \Omega$, тогда применив пункт (i) теоремы 17 и (3.12), мы получаем

$$\int\limits_{\partial\Omega_1 \setminus B_r(O)} G_L(x,\xi,\Omega) P_L(\xi,y,\Omega_1) dS(\xi) \le \int\limits_{\partial\Omega_1 \setminus B_r(O)} K_1 \frac{d(x,\Omega)}{|x-\xi|^{n-1}} P_L(\xi,y,\Omega_1) dS(\xi)$$

$$\le \int\limits_{\partial\Omega_1 \setminus B_r(O)} K_1 K_2 \frac{d(x,\partial\Omega) d(y,\partial\Omega_1)}{|x-\xi|^{n-1}|\xi-y|^n} dS(\xi)$$

$$\le K_1 K_2 \frac{2^{2n-1}}{r^{2n-1}} S(\partial\Omega_1) d(x,\partial\Omega) d(y,\partial\Omega_1) = K_3 d(x,\partial\Omega) d(y,\partial\Omega_1)$$

для некоторых положительных констант K_1, K_2, K_3. Таким образом,

$$H(x,y) \le K_3 d(x,\partial\Omega) d(y,\partial\Omega_1).$$

Следовательно, для любых $x \in \partial\Omega \cap B_{r/2}(O)$, $y \in \Omega_1 \cap B_{r/2}(O)$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial \nu(x)} \le K_4 d(y,\partial\Omega_1). \tag{3.13}$$

Согласно (3.12)

$$P_L(x,y,\Omega_1) \ge \frac{1}{K_5} \frac{d(y,\partial\Omega_1)}{|x-y|^n}. \tag{3.14}$$

Из неравенств (3.13),(3.14) следует

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial \nu(x)} = o(P_L(x,y,\Omega_1))$$

при $x, y \to O, y \in \Omega, x \in \partial\Omega$. В конце концов получаем

$$P_L(x, y, \Omega) = P_L(x, y, \Omega_1) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial \nu(x)} = (1 + o(1))P_L(x, y, \Omega_1).$$

$\square$

Замечание 9. Утверждение леммы 10 останется верным, если оператор L есть оператор Лапласа Δ и Ω есть полупространство $\mathbb{R}^n_+$. Доказательство выше легко модифицировать, используя явную формулу для $G_\Delta(x, y, \mathbb{R}^n_+)$.

Доказательство теоремы 20. Пункт (ii) следует из (i) и (3.12), а пункт (iii) следует из (ii) и неравенства $\|P_L(\cdot, y)\|_{L^1(\partial\Omega, dS)} \leq 1$, которое следует из принципа максимума для оператора L. Осталось доказать (i).

Будем считать, что часть границы $\partial\Omega$ в окрестности точки O – плоская (т.е. подмножество гиперплоскости). Этого можно добиться подходящей гладкой заменой координат $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, не испортив условия (a)-(d) в определении 2 для L в новых координатах, слегка возмутив константы α и λ (см. [57]). Также потребуем от преобразования T, чтобы его матрица Якоби в точке O была ортогональной, чтобы матрица $A(O) := \big(a_{ij}(O)\big)_{i,j=1}^n$ осталась единичной.

Рассмотрим выпуклую и C^∞-гладкую область $Q \subset \Omega$ с общим плоским куском границы с $\partial\Omega$, содержащим O. Будем считать, что $B_r(O) \cap Q = B_r(O) \cap \Omega$ для некоторого $r > 0$. Рассмотрим последовательность операторов

$$L_k := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\frac{1}{k}x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} b_i(\frac{1}{k}x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{k^2}c(\frac{1}{k}x),\ k = 1, 2 \ldots \infty.$$

Будем писать $X \stackrel{1+\varepsilon}{\sim} Y$, если $\frac{X}{1+\varepsilon}$ асимптотически меньше Y, а Y асимптотически меньше $X(1 + \varepsilon)$. Применяя следствие 4 в Q для последовательности L_k (коэффциенты которых стремятся к коэффициентам оператора Лапласа), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k =: k(\varepsilon)$, такое что

$P_{L_k}(x,y,Q) \overset{1+\varepsilon}{\sim} P_\triangle(x,y,Q)$ при $x,y \to O, y \in Q, x \in \partial Q$. Следовательно

$$P_L(x,y,\frac{1}{k}Q) \overset{1+\varepsilon}{\sim} P_\triangle(x,y,\frac{1}{k}Q).$$

Согласно лемме 10 верно $P_L(x,y,\frac{1}{k}Q) \sim P_L(x,y,\Omega)$ и $P_\triangle(x,y,\frac{1}{k}Q) \sim P_\triangle(x,y,\mathbb{R}^n_+)$. Применяя явную формулу

$$P_\triangle(x,y,\mathbb{R}^n_+) = \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n},$$

получаем $P_L(x,y) \overset{1+\varepsilon}{\sim} \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n}$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, мы зарабатываем (i). $\square$

3.5. Приложения асимптотической формулы для L-гармонической меры

Ниже сформулированы две теоремы. Первая сравнивает граничные пределы двух положительных решений двух разных эллиптических уравнений при условии, что граничные меры этих решений совпадают. А вторая теорема поможет свести вопрос о существовании некасательного предела в гладкой области к аналогичному вопросу в полупространстве. Эти теоремы будут использованы в разделах 3.6, 3.7.

Теорема 21. *Предположим, что функции u и $\tilde{u}$ в $C^{2,\alpha}$-гладкой и ограниченной области Ω обладают следующими свойствами:*

1. *u положительна и гармонична в Ω.*
2. *$\tilde{u}$ положительна и L-гармоническая в Ω, где $L \in L^+(\lambda,\alpha,\Omega)$.*
3. *Граничная мера μ функции u совпадает с граничной мерой функции $\tilde{u}$, т.е. $\tilde{u}(\cdot) = \int\limits_{\partial\Omega} P_L(x,\cdot)d\mu(x)$ и $u(\cdot) = \int\limits_{\partial\Omega} P_\Delta(x,\cdot)d\mu(x)$.*
4. *Точка $O \in \partial\Omega$, а матрица $A(O) := \big(a_{ij}(O)\big)_{i,j=1}^n$ единичная.*

Тогда

(i) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое что*

$$u(y)(1-\varepsilon) - \varepsilon \le \tilde{u}(y) \le u(y)(1+\varepsilon) + \varepsilon,$$

если $y \in \Omega$ и $d(y, O) < \delta$.

(ii) *Если $u \ge 1$ в Ω, то*

$$\lim_{y \to O; y \in \Omega} \frac{u(y)}{\tilde{u}(y)} = 1.$$

Теорема 21 будет доказана чуть позже.

Теорема 22. *Предположим, что граница $C^{2,\alpha}$-гладкой и ограниченной области Ω содержит начало координат O, и $\mathbb{R}^n_0 := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ есть касательная плоскость к $\partial\Omega$ в точке O, а оператор $L \in L^+(\lambda, \alpha, \Omega)$. Пусть $\tilde{u}$ – положительная L-гармоническая функция в Ω, а $\tilde{\mu}$ – ее граничная мера. Рассмотрим ортогональную проекцию на гиперплоскость $\mathbb{R}^n_0$, обозначим через Pr ее сужение на множество $\partial\Omega \cap B_\varepsilon(O)$, число $\varepsilon > 0$ выберем настолько малым, чтобы Pr стало инъекцией. Определим меру μ на $\mathbb{R}^n_0$ по правилу $\mu(E) = \tilde{\mu}(Pr^{-1}(E))$ для борелевских множеств E. Пусть u есть гармоническое продолжение меры μ в полупространство, содержащее внутреннюю нормаль к $\partial\Omega$ в точке O, т.е.*

$$u(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_0} \kappa_n \frac{d(y, \mathbb{R}^n_0)}{d(x,y)^n} d\mu(x), y \in \mathbb{R}^n_+.$$

Тогда для любой последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$ точек в Ω, некасательно стремящейся к O, выполнено

$$\tilde{u}(x_i) = u(x_i)(1 + o(1)) + o(1).$$

Доказательство теоремы 21. Применяя пункт (ii) теоремы 20, получаем

$$\tilde{u}(y) = \int\limits_{\partial\Omega} P_L(x,y)d\mu(x) = \int\limits_{\partial\Omega} (\kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n}(1+o(1)) + o(1))d\mu(x) = \tag{3.15}$$

$$= (1+o(1)) \int\limits_{\partial\Omega} \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n} d\mu(x) + o(1), y \to O. \tag{3.16}$$

Аналогично получаем

$$u(y) = (1+o(1)) \int\limits_{\partial\Omega} \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n} d\mu(x) + o(1), y \to O.$$

Последние два асимптотических равенства влекут (i).

Если $u \geq 1$ в Ω, то $\int\limits_{\partial\Omega} \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n} d\mu(x) \gtrsim 1, y \to O$. Следовательно

$$(1+o(1)) \int\limits_{\partial\Omega} \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n} d\mu(x) + o(1) = (1+o(1)) \int\limits_{\partial\Omega} \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n} d\mu(x),$$

то есть

$$\tilde{u}(y) \sim \int\limits_{\partial\Omega} \kappa_n \frac{d(y,\partial\Omega)}{d(x,y)^n} d\mu(x) \sim u(y).$$

$\square$

Доказательство теоремы 22. Нам понадобится следующая геометрическая лемма.

Лемма 11. *Если z некасательно стремится к O, оставаясь в Ω, а s стремится к O вдоль $\partial\Omega$, то*

$$d(z,s) \sim d(z, Pr(s)).$$

Доказательство леммы 11. Достаточно показать, что $d(s, Pr(s)) = o(d(z, Pr(s)))$. Пусть $f : \mathbb{R}^{n-1} \cap B_\varepsilon(O) \to \mathbb{R}$ – локальная параметризация границы $\partial\Omega$ вблизи точки O, так что $s = (\xi, f(\xi))$ при $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$. Поскольку $\partial\Omega$ гладкая, то

$$d(s, Pr(s)) = |f(\xi)| = o(|\xi|). \tag{3.17}$$

Представим z как (η, τ), где $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $\tau \in \mathbb{R}$. Поскольку z стремится к O некасательно, то

$$\frac{|\eta|}{|\tau|} = O(1). \tag{3.18}$$

Отметим, что

$$o(|\xi|) = o(max(|\xi - \eta|, |\eta|)) = o\left((\frac{|\eta|}{|\tau|} + 1) max(|\xi - \eta|, |\tau|) \right) = \tag{3.19}$$

$$= O(1) \cdot o(max(|\xi - \eta|, |\tau|)) = o(d(z, Pr(s))). \tag{3.20}$$

Комбинируя формулы (3.17), (3.19), (3.20), мы получим $d(s, Pr(s)) = o(d(z, Pr(s)))$ и завершим доказательство леммы. $\square$

Теперь мы докажем теорему 22. Согласно (3.16), для любого $r > 0$

$$\tilde{u}(y) = (1 + o(1)) \int\limits_{\partial\Omega} \kappa_n \frac{d(y, \partial\Omega)}{d(x, y)^n} d\tilde{\mu}(x) + o(1) =$$

$$= (1 + o(1)) \int\limits_{\partial\Omega \cap B_r(O)} \kappa_n \frac{d(y, \partial\Omega)}{d(x, y)^n} d\tilde{\mu}(x) + o(1) =$$

для достаточно малого r

$$= \left((1 + o(1)) \int\limits_{\partial\Omega \cap B_r(O)} \kappa_n \frac{d(y, \partial\Omega)}{d(x, y)^n} d\mu(Pr(x)) + o(1) \right) \overset{1+\delta}{\sim}$$

согласно лемме 11 для любого $\delta > 0$ существует такое $r > 0$, что

$$\overset{1+\delta}{\sim} \left((1 + o(1)) \int\limits_{\partial\Omega \cap B_r(O)} \kappa_n \frac{d(y, \partial\Omega)}{d(Pr(x), y)^n} d\mu(Pr(x)) + o(1) \right) =$$

$$= u(y)(1 + o(1)) + o(1).$$

Таким образом, мы получили, что для любого $\delta > 0$ $\tilde{u}(y) \overset{1+\delta}{\sim} (u(y)(1 + o(1)) + o(1))$, что завершает доказательство, если устремить δ к 0.

$\square$

3.6. Критерий существования некасательного предела

В этом разделе будет сформулирован критерий существования некасательного предела положительной функции, доказанный для случая, когда область – полупространство, а $L = \Delta$, в работе [22], а затем мы обобщим этот результат на класс областей с достаточно гладкой границей. Критерий формулируется в терминах гладкости граничной меры. Нам понадобится несколько определений, в том числе и понятие сильной производной меры. Пусть Ω – C^1-гладкая область в $\mathbb{R}^n$, μ – локально конечная борелевская мера (неотрицательный заряд) с носителем на $\partial\Omega$.

Определение 4. Последовательность шаров $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ будем называть регулярной (отностельно точки $O \in \partial\Omega$), если выполнены следующие условия:

1. $x_i \in \partial\Omega$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $d(x_i, O) \underset{i\to\infty}{\to} 0$.
2. Существует такое $K > 0$, что $\frac{1}{K} d(x_i, O) \leq r_i \leq K d(x_i, O)$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Определение 5. Говорят, что μ имеет сильную производную в точке $O \in \partial\Omega$, равную $A \in \mathbb{R}$, если для любой регулярной последовательности шаров $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ существует равный A предел

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu(B_{r_i}(x_i))}{S(B_{r_i}(x_i))},$$

где S – поверхностная мера Лебега на $\partial\Omega$. Будем обозначать сильную производную через $D\mu(O)$ и писать $D\mu(O) = A$.

Если область Ω совпадает с $\mathbb{R}^n_+$, то можно переформулировать определение сильной прозиводной в терминах слабой сходимости мер.

Определение 6. Пусть μ – локально конечная мера на $\partial\mathbb{R}^n_+$. Определим семейство мер $\{\mu_r\}_{r>0}$ соотношением

$$\mu_r(E) = \mu(rE) r^{-n+1}.$$

Если существует такое число A, что последовательность $\{\mu_r\}_{r>0}$ слабо сходится в пространстве мер к $A \cdot S$ при $r \to 0$, то будем называть $D\mu(O) := A$ сильной производной μ в начале координат O.

Несколько следующих простых замечаний мы оставим без доказательств. Их смысл можно трактовать так, что существование производной у граничной меры сохраняется при гладкой замене координат.

Замечание 10. Пусть Ω_1 и Ω_2 – C^1- гладкие области в $\mathbb{R}^n$, а отображение $T : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ есть C^1-диффеоморфизм. Если борелевская мера μ на $\partial\Omega$ имеет сильную производную в точке $x \in \partial\Omega_1$, то ее перенос на Ω_2, то есть мера $\tilde{\mu}$, определяемая соотношением

$$\mu(T^{-1}(E)) = \tilde{\mu}(E),$$

тоже имеет сильную производную в точке $T(x)$.

Замечание 11. Пусть Ω – C^1-гладкая область, а μ – локально конечная борелевская мера с носителем на $\partial\Omega$. Предположим, что гиперплоскость $\mathbb{R}^n_0$ касается $\partial\Omega$ в точке O. Рассмотрим шар $B_\varepsilon(O)$, где параметр $\varepsilon > 0$ настолько мал, что ортогональная проекция $Pr : \partial\Omega \cap B_\varepsilon(O) \to \mathbb{R}^n_0$ инъективна на своей области задания. Рассмотрим конечную борелевскую меру $\tilde{\mu}$ на $\mathbb{R}^n_0$, определяемую соотношением

$$\tilde{\mu}(E) = \mu(Pr^{-1}E).$$

Мера μ имеет сильную производную в точке O и $D\mu(O) = A$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\mu}$ имеет сильную производную в точке O и $D\tilde{\mu}(O) = A$.

Ниже сформулирован критерий существования некасательного предела положительной гармонической функции, доказанный в работе [22].

Теорема 23 ([22]). *Пусть u – положительная гармоническая функция в $\mathbb{R}^n_+$, μ – ее граничная мера, а число $A \in [0, \infty)$. Тогда u имеет некасательный* *предел A в точке $O \in \partial\Omega$ если, и только если μ имеет сильную производную в O и $D\mu(O) = A$.*

Далее будет сформулировано и доказано обобщение этого результата.

Теорема 24. *Пусть Ω – $C^{2,\varepsilon}$-гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, начало координат $O \in \partial\Omega$, а число $A \in [0, \infty)$. Предположим, что $L \in L^+(\lambda, \alpha, \Omega)$, u – положительная L-гармоническая функция в Ω, а μ ее граничная мера. Функция u имеет некасательный предел A в точке O если, и только если ее граничная мера имеет сильную производную в O и $D\mu(O) = A$.*

Доказательство. Теорема 24 будет получена как следствие теорем 23,22. Не умаляя общности, будем считать, что O – начало координат, внутренние нормали к $\mathbb{R}^n_+$ и $\partial\Omega$ в O совпадают, а матрица $a_{ij}(O)$ старших коэффициентов оператора L в точке O есть единичная матрица. Этого всегда можно добиться линейной заменой координат и сдвигом. Далее мы выберем такое $\varepsilon > 0$, что ортогональная проекция $Pr : \partial\Omega \cap B_\varepsilon(O) \to \mathbb{R}^n_0$ инъективна и определяет борелевскую меру $\tilde{\mu}$ на $\mathbb{R}^n_0$ соотношением

$$\tilde{\mu}(E) = \mu(Pr^{-1}(E)).$$

Определим $\tilde{u}$ как гармоническое продолжение меры $\tilde{\mu}$ в полупространство $\mathbb{R}^n_+$.

Мы докажем, что следующие условие эквиваленты:

1. μ имеет сильную производную в O, и $D\mu(O) = A$,
2. $\tilde{\mu}$ имеет сильную производную в O и $D\tilde{\mu}(O) = A$,
3. $\tilde{u}$ имеент некасательный предел A в O,
4. u имеет некасательный предел A в O.

Замечание 11 влечет 1 $\Leftrightarrow$ 2, также 2 $\Leftrightarrow$ 3 по теореме 23. Теорема 22 говорит, что

$$u(y) = (1 + o(1))\tilde{u}(y) + o(1),$$

когда y стремится некасательно к O. Поэтому 3 $\Leftrightarrow$ 4, значит 1 $\Leftrightarrow$ 4.

$\square$

Критерий существования предела положительной гармонической функции вдоль нормали в точке границы, тоже формулируется в терминах гладкости граничной меры.

Определение 7. Предположим, что носитель меры μ содержится на границе C^1-гладкой области Ω. Пусть S обозначает поверхностную меру Лебега на $\partial\Omega$. Говорят, что μ имеет симметричную производную A в точке $O \in \partial\Omega$, если $\lim\limits_{r\to+0} \frac{\mu(B_r(O))}{S(B_r(O))} = A$ $(=: D_{sym}\mu(O))$.

Следующая теорема была доказана при $n = 2$ в работе [20], а затем обобщена на старшие размерности в статье [21].

Теорема 25 ([20], [21])**.** *Пусть u – это положительная гармоническая функция в $\mathbb{R}^n_+$, а μ – ее граничная мера. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *u имеет конечный предел A вдоль нормали к точке $O \in \partial\Omega$,*

2. *$D_{sym}\mu(O) = A$.*

Отметим, что теоремы 15 и 25 могут быть обобщены со случая полупространства на области с достаточно гладкой границей.

Теорема 26. *Пусть Ω – $C^{2,\varepsilon}$-гладкая и ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, а $\bar{n}(x)$ обозначает единичную внутреннюю нормаль в точке $x \in \partial\Omega$. Предположим, что оператор $L \in L^+(\lambda, \alpha, \Omega)$ таков, что матрица его старших коэффициентов в точке $O \in \partial\Omega$ есть единичная матрица, число $\kappa \in [0, n-1]$,* *а* $A \in [0, +\infty)$. *Пусть* u *– положительная* L*-гармоническая функция в* Ω, *а* μ *– ее граничная мера. Тогда* $u(x+\bar{n}(x)t)t^{\kappa} \to A$ *при* $t \to +0$ *если, и только если* $\frac{\mu(B_r(x))}{r^{n-1}} r^{\kappa} \to C_\kappa A$ *при* $r \to +0$, *где* $C_\kappa = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n-\kappa+1}{2})\Gamma(\frac{\kappa+1}{2})}$.

Мы опустим доказательство этой теоремы, потому что оно полностью повторяет доказательство теоремы 24.

3.7. Принцип минимальности Берлинга.

Термин “принцип минимальности Берлинга” был введен в статье [60], где двумерный результат А.Берлинга (см. [61]) об одном граничном свойстве положительных гармонических функций был обобщен на положительные решения эллиптических дифференциальных операторов в дивергентной форме в гладких областях любых размерностей. Независимо этот результат был перенесен на гладкие области в $\mathbb{R}^n$ в статье [62]. Одна из идей, использовавшихся в работе [60], касалась асимптотических оценок функции Грина эллиптических операторов в дивергентной форме. Она позволяла обобщать утверждение для полупространства на случай $C^{1,\varepsilon}$-гладких областей в $\mathbb{R}^n$. Далее будет показано, что принцип минимальности Берлинга выполнен и для эллиптических операторов в недивергентной форме из класса $L^+(\lambda, \alpha, \Omega)$. Этот принцип можно интерпетировать как условие на рост положительной гармонической функции вдоль последоватльности точек, стремящихся к фиксированной точке границы, которое гарантирует наличие точечной нагрузки у граничной меры. Заметим, что случай $\alpha = n-1$ теоремы 15 следует из принципа минимальности Берлинга.

Определение 8. Пусть последовательность $\{z_i\}$ точек в Ω стремится к точке $O \in \partial\Omega$ и является разделенной (т.е. $\inf\limits_{i \neq j} \frac{d(x_i,x_j)}{d(x_i,\partial\Omega)} > 0$). Говорят, что последовательность $\{z_i\}$ есть L-определяющая, если для любой положительной

L-гармонической в Ω функции u, удовлетворяющей $u(z_i) \geq \kappa P_L(O, z_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$, выполнено неравенство $u(z) \geq \kappa P_L(z, O)$ для всех $z \in \Omega$, другими словами, граничная мера функции u должна иметь точечную нагрузку в точке O величины по крайней мере κ.

Теорема 27 ([61],[62],[60]). *Пусть Ω есть $C^{1,\varepsilon}$-гладкая и ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что*

a) L – это оператор Лапласа или

b) $L = div(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i})$ есть равномерно эллиптический оператор в Ω, чьи коэффициенты a_{ij} гельдеровы порядка $\alpha \in (0,1)$ в $\overline{\Omega}$.

Тогда разделенная последовательность точек $\{z_i\}$, стремящихся к точке $O \in \partial\Omega$, является определяющей для L если, и только если

$$\sum_i \left(\frac{d(z_i, \partial\Omega)}{d(z_i, O)}\right)^n = +\infty. \tag{3.21}$$

Далее будет предполагаться, что область Ω ограниченная и $C^{1,1}$-гладкая. Рассмотрим эллиптический оператор второго порядка L, обладающий следующими свойствами:

1. Существует биекция между положительными L-гармоническими функциями u и конечными борелевскими мерами μ на $\partial\Omega$ такая, что
$$u(\cdot) = \int\limits_{\partial\Omega} P_L(x, \cdot) d\mu(x). \tag{3.22}$$

2. Ядро Пуассона для L удовлетворяет следующему неравенству для некоторой константы $K > 0$
$$\frac{1}{K}\frac{d(y, \partial\Omega)}{|x-y|^n} \leq P_L(x, y) \leq K\frac{d(y, \partial\Omega)}{|x-y|^n} \tag{3.23}$$
для всех $x \in \partial\Omega$ и $y \in \Omega$. Другими словами, $P_L(x, y)$ сравнимо с ядром Пуассона для оператора Лапласа.

Например, любой оператор класса $L^{+}(\lambda, \alpha, \Omega)$ удовлетворяет этим условиям (см. разделы 3.1,3.3). В работах [71], [69] подобные оценки ядра Пуассона установлены для других классов операторов.

Следующая теорема утверждает справедливость принципа минимальности Берлинга для операторов класса $L^{+}(\lambda, \alpha, \Omega)$ в $C^{1,1}$- гладких областях.

Теорема 28. *Пусть Ω – ограниченная и $C^{1,1}$-гладкая область в $\mathbb{R}^n$, а оператор L удовлетворяет условиям* (3.22) *и* (3.23) *в Ω. Разделённая последовательность точек $\{z_i\}$ в Ω, стремящихся к точке $O \in \partial\Omega$ является определяющей для L если, и только если $\{z_i\}$ удовлетворяют (3.21).*

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно тому, что множества определяющих последовательностей для оператора Лапласа и L совпадают. Предположим, что последовательность $\{z_i\}$ не является определяющей для L, что означает существование L-гармонической функции u, такой что ее граничная мера μ не имеет точечной нагрузки в O, а $u(z_i) \geq \kappa P_L(z_i, O)$ для некоторого $\kappa > 0$ и всех i. Рассмотрим гармоническое продолжение $\tilde{u}$ меры μ в Ω. Используя оценки ядер Пуассона (3.23) и (3.12), мы получаем

$$\tilde{u}(y) = \int\limits_{\partial\Omega} P_{\Delta}(x, y) d\mu(x) \geq \frac{1}{K_1} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{d(y, \partial\Omega)}{|x-y|^n} d\mu(x) \geq$$

$$\geq \frac{1}{K_2 K_1} \int\limits_{\partial\Omega} P_L(x, y) d\mu(x) = u(y), y \in \Omega,$$

где K_1 и K_2 – некоторые положительные константы. Это означает, что

$$\tilde{u}(z_i) \geq \frac{\kappa}{K_1 K_2} u(z_i) \geq \frac{\kappa}{K_1 K_2^2} \frac{d(z_i, \partial\Omega)}{d(z_i, O)^n} \geq \left(\frac{1}{K_1 K_2}\right)^2 \kappa P_{\Delta}(O, z_i).$$

Следовательно, $\{z_i\}$ не является определяющей для оператора Лапласа. Аналогично получаем

$$\{z_i\} \text{ не определяющая для } L \Longleftarrow \{z_i\} \text{ не определяющая для } \Delta.$$

$\square$

Следующая теорема – это прямое следствие теоремы 28 и формулы для асимптотики гармонической меры (теоремы 20).

Теорема 29. *Пусть* Ω *– это ограниченная и* $C^{2,\varepsilon}$*-гладкая область в* $\mathbb{R}^n$*. Предположим, что* $L \in \L^+(\lambda, \alpha, \Omega)$*, матрица старших коэффициентов оператора* L *в точке* $O \in \partial\Omega$ *есть единичная матрица. Также допустим, что разделенная последовательность* $\{z_i\}$*, сходящаяся к* O*, удовлетворяет условию* (3.21)*: Тогда для любой положительной* L*- гармонической функции* u *из асимптотческого неравенства*

$$\liminf_{i\to\infty} \frac{u(z_i)}{\kappa \frac{d(z_i,\partial\Omega)}{d(z_i,O)^n}} \geq 1$$

следует, что граничная мера u *содержит точечную нугрузку в* O *величины по крайней мере* $\frac{\kappa}{\kappa_n}$*.*

Заключение

Перечислим основные результаты этой работы. Доказана вещественная аналитичность частного гармонических функций, у которых множества нулей совпадают. В размерности три для частных гармонических функций с фиксированным нодальным множеством получены неравенство Гарнака, оценки градиента и старших производных. Получено многомерное обобщение теоремы Левинсона о повторном логарифме для гармонических функций. Доказано несколько тауберовых теорем для положительных решений эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в недивергентной форме в гладких областях: обобщен критерий существования некасательного предела и принцип минимальности Берлинга, получен критерий степенного роста вдоль нормали.

Далее мы собрали несколько вопросов, которые мотивированы результатами этой работы.

Вопрос об односторонних оценках. Предположим, что z_0 есть точка в $Q = (-1,1) \times (-1,1)$, а M – положительная (убывающая и регулярная) функция на $(0,1)$. При каких условиях на M семейство F_M^+ всех функций f, голоморфных в Q и удовлетворяющих $Im(f(z)) \leq M(|Im(z)|)$, $f(z_0) = 0$, есть нормальное семейство в Q?

Вопрос о компактности семейства гармонических функций с фиксированным нулевым множеством. Общеизвестный факт состоит в том, что семейство положительных гармоническийх функций в B_1 со значением 1 в центре есть нормальное семейство. Пусть Z – это любое подмножество B_1. Рассмотрим множество F_Z всех гармонических в B_1 функций u, таких что $Z(u) = Z$, и $u(0) = 1$. Мы верим, что в любой размерности F_Z есть нормальное семейство функций в B_1. В размерности $n = 2, 3$ это следует из неравенства Гарнака для отношений гармонических функций. Мы уверены, что оно верно и в старших размерностях.

Константа в неравенстве Мангуби. Мы уверены в том, что константа C_Z в двумерной оценке Мангуби $|\nabla \log|f||$ может быть выбрана зависящей только от количества нодальных областей множества нулей Z. В размерности два Z локально можно представить в виде конечного объединения аналитических кривых, и мы считаем, что C_Z можно выбрать зависящим только от длины множества Z. Сложный вопрос возникает в старших размерностях. В размерности три неизвестно, верна ли аналогичная оценка в терминах площади множества Z.

Благодарности

Я искренне благодарен

- моему научному руководителю В.П.Хавину за то, что привил интерес к теме гармонических функций, за полезную критику и бесчисленные редакторские замечания, которые помогли сделать эту работу лучше.

- Е.Малинниковой за плодотворные обсуждения, которые многому научили автора, за неоценимую помощь и поддержку в работе.

- Д.Хавинсону и С.Гардинеру за то, что познакомили автора с вопросами о многомерной теореме Левинсона и универсальных рядах Тейлора.

- П.Мозоляко, Д.Столярову, П.Затицкому, М.Баску, М.Дубашинскому за многочисленные обсуждения на различные математические темы.

- Лаборатории Чебышева и кафедре анализа NTNU за поддержку и отличные условия для работы.

Работа автора поддержана Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ 11.G34.31.0026; ОАО “Газпром Нефть”.

Список литературы

1. D. Mangoubi. A gradient estimate for harmonic functions sharing the same zero set // Electron. Res. Announc. Math. Sci. 2014. Vol. 21. P. 62–71.
2. M. H. Martin. Linear and nonlinear boundary problems for harmonic functions // Proceedings of the American Mathematical Society. 1959. Vol. 10, no. 2. P. 258–266.
3. Cushing J. M. A uniqueness criterion for harmonic functions under nonlinear boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1971. Vol. 33, no. 2. P. 443–448.
4. J. Moser. On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. math. 1961. Vol. 14. P. 577–591.
5. Eu. B. Fabes, C. E. Kenig, R. P. Serapioni. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1982. Vol. 7, no. 1. P. 77–116.
6. B. Franchi, E. Lanconelli. An embedding theorem for Sobolev spaces related to nonsmooth vector fields and Harnack inequality // Comm. Partial Differential Equations. 1984. Vol. 9. P. 1237–1264.
7. B. Franchi, R. Serapioni. Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 14. 1987. no. 4. P. 527–568.
8. D. H. Armitage, S. J. Gardiner. Classical potential theory. Springer, 2001.
9. H. Aikawa. Potential analysis on nonsmooth domains, Martin boundary and boundary Harnack principle, in complex analysis and potential theory // CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence. 2012. Vol. 55. P. 235–253.
10. M. Cranston, Eu. Fabes, Zh. Zhao. Conditional gauge and potential theory for the Schrödinger operator // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 307(1).

P. 171–194.

11. T. Carleman. Extension d'un théorème de Liouville // Acta Math. 1926. Vol. 48. P. 363–366.
12. Levinson N. Gap and density theorems. American Mathematical Colloquium Publication, vol. 26, New York, 1940.
13. V.P. Gurarii. On N. Levinson's theorem on normal families of subharmonic functions // Zap. Nauch. Semin. LOMI. 1970. Vol. 19. P. 215–220.
14. A. Rashkovskii. Classical and new loglog theorems // Expo. Math. 2009. Vol. 27, no. 4. P. 271–287.
15. A. Yu. Rashkovskii. On radial projection of harmonic measure // Operator Theory and Subharmonic Functions, Naukova Dumka, Kiev. 1991. P. 95–102.
16. Koosis P. The logarithmic integral. I. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 12. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
17. E. M. Dyn'kin. An asymptotic Cauchy problem for the Laplace equation // Ark. Mat. 1996. Vol. 34. P. 245–264.
18. A. Logunov. On the higher-dimensional harmonic analog of the Levinson log log theorem // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2014. Vol. 352, no. 11. P. 889–893.
19. S. J. Gardiner, D. Khavinson. Boundary behaviour of universal Taylor series // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2014. Vol. 352, no. 2. P. 99–103.
20. L. H. Loomis. The converse of the Fatou theorem for positive harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. Vol. 53. P. 239–250.
21. W. Rudin. Tauberian theorems for positive harmonic functions // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 1978. Vol. 40, no. 3. P. 376–384.
22. W. Ramey, D. Ullrich. On the behavior of harmonic functions near a boundary point // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 305. P. 207–220.
23. А. А. Логунов. О граничном поведении положительных решений эллиптических дифференциальных уравнений // Алгебра и Анализ. 2015. Т. 27,

№ 1. С. 125–148.

24. A. Logunov, Eu. Malinnikova. On ratios of harmonic functions // Advances in Mathematics. 2015. Vol. 274. P. 241–262.
25. M. Brelot, G. Choquet. Polynomes harmoniques et polyharmoniques // Colloque sur les equations aux derivees partielles, Brussels. 1954. P. 45–46.
26. B. H. Murdoch. A theorem on harmonic functios // J. London Math. Soc. 1964. Vol. 39. P. 581–588.
27. J. Mateu, J. Orobitg, and J. Verdera. Estimates for the maximal singular integral in terms of the singular integral: the case of even kernels // Annals of mathematics. 2011. Vol. 174. P. 1429–1483.
28. A. Ancona. Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1978. Vol. 28, no. 4. P. 169–213.
29. L. Caffarelli, E. Fabes, Mortola, S. Salsa. Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form // Indiana J. Math. 30(4).
30. D. S. Jerison, C. E. Kenig. Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains // Advances in Mathematics. 1982. Vol. 46. P. 80–147.
31. J. Lewis, K. Nyström. Boundary behavior of p harmonic functions in domains beyond Lipschitz domains // Adv. Calc. Var. 2008. Vol. 1, no. 2. P. 133–170.
32. Stanisław Łojasiewicz. Sur le problème de la division // Studia Math. 1959. Vol. 18. P. 87–136.
33. S. G. Kranz, H. R. Parks. A primer of real analytic functions, second ed. Birkhäuser Verlag, 2002.
34. M. Hoffmann-Ostenhof, Th. Hoffmann-Ostenhof, N. Nadirashvili. Critical sets of smooth solutions to elliptic equations in dimension 3 // Indiana Univ. Math. J. 1996. Vol. 45, no. 1. P. 15–37.
35. Ch. I. Chu. On the Kuiper-Kuo theorem // Canad. Math. Bull. 1991. Vol. 34.

P. 175–180.

36. W. H. J. Fuchs. On meromorphic functions whose imaginary part is positive in a given domain // Proc. London Math. Soc. s3-33 (1). 1976. P. 138–150.
37. M. L. Agranovsky, Ya. Krasnov. Quadratic divisors of harmonic polynomials in R^n // Anal. Math. 2000. Vol. 82. P. 379–395.
38. D. H. Armitage. Cones on which entire harmonic functions can vanish // Proc. R. Irish Acad. 92A. 1992. no. 1. P. 107–110.
39. A. Beurling. Analytic continuation across a linear boundary // Acta Math. 1971. Vol. 128. P. 153–182.
40. Y. Domar. On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function // Ark. Mat. 1958. Vol. 3 (5). P. 429–440.
41. Y. Domar. Uniform boundness in families related to subharmonic functions // J. London Math. Soc. 1988. Vol. 38 (2). P. 485–491.
42. R. J. M. Hornblower. A growth condition for the MacLane class // Proc. London Math. Soc. 1971. Vol. 23. P. 371–384.
43. В. И. Мацаев, Е. З. Могульский. Теорема деления для аналитических функций с заданной мажорантой и некоторые ее приложения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 56. С. 73–89.
44. Rippon P. J. On a growth condition related to the MacLane class // J. London Math. Soc. 1978. Vol. 18. P. 94–100.
45. D. H. Armitage. On growth and decay of harmonic functions // Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences. 1987. Vol. 87A, no. 2. P. 107–116.
46. P. Ebenfelt; D. Khavinson. On point to point reflection of harmonic functions across real-analytic hypersurfaces in R^n // J. Anal. Math. 1996. Vol. 68. P. 145–182.
47. A. Erdelyi. Axially symmetric potentials and fractional integration // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1965. Vol. 13(1).

P. 216–228.

48. D. Khavinson. On reflection of harmonic functions in surfaces of revolution // Complex Variables, Theory and Application: An International Journal. 1991. Vol. 17:1-2. P. 7–14.
49. В. Рао. Теорема единственности для гармонических функций // Матем. заметки. 1968. Т. 3. С. 247–252.
50. A. Weinstein. Generalized axially symmetric potential theory // Bulletin of the American Mathematical Society. 1953. Vol. 59, no. 1. P. 20–38.
51. S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey. Harmonic function theory. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 137. Springer-Verlag, New York, 2001.
52. M. Manolaki. Universal polynomial expansions of harmonic functions // Potential Anal. 2013. Vol. 38. P. 985–1000.
53. P. M. Gauthier, I. Tamptse. Universal overconvergence of homogeneous expansions of harmonic functions // Analysis. 2006. Vol. 26. P. 287–293.
54. F. Bayart, K.-G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis, C. Papadimitropoulos. Abstract theory of universal series and applications // Proc. Lond. Math. Soc. 2008. Vol. 96. P. 417–463.
55. P. Fatou. Séries trigonometriques et séries de Taylor // Acta Math. 1906. Vol. 30. P. 335–400.
56. H. Hueber, M. Sieveking. Uniform bounds for quotients of Green functions on $C^{1,1}$-domains // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1982. Vol. 32(1). P. 105–117.
57. H. Hueber, M. Sieveking. Continuous bounds for quotients of Green functions // Arch. Rational Mech. Anal. 1985. Vol. 89, no. 1. P. 57–82.
58. A. Allen, E. Kerr . The converse of Fatou's theorem. // J. London Math. Soc. 1953. Vol. 28. P. 80–89.
59. F. W. Gehring. The Fatou theorem and its converse // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 85. P. 106–121.
60. В. Г. Мазья. К теореме Берлинга о принципе минимума для положитель-

ных гармонических функций // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 30. С. 76–90.

61. A. Beurling. A minimum principle for positive harmonic functions // Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. 1965. Vol. 372. P. 3–7.
62. B. Dahlberg. A minimum principle for positive harmonic functions // Proc. London Math. Soc. (3). 1976. Vol. 33, no. 2. P. 238–250.
63. Hardy G. Divergent series. Oxford: At The Clarendon Press, 1949.
64. J. Carmona, J. Donaire. The converse of Fatou's theorem for Zygmund measures // Pacific J. Math. 1999. Vol. 191, no. 2. P. 207–222.
65. Е. С. Дубцов. Производные регулярных мер // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 2. С. 86–104.
66. J. Brossard, L. Chevalier. Problème de Fatou ponctuel et dérivabilitè des mesures // Acta Math. 1990. Vol. 164, no. 1. P. 237–263.
67. K.-O. Widman. Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations // Math. Scand. 1967. Vol. 21. P. 17–37.
68. M. Gruter, K.-O. Widman. The Green function for uniformly elliptic equations // Manuscr. Math. 1982. Vol. 37(3). P. 303–342.
69. A. Ifra, L. Riahi. Estimates of Green functions and harmonic measures for elliptic operators with singular drift terms // Publ.Mat. 2005. Vol. 49. P. 159–177.
70. J. Serrin. On the Harnack inequality for linear elliptic equations // Journal d'Analyse Mathématique. 1954 – 1956. Vol. 4, Issue 1. P. 292–308.
71. Z. X. Zhao. Green function for Schrödinger operator and conditioned Feynman-Kac gauge // J. Math. Anal. Appl. 1986. Vol. 116, no. 2. P. 309–334.