На правах рукописи

Андрианов Павел Андреевич

МНОГОМЕРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ВСПЛЕСКОВ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2021

Работа выполнена в ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет.

Научный руководитель:	**Скопина Мария Александровна** доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет
Официальные оппоненты:	**Фарков Юрий Анатольевич** доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
	Новиков Сергей Яковлевич доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева
Ведущая организация:	ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН.

Защита состоится «__» _________ _______ г. в __ часов __ минут на заседании диссертационного совета Д002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, https://www.pdmi.ras.ru/.

Автореферат разослан «__»_________ _______ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д002.202.01,
кандидат физ.-мат. наук Рядовкин Кирилл Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория всплесков лежит на пересечении чистой математики, вычислительной математики, а также проблематики обработки сигналов, включающую сжатие и передачу информации, аудио- и видеокодирование, восстановление зашумлённых и искажённых сигналов. Дискретное всплеск-преобразование сейчас становится стандартным промышленным инструментом для решения прикладных задач в обработке цифровых сигналов и смежных областях. Алгоритмы JPEG и MPEG, DjVU используют всплески для обработки аудио- и видеосигналов. Среди новых областей применения всплесков - машинное зрение, биоинформатика (анализ ДНК), глубокие свёрточные нейронные сети, и др. Увеличивающиеся объёмы информации, а также специфическая структура информации влекут за собой более сложные требования к аналитическому инструменту, равно как пользуются спросом и алгоритмы построения систем всплесков с определённым количеством старых и новых свойств.

Помимо внесения существенного вклада в инструментарий для приложений, теория всплесков имеет большое значение и в ряде разделов чистой математики. Стоит отметить такие результаты теории всплесков, как построение оптимальных ортогональных полиномиальных базисов в пространствах непрерывных на отрезке и в пространствах периодических функций, конструктивное описание многих функциональных пространств, например пространств Соболева и Бесова, а также построение в них безусловных базисов. За исследования в этой области, а также за решающий вклад в развитие теории всплесков И. Мейер был удостоен премий Гаусса (2010 г.) и Абеля (2017 г.).

Изучение всплесков вращается вокруг свойств пространств, инвариантных относительно сдвига. Также имеют важное теоретическое и прикладное значение системы, инвариантные относительно сдвига. Одной из основных задач в приложениях, связанных с ними, является восстановление или приближение сигнала (функции) по последовательности его измерений. Известная классическая теорема теории восстановления устанавливает возможность полного восстановления сигналов с финитным спектром по равномерным сэмплам при использовании систем $sinc$-функций, инвариантных относительно сдвига. Другая классическая схема интерполяции по равномерным сэмплам основывается на полиномах Бернштейна. Эта схема, известная как кривые Безье и алгоритм де Кастельжо, широко используется в компьютерном геометрическом дизайне (CAGD). В то время, как о таких пространствах известно довольно многое, всё же остаётся множество открытых вопросов, в решении которых помогает теория всплесков. В частности, некоторые классификационные теоремы для всплесков обеспечивают классификационные теоремы для определённого типа пространств, инвариантных относительно сдвига. Пространства, порождённые сдвигами единственной функции, которые также активно фигурируют в теории всплесков, играют важную роль при решении классических экстремальных задач теории приближений. Различные пространства этого типа оказываются экстремальными аппроксимационными пространствами в таких задачах. Как правило, экстремальные задачи трудно решаемы, и их решения выявляют тонкие скрытые свойства вовлечённых функций.

В последние годы также активно изучаются фреймы всплесков. Само понятие фрейма было введено в 1952 году Р. Даффином и А. Шеффером, однако оно было практически забыто до появления теории всплесков. Этой темой занимались многие выдающиеся математики, такие как И. Добеши, А. Рон, Б. Хан, Ч. Чуи. Фреймы всплесков, как в периодическом, так и в непериодическом случае являются примером систем представлений, имеющих важное преимущество перед базисами во многих прикладных задачах – избыточность системы. Это свойство оказывается чрезвычайно полезным при обнаружении и исправлении ошибок, возникающих при передаче данных. Общая схема построения непериодических фреймов всплесков хорошо известна (унитарный принцип расширения и его модификации). Аналог данной конструкции для периодического случая был представлен Н. Атреасом в 2017 году, но вопрос не был закрыт до конца, так как, помимо выполнения некоторых технических условий, требовалась бесселевость системы функций, и обеспечение этого при построении фрейма не является тривиальной задачей.

Также интерес представляет построение теории периодических всплесков для пространства многомерных дискретных функций, то есть функций целочисленного векторного аргумента, так как при обработке и анализе цифровых сигналов мы имеем дело именно с такими функциями. Конкретные примеры подобных систем всплесков широко рассматривались в литературе, однако попыток построить общую теорию для построения таких систем с заданными свойствами насчитывается довольно малое количество.

Данная работа посвящена изучению периодических систем всплесков в многомерном случае. Решается задача обеспечения бесселевости периодических систем всплесков и, основываясь на данном результате, автор представляет несколько алгоритмов для построения широкого класса двойственных фреймов и, в частности, базисов всплесков с обеспечением определённых свойств. Также автором дано определение дискретного периодического кратномасштабного анализа и найдена его характеризация в терминах свойств масштабирующей последовательности, и дан способ построения дискретной периодической системы всплесков. Представлены формулы для прямого и обратного всплеск-преобразования, основанного на введённых системах всплесков. Помимо этого, решаются классические экстремальные задачи теории приближений для многомерной системы Хаара, которая, по многим параметрам, занимает особое место среди систем всплесков.

Научная новизна. Все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки в области теории аппроксимации, теории всплесков. Методы построения многомерных периодических фреймов всплесков в главе 2 сформулированы и конструктивно описаны таким образом, чтобы их легко можно было применить в приложениях. Конечным результатом построений, описанных в главе 3, является дискретное всплеск-преобразование, непосредственно применяемое на практике при анализе и обработке данных.

Положения, выносимые на защиту.

1. Найдены достаточные условия бесселевости системы всплесков.

2. Представлены алгоритмы построения двойственных базисов и фреймов всплесков, а также условия, которым должны удовлетворять входные данные этих алгоритмов. В доказательствах соответствующих теорем приводится полное описание алгоритмов, при этом построение систем представления происходит уровень за уровнем по простым рекуррентным формулам, что делает эти алгоритмы легко реализуемыми в приложениях.

3. Даны определения дискретного периодического кратномасштабного анализа и его масштабирующей последовательности, найдена характериза-

ция таких кратномасштабных анализов в терминах коэффициентов Фурье функций масштабирующей последовательности. Показано, что с помощью таких кратномасштабных анализов возможно построение дискретных периодических систем всплесков. Найдены формулы прямого и обратного всплеск-преобразования, основанного на таких всплесках.

4. Для многомерного сепарабельного базиса Хаара доказаны прямые и обратные аппроксимационные теоремы с точными постоянными, также показана точность констант при увеличении шага модуля непрерывности. Также для этого базиса в двумерном случае найдены оценки уклонения сумм Фурье с точной постоянной.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались

- на конференциях: «Modeling, analysis, approximation theory toward applications in tomography and inverse problems», Берлин, Германия (2020), «Harmonic Analysis and Applications», Цахкадзор, Армения (2015), международная конференция «Wavelets and applications», Санкт-Петербург, Россия (2015), Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж, Россия (2015);

- на семинаре «Конструктивная теория функций», Санкт-Петербург (2014-2021).

Публикации. Основные результаты представлены в опубликованных работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], а также в работах [8, 9], принятых к печати. Все указанные журналы входят в базу данных Scopus.

В совместных с М. А. Скопиной работах [6, 7] постановка задачи и общий план исследований принадлежат научному руководителю, реализация плана полностью принадлежит автору. Часть совместной работы [5], принадлежащая О. Л. Виноградову, не включена в текст диссертации.

Содержание работы

Первая глава содержит обозначения и предварительные сведения, необходимые для изложения материала диссертации.

Вторая глава содержит результаты исследований систем всплесков, определённых на единичном торе $\mathbb{T}^d$. Для формулировки результатов нам понадобятся некоторые обозначения.

Через M мы будем обозначать матричный коэффициент растяжения размера $d \times d$, $m = |\det M| > 1$. $D(M)$ обозначает множество цифр матрицы M. Множество, которое мы будем обозначать $H(M) := \mathbb{Z}^d \cap M\mathbb{T}^d$, также является множеством цифр матрицы M. Для любой последовательности функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ введём обозначение для сдвигов $f_{jk} := f_j(\cdot + M^{-j}k)$. Системой всплесков мы будем называть систему сдвигов $\{f_{jk}\}_{j\in\mathbb{Z}_+, k\in D(M^j)}$, ассоциированную с последовательностью функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$, и обозначать её $\{f_{jk}\}_{j,k}$. При наличии нескольких последовательностей $\{f_j^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $\nu = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, систему, представляющую собой объединение систем всплесков каждой последовательности, также будем называть системой всплесков и обозначать $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$. При необходимости уточнения множеств индексов будем обозначать объединение последовательностей как, например, $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+, k\in D(M^j), \nu=1,\dots,n}$.

Множество функций $\{f_k\}_{k\in S}$ (где S – не более чем счётное множество индексов) называется бесселевым в $L_2(\mathbb{T}^d)$, если существует константа $B > 0$ такая, что

$$\sum_{k\in S} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leqslant B||f||^2, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Множество функций $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\} \subset L_2(\mathbb{R}^d)$, $\nu = 1, \dots, r$, образует фрейм всплесков в $L_2(\mathbb{T}^d)$, если существуют такие константы $A, B > 0$, что

$$A||f||^2 \leqslant \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k\in D(M^j)} |\langle f, \psi_{jk}^{(\nu)}\rangle|^2 \leqslant B||f||^2, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Две системы функций $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\} \subset L_2(\mathbb{R}^d)$, $\nu = 1, \dots, r$, образуют двойственный фрейм всплесков в $L_2(\mathbb{T}^d)$, если каждая из них является фреймом и имеет место следующее разложение

$$f = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k\in D(M^j)} \langle f, \widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\rangle \psi_{jk}^{(\nu)}, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Сходимость в суммах безусловная. Таким образом, фреймы являются системами представления, но, в отличие от базисов, разложение по двойственным фреймам не единственное. Фрейм, являющийся базисом, называется базисом Рисса.

Основным инструментом для построения систем всплесков является кратномасштабный анализ. В рамках этой главы мы используем определение многомерного ПКМА, данное И. Максименко и М. Скопиной в [19] (см. также [13, глава 9]).

Определение 1 ([13], Определение 9.1.1)**.** *Пусть* $V_j \subset L_2(\mathbb{T}^d)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. *Будем говорить, что совокупность* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ *является* периодическим кратномасштабным анализом*, если выполнены следующие свойства (аксиомы):*
MR1. $V_j \subset V_{j+1}$;
MR2. $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{T}^d)$;
MR3. $\dim V_j = m^j$;
MR4. $\dim\{f \in V_j : f(\cdot + M^{-j}n) = \lambda_n f \ \forall n \in \mathbb{Z}^d\} \leqslant 1$, $\forall \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}, \lambda_n \in \mathbb{C}$;
MR5. $f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot + M^{-j}n) \in V_j \ \forall n \in \mathbb{Z}^d$;
MR6. *a)* $f \in V_j \Rightarrow f(M\cdot) \in V_{j+1}$; *b)* $f \in V_{j+1} \Rightarrow \sum_{s\in D(M)} f(M^{-1}\cdot +M^{-1}s) \in V_j$.

Последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $\varphi_j \in V_j$, будем называть *масштабирующей*, если функции φ_{jk}, $k \in D(M^j)$, образуют базис пространства V_j для всех $j \in \mathbb{Z}_+$.

В работе [16] Н. Атреас показал, что ключевым условием для того, чтобы система всплесков являлась фреймом, явлется её бесселевость. Главный результат в §2.1 устанавливает достаточные условия бесселевости системы всплесков.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты Фурье функций* $\psi_j \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, *удовлетворяют условиям*

$$\forall j \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}^d \quad |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)| \leqslant C \min\left\{|M^{*-j}l|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)}, |M^{*-j}l|^{\alpha}\right\}$$

для некоторых $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$. *Тогда система всплесков* $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ *является бесселевой.*

Основываясь на данном результате, были найдены алгоритмы для построения двойственных базисов и фреймов всплесков. Следующая теорема из §2.2 формулирует условия, налагаемые на входные данные для алгоритма построения базисов: требуется найти последовательность тригонометрических полиномов определённого вида. Сам алгоритм построения в явном виде сформулирован в доказательстве теоремы.

Теорема 2. *Пусть матрица* M *такая, что выполнено условие* $\mathbb{T}^d \subset M^*\mathbb{T}^d$, *и последовательность тригонометрических полиномов* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям:*

$$\begin{cases} A \leqslant |m^{j/2}\widehat{\varphi_j}(k)| \leqslant B, & \text{при}\, k \in H(M^{*j}), \\ \widehat{\varphi_j}(k) = 0, & \text{при}\, k \notin H(M^{*j}), \end{cases}$$

где $A, B > 0$. *Тогда*
1. $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *образуют маситабирующую последовательность.*
2. *Для каждого* $j \in \mathbb{Z}_+$ *существует разбиение множества* $H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$ *на подмножества* $N_j^{(\nu)}$, *такое что система всплесков* $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in D(M^j),\, \nu=1,\dots m-1}$, *где*

$$\psi_j^{(\nu)} = \sqrt{m}(\xi_{N_j^{(\nu)}} * \varphi_{j+1}), \quad \xi_{N_j^{(\nu)}} = \sum_{k\in N_j^{(\nu)}} e^{ik\cdot},$$

является базисом Рисса в $L_2(\mathbb{T}^d)$.
3. *Существует базис всплесков* $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, *биортогональный с базисом* $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, *который также состоит из тригонометрических полиномов.*

Результатом исследований §2.3 является похожий алгоритм для построения двойственных фреймов всплесков. Однако, он требует гораздо более простых для выполнения условий: нужно найти лишь одну функцию, чьи равные нулю коэффициенты Фурье расположены друг относительно друга определённым образом, а не равные нулю достаточно быстро убывают на бесконечности. Сам алгоритм построения сформулирован в явном виде в доказательстве теоремы.

Теорема 3. *Пусть* M *– изотропная матрица, такая что* $\mathbb{T}^d \subset M^*\mathbb{T}^d$, *и коэффициенты Фурье функции* $\varphi_1 \in L_2(\mathbb{T}^d)$ *удовлетворяют условиям*

$$\widehat{\varphi_1}(l) = \begin{cases} a_0, & \text{если} \quad l = \mathbf{0}, \\ a_l(\frac{1}{|l|})^{\alpha}, & \text{если} \quad l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*},\, l \in Q, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\alpha > d/2$, $0 < C_1 \leqslant |a_l| \leqslant C_2$ *при* $l = \mathbf{0}$ *и* $l \in Q$, *где множество* $Q \subset \mathbb{Z}^d$ *такое, что* $Q \cap \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*} = \varnothing$, $H(M^*) \subset Q$ *и удовлетворяет условию*

(Z) Если $l \notin Q$ и $l \in H(M^{*j})$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то $l + M^j k \notin Q$ для всех $k \in \mathbb{Z}^d$.

Тогда существуют масштабирующие последовательности $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$, *порождающие системы всплесков* $\{\varphi_0\} \cup \{\psi^{(\nu)}_{jk}\}_{j,k,\nu}$ *и* $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_{jk}\}_{j,k,\nu}$, *которые являются двойственными фреймами.*

Третья глава содержит результаты исследований периодических систем всплесков, определённых на целочисленной решётке. Различные конкретные примеры систем всплесков для дискретного периодического случая уже рассматривались в литературе (например, см. [17, 18]), но общая теория или схема построения таких систем в этих работах отсутствует. Определение кратномасштабного анализа, наиболее близкое к рассматриваемому нами, и определение соответствующих систем всплесков были даны А. П. Петуховым для одномерного случая в работе [14]. Однако, это определение налагает на масштабирующие последовательности, которые порождают КМА, некоторые условия, исключающие из рассмотрения многие периодические объекты, «заслуживающие» называться системами всплесков. В третьей главе автором даны более общие определения дискретного периодического КМА и ассоциированных с ними систем всплесков, а также найдены компактные формулы для вычисления прямого и обратного всплеск-преобразования, ассоциированного с полученными всплесками.

Мы будем называть функцию f от d целочисленных переменных M^n-периодической, если равенство $f(x) = f(x + M^n k)$ выполняется для всех $x, k \in \mathbb{Z}^d$. Через $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ обозначим пространство M^n-периодических комплекснозначных функций от d целочисленных переменных. Оператор сдвига на $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ определим по формуле $S^j_k f(x) := f(x + M^{n-j}k)$. Для функции $f \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ определим дискретное преобразование Фурье как

$$\widehat{f}(k) := \sum_{s \in D(M^n)} f(s) e^{-2\pi i (k, M^{-n} s)}.$$

Также определим оператор G формулой

$$Gf := \frac{1}{m^{n-1}} \sum_{k \in D(M^{*(n-1)})} \widehat{f}(M^* k) e^{2\pi i (M^{*(-n)} k, \cdot)}.$$

В §3.1 автором введено определение дискретного периодического кратномасштабного анализа.

Определение 2. *Последовательность линейных пространств* $\{V_j\}_{j=0}^n \subset \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ *называется* кратномасштабным анализом *в пространстве* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, *если она удовлетворяет следующим условиям:*
MR1. $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n$.
MR2. $V_n = \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$.
MR3. a) $\dim V_j = m^j$, *для всех* $j = 0, \ldots, n$; b) V_0 *состоит из констант.*
MR4. $\dim\{f \in V_j : S_p^j f = \lambda_p f$ *для всех* $p \in \mathbb{Z}^d\} \leqslant 1$ *для любого набора комплексных чисел* $\{\lambda_p\}_{p\in\mathbb{Z}^d}$.
MR5. $f \in V_j \Leftrightarrow S_p^j f \in V_j$, $p \in D(M^j)$.
MR6. a) *если* $f \in V_j$, *то* $g(\cdot) := f(M\cdot) \in V_{j+1}$; b) *если* $f \in V_{j+1}$, *то* $Gf \in V_j$.

Также дано определение масштабирующей последовательности.

Определение 3. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$ *– КМА в пространстве* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. *Последовательность функций* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\varphi_j \in V_j$, *называется* масштабирующей последовательностью, *если функции* $S_p^j\varphi_j$, $p \in D(M^j)$, *образуют базис пространства* V_j *для каждого* $j = 0, \ldots, n$.

В следствии 4 показано, что в любом КМА существует масштабирующая последовательность. Основным результатом §3.1 является характеризация кратномасштабных анализов в терминах свойств масштабирующих последовательностей, представленная в следующей теореме.

Теорема 4. *Функции* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n \subset \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ *образуют масштабирующую последовательность для некоторого КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
S1. $\widehat{\varphi_0}(k) = 0$ *для всех* $k \neq \mathbf{0}$;
S2. *для каждого* $j = 0, \ldots, n$ *и* $l \in D(M^{*j})$ *существует* $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$, $k \in D(M^{*n})$, *такой что* $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$;
S3. *для каждого* $k \in D(M^{*n})$ *существует* $j = 0, \ldots, n$, *такой что* $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$;
S4. *для каждого* $j = 1, \ldots, n$ *и* $l \in D(M^{*n})$ *существует* μ_l^j, *такой что* $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) = \mu_l^j \widehat{\varphi_j}(k)$ *для всех* $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$;
S5. *для каждого* $j = 0, \ldots, n-1$ *и* $l \in D(M^{*n})$ *существует* $\gamma_l^j \neq 0$, *такой*

что $\widehat{\varphi_{j+1}}(M^*k) = \gamma_l^j \sum_{s\in D(M^*)} \widehat{\varphi_j}(k+M^{*(n-1)}s)$ *для всех* $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$, $k \in D(M^{*(n-1)})$;

В §3.2 представлен способ построения систем функций $\{\psi_j^{(\nu)}\}_{j,\nu}$, $\{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j,\nu}$ с помощью кратномасштабных анализов, соответствующих введённому определению, а также определены пространства $W_j^{(\nu)}$, $\widetilde{W}_j^{(\nu)}$. Основная теорема §3.2 демонстрирует, что эти системы функций обладают свойствами, которые аналогичны присущим классическим системам всплесков непрерывного аргумента.

Теорема 5. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ *– пара КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^n$ *– их масштабирующие последовательности, и* $\{S_r^j\varphi_j\}_{r\in D(M^j)}$, $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ *– биортонормированные системы. Тогда*

1. $W_j^{(\nu)} \subset V_{j+1}$ *для всех* $\nu = 1,\dots,m-1$;

2. *любая функция* $f_{j+1} \in V_{j+1}$ *может быть представлена в виде* $f_{j+1} = f_j + \sum_{\nu=1}^{m-1} f_j^{(\nu)}$, *где* $f_j \in V_j$, $f_j^{(\nu)} \in W_j^{(\nu)}$, $\nu = 1,\dots,m-1$;

3. $W_j^{(\nu)} \perp \widetilde{V}_j$, $\widetilde{W}_j^{(\nu)} \perp V_j$ *для всех* $\nu = 1,\dots,m-1$;

4. $W_j^{(\nu)} \perp \widetilde{W}_j^{(\xi)}$ *для всех* $\nu \neq \xi$, $\nu,\xi = 1,\dots,m-1$;

5. $\langle S_r^j\psi_j^{(\nu)}, S_k^j\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\rangle = \delta_{rk}$ *для всех* $\nu = 1,\dots,m-1$, $r,k \in D(M^j)$.

Всплеск-преобразование раскладывает сигнал на аппроксимирующие (низкочастотные) и детализирующие (высокочастотные) компоненты. Обратное преобразование выполняет восстановление сигнала. Эти преобразования есть основной способ применения теории всплесков в анализе и сжатии данных. В §3.3 найдены удобные формулы для прямого и обратного всплеск-преобразования, ассоциированного с введёнными ранее системами всплесков.

Для $f \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, положим $C_{j,k}^f := \langle f, S_k^j\varphi_j\rangle$, $D_{j,k}^{f,(\nu)} := \langle f, S_k^j\psi_j^{(\nu)}\rangle$.

Теорема 6. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ *– пара КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^n$ *– их масштабирующие последовательности,* $\{S_k^j\psi_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, $\{S_k^j\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ *– двойственные системы всплесков, порождённые данными КМА,* $\{S_r^j\varphi_j\}_{r\in D(M^j)}$,

$\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ – *биортонормированные системы, и пусть* $f \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. *Тогда*

$$C_{j-1,k}^f = \frac{1}{m^j}\sum_{r\in D(M^j)} \theta_{k,r} C_{j,r}^f,$$

$$D_{j-1,k}^{f,(\nu)} = \frac{1}{m^j}\sum_{r\in D(M^j)} \eta_{k,r}^{(\nu)} C_{j,r}^f,$$

для всех $\nu = 1,\dots,m$, $k \in D(M^{j-1})$, $j = 1,\dots,n$, *где*
$\theta_{k,r} = \sum_{l\in D(M^{*j})} \overline{\mu}_l^j e^{2\pi i(M^{*-j}l,r-Mk)}$ *и* $\eta_{k,r}^{(\nu)} = \sum_{l\in D(M^{*j})} \overline{\alpha_l^{\nu,j-1}} e^{2\pi i(M^{*-j}l,r-Mk)}$.

Теорема 7. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ – *пара КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^n$ – *их масштабирующие последовательности,* $\{S_k^j\psi_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, $\{S_k^j\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ – *двойственные системы всплесков, порождённые этими КМА,* $\{S_r^j\varphi_j\}_{r\in D(M^j)}$, $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ – *биортонормированные системы, и пусть* $f \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. *Тогда*

$$C_{j,k}^f = \frac{1}{m^j}\sum_{p\in D(M^{j-1})} \big(\sigma_{k,p}^{(0)} C_{j-1,p} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \sigma_{k,p}^{(\nu)} D_{j-1,p}^{f,(\nu)}\big),$$

для всех $k \in D(M^j)$, $j = 1,\dots,n$, *где* $\sigma_{k,p}^{(0)} = \sum_{s\in D(M^{*j})} \widetilde{\mu}_s^j e^{2\pi i(M^{*-j}s,Mp-k)}$, *и* $\sigma_{k,p}^{(\nu)} = \sum_{s\in D(M^{*j})} \widetilde{\alpha}_s^{\nu,j-1} e^{2\pi i(M^{*-j}s,Mp-k)}$ *for* $\nu = 1,\dots,m-1$.

В замечании 3 выписан матричный вид этих формул.

Четвёртая глава посвящена изучению свойств сепарабельного базиса Хаара, определённого на единичном торе $\mathbb{T}^d$.

Широко известен классический пример системы всплесков – ортонормальный базис Хаара на прямой, состоящий из кусочно-постоянных периодических функций, и свойства которого изучались многими авторами. Стандартным способом распространения одномерных базисов на случай многих переменных является тензорное произведение базиса на себя. Такие многомерные базисы Хаара также широко изучались в литературе, однако, они обладают нежелательным, в некоторых случаях, свойством: локализация в пространственной области по одной переменной не гарантирует локализации по другим переменным. Поэтому, с точки зрения теории всплесков, интерес представляет другой подход. Если имеется базис всплесков в $L_2(\mathbb{R})$, построенный по схеме кратномасштабного анализа (КМА) $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, то рассматривается тензорное произведение $\{V_j \bigotimes V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ этого кратномасштабного анализа на себя. Полученная конструкция является КМА в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и носит название *сепарабельного КМА*. Теперь, если мы определим пространства всплесков $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, следуя стандартной схеме, то получим, в отличие от одномерного случая, не одну, а несколько всплеск-функций, сжатия и целочисленные сдвиги которых образуют базис в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Подробнее этот процесс построения описан, например, в [13, §2.1]. Применяя этот подход к базису Хаара, естественным образом пронумеровав и периодизировав получившуюся систему функций (весь процесс детально описан в главе 4), мы получим систему $\{\psi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, которая и является предметом изучения этой главы.

Неравенство типа Джексона для наилучших приближений полиномами Хаара одной переменной

$$E_n(f)\leqslant C\omega\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

с константой $C=12$ следует из результатов Б. Сёкефальви-Надя [20]. Позднее Б. Голубов доказал [11], что константа $C=1$ является точной в данном неравенстве. Он также доказал следующую обратную теорему

$$\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\le 6E_n(f).$$

Результаты §4.1.1 представляют собой прямые аппроксимационные теоремы для введённого базиса $\{\psi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. В полученных оценках точными являются как константы, так и порядок шага модуля непрерывности. Частный модуль непрерывности ω_k по k-й переменной определён как $\omega_k(f;h)=\sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\ x_j=y_j,\ j\neq k}}|f(x)-f(y)|$.

Теорема 8. *Пусть $f\in C(\mathbb{T}^d)$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда*

$$E_n(f)\leqslant\sum_{k=1}^{d}\omega_k\left(f;\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)\leqslant d\max_k\omega_k\left(f;\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right),$$

и, более того,

1. d является точной константой, и правую сторону неравенства нельзя заменить на $K\max\limits_k\omega_k(f;\gamma_n)$, где $\gamma_n=o\left(\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$, или на $d\max\limits_k\omega_k(f;\frac{\lambda}{\sqrt[d]{n}})$, где $\lambda<1$;

2. сумму $\sum\limits_{k=1}^{d}\omega_k\left(f;\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$ нельзя заменить на $\sum\limits_{k=1}^{d}c_k\omega_k\left(f;\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$, где $c_k<1$ хотя бы для одного из номеров k, или на $K\sum\limits_{k=1}^{d}\omega_k(f;\gamma_{nk})$, где

$\gamma_{nk} = o\left(\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$ *хотя бы для одного из номеров* k, *или на* $\sum\limits_{k=1}^{d} \omega_k\left(f; \frac{\lambda_k}{\sqrt[d]{n}}\right)$, *где* $\lambda_k < 1$ *хотя бы для одного из номеров* k.

В следующей прямой теореме рассмотрен частный случай при $d = 2$ и найден интересный феномен: несмотря на точность констант в общем случае, при определённом выборе порядка многочленов n эти константы можно уменьшить. Для всех типов номеров n найдены соответствующие точные постоянные.

Теорема 9. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T}^2)$, $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{N}$, $l = 0, \ldots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$. *Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \begin{cases} \omega_{1,i+1} + \omega_{2,i+1}, \quad l = 0, \ldots, 4^i - 2,\ r = 1, 2, 3, & (1) \\ \frac{1}{2}\omega_{1,i+1} + \omega_{2,i+1}, \quad l = 4^i - 1,\ r = 1, & (2) \\ \alpha\omega_{1,i+1} + \beta\omega_{2,i+1}, \quad \alpha, \beta \geqslant \frac{1}{2}, \quad \alpha + \beta = \frac{3}{2}, \quad l = 4^i - 1,\ r = 2, & (3) \\ \frac{1}{2}\omega_{1,i+1} + \frac{1}{2}\omega_{2,i+1}, \quad l = 4^i - 1,\ r = 3, & (4) \end{cases}$$

где $\omega_{j,m} = \omega_j(f; 2^{-m})$. *Более того,*

(1) оценки (1), (2), (4) точны, то есть ни одна из констант при модулях непрерывности не может быть уменьшена;

(2) оценка в (3) точна, и правую сторону неравенства нельзя заменить на $\alpha'\omega_{1,i+1} + \beta'\omega_{2,i+1}$, *где* $\min\{\alpha', \beta'\} < \frac{1}{2}$.

В §4.1.2 представлены обратные аппроксимационные теоремы для шагов непрерывности различного вида.

Теорема 10. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T}^d)$, $m = 1, \ldots, d$, $n = 2^{di} + (2^d - 1)l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 2^{di} - 1$, $r = 1, \ldots, 2^d - 1$. *Тогда*

$$\omega_m\left(f; \frac{1}{2^{i+1}}\right) \leqslant 4E_n(f), \tag{5}$$

где 4 *является точной константой в (5).*

Теорема 11. *Если* $f \in C(\mathbb{T}^d)$, $m = 1, \ldots, d$, $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\omega_m\left(f; \frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right) \leqslant 8E_n(f).$$

Для всякой непрерывной 1-периодической вещественнозначной функции $f \in C(\mathbb{T})$ справедливо очевидное соотношение

$$E_n(f) \leqslant E_1(f) = \frac{1}{2}\,\omega(f;1) = \frac{\max f - \min f}{2}.$$

Здесь ни при каком $h > 0$ в неравенстве Джексона

$$E_n(f) \leqslant K \cdot \omega(f;h)$$

нельзя взять $K < \dfrac{1}{2}$. Однако здесь шаг можно уменьшить при сохранении константы $\dfrac{1}{2}$: если $n = 2^i + l + 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 2^i - 1$, то [10, § 10.1.2]

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{2}\,\omega\left(f; \frac{1}{2^i}\right). \tag{6}$$

Для функций нескольких переменных неравенство, аналогичное (6), сразу следует из теоремы 9:

$$E_n(f) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2}\,\omega_k\left(f; \frac{1}{2^i}\right),$$

где $n = 2^{di} + (2^d - 1)l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 2^{di} - 1$, $r = 1, \ldots, 2^d - 1$. Основной результат §4.1.3 демонстрирует, что константу $\dfrac{1}{2}$ ни в одном слагаемом нельзя уменьшить, даже если увеличить шаг модулей непрерывности.

Теорема 12. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого набора вещественных коэффициентов c_k, $k = 1, \ldots, d$, хотя бы один из которых меньше $\dfrac{1}{2}$, найдётся такая функция $f \in C(\mathbb{T}^d)$, что*

$$E_n(f) > \sum_{k=1}^{d} c_k \omega_k(f;1).$$

Через $S_n(f)$ обозначим частичные суммы ряда Фурье по рассматриваемой нами ортонормированной системе. Для одномерного случая следующая оценка хорошо известна:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant K\omega\Big(f; \frac{1}{n}\Big), \tag{7}$$

где $\omega(f;t)$ – модуль непрерывности функции f. В книге [12, с. 81] указано значение константы в данном неравенстве: $K = 3$, но, используя результат

Хорошко [15]

$$\sup_{f\in H_\omega}\|f-S_n(f)\|_\infty = 2^i\int\limits_0^{2^{-i}}\omega(t)dt,$$

$$n=2^i+j,\quad H_\omega=\{f\in C\colon \omega(f;t)\leqslant\omega(t), t\in[0,1]\},$$

нетрудно получить значение константы $K=3/2$ и непосредственно доказать, что оно точное. Основной результат §4.2 представляет собой аналог оценки (7) для функций двух переменных. В полученных оценках точными являются как константы, так и порядок шага модуля непрерывности. Модуль непрерывности ω_∞ здесь определён как

$$\omega_\infty(f;h)=\sup_{\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\infty\leqslant h}|f(x^{(1)})-f(x^{(2)})|.$$

Теорема 13. *Пусть $f\in C(\mathbb{T}^2)$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда*

$$\|f-S_n(f)\|_\infty\leqslant\frac{7}{4}\omega_\infty\Big(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \tag{8}$$

1. Правая часть неравенства (8) не может быть одновременно для всех n заменена на $K\omega_\infty(f;\gamma_n)$, где $K\in\mathbb{R}$, $\gamma_n=o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.

2. Константа $\frac{7}{4}$ в неравенстве (8) не может быть одновременно для всех n заменена меньшей.

Теорема 14. *Пусть $n\geqslant 4$, $n=4^i+3l+r$, $i\in\mathbb{Z}_+$, $l=0,\dots,4^i-1$, $r=1,2,3$. Тогда*

$$\sup_{f\in C(\mathbb{T}^2)}\frac{\|f-S_n(f)\|_\infty}{\omega_\infty\Big(f;\frac{1}{2^{i+1}}\Big)}=\begin{cases}\frac{7}{4}, & l=0,\dots,4^i-2,\ r=1,2,3;\\ \frac{3}{2}, & l=4^i-1,\ r=1,2;\\ 1, & l=4^i-1,\ r=3.\end{cases}$$

Список работ автора по теме диссертации

[1] *Андрианов П. А.* Дискретный периодический кратномасштабный анализ // Исследования по прикладной математике и информатике. I, Зап. научн. сем. ПОМИ, 499, ПОМИ, СПб., 2021, 7–21.

[2] *Andrianov P.* On sufficient frame conditions for periodic wavelet systems // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., Vol. 16, No. 1 (2018) 1850002 (15 pages).

[3] *Andrianov P. A.* Sharp Estimates of Deviations from Fourier–Haar Sums for Continuous Functions of Two Variables // J. Math. Sci. (United States), 2016, 215(5), pp. 552–559.

[4] *Andrianov P. A.* Sufficient Conditions for a Multidimensional System of Periodic Wavelets to be a Frame // J. Math. Sci. (United States), 2020, 251(2), pp. 190–199.

[5] *Andrianov P. A., Vinogradov O. L.* On the constant and step in Jackson's inequality for best approximations by trigonometric polynomials and by Haar polynomials // Math. Notes, 2016, 100(3-4), pp. 345–351.

[6] *Andrianov P., Skopina M.* On construction of periodic wavelet frames // Eur. J. Math., 2019, 5(1), pp. 241–249.

[7] *Andrianov P., Skopina M.* On Jackson-type inequalities associated with separable Haar wavelets // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., Vol. 14, No. 3 (2016) 1650005 (11 pages).

[8] *Andrianov P.* On construction of multidimensional periodic wavelet frames // Чебышевский сборник, in print.

[9] *Andrianov P.* Multidimensional periodic discrete wavelets // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., in print.

Список литературы

[10] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша, Наука, М., 1987.

[11] *Голубов Б. И.* О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара // Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:6 (1964), 1271–1296.

[12] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды, Изд-во АФЦ, М., 1999.

[13] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков, Физматлит, М., 2005.

[14] *Петухов А. П.* Периодические дискретные всплески // Алгебра и анализ, 8:3 (1996), 151–183; St. Petersburg Math. J., 8:3 (1997), 481–503.

[15] *Хорошко Н. П.* Равномерное приближение полиномами по системе Хаара на классах непрерывных функций // Укр. матем. журн., 22:5 (1970), 705–712.

[16] *Atreas N. D.* Characterization of dual multiwavelet frames of periodic functions // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., Vol. 14, No. 3 (2016) 1650012 (26 pages)

[17] *Farkov Yu. A.* Periodic wavelets in Walsh analysis // Commun. Math. Appl., 2012, 3, No 3., pp. 223–242.

[18] *Kirushev V. A., Malozemov V. N., and Pevnyi A. B.* Wavelet Decomposition of the Space of Discrete Periodic Splines // Math. Notes, Vol. 67, No. 5, (2000), pp. 603–610.

[19] *Maksimenko I., Skopina M.* Multivariate periodic wavelets // St. Petersburg Math. J., 15, 2004, 165–190.

[20] *Sz.-Nagy B.* Approximation properties of orthogonal expansions, Acta sci. math., 11.953/54, 15, 1953, pp. 31–37.