Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» (СПбГУ)

На правах рукописи

Андрианов Павел Андреевич

МНОГОМЕРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ВСПЛЕСКОВ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор М. А. Скопина

Санкт-Петербург – 2021

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Теория всплесков лежит на пересечении чистой математики, вычислительной математики, а также проблематики обработки сигналов, включающую сжатие и передачу информации, аудио- и видеокодирование, восстановление зашумлённых и искажённых сигналов. Дискретное всплеск-преобразование сейчас становится стандартным промышленным инструментом для решения прикладных задач в обработке цифровых сигналов и смежных областях. Алгоритмы JPEG и MPEG, DjVU используют всплески для обработки аудио- и видеосигналов. Среди новых областей применения всплесков - машинное зрение, биоинформатика (анализ ДНК), глубокие свёрточные нейронные сети, и др. Увеличивающиеся объёмы информации, а также специфическая структура информации влекут за собой более сложные требования к аналитическому инструменту, равно как пользуются спросом и алгоритмы построения систем всплесков с определённым количеством старых и новых свойств.

Помимо внесения существенного вклада в инструментарий для приложений, теория всплесков имеет большое значение и в ряде разделов чистой математики. Стоит отметить такие результаты теории всплесков, как построение оптимальных ортогональных полиномиальных базисов в пространствах непрерывных на отрезке и в пространствах периодических функций, конструктивное описание многих функциональных пространств, например пространств Соболева и Бесова, а также построение в них безусловных базисов. За исследования в этой области, а также за решающий вклад в развитие теории всплесков И. Мейер был удостоен премий Гаусса (2010 г.) и Абеля (2017 г.).

Изучение всплесков вращается вокруг свойств пространств, инвариантных относительно сдвига. Также имеют важное теоретическое и прикладное значение системы, инвариантные относительно сдвига. Одной из основных задач в приложениях, связанных с ними, является восстановление или приближение сигнала (функции) по последовательности его измерений. Известная классическая теорема теории восстановления устанавливает возможность полного восстановления сигналов с финитным спектром по равномерным сэмплам при использовании систем *sinc*-функций, инвариантных относительно сдвига. Другая классическая схема интерполяции по равномерным сэмплам основывается на полиномах Бернштейна. Эта схема, известная как кривые Безье и алгоритм де Кастельжо, широко используется в компьютерном геометрическом дизайне (CAGD). В то время, как о таких пространствах известно довольно многое, всё же остаётся множество открытых вопросов, в решении которых помогает теория всплесков. В частности, некоторые классификационные теоремы для всплесков обеспечивают классификационные теоремы для определённого типа пространств, инвариантных относительно сдвига. Пространства, порождённые сдвигами единственной функции, которые также активно фигурируют в теории всплесков, играют важную роль при решении классических экстремальных задач теории приближений. Различные пространства этого типа оказываются экстремальными аппроксимационными пространствами в таких задачах. Как правило, экстремальные задачи трудно решаемы, и их решения выявляют тонкие скрытые свойства вовлечённых функций.

В последние годы также активно изучаются фреймы всплесков. Само понятие фрейма было введено в 1952 году Р. Даффином и А. Шеффером, однако оно было практически забыто до появления теории всплесков. Этой темой занимались многие выдающиеся математики, такие как И. Добеши, А. Рон, Б. Хан, Ч. Чуи. Фреймы всплесков, как в периодическом, так и в непериодическом случае являются примером систем представлений, имеющих важное преимущество перед базисами во многих прикладных задачах – избыточность системы. Это свойство оказывается чрезвычайно полезным при обнаружении и исправлении ошибок, возникающих при передаче данных. Общая схема построения непериодических фреймов всплесков хорошо известна (унитарный принцип расширения и его модификации). Аналог данной конструкции для периодического случая был представлен Н. Атреасом в 2017 году, но вопрос не был закрыт до конца, так как, помимо выполнения некоторых технических условий, требовалась бесселевость системы функций, и обеспечение этого при построении фрейма не является тривиальной задачей.

Также интерес представляет построение теории периодических всплесков для пространства многомерных дискретных функций, то есть функций целочисленного векторного аргумента, так как при обработке и анализе цифровых сигналов мы имеем дело именно с такими функциями. Конкретные примеры подобных систем всплесков широко рассматривались в литературе, однако попыток построить общую теорию для построения таких систем с заданными свойствами насчитывается довольно малое количество.

Данная работа посвящена изучению периодических систем всплесков в многомерном случае. Решается задача обеспечения бесселевости периодических систем всплесков и, основываясь на данном результате, автор представляет несколько алгоритмов для построения широкого класса двойственных фреймов и, в частности, базисов всплесков с обеспечением определённых свойств. Также автором дано определение дискретного периодического кратномасштабного анализа и найдена его характеризация в терминах свойств масштабирующей последовательности, и дан способ построения дискретной периодической системы всплесков. Представлены формулы для прямого и обратного всплеск-преобразования, основанного на введённых системах всплесков. Помимо этого, решаются классические экстремальные задачи теории приближений для многомерной системы Хаара, которая, по многим параметрам, занимает особое место среди систем всплесков.

Научная новизна. Все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки в области теории аппроксимации, теории всплесков. Методы построения многомерных периодических фреймов всплесков в главе 2 сформулированы и конструктивно описаны таким образом, чтобы их легко можно было применить в приложениях. Конечным результатом построений в главе 3 является дискретное всплеск-преобразование, непосредственно применяемое на практике при анализе и обработке данных.

Положения, выносимые на защиту.

1. Найдены достаточные условия бесселевости системы всплесков.

2. Представлены алгоритмы построения двойственных базисов и фреймов всплесков, а также условия, которым должны удовлетворять входные данные этих алгоритмов. В доказательствах соответствующих теорем приводится полное описание алгоритмов, при этом построение систем представления происходит уровень за уровнем по простым рекуррентным формулам, что делает эти алгоритмы легко реализуемыми в приложениях.

3. Даны определения дискретного периодического кратномасштабного анализа и его масштабирующей последовательности, найдена характеризация таких кратномасштабных анализов в терминах коэффициентов Фурье функций масштабирующей последовательности. Показано, что с помощью таких кратномасштабных анализов возможно построение дискретных периодических систем всплесков. Найдены формулы прямого и обратного всплеск-преобразования, основанного на таких всплесках.

4. Для многомерного сепарабельного базиса Хаара доказаны прямые и обратные аппроксимационные теоремы с точными постоянными, также показана точность констант при увеличении шага модуля непрерывности. Также для этого базиса в двумерном случае найдены оценки уклонения сумм Фурье с точной постоянной.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались

- на конференциях: «Modeling, analysis, approximation theory toward applications in tomography and inverse problems», Берлин, Германия (2020), «Harmonic Analysis and

Applications», Цахкадзор, Армения (2015), международная конференция «Wavelets and applications», Санкт-Петербург, Россия (2015), Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж, Россия (2015);

- на семинаре «Конструктивная теория функций», Санкт-Петербург (2014-2021).

Публикации. Основные результаты представлены в опубликованных работах [1, 10, 11, 12, 13, 14, 15], а также в работах [16, 17], принятых к печати. Все указанные журналы входят в базу данных Scopus.

В совместных с М. А. Скопиной работах [14, 15] постановка задачи и общий план исследований принадлежат научному руководителю, реализация плана полностью принадлежит автору. Часть совместной работы [13], принадлежащая О. Л. Виноградову, не включена в текст диссертации.

Структура и объём. Диссертация объёмом 88 страниц состоит из введения, четырёх глав, разделённых на параграфы, и списка литературы, содержащего 40 источников. Введение содержит обзор основных результатов диссертации и необходимые для этого обозначения. У всех цитируемых утверждений возле порядкового номера в скобках указан источник цитирования.

Основное содержание работы.

Первая глава содержит обозначения и предварительные сведения, необходимые для изложения материала диссертации.

Вторая глава содержит результаты исследований систем всплесков, определённых на единичном торе $\mathbb{T}^d$. Для формулировки результатов нам понадобятся некоторые обозначения.

Через M мы будем обозначать матричный коэффициент растяжения размера $d \times d$, $m = |\det M| > 1$. $D(M)$ обозначает множество цифр матрицы M. Множество, которое мы будем обозначать $H(M) := \mathbb{Z}^d \cap M\mathbb{T}^d$, также является множеством цифр матрицы M. Для любой последовательности функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ введём обозначение для сдвигов $f_{jk} := f_j(\cdot + M^{-j}k)$. Системой всплесков мы будем называть систему сдвигов $\{f_{jk}\}_{j\in\mathbb{Z}_+, k\in D(M^j)}$, ассоциированную с последовательностью функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$, и обозначать её $\{f_{jk}\}_{j,k}$. При наличии нескольких последовательностей $\{f_j^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $\nu = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, систему, представляющую собой объединение систем всплесков каждой последовательности, также будем называть системой всплесков и обозначать $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$. При необходимости уточнения множеств индексов будем обозначать объединение последовательностей как, например, $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,k\in D(M^j),\nu=1,\dots,n}$.

Множество функций $\{f_k\}_{k\in S}$ (где S – не более чем счётное множество индексов) называется бесселевым в $L_2(\mathbb{T}^d)$, если существует константа $B>0$ такая, что

$$\sum_{k\in S}|\langle f,f_k\rangle|^2\leqslant B||f||^2,\quad \forall f\in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Множество функций $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}\subset L_2(\mathbb{R}^d)$, $\nu=1,\dots,r$, образует фрейм всплесков в $L_2(\mathbb{T}^d)$, если существуют такие константы $A,B>0$, что

$$A||f||^2\leqslant\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in D(M^j)}|\langle f,\psi_{jk}^{(\nu)}\rangle|^2\leqslant B||f||^2,\quad \forall f\in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Две системы функций $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}\subset L_2(\mathbb{R}^d)$, $\nu=1,\dots,r$, образуют двойственный фрейм всплесков в $L_2(\mathbb{T}^d)$, если каждая из них является фреймом и имеет место следующее разложение

$$f=\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in D(M^j)}\langle f,\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\rangle\psi_{jk}^{(\nu)},\quad \forall f\in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Сходимость в суммах безусловная. Таким образом, фреймы являются системами представления, но, в отличие от базисов, разложение по двойственным фреймам не единственное. Фрейм, являющийся базисом, называется базисом Рисса.

Основным инструментом для построения систем всплесков является кратномасштабный анализ. В рамках этой главы мы используем определение многомерного ПКМА, данное И. Максименко и М. Скопиной в [30] (см. также [6, глава 9]).

Определение 1 ([6], Определение 9.1.1)**.** *Пусть $V_j\subset L_2(\mathbb{T}^d)$, $j\in\mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что совокупность $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ является* периодическим кратномасштабным анализом*, если выполнены следующие свойства (аксиомы):*

MR1. $V_j\subset V_{j+1}$;

MR2. $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty}V_j}=L_2(\mathbb{T}^d)$;

MR3. $\dim V_j=m^j$;

MR4. $\dim\{f\in V_j: f(\cdot+M^{-j}n)=\lambda_n f\ \forall n\in\mathbb{Z}^d\}\leqslant 1$, $\forall\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d},\lambda_n\in\mathbb{C}$;

MR5. $f\in V_j\Leftrightarrow f(\cdot+M^{-j}n)\in V_j\ \forall n\in\mathbb{Z}^d$;

MR6. *a)* $f\in V_j\Rightarrow f(M\cdot)\in V_{j+1}$; *b)* $f\in V_{j+1}\Rightarrow\sum_{s\in D(M)}f(M^{-1}\cdot+M^{-1}s)\in V_j$.

Последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $\varphi_j \in V_j$, будем называть *масштабирующей*, если функции φ_{jk}, $k \in D(M^j)$, образуют базис пространства V_j для всех $j \in \mathbb{Z}_+$.

В работе [18] Н. Атреас показал, что ключевым условием для того, чтобы система всплесков являлась фреймом, явлется её бесселевость. Главный результат в §2.1 устанавливает достаточные условия бесселевости системы всплесков.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты Фурье функций $\psi_j \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяют условиям*

$$\forall j \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}^d \quad |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)| \leqslant C \min\left\{|M^{*-j}l|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)}, |M^{*-j}l|^{\alpha}\right\}$$

для некоторых $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$. Тогда система всплесков $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ является бесселевой.

Основываясь на данном результате, были найдены алгоритмы для построения двойственных базисов и фреймов всплесков. Следующая теорема из §2.2 формулирует условия, налагаемые на входные данные для алгоритма построения базисов: требуется найти последовательность тригонометрических полиномов определённого вида. Сам алгоритм построения в явном виде сформулирован в доказательстве теоремы.

Теорема 2. *Пусть матрица M такая, что выполнено условие $\mathbb{T}^d \subset M^*\mathbb{T}^d$, и последовательность тригонометрических полиномов $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:*

$$\begin{cases} A \leqslant |m^{j/2}\widehat{\varphi_j}(k)| \leqslant B, & \text{при } k \in H(M^{*j}), \\ \widehat{\varphi_j}(k) = 0, & \text{при } k \notin H(M^{*j}), \end{cases}$$

где $A, B > 0$. Тогда

1. *$\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют масштабирующую последовательность.*

2. *Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ существует разбиение множества $H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$ на подмножества $N_j^{(\nu)}$, такое что система всплесков $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in D(M^j),\, \nu=1,\dots m-1}$, где*

$$\psi_j^{(\nu)} = \sqrt{m}(\xi_{N_j^{(\nu)}} * \varphi_{j+1}), \quad \xi_{N_j^{(\nu)}} = \sum_{k\in N_j^{(\nu)}} e^{ik\cdot},$$

является базисом Рисса в $L_2(\mathbb{T}^d)$.

3. *Существует базис всплесков $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, биортогональный с базисом $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, который также состоит из тригонометрических полиномов.*

Результатом исследований §2.3 является похожий алгоритм для построения двойственных фреймов всплесков. Однако, он требует гораздо более простых для выполнения условий: нужно найти лишь одну функцию, чьи равные нулю коэффициенты Фурье расположены друг относительно друга определённым образом, а не равные нулю достаточно быстро убывают на бесконечности. Сам алгоритм построения сформулирован в явном виде в доказательстве теоремы.

Теорема 3. *Пусть M – изотропная матрица, такая что $\mathbb{T}^d \subset M^*\mathbb{T}^d$, и коэффициенты Фурье функции $\varphi_1 \in L_2(\mathbb{T}^d)$ удовлетворяют условиям*

$$\widehat{\varphi_1}(l) = \begin{cases} a_0, & \text{если} \quad l = \mathbf{0}, \\ a_l(\frac{1}{|l|})^{\alpha}, & \text{если} \quad l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*},\ l \in Q, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\alpha > d/2$, $0 < C_1 \leqslant |a_l| \leqslant C_2$ при $l = \mathbf{0}$ и $l \in Q$, где множество $Q \subset \mathbb{Z}^d$ такое, что $Q \cap \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*} = \varnothing$, $H(M^*) \subset Q$ и удовлетворяет условию

(Z) Если $l \notin Q$ и $l \in H(M^{*j})$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то $l + M^j k \notin Q$ для всех $k \in \mathbb{Z}^d$. *Тогда существуют масштабирующие последовательности $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$, порождающие системы всплесков $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, которые являются двойственными фреймами.*

Третья глава содержит результаты исследований периодических систем всплесков, определённых на целочисленной решётке. Различные конкретные примеры систем всплесков для дискретного периодического случая уже рассматривались в литературе (например, см. [22, 26]), но общая теория или схема построения таких систем в этих работах отсутствует. Определение кратномасштабного анализа, наиболее близкое к рассматриваемому нами, и определение соответствующих систем всплесков были даны А. П. Петуховым для одномерного случая в работе [8]. Однако, это определение налагает на масштабирующие последовательности, которые порождают КМА, некоторые условия, исключающие из рассмотрения многие периодические объекты, «заслуживающие» называться системами всплесков. В третьей главе автором даны более общие определения дискретного периодического КМА и ассоциированных с ними систем всплесков, а также найдены компактные формулы для вычисления прямого и обратного всплеск-преобразования, ассоциированного с полученными всплесками.

Мы будем называть функцию f от d целочисленных переменных M^n-периодической, если равенство $f(x) = f(x + M^n k)$ выполняется для всех $x, k \in \mathbb{Z}^d$. Через $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ обозначим пространство M^n-периодических комплекснозначных функций от d целочисленных переменных. Оператор сдвига на $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ определим по формуле $S_k^j f(x) := f(x + M^{n-j}k)$. Для функции $f \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ определим дискретное преобразование Фурье как

$$\widehat{f}(k) := \sum_{s \in D(M^n)} f(s) e^{-2\pi i (k, M^{-n}s)}.$$

Также определим оператор G формулой

$$Gf := \frac{1}{m^{n-1}} \sum_{k \in D(M^{*(n-1)})} \widehat{f}(M^* k) e^{2\pi i (M^{*(-n)}k, \cdot)}.$$

В §3.1 автором введено определение дискретного периодического кратномасштабного анализа.

Определение 2. *Последовательность линейных пространств* $\{V_j\}_{j=0}^n \subset \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ *называется* кратномасштабным анализом *в пространстве* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, *если она удовлетворяет следующим условиям:*
MR1. $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n$.
MR2. $V_n = \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$.
MR3. a) $\dim V_j = m^j$, *для всех* $j = 0, \ldots, n$; b) V_0 *состоит из констант.*
MR4. $\dim\{f \in V_j : S_p^j f = \lambda_p f$ *для всех* $p \in \mathbb{Z}^d\} \leqslant 1$ *для любого набора комплексных чисел* $\{\lambda_p\}_{p \in \mathbb{Z}^d}$.
MR5. $f \in V_j \Leftrightarrow S_p^j f \in V_j$, $p \in D(M^j)$.
MR6. a) *если* $f \in V_j$, *то* $g(\cdot) := f(M\cdot) \in V_{j+1}$; b) *если* $f \in V_{j+1}$, *то* $Gf \in V_j$.

Также дано определение масштабирующей последовательности.

Определение 3. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$ – *КМА в пространстве* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. *Последовательность функций* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\varphi_j \in V_j$, *называется* масштабирующей последовательностью, *если функции* $S_p^j \varphi_j$, $p \in D(M^j)$, *образуют базис пространства* V_j *для каждого* $j = 0, \ldots, n$.

В следствии 4 показано, что в любом КМА существует масштабирующая последовательность. Основным результатом §3.1 является характеризация кратномасштабных анализов в терминах свойств масштабирующих последовательностей, представленная в следующей теореме.

Теорема 4. *Функции* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n \subset \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ *образуют масштабирующую последовательность для некоторого КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

S1. *$\widehat{\varphi_0}(k) = 0$ для всех $k \neq \mathbf{0}$;*
S2. *для каждого $j = 0, \ldots, n$ и $l \in D(M^{*j})$ существует $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$, $k \in D(M^{*n})$, такой что $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$;*
S3. *для каждого $k \in D(M^{*n})$ существует $j = 0, \ldots, n$, такой что $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$;*
S4. *для каждого $j = 1, \ldots, n$ и $l \in D(M^{*n})$ существует μ_l^j, такой что $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) = \mu_l^j \widehat{\varphi_j}(k)$ для всех $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$;*
S5. *для каждого $j = 0, \ldots, n-1$ и $l \in D(M^{*n})$ существует $\gamma_l^j \neq 0$, такой что $\widehat{\varphi_{j+1}}(M^*k) = \gamma_l^j \sum_{s \in D(M^*)} \widehat{\varphi_j}(k + M^{*(n-1)}s)$ для всех $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$, $k \in D(M^{*(n-1)})$;*

В §3.2 представлен способ построения систем функций $\{\psi_j^{(\nu)}\}_{j,\nu}$, $\{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j,\nu}$ с помощью кратномасштабных анализов, соответствующих введённому определению, а также определены пространства $W_j^{(\nu)}$, $\widetilde{W}_j^{(\nu)}$. Основная теорема §3.2 демонстрирует, что эти системы функций обладают свойствами, которые аналогичны присущим классическим системам всплесков непрерывного аргумента.

Теорема 5. *Пусть $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ – пара КМА в $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^n$ – их масштабирующие последовательности, и $\{S_r^j \varphi_j\}_{r \in D(M^j)}$, $\{S_k^j \widetilde{\varphi}_j\}_{k \in D(M^j)}$ – биортонормированные системы. Тогда*
1. *$W_j^{(\nu)} \subset V_{j+1}$ для всех $\nu = 1, \ldots, m-1$;*
2. *любая функция $f_{j+1} \in V_{j+1}$ может быть представлена в виде $f_{j+1} = f_j + \sum_{\nu=1}^{m-1} f_j^{(\nu)}$, где $f_j \in V_j$, $f_j^{(\nu)} \in W_j^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$;*
3. *$W_j^{(\nu)} \perp \widetilde{V}_j$, $\widetilde{W}_j^{(\nu)} \perp V_j$ для всех $\nu = 1, \ldots, m-1$;*
4. *$W_j^{(\nu)} \perp \widetilde{W}_j^{(\xi)}$ для всех $\nu \neq \xi$, $\nu, \xi = 1, \ldots, m-1$;*
5. *$\langle S_r^j \psi_j^{(\nu)}, S_k^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)} \rangle = \delta_{rk}$ для всех $\nu = 1, \ldots, m-1$, $r, k \in D(M^j)$.*

Всплеск-преобразование раскладывает сигнал на аппроксимирующие (низкочастотные) и детализирующие (высокочастотные) компоненты. Обратное преобразование выполняет восстановление сигнала. Эти преобразования есть основной способ применения теории всплесков в анализе и сжатии данных. В §3.3 найдены удобные формулы для прямого и обратного всплеск-преобразования, ассоциированного с введёнными ранее системами всплесков.

Для $f \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, положим $C_{j,k}^f := \langle f, S_k^j \varphi_j \rangle$, $D_{j,k}^{f,(\nu)} := \langle f, S_k^j \psi_j^{(\nu)} \rangle$.

Теорема 6. *Пусть $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ – пара КМА в $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^n$ – их масштабирующие последовательности, $\{S_k^j \psi_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, $\{S_k^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ – двойственные систе-*

мы всплесков, порождённые данными КМА, $\{S_r^j\varphi_j\}_{r\in D(M^j)}$, $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ – биортонормированные системы, и пусть $f\in\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. Тогда

$$C_{j-1,k}^f=\frac{1}{m^j}\sum_{r\in D(M^j)}\theta_{k,r}C_{j,r}^f,$$
$$D_{j-1,k}^{f,(\nu)}=\frac{1}{m^j}\sum_{r\in D(M^j)}\eta_{k,r}^{(\nu)}C_{j,r}^f,$$

для всех $\nu=1,\dots,m$, $k\in D(M^{j-1})$, $j=1,\dots,n$, где $\theta_{k,r}=\sum_{l\in D(M^{*j})}\overline{\mu}_l^j e^{2\pi i(M^{*-j}l,r-Mk)}$ и $\eta_{k,r}^{(\nu)}=\sum_{l\in D(M^{*j})}\overline{\alpha_l^{\nu,j-1}}e^{2\pi i(M^{*-j}l,r-Mk)}$.

Теорема 7. *Пусть $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ – пара КМА в $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^n$ – их масштабирующие последовательности, $\{S_k^j\psi_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, $\{S_k^j\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ – двойственные системы всплесков, порождённые этими КМА, и $\{S_r^j\varphi_j\}_{r\in D(M^j)}$, $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ – биортонормированные системы, и пусть $f\in\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. Тогда*

$$C_{j,k}^f=\frac{1}{m^j}\sum_{p\in D(M^{j-1})}\big(\sigma_{k,p}^{(0)}C_{j-1,p}+\sum_{\nu=1}^{m-1}\sigma_{k,p}^{(\nu)}D_{j-1,p}^{f,(\nu)}\big),$$

для всех $k\in D(M^j)$, $j=1,\dots,n$, где $\sigma_{k,p}^{(0)}=\sum_{s\in D(M^{*j})}\widetilde{\mu}_s^j e^{2\pi i(M^{*-j}s,Mp-k)}$, и $\sigma_{k,p}^{(\nu)}=\sum_{s\in D(M^{*j})}\widetilde{\alpha}_s^{\nu,j-1}e^{2\pi i(M^{*-j}s,Mp-k)}$ for $\nu=1,\dots,m-1$.

В замечании 3 выписан матричный вид этих формул.

Четвёртая глава посвящена изучению свойств сепарабельного базиса Хаара, определённого на единичном торе $\mathbb{T}^d$.

Широко известен классический пример системы всплесков – ортонормальный базис Хаара на прямой, состоящий из кусочно-постоянных периодических функций, и свойства которого изучались многими авторами. Стандартным способом распространения одномерных базисов на случай многих переменных является тензорное произведение базиса на себя. Такие многомерные базисы Хаара также широко изучались в литературе, однако, они обладают нежелательным, в некоторых случаях, свойством: локализация в пространственной области по одной переменной не гарантирует локализации по другим переменным. Поэтому, с точки зрения теории всплесков, интерес представляет другой подход. Если имеется базис всплесков в $L_2(\mathbb{R})$, построенный по схеме кратномасштабного анализа (КМА) $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, то рассматривается тензорное произведение $\{V_j\bigotimes V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ этого кратномасштабного анализа на себя. Полученная конструкция является КМА в

$L_2(\mathbb{R}^2)$ и носит название *сепарабельного КМА*. Теперь, если мы определим пространства всплесков $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, следуя стандартной схеме, то получим, в отличие от одномерного случая, не одну, а несколько всплеск-функций, сжатия и целочисленные сдвиги которых образуют базис в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Подробнее этот процесс построения описан, например, в [6, §2.1]. Применяя этот подход к базису Хаара, естественным образом пронумеровав и периодизировав получившуюся систему функций (весь процесс детально описан в главе 4), мы получим систему $\{\psi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, которая и является предметом изучения этой главы.

Неравенство типа Джексона для наилучших приближений полиномами Хаара одной переменной

$$E_n(f)\leqslant C\omega\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

с константой $C=12$ следует из результатов Б. Сёкефальви-Надя [38]. Позднее Б. Голубов доказал [4], что константа $C=1$ является точной в данном неравенстве. Он также доказал следующую обратную теорему

$$\omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\leq 6E_n(f).$$

Результаты §4.1.1 представляют собой прямые аппроксимационные теоремы для введённого базиса $\{\psi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. В полученных оценках точными являются как константы, так и порядок шага модуля непрерывности. Частный модуль непрерывности ω_k по k-й переменной определён как $\omega_k(f;h)=\sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\ x_j=y_j,\ j\neq k}}|f(x)-f(y)|$.

Теорема 8. *Пусть* $f\in C(\mathbb{T}^d)$, $n\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$E_n(f)\leqslant\sum_{k=1}^{d}\omega_k\left(f;\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)\leqslant d\max_k\omega_k\left(f;\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right),$$

и, более того,

1. d является точной константой, и правую сторону неравенства нельзя заменить на $K\max\limits_k\omega_k(f;\gamma_n)$, где $\gamma_n=o\left(\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$, или на $d\max\limits_k\omega_k(f;\frac{\lambda}{\sqrt[d]{n}})$, где $\lambda<1$;

2. сумму $\sum\limits_{k=1}^{d}\omega_k\left(f;\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$ нельзя заменить на $\sum\limits_{k=1}^{d}c_k\omega_k\left(f;\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$, где $c_k<1$ хотя бы для одного из номеров k, или на $K\sum\limits_{k=1}^{d}\omega_k(f;\gamma_{nk})$, где $\gamma_{nk}=o\left(\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$ хотя бы для одного из номеров k, или на $\sum\limits_{k=1}^{d}\omega_k\left(f;\frac{\lambda_k}{\sqrt[d]{n}}\right)$, где $\lambda_k<1$ хотя бы для одного из номеров k.

В следующей прямой теореме рассмотрен частный случай при $d = 2$ и найден интересный феномен: несмотря на точность констант в общем случае, при определённом выборе порядка многочленов n эти константы можно уменьшить. Для всех типов номеров n найдены соответствующие точные постоянные.

Теорема 9. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T}^2)$, $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{N}$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$. *Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \begin{cases} \omega_{1,i+1} + \omega_{2,i+1}, \quad l = 0, \dots, 4^i - 2,\ r = 1, 2, 3, & (1) \\ \dfrac{1}{2}\omega_{1,i+1} + \omega_{2,i+1}, \quad l = 4^i - 1,\ r = 1, & (2) \\ \alpha\omega_{1,i+1} + \beta\omega_{2,i+1}, \quad \alpha, \beta \geqslant \dfrac{1}{2}, \quad \alpha + \beta = \dfrac{3}{2}, \quad l = 4^i - 1,\ r = 2, & (3) \\ \dfrac{1}{2}\omega_{1,i+1} + \dfrac{1}{2}\omega_{2,i+1}, \quad l = 4^i - 1,\ r = 3, & (4) \end{cases}$$

где $\omega_{j,m} = \omega_j(f; 2^{-m})$. *Более того,*

(1) оценки (1), (2), (4) точны, то есть ни одна из констант при модулях непрерывности не может быть уменьшена;

(2) оценка в (3) точна, и правую сторону неравенства нельзя заменить на $\alpha'\omega_{1,i+1} + \beta'\omega_{2,i+1}$, *где* $\min\{\alpha', \beta'\} < \frac{1}{2}$.

В §4.1.2 представлены обратные аппроксимационные теоремы для шагов непрерывности различного вида.

Теорема 10. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T}^d)$, $m = 1, \dots, d$, $n = 2^{di} + (2^d - 1)l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \dots, 2^{di} - 1$, $r = 1, \dots, 2^d - 1$. *Тогда*

$$\omega_m\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) \leqslant 4E_n(f), \tag{5}$$

где 4 *является точной константой в (5).*

Теорема 11. *Если* $f \in C(\mathbb{T}^d)$, $m = 1, \dots, d$, $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\omega_m\Big(f; \frac{1}{\sqrt[d]{n}}\Big) \leqslant 8E_n(f).$$

Для всякой непрерывной 1-периодической вещественнозначной функции $f \in C(\mathbb{T})$ справедливо очевидное соотношение

$$E_n(f) \leqslant E_1(f) = \frac{1}{2}\,\omega(f; 1) = \frac{\max f - \min f}{2}.$$

Здесь ни при каком $h > 0$ в неравенстве Джексона

$$E_n(f) \leqslant K \cdot \omega(f; h)$$

нельзя взять $K < \dfrac{1}{2}$. Однако здесь шаг можно уменьшить при сохранении константы $\dfrac{1}{2}$: если $n = 2^i + l + 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 2^i - 1$, то [2, § 10.1.2]

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{2}\, \omega\left(f; \frac{1}{2^i}\right). \tag{6}$$

Для функций нескольких переменных неравенство, аналогичное (6), сразу следует из теоремы 9:

$$E_n(f) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2}\, \omega_k\left(f; \frac{1}{2^i}\right),$$

где $n = 2^{di} + (2^d - 1)l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 2^{di} - 1$, $r = 1, \ldots, 2^d - 1$. Основной результат §4.1.3 демонстрирует, что константу $\dfrac{1}{2}$ ни в одном слагаемом нельзя уменьшить, даже если увеличить шаг модулей непрерывности.

Теорема 12. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого набора вещественных коэффициентов c_k, $k = 1, \ldots, d$, хотя бы один из которых меньше $\dfrac{1}{2}$, найдётся такая функция $f \in C(\mathbb{T}^d)$, что*

$$E_n(f) > \sum_{k=1}^{d} c_k \omega_k(f; 1).$$

Через $S_n(f)$ обозначим частичные суммы ряда Фурье по рассматриваемой нами ортонормированной системе. Для одномерного случая следующая оценка хорошо известна:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant K\omega\Big(f; \frac{1}{n}\Big), \tag{7}$$

где $\omega(f; t)$ – модуль непрерывности функции f. В книге [5, с. 81] указано значение константы в данном неравенстве: $K = 3$, но, используя результат Хорошко [9]

$$\sup_{f \in H_\omega} \|f - S_n(f)\|_\infty = 2^i \int_0^{2^{-i}} \omega(t) dt,$$

$$n = 2^i + j, \quad H_\omega = \{f \in C \colon \omega(f; t) \leqslant \omega(t), t \in [0, 1]\},$$

нетрудно получить значение константы $K = 3/2$ и непосредственно доказать, что оно точное. Основной результат §4.2 представляет собой аналог оценки (7) для функций двух переменных. В полученных оценках точными являются как константы, так и порядок шага модуля непрерывности. Модуль непрерывности ω_∞ здесь определён как

$$\omega_\infty(f;h) = \sup_{\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\infty \leqslant h} |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})|.$$

Теорема 13. *Пусть $f \in C(\mathbb{T}^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{7}{4}\omega_\infty\Big(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \tag{8}$$

1. Правая часть неравенства (8) *не может быть одновременно для всех n заменена на $K\omega_\infty(f;\gamma_n)$, где $K \in \mathbb{R}$, $\gamma_n = o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.*

2. Константа $\dfrac{7}{4}$ в неравенстве (8) *не может быть одновременно для всех n заменена меньшей.*

Теорема 14. *Пусть $n \geqslant 4$, $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$. Тогда*

$$\sup_{f \in C(\mathbb{T}^2)} \frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{\omega_\infty\Big(f; \dfrac{1}{2^{i+1}}\Big)} = \begin{cases} \dfrac{7}{4}, & l = 0, \dots, 4^i - 2,\ r = 1, 2, 3; \\ \dfrac{3}{2}, & l = 4^i - 1,\ r = 1, 2; \\ 1, & l = 4^i - 1,\ r = 3. \end{cases}$$

1 Обозначения и вспомогательные результаты

1.1 Обозначения

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел соответственно.

$\mathbb{R}^d$ – d-мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$ – его элементы (векторы), $(x, y) = x_1 y_1 + \dots x_d y_d$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$, $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

$\mathbb{Z}^d$ – целочисленная решётка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$.

$\mathbb{T}^d = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^d$ – d-мерный единичный тор.

$\mathcal{P}(S)$ – булеан множества $S \subset \mathbb{R}^d$, и $\mathcal{P}'(S) = \mathcal{P}(S) \setminus \{\varnothing\}$.

$\delta_{n,k}$, где $n, k \in \mathbb{Z}$ – символ Кронекера.

Если A – матрица размера $d \times d$, то $\|A\|$ – её евклидова операторная норма из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$, A^* – эрмитово сопряжение к ней, $A^{*j} = (A^*)^j$, I_d – единичная матрица размера $d \times d$. Если A – невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, будем говорить, что векторы k, n сравнимы по модулю A и писать $k \equiv n \pmod{A}$, если $k - n = Al$, где $l \in \mathbb{Z}^d$. Через $\mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},A}$ мы обозначаем множество всех векторов $l \in \mathbb{Z}^d$, таких что $l \equiv \mathbf{0} \pmod{A}$. Целочисленная решётка $\mathbb{Z}^d$ разбивается на классы смежности относительно введённого отношения сравнения. Количество этих классов смежности равно $|\det A|$ (см., например, [6, Предложение 2.2.1]). Множество, содержащее в себе ровно по одному представителю каждого класса смежности, мы будем называть множеством цифр матрицы A. В тех ситуациях, когда неважно, какое именно множество цифр выбрано, мы будем считать его выбранным произвольным образом и обозначать $D(A)$. Также отметим, что множество, которое мы будем обозначать $H(A) := \mathbb{Z}^d \cap A\mathbb{T}^d$, является множеством цифр (см. [6, Предложение 2.2.1]).

Во всей работе через M мы будем обозначать матрицу из класса квадратных целочисленных матриц, у которых все собственные числа по модулю больше единицы, $m := |\det M|$. Такие матрицы мы будем называть матричным коэффициентом растяжения.

Если $l \in \mathbb{Z}^d$, то l_j это вектор, такой что $l_j \in H(M^{*j})$, $l_j \equiv l \mod M^{*j}$ (заметим, что такой вектор всегда определяется единстенным образом).

Матрица M называется изотропной, если она подобна диагональной матрице, такой что числа $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ расположены на её главной диагонали, и $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_d|$. Таким образом, числа $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ являются собственными числами матрицы M, и её спектральный радиус равен $|\lambda|$, где λ – одно из собственных чисел. Если матрица M изотропна, то изотропны матрицы M^* и M^j для всех $j \in \mathbb{Z}$.

$C(\mathbb{T}^d)$ – множество всех непрерывных 1-периодических по каждой переменной функций.

$L_2(\mathbb{T}^d)$ – гильбертово пространство 1-периодических по каждой переменной измеримых функций, интегрируемых с квадратом, со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f(t)g(t)dt$.

$L_2(\mathbb{R}^d)$ – гильбертово пространство измеримых функций, интегрируемых с квадратом, со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(t)dt$.

$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t)e^{-2\pi i(k,t)}dt$, где $k \in \mathbb{Z}^d$ – k-й коэффициент Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$.

$\chi_S(x)$ – характеристическая функция множества $S \subset \mathbb{R}^d$.

$f\big|_S$ – сужение функции f на множество $S \subset \mathbb{R}^d$.

$\omega_k(f; h) = \sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\ x_j=y_j,\ j\neq k}} |f(x) - f(y)|$ – частный модуль непрерывности функции $f \in C(\mathbb{T}^d)$ по переменной k. В случае $d = 1$ единственный модуль непрерывности функции f будем обозначать $\omega(f; h)$.

Для любой последовательности функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ введём обозначение для сдвигов $f_{jk} := f_j(\cdot + M^{-j}k)$. Под системой всплесков мы будем понимать систему сдвигов $\{f_{jk}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,k\in D(M^j)}$, ассоциированную с последовательностью функций $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$, и обозначать её $\{f_{jk}\}_{j,k}$. При наличии нескольких последовательностей $\{f_j^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $\nu = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, систему, представляющую собой объединение систем всплесков каждой последовательности, также будем называть системой всплесков и обозначать $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$. При необходимости уточнения множеств индексов будем обозначать объединение последовательностей как, например, $\{f_{jk}^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,k\in D(M^j),\nu=1,\dots,n}$.

1.2 Предварительные сведения

Множество функций $\{f_k\}_{k\in S}$ (где S – не более чем счётное множество индексов) является бесселевым в $L_2(\mathbb{T}^d)$, если существует константа $B > 0$ такая, что

$$\sum_{k\in S} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leqslant B||f||^2, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Множество функций $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\} \subset L_2(\mathbb{R}^d)$, $\nu = 1, \dots, r$, образует фрейм всплесков в

$L_2(\mathbb{T}^d)$, если существуют такие константы $A, B > 0$, что

$$A||f||^2 \leqslant \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k\in D(M^j)} |\langle f, \psi_{jk}^{(\nu)}\rangle|^2 \leqslant B||f||^2, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Постоянные A и B называют соответственно нижней и верхней границами фрейма. Если $A = B$, то систему $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$ называют жёстким фреймом.

Две системы функций $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\} \subset L_2(\mathbb{R}^d)$, $\nu = 1, \dots, r$, образуют двойственный фрейм всплесков в $L_2(\mathbb{T}^d)$, если каждая из них является фреймом и имеет место следующее разложение

$$f = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k\in D(M^j)} \langle f, \widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\rangle \psi_{jk}^{(\nu)}, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Сходимость в суммах безусловная. Таким образом, фреймы являются системами представления, но, в отличие от базисов, разложение по двойственным фреймам не единственное.

Две системы функций $\{\varphi_k\}_{k\in S}$, $\{\widetilde{\varphi}_k\}_{k\in S}$ (где S – не более чем счётное множество индексов) называются биортонормированными, если $\langle \varphi_k, \widetilde{\varphi}_n\rangle = \delta_{kn}$.

Фрейм, являющийся базисом, называется базисом Рисса. Базис Рисса и двойственная к нему система являются биортонормированными друг к другу.

Естественным способом определения периодических систем всплесков является периодизация всплесков из $L_2(\mathbb{R}^d)$, что возможно при достаточно быстром убывании всплеск-функций на бесконечности. Такие системы всплесков широко изучались в литературе (см. [21, §9.3], [25], [28, §2.6, §3.1], [29], [31]). Однако, многие периодические объекты, которые «заслуживают» называться системами всплесков, не могут быть получены периодизацией, поэтому существуют и другие подходы к определению всплесков на периоде, в более общем смысле. Как и в непериодическом случае, всплески могут быть построены на базе кратномасштабных анализов. Именно, на базе одного периодического кратномасштабного анализа (далее, для краткости, ПКМА) строятся ортогональные базисы и жёсткие фреймы, а на базе двух ПКМА строятся биортогональные базисы и двойственные фреймы (см. [7], [20], [23], [40], [37]). В рамках этой главы мы используем определение многомерного ПКМА, данное И. Максименко и М. Скопиной в [30] (см. также [6, глава 9]).

Определение 4 ([6], Определение 9.1.1)**.** *Пусть* $V_j \subset L_2(\mathbb{T}^d)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. *Будем говорить, что совокупность* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ *является* периодическим кратномасштабным анализом (далее ПКМА)*, если выполнены следующие свойства (аксиомы):*
MR1. $V_j \subset V_{j+1}$*;*
MR2. $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{T}^d)$*;*
MR3. $\mathrm{dim} V_j = m^j$*;*
MR4. $\mathrm{dim}\{f \in V_j : f(\cdot + M^{-j}n) = \lambda_n f \;\; \forall n \in \mathbb{Z}^d\} \leqslant 1$, $\forall \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}, \lambda_n \in \mathbb{C}$*;*
MR5. $f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot + M^{-j}n) \in V_j \;\forall n \in \mathbb{Z}^d$*;*
MR6. *a)* $f \in V_j \Rightarrow f(M\cdot) \in V_{j+1}$*; b)* $f \in V_{j+1} \Rightarrow \sum_{s\in D(M)} f(M^{-1}\cdot + M^{-1}s) \in V_j$.

Определение 5 ([6], Определение 9.1.3)**.** *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ *– ПКМА в* $L_2(\mathbb{T}^d)$. *Последовательность функций* $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $\varphi_j \in V_j$, *называется* масштабирующей*, если функции* φ_{jk}, $k \in D(M^j)$, *образуют базис пространства* V_j.

Теорема 15 ([6], Теорема 9.1.4)**.** *Функции* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ *образуют масштабирующую последовательность для некоторого ПКМА тогда и только тогда, когда:*
S1. $\widehat{\varphi_0}(k) = 0$*, для всех* $k \neq 0$*;*
S2. *для любого* $j \in \mathbb{Z}_+$*, и для любого* $n \in \mathbb{Z}^d$ *существует* $m \equiv n \pmod{M^{*j}}$*, такое что* $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$*;*
S3. *для любого* $k \in \mathbb{Z}^d$ *существует* $j \in \mathbb{Z}_+$*, такое что* $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$*;*
S4. *Для любых* $j \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}^d$*, существует число* $\gamma_n^j \neq 0$*, такое что* $\gamma_n^j \widehat{\varphi_j}(k) = \widehat{\varphi_{j+1}}(M^*k)$ *для всех* $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$*;*
S5. *Для любых* $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^d$*, существует* μ_n^j*, такое что* $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) = \mu_n^j \widehat{\varphi_j}(k)$ *для всех* $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$.

Заметим, что в теореме 15 последовательности чисел$\{\gamma_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $\{\mu_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ являются M^{*j}-периодическими по k для любого $j \in \mathbb{Z}_+$.

Масштабирующие последовательности порождают системы всплесков следующим образом. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ – масштабирующие последовательности, s_k – перенумерованные произвольным образом цифры матрицы M^*, а матрицы $A^{(r)} = \{a_{nk}^{(r)}\}_{n,k=0}^{m-1}$, $\widetilde{A}^{(r)} = \{\widetilde{a}_{nk}^{(r)}\}_{n,k=0}^{m-1}$ такие, что

$$a_{0k}^{(r)} = \mu_{r+M^{*j}s_k}^{j+1}, \quad \widetilde{a}_{0k}^{(r)} = \widetilde{\mu}_{r+M^{*j}s_k}^{j+1},$$

и для любого $r \in D(M^{*j})$ выполняется $A^{(r)}\widetilde{A}^{(r)*} = mI_m$. Для $\nu = 1, \ldots, m-1$, положим

$$\alpha^{\nu,j}_{r+M^{*j}s_k} = a^{(r)}_{\nu k}, \quad \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_{r+M^{*j}s_k} = \widetilde{a}^{(r)}_{\nu k}.$$

По лемме 1, векторы $r + M^{*j}s_k$ пробегают всё множество $D(M^{*j+1})$, т. е. мы можем M^{*j+1}-периодически распространить эти последовательности на $\mathbb{Z}^d$. Определим функции $\psi^{(\nu)}_j$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)}_j$, задав их коэффициенты Фурье по формулам

$$\widehat{\psi^{(\nu)}_j}(l) = \alpha^{\nu,j}_l \widehat{\varphi_{j+1}}(l), \quad \widehat{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_j}(l) = \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_l \widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(l).$$

Системы $\{\varphi_0\} \cup \{\psi^{(\nu)}_{jk}\}_{j\in\mathbb{Z}_+, k\in D(M^j), \nu=1,\ldots,m-1}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_{jk}\}_{j,k,\nu}$ будем называть *двойственными системами всплесков, порождёнными масштабирующими последовательностями* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$.

1.3 Вспомогательные результаты

Известна следующая связь между множествами цифр матриц A, A^j и A^{j+1}.

Лемма 1 ([6], Лемма 2.2.3)**.** *Пусть A – невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, $|\det A| > 1$. Тогда множество $\{r + A^j p\}$ при всевозможных $r \in D(A^j)$ и $p \in D(A)$ является множеством цифр матрицы A^{j+1}.*

Следствие 1. *Пусть A – невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, $|\det A| > 1$. Тогда множество $\{r + A^j p\}$ при всевозможных $r \in D(A^j)$ и $p \in D(A^{n-j})$ является множеством цифр матрицы A^{n-j}.*

Доказательство. По лемме 1, множество $\{r_1 + A^{n-1}p_1\}_{r_1\in D(A^{n-1}), p_1\in D(A)}$ является множеством цифр матрицы A^n. Выберем число $s \in \mathbb{Z}$ такое, что $0 < s < n$. Применим лемму 1 ещё $s-1$ раз, и получим, что множество

$$\begin{aligned}\{r_s + A^{n-s}p_s + A^{n-(s-1)}p_{s-1} + \ldots + A^{n-1}p_1\}_{r_s\in D(A^{n-s}), p_1,\ldots,p_s\in D(A)} =\\ = \{r_s + A^{n-s}(p_s + Ap_{s-1} + \ldots + A^{s-1}p_1)\}_{r_s\in D(A^{n-s}), p_1,\ldots,p_s\in D(A)}\end{aligned}$$

также множество цифр матрицы A^n. Теперь, если мы применим лемму 1 $s-1$ раз к выражению $p_s + Ap_{s-1} + \ldots + A^{s-1}p_1$, где $p_1, \ldots, p_s \in D(A)$, мы увидим, что множество

$$\{p_s + Ap_{s-1} + \ldots + A^{s-1}p_1\}_{p_1,\ldots,p_s\in D(A)}$$

образует множество цифр матрицы A^s. Таким образом, $\{r + A^{n-s}p\}_{r\in D(A^{n-s}), p\in D(A^s)}$ является множеством цифр матрицы A^n. Осталось положить $j = n - s$. □

Также нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2 ([6], Лемма 2.2.6)**.** *Пусть A – невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, $|\det A| > 1$. Тогда*

$$\sum_{s \in D(A^*)} e^{2\pi i (A^{-1} r, s)} = \begin{cases} |\det A|, & \textit{если } r \equiv 0 \pmod{A} \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если M – матричный коэффициент растяжения, то у матрицы M^{-1} все собственные числа по модулю меньше единицы и их конечное число, а значит спектральный радиус матрицы M^{-1} также меньше единицы. Отсюда следует, что справедливо соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \|M^{-n}\| = 0. \tag{9}$$

Хорошо известно, что для любой изотропной матрицы M при любом $j \in \mathbb{Z}$ справедливо

$$C_1^M |\lambda|^j \leqslant \|M^j\| \leqslant C_2^M |\lambda|^j,$$

где λ – одно из собственных чисел матрицы M.

2 Многомерные периодические фреймы всплесков

Периодические системы всплесков представляют большой интерес как инструмент, использующийся в задачах сжатия и передачи данных, полученных при обработке и анализе периодических и квазипериодических сигналов и процессов. Фреймы являются системами представления, но, в отличие от базисов, разложение по ним не единственное. За счёт избыточности в ряде приложений фреймы всплесков позволяют добиться лучших результатов по сравнению с базисами всплесков. Например, при обработке сигнала с помощью фреймов всплесков, потеря или искажение части коэффициентов в разложении сигнала необязательно влияет на возможность его полного восстановления, что принципиально невозможно для разложений по базисам.

В данной главе будут получены достаточные условия фреймовости системы всплесков и представлены несколько алгоритмов построения фреймов, требующих входных данных, соответствующих простым и проверяемым на практике условиям.

2.1 Достаточные условия фреймовости системы всплесков

В [18] Н. Атреас показал, что для того, чтобы двойственные системы всплесков являлись фреймами, достаточно, чтобы они были бесселевыми, а также удовлетворяли некоторому набору технических условий. В данном параграфе мы устанавливаем достаточные условия для бесселевости многомерной системы всплесков. Основываясь на этом результате, мы предоставляем способ построения биортогональных двойственных базисов всплесков по любой подходящей последовательности тригонометрических полиномов.

Начнём с доказательства леммы, устанавливающей связь между скалярными произведениями сдвигов функций и коэффициентами Фурье оригинальных функций.

Лемма 3. *Пусть* $f, g, \varphi_j, \widetilde{\varphi}_j \in L_2(\mathbb{T}^d)$, *для всех* $j \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\sum_{k\in D(M^j)} \langle f, \varphi_{jk}\rangle \langle \widetilde{\varphi}_{jk}, g\rangle = \sum_{s\in D(M^{*j})} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(M^{*j}n+s) m^{j/2} \overline{\widehat{\varphi_j}(M^{*j}n+s)} \times \overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}^d} \widehat{g}(M^{*j}n'+s) m^{j/2} \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(M^{*j}n'+s)}} \Big)$$

Доказательство. Для начала заметим, что

$$\widehat{\varphi_{jk}}(n) = \widehat{\varphi_j}(n) e^{2\pi i (M^{*-j}n, k)}. \tag{10}$$

Так как M – невырожденная целочисленная матрица, то равенство $p = Mk + s$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех $p \in \mathbb{Z}^d$ и множеством пар (k, s), $k \in \mathbb{Z}^d$, $s \in D(M)$. Используя равенство Парсеваля, и затем заменив индекс суммирования по $\mathbb{Z}^d$, имеем:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in D(M^j)} \langle f,\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},g\rangle &= \sum_{k\in D(M^j)} \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(l)\overline{\widehat{\varphi_j}(l)e^{2\pi i(M^{*-j}l,k)}}\overline{\sum_{l'\in\mathbb{Z}^d}\widehat{g}(l')\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(l')e^{2\pi i(M^{*-j}l',k)}}}\Big)\\
&= \sum_{k\in D(M^j)} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s\in D(M^{*j})} \widehat{f}(M^{*j}n+s)\overline{\widehat{\varphi_j}(M^{*j}n+s)e^{2\pi i(M^{*-j}s,k)}}\\
&\times \overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s'\in D(M^{*j})} \widehat{g}(M^{*j}n'+s')\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(M^{*j}n'+s')e^{2\pi i(M^{*-j}s',k)}}}\Big)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s\in D(M^{*j})}\sum_{n'\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s'\in D(M^{*j})} \widehat{f}(M^{*j}n+s)\overline{\widehat{\varphi_j}(M^{*j}n+s)}\\
&\times \overline{\widehat{g}(M^{*j}n'+s')\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(M^{*j}n'+s')}} \sum_{k\in D(M^j)} \overline{e^{2\pi i(M^{*-j}s,k)}}e^{2\pi i(M^{*-j}s',k)}.
\end{aligned}
$$

По лемме 2,

$$
\sum_{k\in D(M^j)} e^{2\pi i(M^{*-j}(s-s'),k)} = m^j\delta_{s,s'},
$$

так как из определения $D(M^{*j})$ следует, что условие $s-s'\equiv 0 \pmod{M^{*j}}$ выполняется только если $s=s'$. Таким образом, все слагаемые при $s\neq s'$ равны нулю, что и влечёт за собой утверждение леммы. $\square$

Достаточные условия бесселевости системы всплесков

Теорема 16. *Пусть коэффициенты Фурье функций $\psi_j \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $j\in\mathbb{Z}_+$, удовлетворяют условиям*

$$
\forall j\in\mathbb{Z}_+, l\in\mathbb{Z}^d \quad |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)| \leqslant C\min\Big\{|M^{*-j}l|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)}, |M^{*-j}l|^{\alpha}\Big\} \tag{11}
$$

для некоторых $C>0$, $\varepsilon>0$, $\alpha>0$. Тогда система всплесков $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ является бесселевой.

Доказательство. Для начала заметим, что из условий теоремы следует выполнение условия

$$
\forall j\in\mathbb{Z}_+, l\in\mathbb{Z}^d \quad |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)| \leqslant C. \tag{12}
$$

Теперь, выберем $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $\delta \in (0; \frac{2\varepsilon}{d+2\varepsilon})$. Используя лемму 3 и неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\sum_{k\in H(M^j)} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 = \sum_{s\in H(M^{*j})} \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(M^{*j}n+s)\overline{m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n+s)}\Big|^2$$

$$\leqslant \sum_{s\in H(M^{*j})} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(M^{*j}n+s)|^2 |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n+s)|^{2\delta} \sum_{n'\in\mathbb{Z}^d} |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n'+s)|^{2(1-\delta)}\Big) \quad (13)$$

Рассмотрим сумму по $n' \in \mathbb{Z}^d$. Для $n' = \mathbf{0}$ применим оценку (12). Для $n' \neq \mathbf{0}$, применяя первую оценку из (11), имеем

$$|m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n'+s)|^{2(1-\delta)} \leqslant C^{2(1-\delta)} \Big(\frac{1}{|n'+M^{*-j}s|}\Big)^{2(1-\delta)(\frac{d}{2}+\varepsilon)}$$

Легко проверить, что при выбранном δ неравенство $2(1-\delta)(\frac{d}{2}+\varepsilon) > d$ выполнено. Используя, что $M^{*-j}s \in (-\frac12; \frac12]^d$ при $s \in H(M^{*j})$, получаем

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} \Big(\sum_{n'\in\mathbb{Z}^d} |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n'+s)|^{2(1-\delta)}\Big) \leqslant \sup_{j\in\mathbb{Z}_+} \Big(C^{2(1-\delta)} +$$

$$C^{2(1-\delta)} \sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^d\\ n'\neq 0}} \Big(\frac{1}{|n'+M^{*-j}s|}\Big)^{2(1-\delta)(\frac{d}{2}+\varepsilon)}\Big) \leqslant C',$$

где C' зависит только от матрицы M.

Суммируя неравенство (13) по j, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in H(M^j)} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 &\leqslant C' \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{s\in D(M^{*j})}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(M^{*j}n+s)|^2 |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(M^{*j}n+s)|^{2\delta} \\ &= C' \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(l)|^2 |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta} \\ &\leqslant C' \sup_{l\in\mathbb{Z}^d} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta}\Big) \|f\|^2. \qquad (14)\end{aligned}$$

Рассмотрим выражение под знаком супремума. Выберем наименьшее $J \in \mathbb{Z}_+$, такое что $\|M^{*-J}\| < 1$ (из (9) следует, что такое J найдётся), и зафиксируем $l \in \mathbb{Z}^d$. Разделим сумму по j на J частей следующим образом

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} |m^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta} = \sum_{k=0}^{J-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} |m^{\frac{(sJ+k)}{2}}\widehat{\psi}_{sJ+k}(l)|^{2\delta}. \qquad (15)$$

Теперь выберем максимальное число $j' \in \mathbb{Z}_+$, такое что $|M^{*-j'J}l| \geqslant 1$, зафиксируем индекс k и разобьём сумму по $s \in \mathbb{Z}_+$ по схеме

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} = \sum_{\substack{s\geqslant 0\\ s\leqslant j'}} + \sum_{s>j'} := \sigma_1 + \sigma_2.$$

Для σ_2 применим вторую оценку из (11) и получим

$$\sigma_2 \leqslant C^{2\delta}\|M^{*-k}\|^{2\delta\alpha}\sum_{s>j'}|M^{*-sJ}l|^{2\delta\alpha} = C'_k\sum_{s=1}^{\infty}|M^{*-(s+j')J}l|^{2\delta\alpha} \leqslant$$
$$C'_k|M^{*-(j'+1)J}l|^{2\delta\alpha}\sum_{s=1}^{\infty}\|M^{*-J}\|^{(s-1)2\delta\alpha} \leqslant C'',$$

где C'' зависит только от матрицы M, так как при выбранных J и j' верны неравенства $|M^{*-(j'+1)J}l|^{2\delta\alpha} < 1$, а количество констант C'_k конечно и также зависит только от матрицы M.

Для σ_1 применим перввую оценку из (11):

$$\sigma_1 \leqslant C^{2\delta}\|M^{*-k}\|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta}\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ s\leqslant j'}}|M^{*-sJ}l|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta}.$$

Введём обозначение, $r = M^{*-j'J}l$. Заметим, что $|r| \geqslant 1$ в силу выбора j'.

$$\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ s\leqslant j'}}|M^{*-(s+j'-j')J}l|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta} = \sum_{\substack{s\geqslant 0\\ s\leqslant j'}}|M^{*-(s-j')J}r|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta} =$$
$$\sum_{i=0}^{j'}|M^{*iJ}r|^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta} = \sum_{i=0}^{j'}\Big(\frac{|M^{*iJ}r|}{|r|}|r|\Big)^{-(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta} =$$
$$\sum_{i=0}^{j'}\Big(\frac{|M^{*-iJ}M^{*iJ}r|}{|M^{*iJ}r|}\frac{1}{|r|}\Big)^{(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta} \leqslant \sum_{i=0}^{j'}\|M^{*-iJ}\|^{(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta} \leqslant$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\|M^{*-J}\|^{i(\frac{d}{2}+\varepsilon)2\delta} \leqslant C''',$$

где C''' зависит только от M.

Итак, мы показали, что суммы σ_1 и σ_2, а следовательно и выражение в правой части (15), равномерно ограничены по l. В конечном итоге, возвращаясь к (14), имеем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in H(M^j)}|\langle f,\psi_{jk}\rangle|^2 \leqslant \widetilde{C}\|f\|^2,$$

где $\widetilde{C}$ зависит только от M.

$\square$

2.2 Построение полиномиальных периодических базисов всплесков

Приведём теорему, которая устанавливает условия фреймовости двойственных систем всплесков. Отметим, что в данной теореме большую роль играет условие бесселевости, проверка которого описана выше.

Теорема 17 ([18]). *Пусть $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ – масштабирующие последовательности, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{j\to+\infty} m^j\widehat{\varphi_j}(k)\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k)=1 \quad \forall k\in\mathbb{Z}^d,$$

а $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ – порождённые ими бесселевы двойственные системы всплесков. Тогда эти системы являются двойственными фреймами.

Теорема 18. *Пусть матрица M такая, что выполнено условие $\mathbb{T}^d\subset M^*\mathbb{T}^d$, и последовательность тригонометрических полиномов $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:*

$$\begin{cases} A\leqslant |m^{j/2}\widehat{\varphi_j}(k)|\leqslant B, & \text{при}\, k\in H(M^{*j}),\\ \widehat{\varphi_j}(k)=0, & \text{при}\, k\notin H(M^{*j}), \end{cases} \tag{16}$$

где $A,B>0$. Тогда

1. $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют масштабирующую последовательность.

2. Для каждого $j\in\mathbb{Z}_+$ существует разбиение множества $H(M^{*j+1})\setminus H(M^{*j})$ на подмножества $N_j^{(\nu)}$, такое что система всплесков $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\,k\in D(M^j),\,\nu=1,\dots m-1}$, где

$$\psi_j^{(\nu)}=\sqrt{m}(\xi_{N_j^{(\nu)}}*\varphi_{j+1}), \quad \xi_{N_j^{(\nu)}}=\sum_{k\in N_j^{(\nu)}} e^{ik\cdot},$$

является базисом Рисса в $L_2(\mathbb{T}^d)$.

3. Существует базис всплесков $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, биортогональный с базисом $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, который также состоит из тригонометрических полиномов.

Доказательство. Для проверки первого утверждения напомним, что $H(M^{*j})$ – множество цифр матрицы M^{*j}. Условия S1 и S2 сразу следуют из (16). Ввиду (9), для любого $k \in \mathbb{Z}^d$ существует такое $j \in \mathbb{Z}_+$, что $M^{*-j}k \in \mathbb{T}^d$, а значит $k \in H(M^{*j})$ и $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$, что влечёт S3. Положив для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in H(M^{*j})$

$$\mu_k^j = \frac{\widehat{\varphi_{j-1}}(k)}{\widehat{\varphi_j}(k)}, \qquad \gamma_k^j = \frac{\widehat{\varphi_{j+1}}(M^* k)}{\widehat{\varphi_j}(k)}, \tag{17}$$

и распространив эти последовательности M^{*j}-периодически на $\mathbb{Z}^d$ по нижнему индексу, мы легко видим, что свойства S4, S5 также выполнены.

Теперь перейдём к доказательству второго и третьего утверждений.

Для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k) = \begin{cases} \frac{m^{-j}}{\overline{\widehat{\varphi_j}(k)}}, & k \in H(M^{*j}), \\ 0, & k \notin H(M^{*j}). \end{cases} \tag{18}$$

Легко проверить, что последовательность $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы с константами $\widetilde{A} = \frac{1}{B}$, $\widetilde{B} = \frac{1}{A}$, а следовательно она также является масштабирующей. Также очевидно выполнение условия

$$\lim_{j \to +\infty} m^j \widehat{\varphi_j}(k) \widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d. \tag{19}$$

Теперь перейдём к построению двойственных систем всплесков, порождённым этими масштабирующими последовательностями. Нам будет удобно использовать представление множеств цифр матриц M^{*j}, которое даёт лемма 1, а именно

$$D(M^{*j}) = \bigcup_{\substack{r \in D(M^{*j-1}) \\ p \in D(M^*)}} \{r + M^{*j-1} p\}.$$

Но стоит заметить, что это множество необязательно совпадает с $H(M^{*j})$. Тем не менее, когда речь будет идти о коэффициентах μ_n^j, в силу их M^{*j}-периодичности мы можем считать их заданными на любом множестве цифр (в том числе на $H(M^{*j})$), как только они будут заданы хотя бы на одном множестве цифр.

Из (17) следует, что

$$\begin{aligned} &\mu_k^{j+1} \neq 0 \quad \text{при } k \in H(M^{*j}), \\ &\mu_k^{j+1} = 0 \quad \text{при } k \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j}). \end{aligned} \tag{20}$$

С помощью леммы 1, положив в ней $D(M^{*j}) = H(M^{*j})$, $D(M^*) = H(M^*)$, перепишем (20) в виде

$$\forall r \in H(M^{*j}) \qquad \mu^{j+1}_{r+M^{*j}p} \begin{cases} \neq 0, & \text{при } p = \mathbf{0}, \\ = 0, & \text{при } p \neq \mathbf{0},\ p \in H(M^*). \end{cases} \tag{21}$$

Теперь построим матрицы $A^{(r)}$ и $\widetilde{A}^{(r)}$. Перенумеруем цифры $p \in H(M^*)$ таким образом, что $p_0 = \mathbf{0}$. Зададим первую строку как

$$a^{(r)}_{0k} = \mu^{j+1}_{r+M^{*j}p_k}, \quad \widetilde{a}^{(r)}_{0k} = \widetilde{\mu}^{j+1}_{r+M^{*j}p_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Продолжим матрицы до квадратных, положив диагональные элементы равными $\sqrt{m}$, начиная со второй строки, а остальные элементы равными нулю. В силу (21), эти матрицы являются диагональными, а именно

$$A^{(r)} = \begin{bmatrix} \mu^{j+1}_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{m} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{m} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{A}^{(r)} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mu}^{j+1}_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{m} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{m} \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что $A^{(r)}\widetilde{A}^{(r)*} = mI_m$. Положим

$$\alpha^{\nu,j}_{r+M^{*j}p_k} = a^{(r)}_{\nu k}, \quad \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_{r+M^{*j}p_k} = \widetilde{a}^{(r)}_{\nu k}.$$

При этом, так как $r \in H(M^{*j})$, $p_k \in H(M^{*j})$, то векторы $r + M^{*j}p_k$, $k = 1, \ldots, m-1$ пробегают множество цифр $D(M^{*j+1})$. Таким образом, мы можем M^{*j+1}-периодически распространить коэффициенты $\alpha^{\nu,j}_l$, $\widetilde{\alpha}^{\nu,j}_l$ на $\mathbb{Z}^d$ с периодом M^{*j+1}.

Теперь, для $\nu = 1, \ldots, m-1$, положим

$$\widehat{\psi^{(\nu)}_j}(l) = \alpha^{\nu,j}_l \widehat{\varphi_{j+1}}(l), \quad \widehat{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_j}(l) = \alpha^{\nu,j}_l \widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(l).$$

В силу условий теоремы,

$$\widehat{\psi^{(\nu)}_j}(l) = \begin{cases} \sqrt{m}\widehat{\varphi_{j+1}}(l), & \text{при } l \in H(M^{*j+1}), l \equiv r + M^{*j}p_\nu \pmod{M^{*j+1}}, \\ & r \in H(M^{*j}), p_\nu \in H(M^*); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда видно, что справедлива оценка сверху

$$|m^{j/2}\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)| \leqslant |m^{j/2}\sqrt{m}\widehat{\varphi_{j+1}}(l)| \leqslant \sqrt{m}B. \tag{22}$$

Положим

$$N_j^{(\nu)} = \{l \in H(M^{*j+1}) : l \equiv r + M^{*j}p_\nu \ (\mathrm{mod}\ M^{*j+1}), r \in H(M^{*j}), p_\nu \in H(M^*)\}.$$

Покажем, что для любых $j \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = 1, \dots, m-1$ множество $N_j^{(\nu)}$ целиком лежит в $H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$. Из определения $N_j^{(\nu)}$ следует, что достаточно показать, что $N_j^{(\nu)} \not\subset H(M^{*j})$. Действительно, если $r + M^{*j}p_\nu \in H(M^{*j+1})$ для всех $\nu = 1, \dots, m-1$, то требуемое очевидно, так как p_ν – ненулевые цифры. Если же $r + M^{*j}p_\nu \notin H(M^{*j+1})$, то нужно показать, что не существует такого $r' \in H(M^{*j})$, что $r' = r + M^{*j}p_\nu + M^{*j+1}k$, при $p_\nu, k \neq \mathbf{0}$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Такое действительно невозможно, так как имело бы место представление $r' - r = M^{*j}(M^*k + p_\nu)$, что при $r, r' \in H(M^{*j})$ может быть выполнено, только если $M^*k + p_\nu = \mathbf{0}$. Но выполнение этого равенства также невозможно, так как $p_\nu \in H(M^*)$. Также отметим следующее. По лемме 1,

$$\{r + M^{*j}p_\nu\}_{r \in H(M^{*j}), \nu=1,\dots,m-1} = D(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j}), \tag{23}$$

а множества $N_j^{(\nu)}$ составляются из векторов, принадлежащих $H(M^{*j+1})$ и сравнимых по модулю M^{*j+1} с векторами из (23), в котором векторы не сравнимы между собой по модулю M^{*j+1} по определению множества цифр. То есть вектор из $N_j^{(\nu)}$ не может быть сравним по модулю M^{*j+1} с двумя разными векторами из (23), а значит объединение всех множеств $N_j^{(\nu)}$ при фиксированном j содержит столько же элементов, сколько и множество (23). Из вышесказанного и из того, что множество $H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$ содержит $m^j(m-1)$ элементов, следуют дизъюнктность множеств $N_j^{(\nu)}$ и тот факт, что их объединение равно $H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$. То есть, множества $N_j^{(\nu)}$ действительно образуют разбиение $H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$.

Таким образом, все ненулевые коэффициенты Фурье $\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)$ содержатся в множестве $H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$. Для векторов l из этого множества имеет место включение

$$M^{*-j}l \in H(M^*) \setminus \mathbb{T}^d,$$

и, соответственно, неравенство

$$\frac{1}{2} \leqslant |M^{*-j}l| \leqslant \|M^*\|\sqrt{d}. \tag{24}$$

Очевидно, что требуется проверить условие (11) только для ненулевых коэффициентов. Если $l \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$, то из (22) и (24) следует, что

$$|m^{j/2}\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)| \leqslant \sqrt{m}B \leqslant 2\sqrt{m}B|M^{*-j}l|,$$
$$|m^{j/2}\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)| \leqslant \sqrt{m}B \leqslant \|M^*\|^d d^{d/2}\sqrt{m}B|M^{*-j}l|^{-d},$$

то есть (11) выполнено при $\varepsilon = d/2$, $\alpha = 1$.

Теперь отметим, что система $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ также является бесселевой, так как она фактически обладает теми же свойствами, что и $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$. Также, по построению эти системы являются двойственными системами всплесков, порождёнными парой масштабирующих последовательностей. Учитывая этот факт и равенство (19), мы видим, что все условия теоремы 17 выполнены, то есть эти системы всплесков являются двойственными фреймами.

Проверим биортонормированность систем $\{\varphi_{jn}\}_{n \in D(M^j)}$ и $\{\widetilde{\varphi}_{jk}\}_{k \in D(M^j)}$ при всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Учитывая формулу (10) и равенство нулю коэффициентов Фурье этих функций за пределами множества $H(M^{*j})$, имеем

$$\langle \varphi_{jk}, \widetilde{\varphi}_{jl} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi_{jk}}(n)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_{jl}}(n)} = \sum_{s \in H(M^{*j})} \widehat{\varphi_j}(s)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(s)} e^{2\pi i(M^{*-j}s, k-l)},$$

и из леммы 2 и формулы (18) получаем требуемое. Биортогональность всплесков теперь следует из теоремы 9.2.4 [6, §9.2], а из биортогональности двойственных фреймов следует, что оба фрейма являются базисами Рисса (см. [28, §1.2]). $\square$

Замечание 1. Условие $\mathbb{T}^d \subset M^*\mathbb{T}^d$ в теореме 18 существенно, так как без его выполнения у последовательности $\{\varphi_j\}_j$ может отсутствовать свойство **S5** из теоремы 15. Приведём конкретный пример. Положим,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}, \quad k = (3, 1).$$

Очевидно, что у данной матрицы собственные числа по модулю больше единицы, и легко проверить, что $\mathbb{T}^d \not\subset M\mathbb{T}^d$. Также, $k \in H(M^*)$, но $k \notin H(M^{*2})$. Из этого следует, что $\widehat{\varphi_1}(k) \neq 0$, но $\widehat{\varphi_2}(k) = 0$, и отсюда очевидно, что не существует μ_k^2, такого что $\widehat{\varphi_1}(k) = \mu_k^2 \widehat{\varphi_2}(k)$.

Замечание 2. Условие $\mathbb{T}^d \subset M^*\mathbb{T}^d$ заведомо выполняется при $\|M^{*-1}\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{d}}$.

2.3 Построение периодических фреймов всплесков

В параграфе 2.1 были установлены достаточные условия, выполнение которых гарантирует бесселевость многомерной периодической системы всплесков. Основываясь на данном результате, мы представляем алгоритмический способ построения многомерных периодических двойственных фреймов, который в качестве входных данных требует подходящий набор коэффициентов Фурье лишь одной функции. В данной схеме построения эти коэффициенты Фурье определяют функцию, порождающую две масштабирующих последовательности, которые, в свою очередь, порождают двойственные фреймы.

Напомним, что $\mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$ обозначает множество всех векторов $l \in \mathbb{Z}^d$, таких что $l \equiv \mathbf{0} \pmod{M^*}$.

Теорема 19. *Пусть M – изотропная матрица, такая что $\mathbb{T}^d \subset M^*\mathbb{T}^d$, и коэффициенты Фурье функции $\varphi_1 \in L_2(\mathbb{T}^d)$ удовлетворяют условиям*

$$\widehat{\varphi_1}(l) = \begin{cases} a_0, & \text{если} \quad l = \mathbf{0}, \\ a_l(\frac{1}{|l|})^\alpha, & \text{если} \quad l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*},\ l \in Q, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\alpha > d/2$, $0 < C_1 \leqslant |a_l| \leqslant C_2$ при $l = \mathbf{0}$ и $l \in Q$, где множество $Q \subset \mathbb{Z}^d$ такое, что $Q \cap \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*} = \varnothing$, $H(M^*) \subset Q$ и удовлетворяет условию

(Z) Если $l \notin Q$ и $l \in H(M^{*j})$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то $l + M^j k \notin Q$ для всех $k \in \mathbb{Z}^d$. *Тогда существуют масштабирующие последовательности $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$, порождающие системы всплесков $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, которые являются двойственными фреймами.*

Доказательство. Для любого вектора $l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$, $l \notin Q$, положим $a_l = C_1$, и определим числа $\{a_l^*\}$, $l \in \mathbb{Z}^d$ как

$$a_l^* = \begin{cases} a_l, & \text{если } l = \mathbf{0} \text{ or } l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}, \\ a_k, & \text{если } l = M^{*n}k,\ n \in \mathbb{N},\ k \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}. \end{cases}$$

Далее, построим масштабирующие последовательности $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$, задав их коэффициенты Фурье. Начнём с задания

$$\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(l) := \begin{cases} m^{-\frac{j+1}{2}} {a_l^*}^{-1}, & \text{если } l \in H(M^{*j}), \\ 0, & \text{если } l \notin H(M^{*j}), \end{cases}$$

и, так как $\mathbb{T}^d \subset M^*\mathbb{T}^d$, получаем

$$\widetilde{\mu}_l^j = \begin{cases} \sqrt{m}, & \text{если } l \in H(M^{*j-1}), \\ 0, & \text{если } l \notin H(M^{*j-1}). \end{cases} \tag{25}$$

Таким образом, функции $\widetilde{\varphi}_j$ определены, и они являются тригонометрическими полиномами.

Построение функций $\{\varphi_j\}_j$ несколько более сложно. Для начала, зададим коэффициенты на уровне 0,

$$\widehat{\varphi_0}(\mathbf{0}) := \sqrt{m} \cdot \widehat{\varphi_1}(\mathbf{0}), \quad \widehat{\varphi_0}(l) := 0, \quad l \neq \mathbf{0}.$$

Заметим, что коэффициенты Фурье функции φ_1 уже известны из условий теоремы. Далее, зададим коэффициенты $\widehat{\varphi_j}(l)$ для оставшейся части масштабирующей последовательности рекуррентно по j.

I. $(l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*})$ Зададим $\widehat{\varphi_j}(l)$ и найдём μ_l^j для $l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $j > 1$.
1) Пусть $l \in H(M^{*j})$. Возможны два случая:

$$a) \quad \widehat{\varphi_{j-1}}(l) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\varphi_j}(l) := \frac{|l_j|^\alpha \widehat{\varphi_{j-1}(l)}}{\sqrt{m}|l_{j-1}|^\alpha}, \quad \mu_l^j = \sqrt{m}\Big(\frac{|l_{j-1}|}{|l_j|}\Big)^\alpha; \tag{26}$$

$$b) \quad \widehat{\varphi_{j-1}}(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\varphi_j}(l) := m^{-\frac{j-1}{2}}\Big(\frac{|l_j|}{|l|}\Big)^\alpha a_l^*, \quad \mu_l^j = 0. \tag{27}$$

Отметим, что $\mathbf{0} \notin \mathbb{Z}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{0},\mathbf{M}^*}$, and hence $|l_{j-1}| \neq 0$.

2) Пусть $l \notin H(M^{*j})$. Так как числа μ_l^j должны быть M^{*j}-периодическими по индексу l, периодически продолжим их с множества $l \in H(M^{*j})$, где мы их определили на предыдущем шаге, на $\mathbb{Z}^d$. Теперь, возможны два случая:

$$a) \quad \mu_l^j \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\varphi_j}(l) := \frac{\widehat{\varphi_{j-1}}(l)}{\mu_l^j}; \tag{28}$$

$$b) \quad \mu_l^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\varphi_j}(l) := 0. \tag{29}$$

II. $(l \in \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*})$ Теперь зададим $\widehat{\varphi_j}(l)$ и найдём μ_l^j для $l \in \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$, $j > 1$.

$$\widehat{\varphi_j}(l) := \frac{1}{\sqrt{m}}\widehat{\varphi_{j-1}}(M^{*-1}l), \quad \mu_l^j = \mu^{j-1}_{M^{*-1}l}. \tag{30}$$

Заметим, что при данном определении $\gamma_l^j = \frac{1}{\sqrt{m}}$ для всех $l \in \mathbb{Z}^d$.

Таким образом, мы задали все коэффициенты $\widehat{\varphi_j}(l)$. Очевидно, что соответствующие функции φ_j попадают в L_2. Для $l = \mathbf{0}$, по определению (30), имеем простую формулу $\widehat{\varphi_j}(0) = \frac{1}{\sqrt{m}}\widehat{\varphi_{j-1}}(0)$. Далее, покажем, что следующее неравенство выполняется для всех $l \neq \mathbf{0}$,

$$|\widehat{\varphi_j}(l)| \leqslant C^* m^{-\frac{j-1}{2}} \Big(\frac{|l_j|}{|l|}\Big)^\alpha |a_l^*|, \tag{31}$$

а при $l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$ неравенство превращается в равенство с $C^* = 1$, и $C^* = (C_2^{M^*})^{2\alpha}$ при $l \in \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$. Для $l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$ это следует из формул (26)-(29). Теперь, пусть $l = M^{*n}k$, $k \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, и $\widehat{\varphi_j}(l) \neq 0$. Используя определение (30) n раз, имеем

$$\widehat{\varphi_j}(l) = \Big(\frac{1}{\sqrt{m}}\Big)^n \widehat{\varphi_{j-n}}(M^{*-n}l) = m^{-\frac{n}{2}} m^{-\frac{j-n-1}{2}} \Big(\frac{|(M^{*-n}l)_{j-n}|}{|M^{*-n}l|}\Big)^\alpha a^*_{M^{*-n}l}.$$

Согласно определению a_l^*, верно, что $a^*_{M^{*-n}l} = a_l^*$. Также, в силу свойств матриц M и определения l_j, имеем $(M^{*-n}l)_{j-n} = M^{*-n}l + M^{*j-n}r$, где вектор $r \in \mathbb{Z}^d$ такой, что $M^{*-n}l + M^{*j-n}r \in M^{*j-n}\mathbb{T}^d$. Это означает, что $M^{*n}(M^{*-n}l)_{j-n} = l + M^{*j}r \in M^{*j}\mathbb{T}^d$, а значит $l + M^{*j}r = l_j$. Таким образом, $(M^{*-n}l)_{j-n} = M^{*-n}l_j$. Используя вышесказанное, получаем

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi_j}(l)| &= m^{-\frac{j-1}{2}} \Big(\frac{|M^{*-n}l_j|}{|M^{*-n}l|}\Big)^\alpha |a_l^*| \\
&\leqslant m^{-\frac{j-1}{2}} \Big(\frac{\|M^{*-n}\||l_j||l|}{|M^{*-n}l||l|}\Big)^\alpha |a_l^*| \\
&\leqslant m^{-\frac{j-1}{2}} \Big(\frac{\|M^{*-n}\||M^{*-n}M^{*n}l|}{|M^{*-n}l|}\frac{|l_j|}{|l|}\Big)^\alpha |a_l^*| \\
&\leqslant m^{-\frac{j-1}{2}} \Big(\|M^{*-n}\|\|M^{*n}\|\frac{|l_j|}{|l|}\Big)^\alpha |a_l^*|.
\end{aligned} \tag{32}$$

Остаётся вспомнить, что матрица M изотропна, из чего следует, что $\|M^{*-n}\|\|M^{*n}\| \leqslant (C_2^{M^*})^2$.

Покажем, что $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ действительно являются масштабирующими последовательностями. Условие **S1** выполняется очевидным образом. Так как

$$\widehat{\varphi_j}(l) \neq 0,\ \widehat{\widetilde{\varphi}_j}(l) \neq 0$$

при $l \in H(M^{*j})$, условия **S2** и **S3** также выполнены. Условие **S4** (периодичность γ_k^j) также выполняется, так как все числа γ_k^j равны между собой. Выполнение последнего условия **S5** (периодичность μ_k^j) гарантируется тем, что для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ мы определили μ_k^j на множестве цифр $H(M^{*j})$, а затем периодически продолжили их на $\mathbb{Z}^d$. Стоит заметить, что условие *(Z)* теоремы существенно, так как оно гарантирует нам единственность при определении чисел μ_k^j.

Так как $l_j = l$ при достаточно большом j, равенство

$$\lim_{j\to\infty} m^j \widehat{\varphi_j}(l)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(l)} = 1 \quad \forall l \in \mathbb{Z}^d$$

следует из неравенства (31) при $l \notin \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$, которое, как было отмечено ранее, превращается в равенство с $C^* = 1$; а также из равенства (32) для $l \in \mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$.

Теперь рассмотрим системы всплесков, порождаемые последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Определим коэффициенты Фурье функций ψ_j, $\widetilde{\psi}_j$. Нам будет удобно представить множество цифр матрицы M^{*j} в виде, который даёт нам лемма 1, т. е.

$$D(M^{*j}) = \bigcup_{\substack{r\in D(M^{*j-1})\\ p\in D(M^*)}} \{r + M^{*j-1}p\}.$$

Заметим лишь, что это множество необязательно совпадает с $H(M^{*j})$. Однако, когда речь идёт о числах μ_n^j, в силу их M^{*j}-периодичности, как только они заданы на любом множестве цифр матрицы M^{*j}, они заданы и на $H(M^{*j})$.

Из (25) следует, что

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mu}_k^{j+1} \neq 0 \quad \text{при}\, k \in H(M^{*j}),\\ &\widetilde{\mu}_k^{j+1} = 0 \quad \text{при}\, k \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j}). \end{aligned} \tag{33}$$

Используя лемму 1, для $D(M^{*j}) = H(M^{*j})$, $D(M^*) = H(M^*)$, мы можем переписать (33) как

$$\forall r \in H(M^{*j}) \qquad \widetilde{\mu}^{j+1}_{r+M^{*j}p} \begin{cases} \neq 0, & \text{при}\, p = \mathbf{0},\\ = 0, & \text{при}\, p \neq \mathbf{0},\ p \in H(M^*). \end{cases} \tag{34}$$

Теперь построим матрицы $A^{(r)}$ и $\widetilde{A}^{(r)}$ для всех $r \in H(M^{*j})$. Сначала, перенумеруем цифры $p \in H(M^*)$ так, чтобы $p_0 = \mathbf{0}$. Теперь зададим первую строчку по формулам

$$a_{0k}^{(r)} = \mu^{j+1}_{r+M^{*j}p_k}, \quad \widetilde{a}_{0k}^{(r)} = \widetilde{\mu}^{j+1}_{r+M^{*j}p_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Легко видеть, что в силу (34), $\widetilde{a}_{0k}^{(r)} = 0$ для $k = 1, \ldots, m-1$. Продолжим эти матрицы до квадратных следующим образом

$$A^{(r)} = \begin{bmatrix} \mu_r^{j+1} & \mu_{r+M^{*j}p_1}^{j+1} & \dots & \mu_{r+M^{*j}p_{m-1}}^{j+1} \\ 0 & -\widetilde{\mu}_r^{j+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\widetilde{\mu}_r^{j+1} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A}^{(r)} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mu}_r^{j+1} & 0 & \dots & 0 \\ \mu_{r+M^{*j}p_1}^{j+1} & -\mu_r^{j+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{r+M^{*j}p_{m-1}}^{j+1} & 0 & \dots & -\mu_r^{j+1} \end{bmatrix}.$$

В силу (26), $\mu_r^{j+1} = \sqrt{m}\Big(\frac{|r_j|}{|r_{j+1}|}\Big) = \sqrt{m}$, так как $r \in H(M^{*j})$. Используя это равенство и (25), легко проверить, что $A^{(r)}\widetilde{A}^{(r)*} = mI_m$. Теперь положим

$$\alpha_{r+M^{*j}p_k}^{\nu,j} = a_{\nu k}^{(r)}, \quad \widetilde{\alpha}_{r+M^{*j}p_k}^{\nu,j} = \widetilde{a}_{\nu k}^{(r)}.$$

Векторы $r + M^{*j}p_k$, $k = 1, \dots, m-1$ являются множеством цифр $D(M^{*j+1})$, так как $r \in H(M^{*j})$, $p_k \in H(M^{*j})$. Таким образом, мы можем M^{*j+1}-периодически продолжить коэффициенты $\alpha_l^{\nu,j}$, $\widetilde{\alpha}_l^{\nu,j}$ на $\mathbb{Z}^d$.

Теперь, для $\nu = 1, \dots, m-1$, положим

$$\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l) = \alpha_l^{\nu,j}\widehat{\varphi_{j+1}}(l), \quad \widehat{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}}(l) = \widetilde{\alpha}_l^{\nu,j}\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(l).$$

Легко проверить, что

$$\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l) = \begin{cases} -\sqrt{m}\widehat{\varphi_{j+1}}(l), & \text{при } l \equiv r + p_\nu \pmod{M^{*j+1}}, \\ & r \in H(M^{*j}), \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \tag{35}$$

$$\widehat{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}}(l) = \begin{cases} -\sqrt{m}\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(l), & \text{при } l \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j}), \\ \mu_{l+M^{*j}p_\nu}^{j+1}\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(l), & \text{при } l \in H(M^{*j}), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{36}$$

Для оценки рассмотрим два случая:

1) Пусть $l \in H(M^{*j})$. В этом случае, $|M^{*-j}l| \leqslant \frac{\sqrt{d}}{2}$, и следовательно

$$|M^{*-j}l|^\alpha \leqslant C_{d,\alpha}|M^{*-j}l|^{-\alpha},$$

где $C_{d,\alpha} = \left(\frac{2}{\sqrt{d}}\right)^{-2\alpha}$. Из (35) следует, что $|\widehat{\psi_j^{(\nu)}}(l)| = 0$. Далее,

$$|\widehat{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}}(l)| = |\mu^{j+1}_{l+M^{*j}p_\nu}| m^{-\frac{j+2}{2}} |a_l^{*^{-1}}|,$$

$$|\mu^{j+1}_{l+M^{*j}p_\nu}| = \sqrt{m}\Big(\frac{|(l+M^{*j}p_\nu)_j|}{|(l+M^{*j}p_\nu)_{j+1}|}\Big)^\alpha.$$

Легко видеть, что $(l+M^{*j}p_\nu)_j = l$, и так как $p_\nu \neq \mathbf{0}$, то $(l+M^{*j}p_\nu)_{j+1} \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$, а это значит, что $|(l+M^{*j}p_\nu)_{j+1}| \geqslant \frac{1}{2\|M^{*-j}\|}$. Используя это неравенство и изотропность матрицы M^*, имеем

$$\begin{aligned}|\mu^{j+1}_{l+M^{*j}p_\nu}| = \sqrt{m}\Big(\frac{|l|}{|(l+M^{*j}p_\nu)_{j+1}|}\Big)^\alpha &\leqslant \sqrt{m}\Big(2\|M^{*j}\|\|M^{*-j}\||M^{*-j}l|\Big)^\alpha \\ &\leqslant \sqrt{m}2^\alpha (C_2^{M^*})^{2\alpha}\Big(|M^{*-j}l|\Big)^\alpha,\end{aligned}$$

и таким образом, согласно (36), имеем

$$m^{j/2}|\widehat{\widetilde{\psi}_j}(l)| \leqslant m^{\frac{3}{2}}2^\alpha(C_2^{M^*})^{2\alpha}\Big(|M^{*-j}l|\Big)^\alpha |a_l^{*^{-1}}| \leqslant C_{d,\alpha} m^{\frac{3}{2}}2^\alpha(C_2^{M^*})^{2\alpha}\Big(|M^{*-j}l|\Big)^{-\alpha}|a_l^{*^{-1}}|.$$

2) Пусть $l \notin H(M^{*j})$. В этом случае $|M^{*-j}l| \geqslant \frac{1}{2}$, а значит

$$|M^{*-j}l|^{-\alpha} \leqslant \Big(4|M^{*-j}l|\Big)^\alpha.$$

Из (36) следует, что $|\widehat{\widetilde{\psi}_j}(l)| = -\sqrt{m}\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(l)$ при $l \in H(M^{*j+1}) \setminus H(M^{*j})$, т. е. в таком случае $|M^{*-j}l| \leqslant \|M^*\|\sqrt{d}$, и $|\widehat{\widetilde{\psi}_j}(l)| = 0$ в остальных случаях. Таким образом, получаем следующую оценку

$$|m^{j/2}\widehat{\widetilde{\psi}_j}(l)| = |-m^{\frac{3}{2}}a_l^{*^{-1}}| \leqslant |-m^{\frac{3}{2}}a_l^{*^{-1}}|\|M^*\|^\alpha d^{\frac{\alpha}{2}}|M^{*-j}l|^{-\alpha} \leqslant |-m^{\frac{3}{2}}a_l^{*^{-1}}|\|M^*\|^\alpha d^{\frac{\alpha}{2}}\Big(4|M^{*-j}l|\Big)^\alpha$$

Далее, из (31), для ненулевых коэффициентов имеем $|\widehat{\varphi_{j+1}}(l)| \leqslant C^* m^{-\frac{j}{2}}\left(\frac{|l_{j+1}|}{|l|}\right)^\alpha |a_l^*|$, где $|l_{j+1}| \leqslant \frac{\sqrt{d}\|M^{*j+1}\|}{2}$, так как $l_{j+1} \in H(M^{*j+1})$. Используя это неравенство и изотропность матрицы M^*, имеем

$$\begin{aligned}|\widehat{\varphi_{j+1}}(l)| \leqslant C^*m^{-\frac{j}{2}}\Big(\frac{|M^{*-(j+1)}l||l_{j+1}|}{|M^{*-(j+1)}l||l|}\Big)^\alpha|a_l^*| &\leqslant C^*m^{-\frac{j}{2}}\Big(\frac{\sqrt{d}\|M^{*j+1}\|\|M^{*-(j+1)}\||l|}{2|M^{*-(j+1)}l||l|}\Big)^\alpha \\ &\leqslant C^*m^{-\frac{j}{2}}(C_2^{M^*})^{2\alpha}\Big(\frac{\sqrt{d}}{2}\Big)^\alpha\|M^{*-1}\|^{-\alpha}|M^{*-j}l|^{-\alpha} \\ &\leqslant C^*m^{-\frac{j}{2}}(C_2^{M^*})^{2\alpha}\Big(\frac{\sqrt{d}}{2}\Big)^\alpha 4^\alpha\|M^{*-1}\|^{-\alpha}|M^{*-j}l|^\alpha.\end{aligned}$$

По определению,

$$m^{j/2}|\widehat{\psi_j}(l)| = m^{j/2}| -\sqrt{m}\widehat{\varphi_{j+1}}(l)| \leqslant C^*\sqrt{m}(C_2^{M^*})^{2\alpha}\Big(\frac{\sqrt{d}}{2}\Big)^{\alpha}\|M^{*-1}\|^{-\alpha}|M^{*-j}l|^{-\alpha}$$
$$\leqslant C^*\sqrt{m}(C_2^{M^*})^{2\alpha}\Big(\frac{\sqrt{d}}{2}\Big)^{\alpha}4^{\alpha}\|M^{*-1}\|^{-\alpha}|M^{*-j}l|^{\alpha}.$$

Для нулевых коэффициентов те же самые оценки, очевидно, справедливы.

Таким образом, мы показали, что все условия теорем 16 и 17 выполнены, а значит, системы всплесков $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ and $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ являются двойственными фреймами. □

Следствие 2. *Пусть M – изотропная матрица, такая что $\mathbb{T}^d\subset M^*\mathbb{T}^d$, и коэффициенты Фурье функции $\varphi_1\in L_2(\mathbb{T}^d)$ удовлетворяют условиям*

$$\widehat{\varphi_1}(l) = \begin{cases} a_{\mathbf{0}}, & \text{если} \quad l=\mathbf{0},\\ a_l(\frac{1}{|l|})^{\alpha}, & \text{если} \quad l\notin\mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*},\\ 0, & \text{если} \quad l\in\mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*},\ l\neq\mathbf{0}, \end{cases}$$

где $\alpha>d/2$, $0<C_1\leqslant|a_l|\leqslant C_2$ при $l=\mathbf{0}$ и $l\notin\mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}$. Тогда существуют масштабирующие последовательности $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ порождающие системы $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ and $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$, которые являются двойственными фреймами.

Доказательство. Достаточно заметить, что, в данном случае, множество $Q=\{l : l\notin\mathbb{Z}^d_{\mathbf{0},M^*}\}$. Это множество очевидным образом удовлетворяет условию *(Z)* теоремы 19. □

3 Многомерные периодические дискретные системы всплесков

При обработке цифровых сигналов приближаемые функции имеют дискретную природу, поэтому для работы с ними представляется целесообразным построение теории всплесков для дискретного случая. Различные конкретные примеры дискретных систем всплесков и кратномасштабных анализов для дискретного периодического случая уже рассматривались в литературе. Стоит отдельно отметить работу М. Боуника и К. Джахан [19], в которой авторы рассматривают достаточно общий случай систем всплесков на абелевых группах; однако, в качестве обобщённого аналога матрицы растяжения они рассматривают эпиморфизмы, а в рамках данной главы матрицы растяжения не являются эпиморфизмами. Мы вводим общее определение дискретного периодического кратномасштабного анализа (в рамках данной главы, для краткости, КМА). Определение КМА, наиболее близкое к рассматриваемому нами, и определение соответствующих систем всплесков были даны А. П. Петуховым для одномерного случая в работе [8]. Однако, это определение налагает на масштабирующие последовательности, которые порождают КМА, некоторые условия, исключающие из рассмотрения многие периодические объекты, «заслуживающие» называться системами всплесков, например систему Котельникова-Шеннона. В этой главе будут даны способ построения систем всплесков, порождённых КМА, а также формулы прямого и обратного всплеск-преобразования (декомпозиции и восстановления сигнала), ассоциированного с данными системами всплесков.

3.1 Дискретный кратномасштабный анализ

Мы будем называть функцию f от d целочисленных переменных M^n-периодической, если равенство

$$f(x) = f(x + M^n k)$$

выполняется для всех $x, k \in \mathbb{Z}^d$.

Пусть $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ – пространство M^n-периодических комплекснозначных функций от d целочисленных переменных. Для этого пространства естественно скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k\in D(M^n)} f(k)\overline{g(k)}.$$

Определим также оператор сдвига на $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ для $j = 0, \ldots, n$, и $k \in \mathbb{Z}^d$ по следующей формуле

$$S_k^j f(x) := f(x + M^{n-j}k).$$

Для функции $f \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ определим дискретное преобразование Фурье как

$$\widehat{f}(k) := \sum_{s\in D(M^n)} f(s)e^{-2\pi i(k, M^{-n}s)},$$

и тогда обратное преобразование Фурье может быть выражено по формуле

$$f(x) = \frac{1}{m^n}\sum_{k\in D(M^{*n})} \widehat{f}(k)e^{2\pi i(k, M^{-n}x)}.$$

Также определим оператор G как

$$Gf := \frac{1}{m^{n-1}}\sum_{k\in D(M^{*(n-1)})} \widehat{f}(M^*k)e^{2\pi i(M^{*(-n)}k, \cdot)}.$$

Легко показать, что

$$Gf(Mx) = \sum_{s\in D(M)} f(x + M^{n-1}s).$$

Определение 6. *Последовательность линейных пространств* $\{V_j\}_{j=0}^n \subset \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ *называется* кратномасштабным анализом *в пространстве* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, *если она удовлетворяет следующим условиям:*

MR1. $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n$.

MR2. $V_n = \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$.

MR3. a) $\dim V_j = m^j$, *для всех* $j = 0, \dots, n$; b) V_0 *состоит из констант.*
MR4. $\dim\{f \in V_j : S_p^j f = \lambda_p f$ *для всех* $p \in \mathbb{Z}^d\} \leqslant 1$ *для любого набора комплексных чисел* $\{\lambda_p\}_{p\in\mathbb{Z}^d}$.
MR5. $f \in V_j \Leftrightarrow S_p^j f \in V_j$, $p \in D(M^j)$.
MR6. a) *если* $f \in V_j$, *то* $g(\cdot) := f(M\cdot) \in V_{j+1}$; b) *если* $f \in V_{j+1}$, *то* $Gf \in V_j$.

Определение 7. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$ *– КМА в пространстве* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. *Последовательность функций* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\varphi_j \in V_j$, *называется* масштабирующей последовательностью, *если функции* $S_p^j\varphi_j$, $p \in D(M^j)$, *образуют базис пространства* V_j *для каждого* $j = 0, \dots, n$.

Определим операторы ω_k^j, $j = 0, \dots, n$, $k \in D(M^{*j})$ по формуле

$$\omega_k^j f(x) := \frac{1}{m^n} \sum_{p\in D(M^{*(n-j)})} \widehat{f}(M^{*j}p + k)e^{2\pi i(M^{*j}p+k, M^{-n}x)},$$

то есть $\widehat{\omega_k^j f}(l) = \widehat{f}(l)$, если $l \equiv k \pmod{M^{*j}}$, и $\widehat{\omega_k^j f}(l) = 0$, если $l \not\equiv k \pmod{M^{*j}}$, так как сумма содержит только коэффициенты Фурье с индексами, сравнимыми по модулю M^{*j}, а также, применяя следствие 1, мы видим, что $\sum_{k\in D(M^{*j})} \omega_k^j f = f$.

Лемма 4. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$ *– КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. *Тогда в каждом пространстве* V_j *существует базис* $\{v_k^j\}_{k\in D(M^{*j})}$, *удовлетворяющий условиям:*
V1. $\widehat{v_k^j}(l) = 0$ *для всех* $l \not\equiv k \pmod{M^{*j}}$.
V2. *если* $\widehat{v_k^j}(l) \neq 0$, *то* $\widehat{v_k^j}(s) = \widehat{v_k^{j+1}}(s)$ *для всех* $s \equiv l \pmod{M^{*(j+1)}}$.
V3. $\widehat{v_{M^*k}^{j+1}}(M^*l) = \sum_{s\in D(M^*)} \widehat{v_k^j}(l + M^{*(n-1)}s)$ *для всех* $l \in D(M^{*(n-1)})$.

Для удобства положим $v_l^j := v_k^j$, если $l \equiv k \pmod{M^{*j}}$.

Доказательство. Проведём индукцию по j. База для $j = 0$ очевидна, так как все целочисленные вектора сравнимы между собой по модулю $I_d = M^0$, и значит выполняется условие **V1**, а остальные условия не требуют проверки. Предположим, что в пространствах V_j, $j = 0, \dots, j_0$ существуют базисы, удовлетворяющие **V1-V3**.

Введём пространства

$$V_j^{(k)} := \{f \in V_j : \widehat{f}(p) = 0 \text{ для всех } p \not\equiv k \pmod{M^{*j}}\}.$$

Пусть $g \in V_j$, тогда

$$g = \sum_{k\in D(M^{*j})} \omega_k^j g = \sum_{k\in D(M^{*j})} g_k,$$

где $g_k \in V_j^{(k)}$. То есть, $V_j = \sum_{k \in D(M^{*j})} V_j^{(k)}$, а значит

$$m^j = \dim V_j \leqslant \sum_{k \in D(M^{*j})} \dim V_j^{(k)}. \tag{37}$$

Найдём размерность пространства $V_j^{(k)}$. Если $f \in V_j^{(k)}$, то

$$f(x) = \frac{1}{m^n} \sum_{p \in D(M^{*(n-j)})} \widehat{f}(M^{*j}p + k) e^{2\pi i (M^{*(-n)}(M^{*j}p+k), x)}.$$

Применяя оператор сдвига, получим

$$\begin{aligned} S_l^j f(x) &= \frac{1}{m^n} \sum_{p \in D(M^{*(n-j)})} \widehat{f}(M^{*j}p + k) e^{2\pi i (M^{*(-n)}(M^{*j}p+k), x + M^{n-j}l)} = \\ &= \frac{1}{m^n} \sum_{p \in D(M^{*(n-j)})} \widehat{f}(M^{*j}p + k) e^{2\pi i (M^{*(-n)}(M^{*j}p+k), x)} e^{2\pi i (p,l)} e^{2\pi i (k, M^{-j}l)}, \end{aligned}$$

то есть $S_l^j f(x) = e^{2\pi i (M^{*-j}k, l)} f(x)$. Отсюда, в силу (37) и **MR4**, получаем $\dim V_j^{(k)} = 1$.

Построим базис $\{v_k^{j_0+1}\}_{k \in D(M^{*(j_0+1)})}$. Для начала мы рассмотрим такие номера $l \not\equiv 0 \pmod{M^*}$, что $\widehat{v_l^{j_0}}(k) = 0$ для всех $k \equiv l \pmod{M^{*(j_0+1)}}$. Построим функции $v_l^{j_0+1}$, задав их коэффициенты Фурье. Для всех индексов $k \not\equiv l \pmod{M^{*(j_0+1)}}$ положим $\widehat{v_l^{j_0+1}}(k) = 0$. Выберем оставшиеся коэффициенты таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} \sum\limits_{s_1 \in D(M^*)} \widehat{v_l^{j_0+1}}(k + M^{*(n-1)}s_1) \neq 0, \\ \sum\limits_{s_1 \in D(M^*)} \sum\limits_{s_2 \in D(M^*)} \widehat{v_l^{j_0+1}}(k + M^{*(n-1)}s_1 + M^{*(n-2)}s_2) \neq 0, \\ \vdots \\ \sum\limits_{s_1 \in D(M^*)} \dots \sum\limits_{s_n \in D(M^*)} \widehat{v_l^{j_0+1}}(k + \sum\limits_{t=1}^{n} M^{*(n-t)}s_t) \neq 0. \end{cases}$$

Этих условий лишь конечное число, значит мы всегда сможем подобрать удовлетворяющие им коэффициенты Фурье. Так, условие **V1** выполнено, условия **V2** и **V3** не требуют проверки, так как $\widehat{v_l^{j_0}}(k) = 0$ и $l \not\equiv 0 \pmod{M^*}$.

Далее, рассмотрим индексы $l \equiv 0 \pmod{M^*}$, такие что $\widehat{v_l^{j_0}}(k) = 0$ для всех $k \equiv l \pmod{M^{*(j_0+1)}}$. Положим $v_l^{j_0+1}(x) := v_{M^{*-1}l}^{j_0}(M^*x)$. Применяя леммы 1, 2, для $k \equiv$

$0 \pmod{M^*}$ имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{v_l^{j_0+1}}(k) &= \sum_{r\in D(M^n)} v_l^{j_0+1}(r)e^{-2\pi i(k,M^{-n}r)} \\
&= \sum_{r\in D(M^n)} v_{M^{*-1}l}^{j_0}(Mr)e^{-2\pi i(k,M^{-n}r)} \\
&= \sum_{p\in D(M^{n-1})}\sum_{t\in D(M)} v_{M^{*-1}l}^{j_0}(M(p+M^{n-1}t))e^{-2\pi i(k,M^{-n}(p+M^{n-1}t))} \\
&= \sum_{p\in D(M^{n-1})} v_{M^{*-1}l}^{j_0}(Mp)e^{-2\pi i(k,M^{-n}p)} \sum_{t\in D(M)} e^{-2\pi i(k,M^{-1}t)} \\
&= m \sum_{p\in D(M^{n-1})} v_{M^{*-1}l}^{j_0}(Mp)e^{-2\pi i(k,M^{-n}p)} \\
&= \sum_{r\in D(M^n)} v_{M^{*-1}l}^{j_0}(r)e^{-2\pi i(k,M^{-n-1}r)} \sum_{s\in D(M^*)} e^{-2\pi i(M^{*-1}s,r)} \\
&= \sum_{r\in D(M^n)} v_{M^{*-1}l}^{j_0}(r) \sum_{s\in D(M^*)} e^{-2\pi i(M^{*-n-1}k+M^{*-1}s,r)} \\
&= \sum_{r\in D(M^n)} v_{M^{*-1}l}^{j_0}(r) \sum_{s\in D(M^*)} e^{-2\pi i(M^{*-1}k+M^{*(n-1)}s,M^{-n}r)} \\
&= \sum_{s\in D(M^*)} \widehat{v_{M^{*-1}l}^{j_0}}(M^{*-1}k+M^{*(n-1)}s).
\end{aligned}$$

Таким образом, условие **V3** выполнено, **V1** выполнено по индукции, **V2** не требует проверки.

Если существует вектор l, такой что $\widehat{v_l^{j_0}}(l) \neq 0$, положим $v_l^{j_0+1} := \omega_l^{j_0+1} v_l^{j_0}$. Тогда условия **V1**, **V2** будут выполнены по определению операторов ω_l^j. Проверим **V3**. Пусть $l \equiv 0 \pmod{M^*}$, $k \equiv l \pmod{M^{*(j_0+1)}}$, тогда, по индукционной гипотезе, имеем

$$\widehat{v_l^{j_0+1}}(k) = \widehat{v_l^{j_0}}(k) = \sum_{s\in D(M^*)} \widehat{v_{M^{*-1}l}^{j_0-1}}(M^{*-1}k+M^{*(n-1)}s) =$$
$$\sum_{s\in D(M^*)} \widehat{v_{M^{*-1}l}^{j_0}}(M^{*-1}k+M^{*(n-1)}s).$$

Таким образом, в пространстве V_{j_0+1} мы выбрали m^{j_0+1} элементов, принадлежащих соответствующим пространствам $V_{j_0+1}^{(k)}$, и удовлетворяющих условиям **V1-V3**. $\square$

Лемма 5. *Если в каждом пространстве $V_j \subset \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ существует базис $\{v_k^j\}_{k\in D(M^{*j})}$, удовлетворяющий* **V1**, *то выполнена аксиома* **MR4**.

Доказательство. Пусть $r \in D(M^j)$, f – собственный вектор оператора S_r^j, то есть $S_r^j f = \lambda_r f$, и пусть $f = \sum_{k \in D(M^{*j})} \alpha_k^j v_k^j$. Так как выполнено **V1**, оператор S_r^j действует на v_k^j как оператор умножения на $e^{2\pi i (M^{*-j}k, r)}$. Применяя S_r^j к f, получим

$$S_r^j f(x) = \sum_{k \in D(M^{*j})} \alpha_k^j S_r^j v_k^j(x) = \sum_{k \in D(M^{*j})} \alpha_k^j e^{2\pi i (M^{*-j}k, r)} v_k^j(x)$$

Так как f – собственный вектор оператора S_r^j, имеем

$$0 = S_r^j f(x) - \lambda_r f(x) = \sum_{k \in D(M^{*j})} \alpha_k^j (e^{2\pi i (M^{*-j}k, r)} - \lambda_r) v_k^j(x).$$

Так как функции v_k^j линейно независимы, отсюда следует, что $\alpha_k^j (e^{2\pi i (M^{*-j}k, r)} - \lambda_r) = 0$ для $k \in D(M^{*j})$. Предположим, что $\alpha_{k_0}^j \neq 0$, $\alpha_{k_1}^j \neq 0$, если $k_0 \neq k_1$. Тогда

$$(e^{2\pi i (M^{*-j}k_0, r)} - \lambda_r) - (e^{2\pi i (M^{*-j}k_1, r)} - \lambda_r) = 0,$$

или $e^{2\pi i (M^{*-j}(k_0 - k_1), r)} = 1$. Суммируя эти уравнения при каждом r, получаем

$$\sum_{r \in D(M^j)} e^{2\pi i (M^{*-j}(k_0 - k_1), r)} = m^j. \tag{38}$$

С другой стороны, векторы $k_0, k_1 \in D(M^{*j})$, и значит они не сравнимы по модулю M^{*j}, что, по лемме 2, влечёт

$$\sum_{r \in D(M^j)} e^{2\pi i (M^{*-j}(k_0 - k_1), r)} = 0. \tag{39}$$

Таким образом, мы получили, что $\alpha_k^j \neq 0$ только при $k = k_0$, а значит функция f пропорциональна $v_{k_0}^j$, и, кроме того,

$$\lambda_r = e^{2\pi i (M^{*-j}k_0, r)}, \quad r \in D(M^j). \tag{40}$$

Пусть теперь $g = \sum_{k \in D(M^{*j})} \beta_k^j v_k^j$ – другой собственный вектор всех операторов S_r^j, $r \in D(M^j)$. Для него также $\beta_k^j \neq 0$ лишь для одного номера k. Пусть $\beta_{k_1}^j \neq 0$, $k_1 \neq k_0$. Тогда, аналогично (40), имеем

$$\lambda_r = e^{2\pi i (M^{*-j}k_1, r)},$$

и отсюда и из (40), получаем

$$\lambda_r = e^{2\pi i (M^{*-j}(k_0 - k_1), r)} = 1, \quad r \in D(M^j).$$

Аналогично, суммируя по r, мы получаем (38), что противоречит (39). Таким образом, функция g также пропорциональна $v_{k_0}^j$, и следовательно, размерность любого собственного подпространства оператора сдвига S_r^j не превосходит 1. $\square$

Лемма 6. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$ *– КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$*. Для того, чтобы последовательность* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ *была масштабирующей, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi_j = \sum_{k\in D(M^{*j})} \alpha_k^j v_k^j, \tag{41}$$

где $\alpha_k^j \neq 0$ *для всех* $k \in D(M^{*j})$*, а* $\{v_k^j\}_{k\in D(M^{*j})}$ *– базисы пространств* V_j*, определённые в лемме 4.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ – масштабирующая последовательность, и α_k^j – коэффициенты разложения функций φ_j по базису $\{v_k^j\}$. Применяя оператор сдвига S_r^j к φ_j, имеем

$$S_r^j\varphi_j = \sum_{k\in D(M^{*j})} \alpha_k^j e^{2\pi i(M^{*-j}k,r)} v_k^j. \tag{42}$$

Предположим, что $\alpha_{k_0}^j = 0$, тогда

$$V_j = \mathrm{span}\{S_r^j\varphi_j,\ r\in D(M^j)\} = \mathrm{span}\{v_k^j,\ k\in D(M^{*j}),\ k\neq k_0\},$$

что противоречит минимальности базиса $\{v_k^j\}_{k\in D(M^{*j})}$.

Пусть функции φ_j определены по формуле (41). Как и выше,

$$S_r^j\varphi_j = \sum_{k\in D(M^{*j})} \alpha_k^j e^{2\pi i(M^{*-j}k,r)} v_k^j, \quad r\in D(M^j).$$

Рассмотрим эти равенства, как систему уравнений с неизвестными $\alpha_k^j v_k^j$. Известно, что матрица такой системы унитарна (с точностью до множителя), а при унитарном преобразовании базис переходит в базис. Следовательно, функции $S_r^j\varphi_j$, $r\in D(M^j)$, образуют базис пространства V_j, $j = 0,\ldots,n$. □

Следствие 3. *Если* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ *– масштабирующая последовательность, то* $\omega_k^j\varphi_j = \alpha_k^j v_k^j$*, где* $\alpha_k^j \neq 0$*. В частности, функции* $\{\omega_k^j\varphi_j\}_{k\in D(M^{*j})}$ *образуют базис в* V_j*.*

Следует из определения операторов ω_k^j и того, что $\mathrm{dim}V_j^{(k)} = 1$.

Следствие 4. *В любом КМА существует масштабирующая последовательность.*

Следует из формулы (41), в которой достаточно положить $\alpha_k^j = 1$.

Характеризация дискретных КМА. Следующая теорема представляет собой характеризацию КМА в терминах коэффициентов Фурье функций φ_j, входящих в масштабирующую последовательность.

Теорема 20. *Функции* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n \subset \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ *образуют масштабирующую последовательность для некоторого КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
S1. $\widehat{\varphi_0}(k) = 0$ *для всех* $k \neq \mathbf{0}$*;*
S2. *для каждого* $j = 0, \dots, n$ *и* $l \in D(M^{*j})$ *существует* $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$, $k \in D(M^{*n})$, *такой что* $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$*;*
S3. *для каждого* $k \in D(M^{*n})$ *существует* $j = 0, \dots, n$, *такой что* $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$*;*
S4. *для каждого* $j = 1, \dots, n$ *и* $l \in D(M^{*n})$ *существует* μ_l^j, *такой что* $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) = \mu_l^j \widehat{\varphi_j}(k)$ *для всех* $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$*;*
S5. *для каждого* $j = 0, \dots, n-1$ *и* $l \in D(M^{*n})$ *существует* $\gamma_l^j \neq 0$, *такой что* $\widehat{\varphi_{j+1}}(M^* k) = \gamma_l^j \sum_{s \in D(M^*)} \widehat{\varphi_j}(k + M^{*(n-1)} s)$ *для всех* $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$, $k \in D(M^{*(n-1)})$*;*

Доказательство. Условия **V1-V3** и функции v_l^j, упоминаемые в доказательстве, определены в лемме 4.

Необходимость. Свойство **S1** следует из **MR3, b)**. Для доказательства **S2** воспользуемся следствием 3. Из равенства $\omega_l^j \varphi_j = \alpha_l^j v_l^j$ имеем

$$\widehat{\varphi_j}(k) = \widehat{\omega_k^j \varphi_j}(k) = \alpha_l^j \widehat{v_l^j}(k)$$

для всех $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$. Из условия **V1**, и из того, что $v_l^j \not\equiv 0$, следует существование вектора k такого, что $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$ и $\widehat{v_l^j}(k) \neq 0$.Далее, докажем свойство **S3** от противного. Пусть $\widehat{\varphi_j}(k) = 0$ для всех $j = 0, \dots, n$. Это означает, что у всех функций φ_j, $j = 0, \dots, n$, отсутствует гармоника $e^{2\pi i (M^{*(-n)} k, x)}$. Тогда она отсутствует и во всех сдвигах $S_p^j \varphi_j$, что противоречит **MR2**. Для доказательства **S4**, возьмём произвольный номер $l \in D(M^{*n})$. Рассмотрим случай, когда существует номер $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$, такой что $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) \neq 0$. По следствию 3 и из определения операторов ω_k^j следует

$$\omega_l^j \varphi_j = \alpha_l^j v_l^j, \quad \omega_l^j \varphi_{j-1} = \omega_l^j \omega_l^{j-1} \varphi_{j-1} = \alpha_l^{j-1} \omega_l^j v_l^{j-1},$$

где $\alpha_l^{j-1} \neq 0$. Отсюда, учитывая **V2**, получаем

$$\widehat{\varphi_{j-1}}(s) = \frac{\alpha_l^{j-1}}{\alpha_l^j} \widehat{\varphi_j}(s),$$

для всех $s \equiv l \pmod{M^{*j}}$. Осталось положить $\mu_l^j := \alpha_l^{j-1} / \alpha_l^j$. Если же $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) = 0$ для всех $k \equiv l \pmod{M^{*j}}$, то $\mu_l^j := 0$. Для доказательства **S5**, опять воспользуемся следствием 3. Для $k \equiv l(\pmod{M^{*j}})$, имеем

$$\widehat{\varphi_{j+1}}(M^*k) = \widehat{\omega^{j+1}_{M^*l}\varphi_{j+1}}(M^*k) = \alpha^{j+1}_{M^*l}\widehat{v^{j+1}_{M^*l}}(M^*k),$$

где $\alpha^{j+1}_{M^*l} \neq 0$. С другой стороны,

$$\widehat{\varphi_j}(k) = \alpha^j_l \widehat{v^j_l}(k), \quad \alpha^j_l \neq 0.$$

Отсюда, учитывая **V3**, получаем

$$\widehat{\varphi_{j+1}}(M^*k) = \frac{\alpha^{j+1}_{M^*l}}{\alpha^j_l} \sum_{s\in D(M^*)} \widehat{\varphi_j}(k + M^{*(n-1)}s).$$

Осталось положить $\gamma^j_l = \frac{\alpha^{j+1}_{M^*l}}{\alpha^j_l}$.

Достаточность. Пусть функции $\varphi_j \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $j = 0, \dots, n$, удовлетворяют условиям **S1-S5**. Положим $V_j := \operatorname{span}\{S^j_l\varphi_j,\ l \in D(M^j)\}$. Покажем, что $\{V_j\}_{j=0}^n$ – КМА в $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, а $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ – масштабирующая последовательность. Сначала проверим **MR5**. Пусть $f \in V_j$, тогда $f = \sum_{k\in D(M^j)} \alpha_k S^j_k\varphi_j$. Применяя оператор сдвига S^j_r к f, получаем

$$S^j_r f = \sum_{k\in D(M^j)} \alpha_k S^j_r S^j_k \varphi_j. \tag{43}$$

Из периодичности φ_j следует, что $S^j_r S^j_k\varphi_j = S^j_p\varphi_j$, где $p \in D(M^j)$, $p \equiv (r + k) \pmod{M^j}$. Подставляя это равенство в (43), по определению V_j получаем, что $S^j_r f \in V_j$. В обратную сторону, если $S^j_r f \in V_j$, то $f = S^j_{-r}S^j_r f \in V_j$. Докажем **MR3, a)**. Аналогично (42), имеем

$$S^j_r\varphi_j = \sum_{l\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}l,r)}\omega^j_l\varphi_j. \tag{44}$$

Отсюда следует, что $V_j = \operatorname{span}\{\omega^j_l\varphi_j, l \in D(M^{*j})\}$. Покажем, что функции $\omega^j_l\varphi_j$, $l \in D(M^{*j})$ образуют базис V_j. Предположим, что они линейно зависимы, тогда существуют числа α_k, $k \in D(M^{*j})$, $\alpha_{k_0} \neq 0$, такие что $\sum_{k\in D(M^{*j})} \alpha_k\omega^j_k\varphi_j = 0$. Отсюда и из определения ω^j_k получаем, что $\widehat{\omega^j_{k_0}\varphi_j}(k) = \widehat{\varphi_j}(k) = 0$ для всех $k \equiv k_0 \pmod{M^{*j}}$, что противоречит **S2**. Для доказательства **MR3, a)** осталось заметить, что количество функций $\omega^j_l\varphi_j$ равно m^j. Помимо этого, так как функций $S^j_r\varphi_j$ также m^j штук,мы установили, что набор сдвигов $\{S^j_r\varphi_j\}_{r\in D(M^j)}$ также является базисом в V_j. Свойство **MR3,**

b) следует из **S1**. Для доказательства **MR1** требуется проверить, что из $f \in V_j$ следует $f \in V_{j+1}$. Для этого достаточно рассмотреть лишь базисные функции $\omega_l^j \varphi_j$. Из определения ω_l^j и леммы 1, имеем

$$\omega_l^j \varphi_j = \sum_{p \in D(M^*)} \omega_{l+M^{*j}p}^{j+1} \omega_l^j \varphi_j. \tag{45}$$

Используя **S4**, определение операторов ω_l^j и $M^{*(j+1)}$-периодичность последовательности μ_l^{j+1} по нижнему индексу, имеем

$$\begin{aligned}
\omega_{l+M^{*j}p}^{j+1} \omega_l^j \varphi_j &= \frac{1}{m^n} \sum_{k \in D(M^{*(n-j-1)})} \widehat{\omega_l^j \varphi_j}(M^{*(j+1)}k + l + M^{*j}p) e^{2\pi i (M^{*(j+1)}k + l + M^{*j}p, M^{-n} \cdot)} \\
&= \frac{1}{m^n} \sum_{k \in D(M^{*(n-j-1)})} \widehat{\varphi_j}(M^{*(j+1)}k + l + M^{*j}p) e^{2\pi i (M^{*(j+1)}k + l + M^{*j}p, M^{-n} \cdot)} \\
&= \frac{1}{m^n} \sum_{k \in D(M^{*(n-j-1)})} \mu_{M^{*(j+1)}k + l + M^{*j}p}^{j+1} \widehat{\varphi_{j+1}}(M^{*(j+1)}k + l + M^{*j}p) e^{2\pi i (M^{*(j+1)}k + l + M^{*j}p, M^{-n} \cdot)} \\
&= \mu_{l+M^{*j}p}^{j+1} \frac{1}{m^n} \sum_{k \in D(M^{*(n-j-1)})} \widehat{\varphi_{j+1}}(M^{*(j+1)}k + l + M^{*j}p) e^{2\pi i (M^{*(j+1)}k + l + M^{*j}p, M^{-n} \cdot)},
\end{aligned}$$

Правая часть этого равенства является разложением Фурье функции $\mu_{l+M^{*j}p}^{j+1} \omega_{l+M^{*j}p}^{j+1} \varphi_{j+1}$. Подставляя это в (45), получаем

$$\omega_l^j \varphi_j = \sum_{p \in D(M^*)} \mu_{l+M^{*j}p}^{j+1} \omega_{l+M^{*j}p}^{j+1} \varphi_{j+1}. \tag{46}$$

Осталось заметить, что $\omega_{l+M^{*j}p}^{j+1} \varphi_{j+1} \in V_{j+1}$. Свойство **MR2** следует из того, что, по определению, функции $\omega_l^n \varphi_n$ пропорциональны гармоникам $e^{2\pi i (l, M^{-n} \cdot)}$. Свойство **MR4** следует из леммы 5.

Теперь покажем, что в V_j существует базис, удовлетворяющий свойствам леммы 4. Определим числа α_l^j, $j = 0, \dots, n$ по формулам

$$\begin{aligned}
&\alpha_{\mathbf{0}}^0 := 1; \\
&\text{if } \mu_l^j \neq 0, \text{ then } \alpha_l^j := \frac{\alpha_l^{j-1}}{\mu_l^j}; \\
&\text{if } \mu_l^j = 0, l \equiv 0 \pmod{M^*}, \text{ then } \alpha_l^j := \alpha_{M^{*-1}l}^{j-1} \gamma_{M^{*-1}l}^{j-1}; \\
&\text{if } \mu_l^j = 0, l \not\equiv 0 \pmod{M^*}, \text{ then } \alpha_l^j := 1.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\alpha_l^j \neq 0$. Let $v_l^j = \omega_l^j \varphi_j / \alpha_l^j$. Как показано выше, функции $\omega_l^j \varphi_j$ образуют базис пространства V_j, поэтому $\{v_l^j\}_{l \in D(M^{*j})}$ также является базисом, и нетрудно проверить, что свойства **V1-V3** выполнены. Для доказательства **MR6** достаточно проверить выполнение этого условия для базисных функций $\{v_l^j\}_{l \in D(M^{*j})}$. Используя **V3** и лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} v_l^j(Mx) &= \frac{1}{m^n} \sum_{k \in D(M^{*n})} \widehat{v_l^j}(k) e^{2\pi i (k, M^{-n} Mx)} \\ &= \frac{1}{m^n} \sum_{k \in D(M^{*(n-1)})} \sum_{s \in D(M^*)} \widehat{v_l^j}(k + M^{*(n-1)} s) e^{2\pi i (k, M^{-n} Mx)} \\ &= \frac{1}{m^n} \sum_{k \in D(M^{*(n-1)})} \widehat{v_{M^* l}^{j+1}}(M^* k) e^{2\pi i (k, M^{-n} Mx)} = v_{M^* l}^{j+1}(x). \end{aligned}$$

Выполнение **MR6, a)** следует из того, что $v_{M^* l}^{j+1} \in V_{j+1}$. Проверим **MR6, b)**. Пусть $l \equiv 0 \pmod{M^*}$. Используя **V3**, получаем

$$\sum_{s \in D(M)} v_l^{j+1}(M^{-1} x + M^{n-1} s) = \sum_{s \in D(M)} v_{M^{*-1} l}^j (x + M^n s).$$

Оба слагаемых в правой части принадлежат V_j. Пусть теперь $l \not\equiv 0 \pmod{M^*}$, тогда функция $\sum_{s \in D(M)} v_l^{j+1}(M^{-1} x + M^{n-1} s)$ имеет разложение Фурье

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m^n} \sum_{k \in D(M^{*(n-j-1)})} \sum_{s \in D(M)} \widehat{v_l^{j+1}}(M^{*(j+1)} k + l) e^{2\pi i (M^{*(j+1)} k + l, M^{-1} x + M^{n-1} s)} = \\ &= \frac{1}{m^n} \sum_{k \in D(M^{*(n-j-1)})} e^{2\pi i (M^{*(j+1)} k + l, M^{-1} x)} \sum_{s \in D(M)} e^{2\pi i (M^{*(j+1)} k + l, M^{n-1} s)}. \end{aligned}$$

Последний множитель равен нулю, по лемме 2, since $l \not\equiv 0 \pmod{M^*}$. Таким образом, свойство **MR6, b)** также выполнено. □

3.2 Периодические дискретные всплески

Лемма 7. *Пусть $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ – пара КМА в пространстве $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, и $\varphi \in V_j$, $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{V}_j$. Системы $\{S_k^j \varphi\}_{k \in D(M^j)}$, $\{S_k^j \widetilde{\varphi}\}_{k \in D(M^j)}$ являются биортонормированными тогда и только тогда, когда*

$$\langle \omega_r^j \varphi, \omega_r^j \widetilde{\varphi} \rangle = m^{-j}, \quad \textit{для всех } r \in D(M^{*n}).$$

Доказательство. По определению операторов ω_r^j, имеем

$$\begin{gathered}\langle S_r^j\varphi, S_k^j\widetilde{\varphi}\rangle = \\ = \langle \sum_{s\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}s,r)}\omega_s^j\varphi, \sum_{l\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}l,k)}\omega_l^j\widetilde{\varphi}\rangle = \\ = \sum_{s\in D(M^{*j})}\sum_{l\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}s,r)}e^{-2\pi i(M^{*-j}l,k)}\langle\omega_s^j\varphi,\omega_l^j\widetilde{\varphi}\rangle.\end{gathered}$$

Так как спектры функций $\omega_s^j\varphi$ и $\omega_l^j\widetilde{\varphi}$ дизъюнктны при $s\neq l$, соответствующие слагаемые равны 0. Таким образом,

$$\langle S_r^j\varphi, S_k^j\widetilde{\varphi}\rangle = \sum_{s\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}s,r-k)}c_s, \tag{47}$$

где $c_s = \langle\omega_s^j\varphi,\omega_s^j\widetilde{\varphi}\rangle$. Отсюда и из леммы 2 следует достаточность. Теперь предположим, что $\{S_k^j\varphi\}_{k\in D(M^j)}$ и $\{S_k^j\widetilde{\varphi}\}_{k\in D(M^j)}$ биортонормированные системы. Рассмотрим (47) как систему уравнений при фиксированном $r\in D(M^j)$ и всех $k\in D(M^j)$, с переменными c_r. Так как матрица этой системы унитарна, решение $c_p = m^{-j}$, $p\in D(M^{*j})$, единственно. Более того, $c_s = c_{s+M^{*j}p}$, что влечёт $c_s = m^{-j}$ для всех $s\in D(M^{*n})$. □

Следствие 5. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ *– пара КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, *и* $\varphi\in V_j$, $\widetilde{\varphi}\in\widetilde{V}_j$. *Если системы* $\{S_k^j\varphi\}_{k\in D(M^j)}$, $\{S_k^j\widetilde{\varphi}\}_{k\in D(M^j)}$ *биортонормированы, то*

$$\sum_{k\in D(M^*)}\mu^j_{p+M^{*(j-1)}k}\overline{\widetilde{\mu}^j_{p+M^{*(j-1)}k}} = m,\quad p\in D(M^{*(j-1)}).$$

Доказательство. Аналогично с (46), имеем

$$\begin{aligned}&m^{-j+1} = \langle\omega_k^{j-1}\varphi_{j-1},\omega_k^{j-1}\widetilde{\varphi}_{j-1}\rangle\\ &= \langle\sum_{p\in D(M^*)}\mu^j_{k+M^{*(j-1)}p}\omega^j_{k+M^{*(j-1)}p}\varphi_{j-1}, \sum_{l\in D(M^*)}\widetilde{\mu}^j_{k+M^{*(j-1)}l}\omega^j_{k+M^{*(j-1)}l}\widetilde{\varphi}_{j-1}\rangle\\ &= \sum_{p\in D(M^*)}\mu^j_{k+M^{*(j-1)}p}\overline{\widetilde{\mu}^j_{k+M^{*(j-1)}p}}\langle\omega^j_{k+M^{*(j-1)}p}\varphi_j,\omega^j_{k+M^{*(j-1)}l}\widetilde{\varphi}_j\rangle\\ &= m^{-j}\sum_{p\in D(M^*)}\mu^j_{k+M^{*(j-1)}p}\overline{\widetilde{\mu}^j_{k+M^{*(j-1)}p}}.\end{aligned}$$

Осталось лишь домножить обе части равенства на m^{-j}. □

Построение всплесков. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ – пара КМА в $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, удовлетворяющих условиям следствия 5. Для построения всплеск-функций нам потребуется построить две взаимно обратные матрицы $A^{(r)}$ и $\widetilde{A}^{(r)}$, начав лишь с их первых строк. Пусть числа $a_{00}^{(r)},\dots,a_{0,m-1}^{(r)}$ и $\widetilde{a}_{00}^{(r)},\dots,\widetilde{a}_{0,m-1}^{(r)}$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{0k}^{(r)}\overline{\widetilde{a}_{0k}^{(r)}} = 1. \tag{48}$$

Для начала рассмотрим случай $a_{00}^{(r)} = \overline{\widetilde{a}_{00}^{(r)}} \neq 1$. Для $k,s=1,\dots,m-1$, остальные элементы матрицы определим следующим образом

$$a_{s0}^{(r)} = \overline{\widetilde{a}_{0s}^{(r)}},\quad a_{sk}^{(r)} = \delta_{sk} - \frac{\overline{\widetilde{a}_{0s}^{(r)}}a_{0k}^{(r)}}{1-a_{00}^{(r)}},$$

$$\widetilde{a}_{s0}^{(r)} = \overline{a_{0s}^{(r)}},\quad \widetilde{a}_{sk}^{(r)} = \delta_{sk} - \frac{\overline{a_{0s}^{(r)}}\widetilde{a}_{0k}^{(r)}}{1-\overline{a_{00}^{(r)}}}.$$

Легко проверить, что

$$A^{(r)}\widetilde{A}^{(r)*} = I_m.$$

Теперь рассмотрим случай $a_{00}^{(r)}\widetilde{a}_{00}^{(r)} \neq 0$. Рассмотрим числа $a_{0k}^{\prime(r)} = Ca_{0k}^{(r)}$, $\widetilde{a}_{0k}^{\prime(r)} = \widetilde{a}_{0k}^{(r)}/\overline{C}$, $k=0,\dots,m-1$, где константа C такая, что $a_{00}^{\prime(r)} = \overline{\widetilde{a}_{00}^{\prime(r)}} \neq 1$. Например, мы можем положить $C = \sqrt{\overline{\widetilde{a}_{00}^{(r)}}/a_{00}^{(r)}}$, выбирая такое значение комплексного корня, что $a_{00}^{\prime(r)} \neq 1$. Эти две изменённые строки удовлетворяют условиям предыдущего случая, и мы можем построить две матрицы $A'^{(r)}$, $\widetilde{A}'^{(r)}$, такие что $A'^{(r)}\widetilde{A}'^{(r)*} = I_m$. Теперь, если мы заменим первые строки этих матриц на исходные $a_{0k}^{(r)}$, $\widetilde{a}_{0k}^{(r)}$, мы получим $A^{(r)}$, $\widetilde{A}^{(r)}$. Наконец, рассмотрим случай $a_{00}^{(r)}\widetilde{a}_{00}^{(r)} = 0$. Из (48) следует, что существует k_0, такое что $a_{0k_0}^{(r)}\widetilde{a}_{0k_0}^{(r)} \neq 0$. Если мы поменяем местами $a_{0k_0}^{(r)}$ с $a_{00}^{(r)}$, и $\widetilde{a}_{0k_0}^{(r)}$ с $\widetilde{a}_{00}^{(r)}$, мы сведём этот случай к предыдущему. Достроив две матрицы и поменяв местами столбцы с номерами 0 и k_0, мы получим $A^{(r)}$, $\widetilde{A}^{(r)}$.

Зафиксируем номера $j=0,\dots,n$ и $r\in D(M^{*j})$. Пусть s_k – произвольным образом пронумерованные цифры матрицы M^*. Положим

$$a_{0k}^{(r)} = \mu_{r+M^{*j}s_k}^{j+1}/\sqrt{m},\quad \widetilde{a}_{0k}^{(r)} = \widetilde{\mu}_{r+M^{*j}s_k}^{j+1}/\sqrt{m}\quad \text{for } k=0,\dots,m-1.$$

По следствию 5, эти числа удовлетворяют (48). Построим матрицы $A^{(r)}$, $\widetilde{A}^{(r)}$ по описанному выше алгоритму. Пусть

$$\alpha_{r+M^{*j}s_k}^{\nu,j} = \sqrt{m}a_{\nu k}^{(r)},\quad \widetilde{\alpha}_{r+M^{*j}s_k}^{\nu,j} = \sqrt{m}\widetilde{a}_{\nu k}^{(r)}.$$

Из равенства $A^{(r)}\widetilde{A}^{(r)*} = I_m$ следует, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{\nu,j}_{r+M^{*j}s_k}\overline{\widetilde{\mu}^{j+1}_{r+M^{*j}s_k}} = 0,\ \sum_{k=0}^{m-1} \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_{r+M^{*j}s_k}\overline{\mu^{j+1}_{r+M^{*j}s_k}} = 0 \tag{49}$$

для всех $\nu = 1,\dots,m-1$, а также

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{l,j}_{r+M^{*j}s_k}\overline{\widetilde{\alpha}^{p,j}_{r+M^{*j}s_k}} = m\delta_{l,p}, \tag{50}$$

для всех $l,p = 1,\dots,m-1$. Если индекс r пробегает всё множество $D(M^{*j})$, то, по лемме 1, векторы $r+M^{*j}s_k$ пробегают всё множество $D(M^{*(j+1)})$. Это значит, что числа $\alpha^{\nu,j}_s$, $\widetilde{\alpha}^{\nu,j}_s$ определены для каждого $s \in D(M^{*(j+1)})$. Мы можем $M^{*(j+1)}$-периодически продолжить их по нижнему индексу на всё множество $D(M^{*n})$. Наконец определим всплеск-функции, задав их коэффициенты Фурье по формулам

$$\widehat{\psi^{(\nu)}_j}(l) := \alpha^{\nu,j}_l \widehat{\varphi_{j+1}}(l), \quad \widehat{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_j}(l) := \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_l \widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(l), \quad l \in D(M^{*n}).$$

Всплеск функции, определённые таким образом, вместе со своими сдвигами, то есть системы $\{S^j_k\psi^{(\nu)}_j\}_{k\in D(M^j);j=1,\dots,n;\nu=1,\dots,m}$, $\{S^j_k\widetilde{\psi}^{(\nu)}_j\}_{k\in D(M^j);j=1,\dots,n;\nu=1,\dots,m}$, мы будем называть двойственными системами всплесков, и будем говорить, что они порождены кратно-масштабными анализами $\{V_j\}^n_{j=0}$, $\{\widetilde{V}_j\}^n_{j=0}$. Также, определим пространства всплесков как

$$W^{(\nu)}_j := \operatorname{span}\{S^j_r\psi^{(\nu)}_j : r \in D(M^j)\},$$
$$\widetilde{W}^{(\nu)}_j := \operatorname{span}\{S^j_r\widetilde{\psi}^{(\nu)}_j : r \in D(M^j)\}.$$

Теорема 21. *Пусть $\{V_j\}^n_{j=0}$, $\{\widetilde{V}_j\}^n_{j=0}$ – пара КМА в $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $\{\varphi_j\}^n_{j=0}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}^n_{j=0}$ – их масштабирующие последовательности, и $\{S^j_r\varphi_j\}_{r\in D(M^j)}$, $\{S^j_k\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ – биортонормированные системы. Тогда*
1. *$W^{(\nu)}_j \subset V_{j+1}$ для всех $\nu = 1,\dots,m-1$;*
2. *любая функция $f_{j+1} \in V_{j+1}$ может быть представлена в виде $f_{j+1} = f_j + \sum_{\nu=1}^{m-1} f^{(\nu)}_j$, где $f_j \in V_j$, $f^{(\nu)}_j \in W^{(\nu)}_j$, $\nu = 1,\dots,m-1$;*
3. *$W^{(\nu)}_j \perp \widetilde{V}_j$, $\widetilde{W}^{(\nu)}_j \perp V_j$ для всех $\nu = 1,\dots,m-1$;*
4. *$W^{(\nu)}_j \perp \widetilde{W}^{(\xi)}_j$ для всех $\nu \neq \xi$, $\nu,\xi = 1,\dots,m-1$;*
5. *$\langle S^j_r\psi^{(\nu)}_j, S^j_k\widetilde{\psi}^{(\nu)}_j\rangle = \delta_{rk}$ для всех $\nu = 1,\dots,m-1$, $r,k \in D(M^j)$.*

Доказательство. Из (46), имеем

$$\omega_r^j\varphi_j = \sum_{l\in D(M^*)} \mu^{j+1}_{r+M^{*j}l}\omega^{j+1}_{r+M^{*j}l}\varphi_{j+1}. \tag{51}$$

Аналогично,

$$\omega_r^j\psi_j^{(\nu)} = \sum_{l\in D(M^*)} \alpha^{\nu,j}_{r+M^{*j}l}\omega^{j+1}_{r+M^{*j}l}\varphi_{j+1}. \tag{52}$$

Равенство (52) влечёт пункт **1**. Рассмотрим (51), (52) как систему, состоящую из m уравнений, относительно переменных $\{\omega^{j+1}_{r+M^{*j}l}\varphi_{j+1}\}$, $l\in D(M^*)$. По определению чисел $\{a^{(r)}_{\nu,k}\}$, матрица этой системы имеет обратную, а значит переменные могут быть выражены через $\omega_r^j\varphi_j\in V_j$, $\omega_r^j\psi_j^{(\nu)}\in W_j^{(\nu)}$. Чтобы доказать пункт **2**, осталось заметить, что $\{\omega^{j+1}_{r+M^{*j}l}\varphi_{j+1}\}$ является базисом пространства V_{j+1}.

С другой стороны,

$$S_r^j\psi_j^{(\nu)} = \sum_{s\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}s,r)}\omega_s^j\psi_j^{(\nu)}, \quad \nu=1,\dots,m-1. \tag{53}$$

Опять, если мы рассмотрим (53) как систему уравнений относительно переменных $\{\omega_s^j\psi_j^{(\nu)}\}$, матрица этой системы будет унитарной, а значит $\omega_s^j\psi_j^{(\nu)}$ могут быть выражены через $S_r^j\psi_j^{(\nu)}$, $r\in D(M^j)$. Более того, так как функции $\omega_s^j\psi_j^{(\nu)}$, $s\in D(M^{*j})$ линейно независимы, из **MR3** следует, что $\dim W_j^{(\nu)}=m^j$, то есть обе системы $\{\omega_s^j\psi_j^{(\nu)}\}_{s\in D(M^{*j})}$ и $\{S_r^j\psi_j^{(\nu)}\}_{r\in D(M^j)}$ являются базисами в $W_j^{(\nu)}$. Для доказательства пункта **3** достаточно проверить, что базисные функции пространств $\widetilde V_j$ ортогональны базисным функциям пространства в $W_j^{(\nu)}$, $\nu=1,\dots,m-1$. Используя (49) и лемму 7, имеем

$$\begin{aligned}
\langle\omega_r^j\psi_j^{(\nu)},\omega_k^j\widetilde\varphi_j\rangle &= \Big\langle \sum_{l\in D(M^*)} \alpha^{\nu,j}_{r+M^{*j}l}\omega^{j+1}_{r+M^{*j}l}\varphi_{j+1}, \sum_{k\in D(M^*)} \widetilde\mu^{j+1}_{r+M^{*j}k}\omega^{j+1}_{r+M^{*j}k}\widetilde\varphi_{j+1}\Big\rangle\\
&= \sum_{l\in D(M^*)} \alpha^{\nu,j}_{r+M^{*j}l}\overline{\widetilde\mu^{j+1}_{r+M^{*j}k}}\langle\omega^{j+1}_{r+M^{*j}l}\varphi_{j+1},\omega^{j+1}_{r+M^{*j}l}\widetilde\varphi_{j+1}\rangle\\
&= m^{-j-1}\sum_{l\in D(M^*)} \alpha^{\nu,j}_{r+M^{*j}l}\overline{\widetilde\mu^{j+1}_{r+M^{*j}k}} = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично, используя (50), имеем

$$\langle\omega_r^j\psi_j^{(\nu)},\omega_k^j\widetilde\psi_j^{(\xi)}\rangle = m^{-j-1}\sum_{l\in D(M^*)} \alpha^{\nu,j}_{r+M^{*j}l}\overline{\widetilde\alpha^{\xi,j}_{r+M^{*j}l}} = m^{-j}\delta_{\nu,\xi}.$$

Из этого следует пункт **4** и, с использованием леммы 7, пункт **5**. $\square$

3.3 Прямое и обратное всплеск-преобразования

В этом параграфе мы находим используемые в приложениях формулы прямого и обратного всплеск-преобразования (формулы декомпозиции и восстановления сигнала). Мы уже показали, что сдвиги масштабирующих функций и всплеск-функций образуют базисы пространств V_j и $W_j^{(\nu)}$, соответственно. Это означает, что для любых функций $f_j \in V_j$ и $f_j^{(\nu)} \in W_j^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, m$ мы можем найти представление вида

$$f_j = \sum_{k \in D(M^j)} C_{j,k} S_k^j \varphi_j, \quad f_j^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k \in D(M^j)} D_{j,k}^{(\nu)} S_k^j \psi_j^{(\nu)},$$

где коэффициенты $C_{j,k}$, $D_{j,k}^{(\nu)}$ определяются единственным образом по функциям f_j и $f_j^{(\nu)}$. Теорема 21 гласит, что любая функция $f_{j+1} \in V_{j+1}$ может быть представлена в виде прямой суммы $f_j \in V_j$ и $f_j^{(\nu)} \in W_j^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, m$. Мы покажем, что если в нашем распоряжении имеются коэффициенты $\{C_{j+1,k}\}_{k \in D(M^{j+1})}$, то мы можем найти и $\{C_{j,k}\}_{k \in D(M^j)}$, $\{D_{j,k}^{(\nu)}\}_{k \in D(M^j)}$, и наоборот, без необходимости вычислять скалярные произведения напрямую.

Дискретное всплеск-преобразование. Для $f \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, положим $C_{j,k}^f := \langle f, S_k^j \varphi_j \rangle$, $D_{j,k}^{f,(\nu)} := \langle f, S_k^j \psi_j^{(\nu)} \rangle$.

Теорема 22. *Пусть $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ – пара КМА в $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^n$ – их масштабирующие последовательности, $\{S_k^j \psi_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, $\{S_k^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ – двойственные системы всплесков, порождённые данными КМА, $\{S_r^j \varphi_j\}_{r \in D(M^j)}$, $\{S_k^j \widetilde{\varphi}_j\}_{k \in D(M^j)}$ – биортонормированные системы, и пусть $f \in \widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. Тогда*

$$C_{j-1,k}^f = \frac{1}{m^j} \sum_{r \in D(M^j)} \theta_{k,r} C_{j,r}^f,$$

$$D_{j-1,k}^{f,(\nu)} = \frac{1}{m^j} \sum_{r \in D(M^j)} \eta_{k,r}^{(\nu)} C_{j,r}^f,$$

для всех $\nu = 1, \dots, m$, $k \in D(M^{j-1})$, $j = 1, \dots, n$, где $\theta_{k,r} = \sum_{l \in D(M^{*j})} \overline{\mu}_l^j e^{2\pi i (M^{*-j} l, r - Mk)}$ и $\eta_{k,r}^{(\nu)} = \sum_{l \in D(M^{*j})} \overline{\alpha_l^{\nu,j-1}} e^{2\pi i (M^{*-j} l, r - Mk)}$.

Доказательство. Рассмотрим (44) как систему уравнений относительно переменных $\{\omega_s^j \varphi_j\}$ и запишем её в матричном виде как

$$(S_r^j \varphi_j)_{r \in D(M^j)} = \sqrt{m^j} \overline{F_j} (\omega_s^j \varphi_j)_{s \in D(M^{*j})},$$

где матрица $F_j = 1/\sqrt{m^j}(e^{-2\pi i(s,M^{-j}r)})_{s\in D(M^{*j}),r\in D(M^j)}$ – матрица дискретного преобразования Фурье, с хорошо известными свойствами $F_j^{-1} = F_j^*$ и $F_j = F_j^T$. Таким образом, мы получаем решение данной системы уравнений

$$(\omega_s^j\varphi_j)_{s\in D(M^{*j})} = \frac{1}{\sqrt{m^j}}F(S_r^j\varphi_j)_{r\in D(M^j)},$$

или

$$\omega_s^j\varphi_j = \frac{1}{m^j}\sum_{r\in D(M^j)} e^{-2\pi i(M^{*-j}s,r)}S_r^j\varphi_j, \quad s\in D(M^{*j}). \tag{54}$$

Учитывая (44), (51) и (54), и используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned}
&\langle f, S_k^{j-1}\varphi_{j-1}\rangle = \sum_{s\in D(M^{*(j-1)})} e^{-2\pi i(M^{*-(j-1)}s,k)}\langle f,\omega_s^{j-1}\varphi_{j-1}\rangle \\
&= \sum_{s\in D(M^{*(j-1)})} e^{-2\pi i(M^{*-(j-1)}s,k)}\sum_{p\in D(M^*)}\overline{\mu^j_{s+M^{*(j-1)}p}}\langle f,\omega^j_{s+M^{*(j-1)}p}\varphi_j\rangle \\
&= \frac{1}{m^j}\sum_{s\in D(M^{*(j-1)})} e^{-2\pi i(M^{*-(j-1)}s,k)}\sum_{p\in D(M^*)}\overline{\mu^j_{s+M^{*(j-1)}p}}\sum_{r\in D(M^j)} e^{2\pi i(M^{*-j}(s+M^{*(j-1)}p),r)}\langle f,S_r^j\varphi_j\rangle \\
&= \frac{1}{m^j}\sum_{s\in D(M^{*(j-1)})}\sum_{p\in D(M^*)} e^{-2\pi i(M^{*-(j-1)}(s+M^{*(j-1)}p),k)}\overline{\mu^j_{s+M^{*(j-1)}p}}\times \\
&\quad\times\sum_{r\in D(M^j)} e^{2\pi i(M^{*-j}(s+M^{*(j-1)}p),r)}\langle f,S_r^j\varphi_j\rangle \\
&= \frac{1}{m^j}\sum_{l\in D(M^{*j})} e^{-2\pi i(M^{*-(j-1)}l,k)}\overline{\mu_l^j}\sum_{r\in D(M^j)} e^{2\pi i(M^{*-j}l,r)}\langle f,S_r^j\varphi_j\rangle \\
&= \frac{1}{m^j}\sum_{r\in D(M^j)}\langle f,S_r^j\varphi_j\rangle\sum_{l\in D(M^{*j})}\overline{\mu_l^j}e^{2\pi i(M^{*-j}l,r-Mk)}.
\end{aligned}$$

Аналогично этому, но используя (52), (53), получаем

$$\langle f, S_k^{j-1}\psi_{j-1}^{(\nu)}\rangle = \frac{1}{m^j}\sum_{r\in D(M^j)}\langle f,S_r^j\varphi_j\rangle\sum_{l\in D(M^{*j})}\overline{\alpha_l^{\nu,j-1}}e^{2\pi i(M^{*-j}l,r-Mk)}.$$

□

Обратное дискретное всплеск-преобразование. В следующей теореме представлены формулы восстановления для дискретного всплеск-преобразования.

Теорема 23. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^n$ *– пара КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^n$ *– их масштабирующие последовательности,* $\{S_k^j\psi_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, $\{S_k^j\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ *– двойственные системы всплесков, порождённые этими КМА, и* $\{S_r^j\varphi_j\}_{r\in D(M^j)}$, $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ *– биортонормированные системы, и пусть* $f\in\widetilde{\mathbb{C}}_{M^n}$. *Тогда*

$$C_{j,k}^f=\frac{1}{m^j}\sum_{p\in D(M^{j-1})}\big(\sigma_{k,p}^{(0)}C_{j-1,p}+\sum_{\nu=1}^{m-1}\sigma_{k,p}^{(\nu)}D_{j-1,p}^{f,(\nu)}\big),$$

для всех $k\in D(M^j)$, $j=1,\dots,n$, *где* $\sigma_{k,p}^{(0)}=\sum_{s\in D(M^{*j})}\widetilde{\mu}_s^j e^{2\pi i(M^{*-j}s,Mp-k)}$, *и* $\sigma_{k,p}^{(\nu)}=\sum_{s\in D(M^{*j})}\widetilde{\alpha}_s^{\nu,j-1}e^{2\pi i(M^{*-j}s,Mp-k)}$ *for* $\nu=1,\dots,m-1$.

Доказательство. Для удобства записи, обозначим $\widetilde{\alpha}_k^{0,j-1}:=\widetilde{\mu}_k^j$, и $\psi_{j-1}^{(0)}:=\varphi_{j-1}$.

Рассмотрим равенства (51), (52) как системы из m уравнений относительно переменных $\{\omega_{r+M^{*j}l}^{j+1}\varphi_{j+1}\}$. Тогда матрица этой системы $\sqrt{m}A^{(r)}$, которая обратима по определению её элементов $\{a_{\nu,k}^{(r)}\}$, и $(\sqrt{m}A^{(r)})^{-1}=1/\sqrt{m}\widetilde{A}^{(r)*}$. Таким образом, мы находим решение

$$\omega_{r+M^{*(j-1)}l}^j\varphi_j=\frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1}\overline{\widetilde{\alpha}_{r+M^{*(j-1)}l}^{\nu,j-1}}\omega_r^{j-1}\psi_{j-1}^{(\nu)},\tag{55}$$

для всех $l\in D(M^*)$. Мы также можем решить систему и для всех $r\in D(M^{*(j-1)})$

Аналогично (54), имеем

$$\omega_s^j\psi_j^{(\nu)}=\frac{1}{m^j}\sum_{r\in D(M^j)}e^{-2\pi i(M^{*-j}s,r)}S_r^j\psi_j^{(\nu)},\quad s\in D(M^{*j}).\tag{56}$$

Используя (44), (54), (55) и (56), а также лемму 1, получаем

$$\langle f, S_k^j \varphi_j \rangle = \sum_{s \in D(M^{*j})} e^{-2\pi i (M^{*-j} s, k)} \langle f, \omega_s^j \varphi_j \rangle$$

$$= \sum_{r \in D(M^{*(j-1)})} \sum_{l \in D(M^*)} e^{-2\pi i (M^{*-j}(r + M^{*(j-1)} l), k)} \langle f, \omega^j_{r + M^{*(j-1)} l} \varphi_j \rangle$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{r \in D(M^{*(j-1)})} \sum_{l \in D(M^*)} e^{-2\pi i (M^{*-j}(r + M^{*(j-1)} l), k)} \sum_{\nu=0}^{m-1} \widetilde{\alpha}^{\nu, j-1}_{r + M^{*(j-1)} l} \langle f, \omega_r^{j-1} \psi_{j-1}^{(\nu)} \rangle$$

$$= \frac{1}{m^j} \sum_{r \in D(M^{*(j-1)})} \sum_{l \in D(M^*)} e^{-2\pi i (M^{*-j}(r + M^{*(j-1)} l), k)} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{m-1} \widetilde{\alpha}^{\nu, j-1}_{r + M^{*(j-1)} l} \sum_{p \in D(M^{j-1})} e^{2\pi i (M^{*-(j-1)} r, p)} \langle f, S_p^{j-1} \psi_{j-1}^{(\nu)} \rangle$$

$$= \frac{1}{m^j} \sum_{s \in D(M^{*j})} e^{-2\pi i (M^{*-j} s, k)} \sum_{\nu=0}^{m-1} \widetilde{\alpha}_s^{\nu, j-1} \sum_{p \in D(M^{j-1})} e^{2\pi i (M^{*-(j-1)} s, p)} \langle f, S_p^{j-1} \psi_{j-1}^{(\nu)} \rangle$$

$$= \frac{1}{m^j} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{p \in D(M^{j-1})} \langle f, S_p^{j-1} \psi_{j-1}^{(\nu)} \rangle \sum_{s \in D(M^{*j})} \widetilde{\alpha}_s^{\nu, j-1} e^{2\pi i (M^{*-j} s, Mp - k)}.$$

□

Замечание 3. Если мы обозначим через r_q и k_p, $q = 0, \dots, m^j - 1$, $p = 0, \dots, m^{j-1} - 1$, произвольным образом пронумерованные цифры матриц M^j и M^{j-1}, соответственно, то формулы теоремы 22 могут быть записаны в матричном виде как

$$C_{j-1}^f = \frac{1}{m^j} \Theta_j C_j^f,$$
$$D_{j-1}^{f,(\nu)} = \frac{1}{m^j} H_j^{(\nu)} C_j^f,$$

для всех $\nu = 1, \dots, m-1$, где $C_j^f = (C^f_{j, r_0}, \dots, C^f_{j, r_{m^j - 1}})^T$, $D_{j-1}^{f,(\nu)} = (D^{f,(\nu)}_{j-1, r_0}, \dots, D^{f,(\nu)}_{j, r_{m^{j-1} - 1}})^T$, а Θ_j и $H_j^{(\nu)}$ это матрицы вида

$$\Theta_j = (\theta_{k_p, r_q})_{p=0,\dots,m^{j-1}-1, q=0,\dots,m^j-1},$$
$$H_j^{(\nu)} = (\eta^{(\nu)}_{k_p, r_q})_{p=0,\dots,m^{j-1}-1, q=0,\dots,m^j-1}.$$

Аналогично, если мы обозначим через k_q and p_s, $q = 0, \dots, m^j - 1$, $s = 0, \dots, m^{j-1} - 1$, произвольным образом пронумерованные цифры матриц M^j и M^{j-1}, соответственно, то формулы теоремы 23 могут быть записаны в матричном виде как

$$\begin{pmatrix} C^f_{j,k_0} \\ C^f_{j,k_1} \\ \vdots \\ C^f_{j,k_{m^j-1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m^j} \begin{pmatrix} \sigma^{(0)}_{k_0,p_0} & \cdots & \sigma^{(0)}_{k_0,p_{m^{j-1}-1}} & \sigma^{(1)}_{k_0,p_0} & \cdots & \sigma^{(m-1)}_{k_0,p_{m^{j-1}-1}} \\ \sigma^{(0)}_{k_1,p_0} & \cdots & \sigma^{(0)}_{k_1,p_{m^{j-1}-1}} & \sigma^{(1)}_{k_1,p_0} & \cdots & \sigma^{(m-1)}_{k_1,p_{m^{j-1}-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^{(0)}_{k_{m^j-1},p_0} & \cdots & \sigma^{(0)}_{k_{m^j-1},p_{m^{j-1}-1}} & \sigma^{(1)}_{k_{m^j-1},p_0} & \cdots & \sigma^{(m-1)}_{k_{m^j-1},p_{m^{j-1}-1}} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} C^f_{j-1,p_0} \\ \vdots \\ C^f_{j-1,p_{m^{j-1}-1}} \\ D^{f,(1)}_{j-1,p_0} \\ \vdots \\ D^{f,(1)}_{j-1,p_{m^{j-1}-1}} \\ D^{f,(2)}_{j-1,p_0} \\ \vdots \\ D^{f,(m-1)}_{j-1,p_{m^{j-1}-1}} \end{pmatrix}.$$

4 Точные постоянные в оценках для многомерного базиса всплесков Хаара

В этой главе исследуются аппроксимационные свойства многомерного базиса Хаара и решаются классические задачи теории приближений. В частности, для этого базиса будут доказаны прямая и обратная аппроксимационные теоремы с точными постоянными, а для двумерного случая будут найдены точные оценки отклонений сумм Фурье-Хаара.

Многомерный сепарабельный базис Хаара

Для начала уточним, в каком смысле мы понимаем d-мерный базис Хаара. Существует стандартный способ распространения ортогонального базиса на случай многих переменных: многомерный базис определяется как тензорное произведение d одномерных базисов. Свойства разложений по двумерному базису, который получается таким способом из базиса Хаара на прямой, изучались рядом авторов – например, в работе [3]. Однако, с точки зрения теории всплесков больший интерес представляет другой подход. Если имеется базис всплесков в $L_2(\mathbb{R})$, построенный по схеме кратномасштабного анализа (КМА) $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, то рассматривается тензорное произведение $\{V_j \bigotimes V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ этого кратномасштабного анализа на себя. Полученная конструкция является КМА в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и носит название *сепарабельного КМА*. Теперь, если мы определим пространства всплесков $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, следуя стандартной схеме, то получим, в отличие от одномерного случая, не одну, а несколько всплеск-функций, сжатия и целочисленные сдвиги которых образуют базис в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Подробнее этот процесс построения описан, например, в [6, §2.1].

Применим этот подход к базису Хаара. Одномерный непериодический базис Хаара порождён КМА, где $\varphi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$ – масштабирующая функция, и $\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1)$ – всплеск-функция. Всплеск-функции, порождённые соответствующим d-мерным сепарабельным КМА определяются по формулам

$$\widetilde{\psi}_e(x) := \left(\prod_{\nu\in e} \psi(x_\nu)\right)\left(\prod_{\mu\notin e} \varphi(x_\mu)\right), \quad e \in \mathcal{P}'(\{1,\ldots,d\}),\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{57}$$

Их нормализованные двоичные сжатия и целочисленные сдвиги

$$2^{\frac{di}{2}}\widetilde{\psi}_e(2^i x + m), \quad i \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}^d,\ e \in \mathcal{P}'(\{1,\ldots,d\}), \tag{58}$$

образуют ортонормальный базис в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Заметим, что множество $\mathcal{P}'(\{1,\ldots,d\})$ состоит из $2^d - 1$ элементов, и, пронумеровав их произвольным образом, мы можем дать более простое обозначение для (58):

$$2^{\frac{di}{2}}\widetilde{\psi}_s(2^i x + m), \quad i \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}^d,\ s = 1,\ldots,2^d - 1. \tag{59}$$

Стандартным образом периодизируя эти функции и добавив к этому набору функций тождественную постоянную, получим периодический базис Хаара на $\mathbb{R}^d$, о котором далее и будет идти речь.

Предоставим конкретную нумерацию для данного базиса. В силу периодичности полученных функций, при каждом фиксированном i останется лишь 2^{di} различных функций. Заметим также, что каждая периодизированная функция совпадает с одной из функций (59) на $[0,1)^d$. Пусть

$$n = 2^{di} + (2^d - 1)l + r, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad l = 0, \dots, 2^{di} - 1, \quad r = 1, \dots, 2^d - 1, \tag{60}$$

и пусть $m_{i,0}, \dots, m_{i,2^{di}-1}$ – произвольным образом пронумерованные векторы из $\mathbb{Z}^d$, чьи координаты пробегают от 0 до $2^i - 1$. Для $n \geqslant 2$, через ψ_n обозначим 1-периодическую функцию, определённую на $[0,1)^d$ как $\psi_n(x) = 2^{\frac{di}{2}} \widetilde{\psi}_r(2^i x - m_{i,l})$, и положим $\psi_1(x) \equiv 1$. Теперь, система $\{\psi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ и есть наш периодический базис Хаара.

Поясним роль параметров i, l, r в (60). Функции $\psi_2, \dots, \psi_{2^d}$ ассоциированы с $i = 0$. Каждая из этих функций совпадает с одной из функций $\widetilde{\psi}_s$, $s = 1, \dots, 2^d - 1$, на $[0,1)^d$. Для каждого номера n, ассоциированного с $i > 0$, функция $\psi_n\big|_{[0,1)^d}$ является сжатой и сдвинутой "копией" функции $\widetilde{\psi}_s$ для некоторого $s = 1, \dots, 2^d - 1$, при этом степень сжатия зависит от i, номер l отвечает за расположение носителя функции внутри $[0,1)^d$, а r обозначает тип функции (если $r = 1$, то ψ_n является "копией" функции $\widetilde{\psi}_1$, и т.д.).

Пусть номер n определён по формуле (60). Носитель функции $\psi_n\big|_{[0,1)^d}$ – d-мерный куб со стороной длины 2^{-i}, и это не зависит от номера r. Обозначим через $\delta_l = \delta_{l,i}$ кубическую ячейку $[x_1', x_1'') \times \ldots \times [x_d', x_d'')$, такую что $\operatorname{supp} \psi_n\big|_{[0,1)^d} = \overline{\delta_l}$. Для каждого l, разобьём δ_l на кубические ячейки со стороной длины 2^{-i-1}. Произвольным образом пронумеровав эти более мелкие ячейки от 0 до $2^d - 1$, обозначим их через $\delta_l^{(s)} = \delta_{l,i}^{(s)}$, $s = 0, \dots, 2^d - 1$.

Конечные линейные комбинации функций ψ_k называются полиномами Хаара, H_n обозначает пространство полиномов Хаара степени n. Наилучшее приближение функции $f \in C(\mathbb{T}^d)$ порядка n определяется как

$$E_n(f) := \inf_{p \in H_n} \|f - p\|_\infty.$$

4.1 Неравенства типа Джексона

Теорема Джексона в классическом варианте утверждает, что

$$\mathcal{E}_n(f) \leqslant C\omega\Big(f; \frac{\pi}{n}\Big), \tag{61}$$

где f – 2π-периодическая непрерывная функция, $\mathcal{E}_n(f)$ – её наилучшее приближение тригонометрическими полиномами степени n, ω – модуль непрерывности функции f.

Также хорошо известно, что $C = 1$ является точной константой в (61) (см., например, [27, §6.2]). Многомерный аналог неравенства (61) выглядит как

$$\mathcal{E}_n(f) \leqslant C \sum_{k=1}^{d} \omega_k \left(f; \frac{\pi}{n_k} \right), \tag{62}$$

где $n = (n_1, \ldots, n_d)$. Значение точной константы для многомерного случая неизвестно.

Неравенство типа Джексона для наилучших приближений полиномами Хаара одной переменной

$$E_n(f) \leqslant C\omega \left(f; \frac{1}{n} \right),$$

с константой $C = 12$ следует из результатов Б. Сёкефальви-Надя [38]. Позднее Б. Голубов доказал [4], что константа $C = 1$ является точной в данном неравенстве. Он также доказал следующую обратную теорему

$$\omega \left(f; \frac{1}{n} \right) \leq 6E_n(f).$$

Аппроксимационные свойства многомерных базисов Хаара также изучались в литературе (см. [3] и указанные в этой работе ссылки). В этих работах изучались многомерные базисы, полученные из одномерных базисов с помощью их тензорного произведения на себя.

В этом параграфе мы рассматриваем многомерные системы Хаара, полученные периодизацией сепарабельного базиса Хаара. Изучаются равномерные наилучшие приближения $E_n(f)$ в соответствующих пространствах полиномов. Для некоторых номеров n, пространство полиномов является собственным подпространством пространства кусочно-постоянных функций. В этих случаях возникает интересный феномен: точное неравенство типа Джексона не определяется единственным образом.

4.1.1 Прямые аппроксимационные теоремы

В этом разделе мы получим оценку типа Джексона для наилучшего приближения $E_n(f)$. Для начала докажем простую лемму, представляющую собой многомерный аналог формулы (10.1.11) из книги [2]:

Лемма 8. *Если* $n = 2^{di} + (2^d - 1)l + 2^d - 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 2^{di} - 1$, *то*

$$E_n(f) = \frac{1}{2} \max \Big\{ \max_{\substack{k=0,\ldots,l \\ s=0,\ldots,2^d-1}} \sup_{x,y \in \delta_k^{(s)}} \big| f(x) - f(y) \big|, \max_{k=l+1,\ldots,2^{di}-1} \sup_{x,y \in \delta_k} \big| f(x) - f(y) \big| \Big\}.$$

Доказательство. По определению, функции $\psi_1, \dots, \psi_n$ постоянны на каждом из множеств

$$\delta_k^{(s)}, \quad k = 0, \dots, l, \ s = 0, \dots, 2^d - 1; \tag{63}$$

$$\delta_k, \quad k = l+1, \dots, 2^{di} - 1. \tag{64}$$

Следовательно, любой полином $p \in H_n$ постоянен на каждом из множетсв (63), (64). Учитывая, что количество этих множеств равно n, мы можем утверждать, что пространство H_n совпадает с линейным пространством функций, постоянных на множествах (63), (64), и любой полином $p \in H_n$ может быть разложен по другому базису в этом линейном пространстве: базису характеристических функций множеств (63), (64), что влечёт за собой утверждение леммы 8. □

Теорема 24. *Пусть $f \in C(\mathbb{T}^d)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \omega_k\left(f; \frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right) \leqslant d \max_k \omega_k\left(f; \frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right), \tag{65}$$

и, более того,

1. d является точной константой, и правую сторону неравенства нельзя заменить на $K \max_k \omega_k(f; \gamma_n)$, где $\gamma_n = o\left(\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$, или на $d \max_k \omega_k(f; \frac{\lambda}{\sqrt[d]{n}})$, где $\lambda < 1$;

2. сумму $\sum_{k=1}^{d} \omega_k\left(f; \frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$ нельзя заменить на $\sum_{k=1}^{d} c_k \omega_k\left(f; \frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$, где $c_k < 1$ хотя бы для одного из номеров k, или на $K \sum_{k=1}^{d} \omega_k(f; \gamma_{nk})$, где $\gamma_{nk} = o\left(\frac{1}{\sqrt[d]{n}}\right)$ хотя бы для одного из номеров k, или на $\sum_{k=1}^{d} \omega_k\left(f; \frac{\lambda_k}{\sqrt[d]{n}}\right)$, где $\lambda_k < 1$ хотя бы для одного из номеров k.

Доказательство. Если $n = 1$, тогда очевидно, что

$$E_1(f) = \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [0,1)^d} \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \omega_k(f; 1).$$

Пусть $n = 2^{d(j+1)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Так как $n = 2^{dj} + (2^d - 1)l + 2^d - 1$, где $l = 2^{dj} - 1$, из леммы 8 следует, что

$$E_n(f) = \frac{1}{2} \max_{\substack{k=0,\dots,2^{dj}-1 \\ s=0,\dots,2^d-1}} \sup_{x,y \in \delta_k^{(s)}} \left|f(x) - f(y)\right|.$$

Очевидно, если $x, y \in \delta_k^{(s)}$, то

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{d} \omega_k\left(f; \frac{1}{2^{j+1}}\right).$$

Таким образом, для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$, получаем

$$E_{2^{di}}(f) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \omega_k\left(f; \frac{1}{2^i}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \omega_k\left(f; \frac{1}{2^{i+1}}\right).$$

Учитывая, что наилучшие приближения $E_n(f)$ образуют убывающую последовательность, для любого $n = 2^{di}, 2^{di}+1, \ldots, 2^{d(i+1)}-1$ мы можем утверждать, что

$$E_n(f) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \omega_k\left(f; \frac{1}{2^{i+1}}\right) \leqslant d \max_k \omega_k\left(f; \frac{1}{2^{i+1}}\right), \tag{66}$$

и, так как $\dfrac{1}{\sqrt[d]{n}} > \dfrac{1}{2^{i+1}}$, неравенство (65) доказано.

Покажем, что константа d в (66) является точной. Положим

$$n = 2^{d(i+1)} - (2^d - 1) = 2^{di} + (2^d - 1)(2^{di} - 2) + (2^d - 1), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{67}$$

Заметим, что n удовлетворяет условиям леммы 8, и среди множеств (64) существует единственное множество с номером $k = 2^{di} - 1$. Пусть $\delta_{2^{di}-1} = [x_1', x_1'') \times \ldots \times [x_d', x_d'')$. Для каждого $k = 1, \ldots, d$, положим

$$g_k(t) = g_{i,k}(t) = \frac{t - x_k'}{x_k'' - x_k'}, \quad t \in [x_k', x_k'').$$

Легко видеть, что $\omega\big(g_k; h\big) = 2^i h$ для $h \leqslant 2^{-(i+1)}$. Определим функцию f_i на $\delta_{2^{di}-1}$ как $f_i(x) = \sum\limits_{k=1}^{d} g_k(x_k)$. Так как $i \in \mathbb{N}$, мы можем продолжить эту функцию на $\mathbb{R}^d$ так, что $f_i \in C(\mathbb{T}^d)$ и $\omega_k\big(f_i; h\big) = 2^i h$ for $h \leqslant 2^{-(i+1)}$ для всех k. С другой стороны, в силу леммы 8,

$$E_n(f_i) \geqslant \frac{1}{2} \sup_{x,y \in \delta_{2^{di}-1}} \left|f_i(x) - f_i(y)\right| = \frac{d}{2}.$$

Это доказывает точность константы d в (66). Выбирая индекс i достаточно большим и учитывая равномерную непрерывность функции $\omega_k(f; t)$, мы получаем оба утверждения пункта 1.

Для доказательства пункта 2 зафиксиурем номер $m = 1, \dots, d$. Как и выше, пусть номер n задан по формуле (67). Определим функцию $f_{i,m}$ на $\delta_{2^{di}-1}$ как $f_{i,m}(x) = g_{i,m}(x_m)$. Аналогично, мы можем продолжить эту функцию на всё пространство $\mathbb{R}^d$ так, что $f_{i,m} \in C(\mathbb{T}^d)$ и $\omega_m\bigl(f_{i,m}; h\bigr) = 2^i h$ для $h \leqslant 2^{-(i+1)}$, а $\omega_k\bigl(f_{i,m}; h\bigr) \equiv 0$ для любых $k \neq m$. В силу леммы 8,

$$E_n(f_{i,m}) \geqslant \frac{1}{2} \sup_{x,y \in \delta_{2^{di}-1}} \bigl|f_{i,m}(x) - f_{i,m}(y)\bigr| = \frac{1}{2}.$$

Выбирая индекс i достаточно большим и учитывая равномерную непрерывность функции $\omega_k(f; t)$, мы получаем все утверждения пункта 2.

$\square$

Теперь мы получим уточнение констант из (65) для определённых типов номеров n для случая $d = 2$. Сначала, определим конкретную нумерацию для (57). Пусть

$$\widetilde{\psi}_1(x) = \psi(x_1)\varphi(x_2), \quad \widetilde{\psi}_2(x) = \varphi(x_1)\psi(x_2), \quad \widetilde{\psi}_3(x) = \psi(x_1)\psi(x_2).$$

Эти всплеск-функции образуют базис Хаара на $\mathbb{R}^2$, как это было описано в разделе 4. Пронумеруем $\delta_k^{(s)}$ по часовой стрелке так, чтобы $\delta_k^{(0)}$ был ближайшим к началу координат.

Лемма 9. *Пусть $n = 4^i + 3(4^i - 1) + 2$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция $f \in H_n$ тогда и только тогда, когда она постоянна на $\delta_k^{(s)}$, $k = 0, \dots, 4^i - 1$, $s = 0, \dots, 3$, и удовлетворяет условию*

$$f(x^0) + f(x^2) = f(x^1) + f(x^3), \quad x^s \in \delta_{4^i-1}^{(s)}. \tag{68}$$

Доказательство. Пусть $f \in H_n$, $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$. Так как число $n - 2$ удовлетворяет условиям леммы 8, сумма $\sum_{k=1}^{n-2} c_k \psi_k$ постоянна на множествах δ_{4^i-1}, $\delta_k^{(s)}$, $k = 0, \dots, 4^i-2$, $s = 0, \dots, 3$. Так, если $x \in \delta_{4^i-1}$, то

$$f(x) = \widetilde{c}\chi_{\delta_{4^i-1}}(x) + c_{n-1}\psi_{n-1}(x) + c_n\psi_n(x).$$

Отсюда следует, что

$$f(x) = \begin{cases} a + b + \widetilde{c}, & x \in \delta_{4^i-1}^{(0)}, \\ a - b + \widetilde{c}, & x \in \delta_{4^i-1}^{(1)}, \\ -a - b + \widetilde{c}, & x \in \delta_{4^i-1}^{(2)}, \\ -a + b + \widetilde{c}, & x \in \delta_{4^i-1}^{(3)}, \end{cases}$$

где $a = 2^i c_{n-1}$, $b = 2^i c_n$, и следовательно $f(x^0) + f(x^2) = f(x^1) + f(x^3)$, где $x^s \in \delta^{(s)}_{4^i-1}$.

Теперь предположим, что функция f постоянна на δ_{4^i-1}, $\delta^{(s)}_k$, $k = 0, \dots, 4^i - 2$, $s = 0, \dots, 3$, и удовлетворяет условию (68). Если $x \in [0,1)^2 \setminus \delta_{4^i-1}$, то, используя лемму 8 и учитывая, что $\psi_{n-1}(x) = \psi_n(x) = 0$, получаем $f(x) = \sum_{k=1}^{n-2} c_k \psi_k(x)$.

Без потери общности, предположим, что $f(x^0) + f(x^2) = f(x^1) + f(x^3) = 0$, где $x^s \in \delta^{(s)}_{4^i-1}$. Система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(x^0), \\ x_1 - x_2 = f(x^1), \\ -x_1 - x_2 = f(x^2), \\ -x_1 + x_2 = f(x^3), \end{cases}$$

имеет единственное решение. Действительно, так как $f(x^0) = -f(x^2)$, $f(x^1) = -f(x^3)$, мы можем свести эту систему к

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(x^0), \\ x_1 - x_2 = f(x^1), \end{cases}$$

Отсюда следует, что $f(x) = 2^{-i} x_1 \psi_{n-1}(x) + 2^{-i} x_2 \psi_n(x)$, когда $x \in \delta_{4^i-1}$. Учитывая, что $\psi_1(x), \dots, \psi_{n-2}(x) = 0$ для $x \in \delta_{4^i-1}$, получаем $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$, где $c_{n-1} = 2^{-i} x_1$, $c_n = 2^{-i} x_2$. $\square$

Теорема 25. *Пусть $f \in C(\mathbb{T}^2)$, $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{N}$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \begin{cases} \omega_{1,i+1} + \omega_{2,i+1}, \quad l = 0, \dots, 4^i - 2,\ r = 1, 2, 3, & (69) \\ \dfrac{1}{2}\omega_{1,i+1} + \omega_{2,i+1}, \quad l = 4^i - 1,\ r = 1, & (70) \\ \alpha\omega_{1,i+1} + \beta\omega_{2,i+1}, \quad \alpha, \beta \geqslant \dfrac{1}{2}, \quad \alpha + \beta = \dfrac{3}{2}, \quad l = 4^i - 1,\ r = 2, & (71) \\ \dfrac{1}{2}\omega_{1,i+1} + \dfrac{1}{2}\omega_{2,i+1}, \quad l = 4^i - 1,\ r = 3, & (72) \end{cases}$$

где $\omega_{j,m} = \omega_j(f; 2^{-m})$. Более того,

(1) оценки (69), (70), (72) точны, то есть ни одна из констант при модулях непрерывности не может быть уменьшена;

(2) оценка в (71) точна, и правую сторону неравенства нельзя заменить на сумму $\alpha'\omega_{1,i+1} + \beta'\omega_{2,i+1}$, где $\min\{\alpha', \beta'\} < \frac{1}{2}$.

Доказательство. Оценки (69), (72), а также их точность, следуют из теоремы 24.

Если $n = 4^i + 3(4^i - 1) + 1$, то полином $p = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k$ постоянен на множествах

$$\begin{gathered}\delta_k^{(s)}, \quad k = 0, \dots, 4^i - 2,\ s = 0, \dots, 3,\\ \delta_{4^i-1}^{(0)} \cup \delta_{4^i-1}^{(1)}, \delta_{4^i-1}^{(2)} \cup \delta_{4^i-1}^{(3)},\end{gathered}$$

и количество этих множеств равно n, поэтому мы можем разложить этот полином по базису характеристических функций. Таким образом, доказательство неравенства (70) и его точности аналогично доказательству неравенства (69) и его точности.

Пусть $n = 4^i + 3(4^i - 1) + 2$. Мы уже доказали неравенство (70) для $E_{n-1}(f)$, а значит (70) верно и для $E_n(f)$. Чтобы получить симметричную оценку, то есть с первым коэффициентом, равным 1, и со вторым равным $1/2$ для $E_n(f)$, рассмотрим пространство полиномов $p = \sum\limits_{k=1}^{n-2} c_k\psi_k + c_n\psi_n$ вместо H_{n-1}. Так,

$$\begin{aligned}E_n(f) &\leqslant \frac{1}{2}\omega_1\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) + \omega_2\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big),\\ E_n(f) &\leqslant \omega_1\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) + \frac{1}{2}\omega_2\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big).\end{aligned}$$

Пусть теперь $\alpha, \beta \geqslant \frac{1}{2}$, $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$. Так как $2 - 2\alpha \geqslant 0$ и $2\alpha - 1 \geqslant 0$, имеем

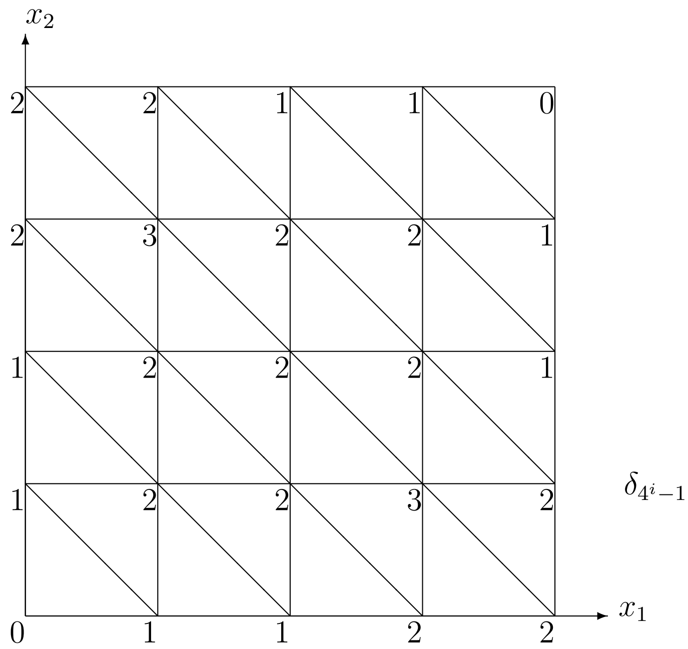
$$E_n(f) = (2 - 2\alpha)E_n(f) + (2\alpha - 1)E_n(f) \leqslant$$

$$(2 - 2\alpha)\Big(\frac{1}{2}\omega_1\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) + \omega_2\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big)\Big) + (2\alpha - 1)\Big(\omega_1\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) + \frac{1}{2}\omega_2\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big)\Big) =$$

$$\alpha\omega_1\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) + \Big(\frac{3}{2} - \alpha\Big)\omega_2\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) = \alpha\omega_1\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) + \beta\omega_2\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big),$$

что доказывает (71). Чтобы проверить точность этой оценки, рассмотрим кусочно-линейную функцию f_i, определённую на $\overline{\delta_{4^i-1}}$ как показано на [Рис. 1].

Рис. 1. Функция f_i на $\overline{\delta_{4^i-1}}$. Она линейна на каждом треугольнике сетки. Числа обозначают её значения в узлах сетки.



Очевидно,

$$\omega_1\Big(f_i; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) = \omega_2\Big(f_i; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) = 1. \tag{73}$$

Так как $i > 0$, мы можем продолжить эту функцию на $\mathbb{R}^2$ так, чтобы $f_i \in C(\mathbb{T}^2)$ и при этом выполнялось (73). Из леммы 9 следует, что полином наилучшего приближения тождественно равен $3/2$ на δ_{4^i-1}. Таким образом,

$$E_n(f_i) = \frac{3}{2} = \alpha\omega_1\Big(f_i; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) + \beta\omega_2\Big(f_i; \frac{1}{2^{i+1}}\Big).$$

Правая часть в (71) не может быть заменена на $\alpha'\omega_{1,i+1} + \beta'\omega_{2,i+1}$, где $\min\{\alpha', \beta'\} < \frac{1}{2}$, так как $E_{n+1}(f) \leqslant E_n(f)$ и константы при модулях непрерывности в (72) не могут быть заменены на меньшие. Таким образом, теорема 25 доказана. $\square$

4.1.2 Обратные аппроксимационные теоремы

Теорема 26. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T}^d)$, $m = 1, \ldots, d$, $n = 2^{di} + (2^d - 1)l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 2^{di} - 1$, $r = 1, \ldots, 2^d - 1$. *Тогда*

$$\omega_m\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) \leqslant 4E_n(f), \tag{74}$$

где 4 *является точной константой в (74).*

Доказательство. Так как $n \leqslant 2^{d(i+1)}$, а значит и $E_{2^{d(i+1)}}(f) \leqslant E_n(f)$, достаточно доказать (74) для $n = 2^{d(i+1)} = 2^{di} + (2^d - 1)(2^{di} - 1) + 2^d - 1$. По определению ω_m, существуют векторы $x', x'' \in \mathbb{R}^d$, такие что $x' \in [0,1)^d$, $|x'_m - x''_m| \leqslant 2^{-i-1}$, $x'_j = x''_j$ при $j \neq m$, и

$$\omega_m\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) = |f(x') - f(x'')|. \tag{75}$$

В силу леммы 8,

$$E_{2^{d(i+1)}}(f) \geqslant \frac{1}{2} \sup_{x,y \in \delta_k^{(s)}} |f(x) - f(y)| \tag{76}$$

для всех $k = 0, \ldots, 2^{di} - 1$, $s = 0, \ldots, 2^d - 1$. Возможно выполнение лишь одного из следующих трёх условий:

1. Существуют номера k_0, s_0, такие что $x', x'' \in \delta_{k_0}^{(s_0)}$. В этом случае,

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant 2E_{2^{d(i+1)}}(f). \tag{77}$$

2. Существуют номера k', s', k'', s'', такие что $x' \in \delta_{k'}^{(s')} =: \delta'$, $x'' \in \delta_{k''}^{(s'')} =: \delta''$. В этом случае существует $x^* \in \overline{\delta'} \cap \overline{\delta''}$, такой что $x^*_j = x'_j$ при $j \neq m$, $|x'_m - x^*_m| \leqslant 2^{-i-1}$, $|x''_m - x^*_m| \leqslant 2^{-i-1}$. Из (76) следует, что

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x^*)| + |f(x'') - f(x^*)| \leqslant 4E_{2^{d(i+1)}}(f).$$

3. Существуют номера k', s', k'', s'', такие что $x' \in \delta_{k'}^{(s')} =: \delta'$, $x'' \pm e_m \in \delta_{k''}^{(s'')} =: \delta''$. В этом случае, существует $x^* \in \overline{\delta'}$, такой что $x^* \pm e_m \in \overline{\delta''}$, $x^*_j = x'_j$ при $j \neq m$, $|x'_m - x^*_m| \leqslant 2^{-i-1}$, $|x''_m - x^*_m| \leqslant 2^{-i-1}$. Согласно (76), из этого следует

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x^*)| + |f(x'' \pm e_m) - f(x^* \pm e_m)| \leqslant 4E_{2^{d(i+1)}}(f). \tag{78}$$

Объединяя (77)-(78) с (75), получаем (74) для $n = 2^{d(i+1)}$.

Теперь построим функцию $f_i \in C(\mathbb{T}^d)$, такую что

$$\omega_m\Big(f_i; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) = 4E_{2^{d(i+1)}}(f_i). \tag{79}$$

Пусть δ' это одно из множеств $\delta_k^{(s)}$, такое что $\delta'' := \delta' + 2^{-i-1}e_m \subset [0,1)^d$. Определим f_i на $[0,1)^d$ следующим образом. Если $x \in [0,1)^d \setminus (\delta' \cup \delta'')$ или $x \in \partial\overline{\delta'} \cap \partial\overline{\delta''}$, то $f(x) = 0$. Обозначим через c центр множества δ', положим $f_i(c) = 1$, $f_i(c + 2^{-i-1}e_m) = -1$, и положим, что f_i линейна на каждом сегменте $[x, c]$, $x \in \partial\overline{\delta'}$, $[y, c + 2^{-i-1}e_m]$, $y \in \partial\overline{\delta''}$. Очевидно, $\omega_m(f_i; 2^{-i-1}) = 2$, и по лемме 8, $E_{2^{d(i+1)}}(f_i) = \frac{1}{2}$, что влечёт за собой (79). $\square$

Теорема 27. *Если* $f \in C(\mathbb{T}^d)$, $m = 1, \dots, d$, $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\omega_m\Big(f; \frac{1}{\sqrt[d]{n}}\Big) \leqslant 8E_n(f).$$

Доказательство. Если $2^{di} < n \leqslant 2^{d(i+1)}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, то, используя (74), имеем

$$\omega_m\Big(f; \frac{1}{\sqrt[d]{n}}\Big) \leqslant \omega_m\Big(f; \frac{1}{2^i}\Big) \leqslant 2\omega_m\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) \leqslant 8E_n(f).$$

Для завершения доказательства осталось учесть следующее тривиальное неравенство

$$\omega_m(f; 1) \leqslant 2E_1(f).$$

□

4.1.3 Точность констант при увеличении шага

Для всякой непрерывной 1-периодической вещественнозначной функции $f \in C(\mathbb{T})$ справедливо очевидное соотношение

$$E_n(f) \leqslant E_1(f) = \frac{1}{2}\,\omega(f; 1) = \frac{\max f - \min f}{2}.$$

И здесь ни при каком $h > 0$ в неравенстве Джексона

$$E_n(f) \leqslant K \cdot \omega(f; h)$$

нельзя взять $K < \dfrac{1}{2}$. Однако, в отличие от приближения тригонометрическими полиномами, здесь шаг можно уменьшить при сохранении константы $\dfrac{1}{2}$: если $n = 2^i + l + 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \dots, 2^i - 1$, то [2, § 10.1.2]

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{2}\,\omega\left(f; \frac{1}{2^i}\right). \tag{80}$$

Для функций нескольких переменных неравенство, аналогичное (80), сразу следует из теоремы 25:

$$E_n(f) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2}\,\omega_k\left(f; \frac{1}{2^i}\right), \tag{81}$$

где n и i связаны формулой (60). В этом разделе мы покажем, что константу $\dfrac{1}{2}$ ни в одном слагаемом нельзя уменьшить, даже если увеличить шаг модулей непрерывности.

Теорема 28. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого набора вещественных коэффициентов c_k, $k = 1, \ldots, d$, хотя бы один из которых меньше $\frac{1}{2}$, найдётся такая функция $f \in C(\mathbb{T}^d)$, что*

$$E_n(f) > \sum_{k=1}^{d} c_k \omega_k(f; 1).$$

Доказательство. Пусть

$$n = 2^{di} + (2^d - 1)l + r, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \ l = 0, \ldots, 2^{di} - 1, \ r = 1, \ldots, 2^d - 1,$$
$$\delta^{(0)}_{2^{di}-1} = [x'_1, x''_1) \times \ldots \times [x'_d, x''_d), \qquad c_{k_1} < \frac{1}{2}.$$

Построим 1-периодическую непрерывную функцию одной переменной g, такую что

$$g(t) = 0 \text{ при } t \notin (x'_{k_1}, x''_{k_1}), \qquad g(x'_{k_1} + 2^{-(i+2)}) = 1,$$

и она линейна на отрезках $[x'_{k_1}, x'_{k_1} + 2^{-(i+2)}]$, $[x'_{k_1} + 2^{-(i+2)}, x''_{k_1}]$. Положим теперь $f(x) = g(x_{k_1})$. Легко видеть, что $\omega_{k_1}(f; 1) = 1$ и $\omega_k(f; 1) = 0$, если $k \neq k_1$. Используя лемму 1 при $l = 2^{di} - 1$, получаем

$$E_n(f) \geqslant E_{2^{d(i+1)}}(f) \geqslant \frac{1}{2} \sup_{x,y \in \delta^{(0)}_{2^{di}-1}} \bigl|f(x) - f(y)\bigr| = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, неулучшаемость констант установлена. $\square$

В заключение сделаем несколько замечаний о возможности уменьшить шаг модулей непрерывности в (81).

Замечание 4. Для $n = 2^{d(i+1)}$ в параграфе 4.1.1 показано, что шаг 2^{-i} можно уменьшить до 2^{-i-1}. Для $i = 0$ шаг в каждом слагаемом можно уменьшить до $\frac{1}{2}$ в силу 1-периодичности f.

Замечание 5. Пусть $n \geqslant 2^d + 1$ (то есть в представлении (60) $i > 0$) и нумерация такова, что все многочлены Хаара из H_n постоянны по крайней мере на одном из множеств δ_ν хотя бы по одной переменной x_{k_1}. Тогда для любого шага $h < 2^{-i}$ существует функция $f \in C(\mathbb{T}^d)$ такая, что

$$E_n(f) > \frac{1}{2}\omega_{k_1}(f; h) + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant d \\ k \neq k_1}} \frac{1}{2}\omega_k(f; 1).$$

Функцию f достаточно определить линейно возрастающей от 0 до 1 по переменной x_{k_1} на соответствующем ребре куба δ_ν и затем линейно убывающей до 0 на отрезке длины больше 2^{-i}, и постоянной по остальным переменным. Ясно, что при $i > 0$ такую функцию можно непрерывно продолжить до 1-периодической. Для неё

$$E_n(f) = \frac{1}{2}, \quad \omega_{k_1}(f;h) = 2^i h, \quad \omega_k = 0 \text{ при } k \neq k_1.$$

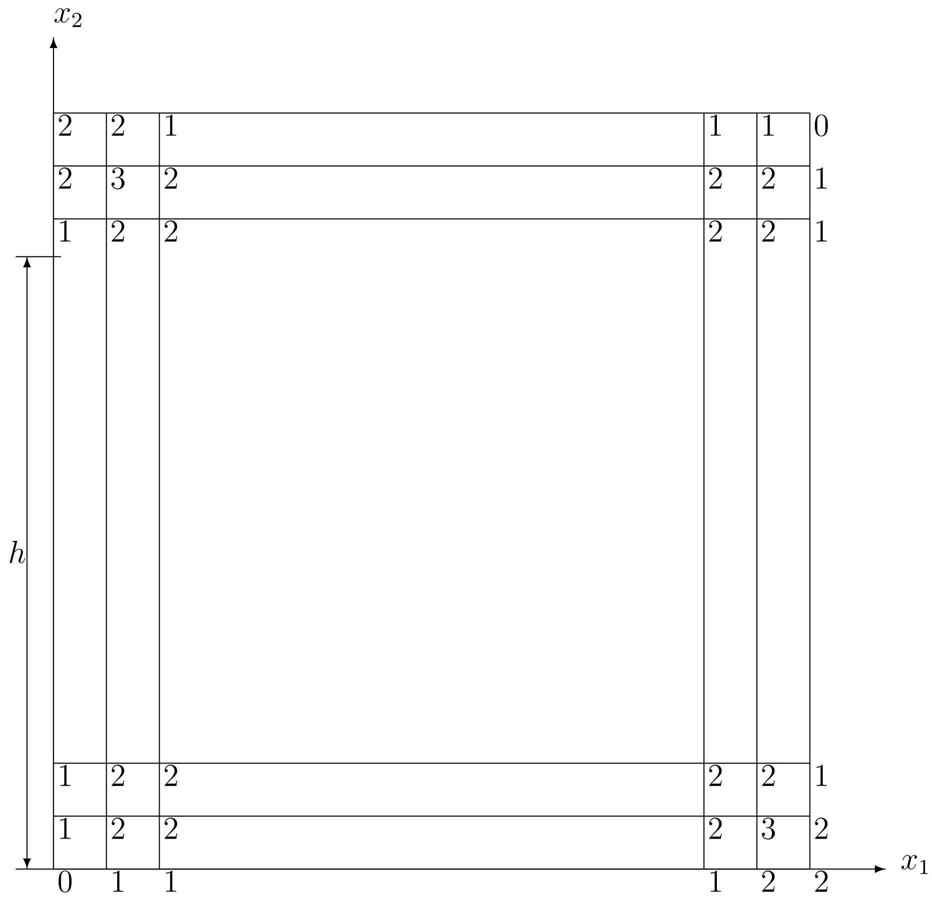
Замечание 6. Рассмотрим случай $d = 2$. Пусть так же, как и в предыдущем разделе

$$\widetilde{\psi}_1(x) = \psi(x_1)\varphi(x_2), \quad \widetilde{\psi}_2(x) = \varphi(x_1)\psi(x_2), \quad \widetilde{\psi}_3(x) = \psi(x_1)\psi(x_2).$$

Эти функции порождают базис Хаара на $\mathbb{R}^2$, как это описано в начале главы. Для определённости пронумеруем квадраты $\delta_k^{(s)}$ по часовой стрелке так, чтобы квадрат $\delta_k^{(0)}$ оказался ближе всего к началу координат.

Пусть $i > 0$, то есть $n \geqslant 5$. Шаг 2^{-i} точен в смысле замечания 5 для номеров $4^i \leqslant n < 4^{i+1} - 1$. Для номеров вида $n = 4^{i+1} - 1$ многочлены Хаара из H_n не постоянны ни на одном из множеств δ_k ни по одной из переменных. Докажем, что шаг 2^{-i} нельзя уменьшить одновременно для ω_1 и ω_2. Для этого мы построим функцию f следующим образом. Зафиксируем номер $n = 4^{i+1} - 1$ и $h < 2^{-i}$. На квадрате $\overline{\delta_{4^i-1}}$ определим f, как показано на [Рис. 2].

Рис. 2. Функция f на $\overline{\delta_{4^i-1}}$.



Числа представляют собой значения f в узлах сетки. Каждый прямоугольник с вершинами в соседних узлах разобьем диагональю на два треугольника и зададим на треугольниках f линейно. Тогда

$$\omega_1\big(f;h\big) = \omega_2\big(f;h\big) = 1. \tag{82}$$

Поскольку $i > 0$, мы можем продолжить f до функции из C_2 с сохранением (82). При данном виде номера n полиномы Хаара p из пространства H_n постоянны на $\delta_k^{(s)}$, $k = 0, \dots, 4^i - 1$, $s = 0, \dots, 3$, и удовлетворяют условию

$$p(t_0) + p(t_2) = p(t_1) + p(t_3), \quad t_s \in \delta_{4^i-1}^{(s)}.$$

Отсюда следует, что полином наилучшего приближения для f тождественно равен $\frac{3}{2}$ на δ_{4^i-1}. Следовательно,

$$E_n(f) \geqslant \frac{3}{2} > \frac{1}{2}\omega_1\big(f;h\big) + \frac{1}{2}\omega_2\big(f;h\big),$$

откуда и следует невозможность уменьшить шаг.

4.2 Точные оценки отклонений сумм Фурье-Хаара

Рассмотрим классический базис Хаара с естественной нумерацией: $n = 2^i + j$, $i = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, 2^i$. Пусть функция f – непрерывная 1-периодическая функция, $S_n(f)$ – её частичные суммы ряда Фурье по указанной ортонормированной системе. Следующая оценка хорошо известна:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant K\omega\Big(f; \frac{1}{n}\Big), \tag{83}$$

где $\omega(f;t)$ – модуль непрерывности функции f. В книге [5, с. 81] указано значение константы в данном неравенстве: $K = 3$, но, используя результат Хорошко [9]

$$\sup_{f\in H_\omega} \|f - S_n(f)\|_\infty = 2^i \int\limits_0^{2^{-i}} \omega(t)dt,$$

$$n = 2^i + j, \quad H_\omega = \{f \in C \colon \omega(f;t) \leqslant \omega(t), t \in [0,1]\},$$

нетрудно получить значение константы $K = 3/2$ и непосредственно доказать, что оно точное. В этом параграфе мы получим аналог оценки (83) для функций двух переменных.

Пусть так же, как и в предыдущем разделе

$$\widetilde{\psi}_1(x) = \psi(x_1)\varphi(x_2), \quad \widetilde{\psi}_2(x) = \varphi(x_1)\psi(x_2), \quad \widetilde{\psi}_3(x) = \psi(x_1)\psi(x_2).$$

Эти функции после периодизации порождают базис Хаара $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, как указано в начале главы. Для определённости пронумеруем квадраты $\delta_k^{(s)}$ по часовой стрелке так, чтобы квадрат $\delta_k^{(0)}$ оказался ближе всего к началу координат. Таким образом, при каждом фиксированном i получим разбиение квадрата $[0,1)^2$ на δ_k – квадраты со стороной $\frac{1}{2^i}$, и $\delta_k^{(s)}$ – квадраты со стороной $\frac{1}{2^{i+1}}$. Положим

$$I_k^{(s)} = \int\limits_{\delta_k^{(s)}} f(u,v)dudv.$$

Модуль непрерывности функции $f \in C(\mathbb{T}^2)$ будем понимать в следующем смысле:

$$\omega_\infty(f;h) = \sup_{\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\infty \leqslant h} |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})|.$$

Нетрудно проверить, что для функции $\omega_\infty(f;h)$ выполняются основные свойства модулей непрерывности:

1) $\omega_\infty(f;h) \geqslant 0$, $\omega_\infty(f;0) = 0$,

2) $\omega_\infty(f;h)$ не убывает по h,

3) $\omega_\infty(f;h_1+h_2) \leqslant \omega_\infty(f;h_1) + \omega_\infty(f;h_2)$

4) Если функция f непрерывна, то $\lim\limits_{h\to 0} \omega_\infty(f;h) = 0$.

Через $S_n(f)$ далее обозначаются частичные суммы ряда Фурье функции f по двумерному базису Хаара $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, под $S_n(f;x)$ понимается значение суммы в точке $x \in \mathbb{R}^2$.

Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 10. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T}^2)$, $i \in \mathbb{N}$, $k = 0,\dots,4^i-1$, $s,m = 0,\dots,3$, $x \in \delta_k^{(s)}$, $y \in \delta_k^{(m)}$. *Тогда*

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \begin{cases} \omega_\infty\Big(f;\dfrac{1}{2^{i+1}}\Big), & s = m, \\ 2\cdot\omega_\infty\Big(f;\dfrac{1}{2^{i+1}}\Big), & s \neq m. \end{cases} \tag{84}$$

Доказательство. Первое неравенство в системе (84) очевидно. Если же $x \in \delta_k^{(s)}$, $y \in \delta_k^{(m)}$, $s \neq m$, то, по свойству 3 функции $\omega_\infty(f;h)$,

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \omega_\infty\Big(f;\frac{1}{2^i}\Big) \leqslant 2\cdot\omega_\infty\Big(f;\frac{1}{2^{i+1}}\Big).$$

□

Лемма 11. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T}^2)$, $i \in \mathbb{N}$, $k = 0,\dots,4^i-1$. *Тогда*

$$\Big|I_k^{(0)} - I_k^{(1)}\Big| \leqslant \frac{1}{4^{i+1}}\omega_\infty\Big(f;\frac{1}{2^{i+1}}\Big).$$

Доказательство.

$$\Big|I_k^{(0)} - I_k^{(1)}\Big| = \Bigg|\int\limits_{\delta_k^{(0)}} f(u,v)dudv - \int\limits_{\delta_k^{(1)}} f(u,v)dudv\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg|\int\limits_{\delta_k^{(0)}+(0,\frac{1}{2^{i+1}})} \Big(f\Big(u, v-\frac{1}{2^{i+1}}\Big) - f(u,v)\Big)dudv\Bigg| \leqslant \frac{1}{4^{i+1}}\omega_\infty\Big(f;\frac{1}{2^{i+1}}\Big).$$

□

Замечание 7. Аналогично получается та же оценка для $|I_k^{(1)}-I_k^{(2)}|$, $|I_k^{(2)}-I_k^{(3)}|$, $|I_k^{(3)}-I_k^{(0)}|$.

Результаты

Теорема 29. *Пусть $f \in C(\mathbb{T}^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{7}{4}\omega_\infty\Big(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \tag{85}$$

1. Правая часть неравенства (85) *не может быть одновременно для всех n заменена на $K\omega_\infty(f;\gamma_n)$, где $K \in \mathbb{R}$, $\gamma_n = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.*

2. Константа $\frac{7}{4}$ в неравенстве (85) *не может быть одновременно для всех n заменена меньшей.*

Теорема 30. *Пусть $n \geqslant 4$, $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \ldots, 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$. Тогда*

$$\sup_{f \in C(\mathbb{T}^2)} \frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{\omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big)} = \begin{cases} \frac{7}{4}, & l = 0, \ldots, 4^i - 2,\ r = 1, 2, 3; \\ \frac{3}{2}, & l = 4^i - 1,\ r = 1, 2; \\ 1, & l = 4^i - 1,\ r = 3. \end{cases} \tag{86}$$

Доказательство теорем 7 и 8. **1)** Рассмотрим номера вида $n = 4^i + 3l + 3$, $i = 0, 1, \ldots$, $l = 0, \ldots, 4^i - 1$.

При таких n каждая из функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ постоянна на каждом из множеств

$$\delta_k^{(s)}, \quad k = 0, \ldots, l,\ s = 0, \ldots, 3; \tag{87}$$

$$\delta_k, \quad k = l + 1, \ldots, 4^i - 1. \tag{88}$$

Всего этих множеств n, то есть, такое же количество, как и функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Таким образом, набор функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ является базисом в линейном пространстве всех функций, постоянных на квадратах (87), (88), а значит, можно переразложить этот базис по другому базису в этом же линейном пространстве: характеристических функций множеств (87), (88). Обозначим функции из нового базиса через $\chi_1, \ldots, \chi_n$, считая его ортонормированным. Тогда

$$S_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \chi_k \rangle \chi_k(x), \tag{89}$$

и, таким образом, если x принадлежит одному из множеств (87), (88), тогда в частичной сумме (89) останется лишь слагаемое с соответствующей этому множеству функцией χ_k.

1.a) Пусть $x \in \delta_k^{(s)}$. Используя лемму 1, при $k = l+1, \ldots, 4^i - 1$, $l = 0, \ldots, 4^i - 2$, $s = 0, \ldots, 3$, получаем

$$|f(x) - S_n(f;x)| = \left| f(x_1, x_2) - 4^i \int\limits_{\delta_k} f(u,v)dudv \right| =$$

$$= \left| 4^i \sum_{m=0}^{3} \int\limits_{\delta_k^{(m)}} \big(f(x_1,x_2) - f(u,v)\big)dudv \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4^i \left(\frac{1}{4^{i+1}} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) + \frac{3}{4^{i+1}} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^i}\Big) \right) \leqslant \frac{7}{4} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big).$$

1.b) Если же $x \in \delta_k^{(s)}$, $k = 0, \ldots, l$, $l = 0, \ldots, 4^i - 1$, $s = 0, \ldots, 3$, то

$$|f(x) - S_n(f;x)| = \left| 4^{i+1} \int\limits_{\delta_k^{(s)}} \big(f(x_1,x_2) - f(u,v)\big)dudv \right| \leqslant \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \quad (90)$$

2) Рассмотрим номера вида $n = 4^i + 3l + 1$, $i = 0, 1, \ldots$, $l = 0, \ldots, 4^i - 1$. При таких n каждая из функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ постоянна на каждом из множеств

$$\begin{gathered} \delta_k^{(s)}, \quad k = 0, \ldots, l-1, \; s = 0, \ldots, 3; \\ \delta_l^{(0)} \cup \delta_l^{(1)}, \delta_l^{(2)} \cup \delta_l^{(3)}; \\ \delta_k, \quad k = l+1, \ldots, 4^i - 1. \end{gathered} \quad (91)$$

Аналогично, как и в случае **1)**, введём в рассмотрение базис нормированных характеристических функций множеств (91) $\chi_1, \ldots, \chi_n$. Опять же, возможно переразложение $\psi_1, \ldots, \psi_n$ по базису $\chi_1, \ldots, \chi_n$, так как множеств (91) n штук.

При $x \in \delta_k$, $k \in [0; l-1] \cup [l+1; 4^i - 1]$, оценка для величины $|f(x) - S_n(f;x)|$ получается тем же способом, что и в случае **1)**, и остаётся аналогичной.

Пусть $x \in \delta_l^{(s)}$, $s = 0, \ldots, 3$. Используя лемму 1, получаем

$$|f(x) - S_n(f;x)| \leqslant \frac{3}{2} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \quad (92)$$

3) Теперь рассмотрим номера вида $n = 4^i + 3l + 2$, $i = 0, 1, \dots$, $l = 0, \dots, 4^i - 1$.

При таких номерах n функции $\psi_1, \dots, \psi_n$ постоянны на множествах вида (87), (88). Но количество этих множеств равно $4^i + 3l + 3$, а функций всего $4^i + 3l + 2$, поэтому аналогичное переразложение по базису характеристических функций невозможно. Но мы можем переразложить первые $4^i + 3l + 1$ (то есть, $n - 1$) функций $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ по базису $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$ так же, как в случае **2)**. При этом ψ_n будет ортогональна всем $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$. Таким образом,

$$S_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \langle f, \chi_k \rangle \chi_k(x) + \langle f, \psi_n \rangle \psi_n.$$

При $x \in \delta_k$, $k \in \{0, \dots, 4^i - 1\} \setminus \{l\}$, оценка для величины $|f(x) - S_n(f;x)|$ получается тем же способом, что и в случае **1)**, и остаётся аналогичной.

Пусть $x \in \delta_l^{(0)}$, тогда

$$|f(x) - S_n(f;x)| =$$
$$= \left| f(x) - S_{n-1}(f;x) - \psi_n(x) \int\limits_{\delta_l} f(u,v) \psi_n(u,v) du dv \right| =$$
$$\left| f(x) - 4^i (3 I_l^{(0)} + I_l^{(1)} - I_l^{(2)} + I_l^{(3)}) \right| = \left| f(x) - 4^{i+1} I_l^{(0)} + 4^i \big(I_l^{(0)} - I_l^{(1)} + I_l^{(2)} - I_l^{(3)} \big) \right|$$

Теперь, воспользовавшись леммами 1 и 2, найдём оценку

$$|f(x) - S_n(f;x)| \leqslant \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) +$$
$$+ 4^i \cdot \frac{2}{4^{i+1}} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) = \frac{3}{2} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \quad (93)$$

Легко проверить, что при $x \in \delta_l^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$, оценка не изменится.

Отметим также, что при $n = 1$ неравенство (85), очевидно, выполняется и с меньшей константой:

$$\|f - S_1(f)\|_\infty \leqslant \omega_\infty\big(f; 1\big).$$

Итак, при фиксированном $i \in \mathbb{N}$ мы получили самую грубую оценку для $x \in \delta_k$, $k = l + 1, \dots, 4^i - 1$, $l = 0, \dots, 4^i - 2$:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{7}{4} \omega_\infty\Big(f; \frac{1}{2^{i+1}}\Big). \quad (94)$$

Докажем точность константы $\dfrac{7}{4}$ для этого неравенства. Зададим $\varepsilon > 0$ и для любого $i > 1$ предъявим функцию $f_i \in C(\mathbb{T}^2)$, такую, что

$$\|f_i - S_n(f_i)\|_\infty > \Big(\frac{7}{4} - \varepsilon\Big)\omega_\infty\Big(f_i; \frac{1}{2^{i+1}}\Big),$$

где $n = 4^i + 3l + r$, $l < 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$.

Напомним, что в данной нумерации индекс l отвечает за расположение носителя функции ψ_n в квадрате $(0,1)^2$. Обозначим через δ квадрат δ_{4^i-1}, через $\delta^{(s)}$ квадраты $\delta^{(s)}_{4^i-1}$, и введём вспомогательную функцию $\widetilde{f_i}$, принимающую значение 1 на одном из множеств $\delta^{(s)}$ и значение 0 во всех оставшихся точках множества δ. При $x \in (0,1)^2 \setminus \delta$ положим $\widetilde{f_i} = 1$. Тогда, если $l < 4^i - 1$, $x \in \delta$, то

$$S_n(\widetilde{f_i}; x) = \langle \chi_\delta, \widetilde{f_i} \rangle \chi_\delta(x) = \frac{1}{4},$$

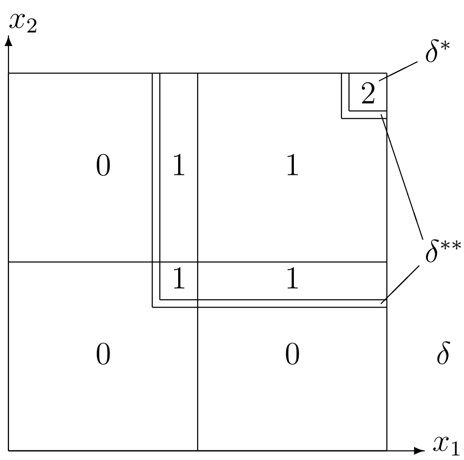
а также

$$\omega_\infty\Big(\widetilde{f_i}; \frac{1}{2^{i+1}}\Big) = 1.$$

Здесь χ_δ – соответствующая квадрату δ функция из обсуждавшегося ранее базиса нормированных характеристических функций $\chi_1, \dots, \chi_n$.

Изменим функцию $\widetilde{f_i}$ на множестве малой меры так, чтобы она стала непрерывной, в углу квадрата δ принимала значения $f_i(x) = 2$ (обозначим это множество δ^*) (см [Рис. 3]) и сохранила значение $\omega_\infty\Big(f_i; \dfrac{1}{2^{i+1}}\Big) = 1$.

Рис. 3. Функция f_i на множестве δ. На рисунке δ^{**} – множество, на котором функция возрастает так, чтобы модуль непрерывности сохранил значение 1.



Тогда, при $x \in \delta^*$,

$$|f_i(x) - S_n(f_i; x)| > \frac{7}{4} - \varepsilon.$$

Таким образом, точность константы $\frac{7}{4}$ для оценки (94) доказана.

Условие $l < 4^i - 1$ важно: при $l = 4^i - 1$, $r = 1, 2, 3$, константа $\frac{7}{4}$ не будет точной. Для таких номеров уже были получены более точные оценки (см. (90), (92), (93)). Точность констант (для $n = 4^i + 3l + r$ таких, что $l = 4^i - 1$), полученных в этих оценках, доказывается аналогичным способом. Для доказательства при $r = 1, 3$ подойдёт та же функция $\widetilde{f_i}$, а для случая $r = 2$ нужно выбрать функцию $\widetilde{f_i}$ так, чтобы она принимала значение 1 на двух противоположных квадратах $\delta^{(s)}$ и значение 0 во всех оставшихся точках множества δ.

Теперь докажем точность константы в неравенстве (85). Пусть $n = 4^{i+1} - 3$. Ясно, что при достаточно больших i число $\sqrt{n} = \sqrt{4^{i+1} - 3}$ близко к 2^{i+1}. Из этого факта и из равномерной непрерывности функции $\omega_\infty\big(f; h\big)$ (при $f \in C(\mathbb{T}^2)$) следует точность полученной константы $\frac{7}{4}$ и для неравенства (85).

Покажем теперь, что не существует константы $K \in \mathbb{R}$ такой, что для всех $f \in C(\mathbb{T}^2)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ будет выполняться

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant K\omega_\infty\big(f; \gamma_n\big),$$

где $\gamma_n = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$. Для этого зафиксируем произвольную константу $K > 0$ и предъявим функцию f_K, такую, что

$$\|f_K - S_n(f_K)\|_\infty > K\omega_\infty\big(f_K; \gamma_n\big).$$

Зададим $K > 0$. Будем рассматривать номера вида $n = 4^{i+1}$, и выберем столь большое n, чтобы выполнялось

$$\frac{1}{\sqrt{n} \cdot \gamma_n} > 4 \cdot 2K.$$

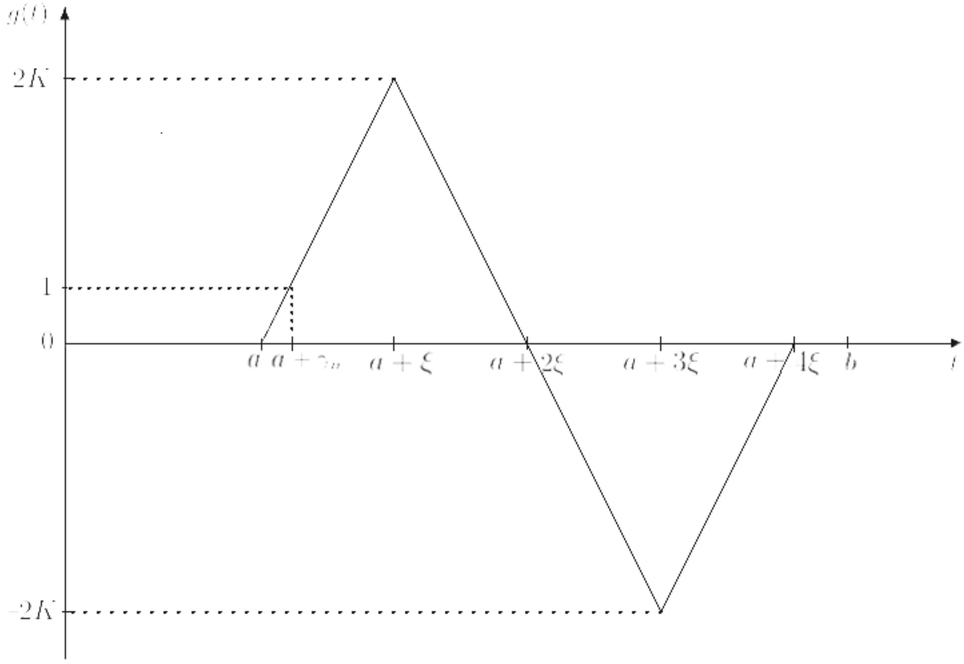
Обозначим через δ какой-либо из квадратов $\delta_k^{(s)}$, $k \leqslant l$. Пусть $\delta = (a, b) \times (c, d)$. Положим $\xi = 2K\gamma_n$. Введём вспомогательную кусочно-линейную функцию $g(t)$, определённую на (a, b) так, как показано на [Рис. 4]. При $t \notin (a, b)$ положим $g(t) = 0$.

Из рисунка 2 видно, что

$$\omega\big(g; \gamma_n\big) = 1,$$

$$g(a) = g(a + 2\xi) = g(a + 4\xi) = 0,$$

Рис. 4. Функция g на отрезке (a,b).



$$g(a+\xi)=2K, g(a+3\xi)=-2K.$$

При выбранном ξ справедливо включение $[a,a+4\xi]\subset[a,b]$, и легко видеть, что

$$\max_{t\in[a,b]} g(t)>K, \quad \int\limits_a^b g(t)dt=0.$$

Теперь, положим

$$f_K(x_1,x_2)=g(x_1).$$

Очевидно, что

$$\max_{x\in\delta} f_K(x)=\max_{t\in[a,b]} g(t), \quad \omega_\infty\big(f_K;h\big)=\omega\big(g;h\big).$$

Кроме того, $S_n(f_K)=0$, а значит

$$\|f_K-S_n(f_K)\|_\infty>K\omega_\infty\big(f_K;\gamma_n\big)$$

для любого заранее заданного K, что и требовалось. $\square$

Замечание 8. Фактически, получена поточечная оценка уклонения сумм Фурье-Хаара непрерывной 1-периодической функции. Из доказательства видно, что константа перед модулем непрерывности в такой оценке может принимать значения 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$ не только в зависимости от номера n, но и от расположения точки x. Также отметим, что базисные функции ψ_k, как и суммы Фурье $S_n(f)$ по этой системе, в любой граничной к каким-либо из множеств $\delta_k^{(s)}$ точке x будут равны среднему арифметическому своих значений на всех множествах $\delta_k^{(s)}$, к которым точка x является граничной. Таким образом, учитывая непрерывность функции f, получаем следующее утверждение:

Пусть $n = 4^i+3l+r$, $i \in \mathbb{N}$, $l = 0, \dots, 4^i-1$, $r = 1, 2, 3$, *тогда справедлива поточечная оценка:*

$$\left|f(x) - S_n(f;x)\right| \leqslant K_n(x)\omega_\infty\Big(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),$$

где $K_n(x) = \frac{7}{4}$ *при* $x \in \delta_k$, $k = l+1, \dots, 4^i-1$, $l = 0, \dots, 4^i-2$; $K_n(x) = \frac{3}{2}$ *при* $x \in \delta_l$, $l = 0, \dots, 4^i-1$, $r = 1, 2$; $K_n(x) = 1$ *при* $x \in \delta_k$, $k = 0, \dots, l-1$, $l = 1, \dots, 4^i-1$, *и при* $x \in \delta_l$, $l = 0, \dots, 4^i-1$, $r = 3$, *а в граничных точках множеств* $\delta_k^{(s)}$ *величина* $K_n(x)$ *будет равна среднему арифметическому своих значений на всех множествах* $\delta_k^{(s)}$, *к которым точка* x *является граничной.*

Замечание 9. Условие $n \geqslant 4$ в теореме 2 существенно. Для номера $n = 1$ отсутствует представление в виде $n = 4^i + 3l + r$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \dots, 4^i-1$, $r = 1, 2, 3$. Также, в силу 1-периодичности функции f, для $n = 2, 3$ имеет место уменьшение констант в равенстве (86). Проведя рассуждения, аналогичные присутствующим в доказательстве теоремы, а также заметив, что $\omega_\infty(f;1) = \omega_\infty(f;1/2)$, нетрудно получить следующее равенство:

$$\sup_{f\in C(\mathbb{T}^2)} \frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{\omega_\infty\Big(f;\frac{1}{2}\Big)} = \begin{cases} 1, & n = 1, 2, \\ 5/4, & n = 3. \end{cases}$$

Заключение

В данной работе изучались свойства различных периодических систем всплесков в многомерном случае. Подведём краткие итоги работы и перечислим основные полученные результаты:

1. Найдены достаточные условия бесселевости системы всплесков. Вкупе с уже имеющимися в литературе результатами это даёт достаточные условия, выполнение которых гарантирует, что двойственные системы всплесков будут двойственными фреймами. С помощью этого результата мы предлагаем различные алгоритмы построения двойственных базисов и фреймов всплесков. Построение функций из систем представления производится в частотной области по рекуррентным формулам, что делает эти алгоритмы простыми в применении на практике.

2. Разработана теория кратномасштабного анализа и систем всплесков в дискретном периодическом случае. Найдена характеризация такого кратномасштабного анализа в терминах свойств его масштабирующей последовательности. Представлены формулы прямого и обратного всплеск-преобразования.

3. В работе решаются различные экстремальные задачи для многомерного сепарабельного базиса Хаара. Для него доказаны прямые и обратные неравенства типа Джексона с точными постоянными, показана точность констант при увеличении шага модуля непрерывности в этих неравенствах. Также для этого базиса в двумерном случае найдены оценки уклонения сумм Фурье с точной постоянной.

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер, однако результаты глав 2 и 3 могут быть полезны и в приложениях. Основными областями применения результатов наших исследований являются анализ, обработка и сжатие данных.

Список литературы

[1] *Андрианов П. А.* Дискретный периодический кратномасштабный анализ // Исследования по прикладной математике и информатике. I, Зап. научн. сем. ПОМИ, 499, ПОМИ, СПб., 2021, 7–21.

[2] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша, Наука, М., 1987.

[3] *Голубов Б. И.* Абсолютная сходимость двойных рядов из коэффициентов Фурье–Хаара функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Матем., 2012, № 6, 3–13.

[4] *Голубов Б. И.* О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара // Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:6 (1964), 1271–1296.

[5] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды, Изд-во АФЦ, М., 1999.

[6] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков, Физматлит, М., 2005.

[7] *Петухов А. П.* Периодические всплески // Матем. сб., 188:10 (1997), 69–94.

[8] *Петухов А. П.* Периодические дискретные всплески // Алгебра и анализ, 8:3 (1996), 151–183; St. Petersburg Math. J., 8:3 (1997), 481–503.

[9] *Хорошко Н. П.* Равномерное приближение полиномами по системе Хаара на классах непрерывных функций // Укр. матем. журн., 22:5 (1970), 705–712.

[10] *Andrianov P.* On sufficient frame conditions for periodic wavelet systems // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., Vol. 16, No. 1 (2018) 1850002 (15 pages).

[11] *Andrianov P. A.* Sharp Estimates of Deviations from Fourier–Haar Sums for Continuous Functions of Two Variables // J. Math. Sci. (United States), 2016, 215(5), pp. 552–559.

[12] *Andrianov P. A.* Sufficient Conditions for a Multidimensional System of Periodic Wavelets to be a Frame // J. Math. Sci. (United States), 2020, 251(2), pp. 190–199.

[13] *Andrianov P. A., Vinogradov O. L.* On the constant and step in Jackson's inequality for best approximations by trigonometric polynomials and by Haar polynomials // Math. Notes, 2016, 100(3-4), pp. 345–351.

[14] *Andrianov P., Skopina M.* On construction of periodic wavelet frames // Eur. J. Math., 2019, 5(1), pp. 241–249.

[15] *Andrianov P., Skopina M.* On Jackson-type inequalities associated with separable Haar wavelets // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., Vol. 14, No. 3 (2016) 1650005 (11 pages).

[16] *Andrianov P.* On construction of multidimensional periodic wavelet frames // Чебышевский сборник, in print.

[17] *Andrianov P.* Multidimensional periodic discrete wavelets // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., in print.

[18] *Atreas N. D.* Characterization of dual multiwavelet frames of periodic functions // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., Vol. 14, No. 3 (2016) 1650012 (26 pages)

[19] *Bownik M., Jahan Q.* Wavelets on compact abelian groups // Appl. Comput. Harmonic Anal., 2020, 49(2), pp. 471–494.

[20] *Chui C. K., Wang J. Z.* A general framework of compact supported splines and wavelets // J. Approx. Theory, 71 (1992), pp. 263–304.

[21] *Daubechies I.* Ten lectures on Wavelets, CBMS-NSR Series in Appl. Math., SIAM, 1995.

[22] *Farkov Yu. A.* Periodic wavelets in Walsh analysis // Commun. Math. Appl., 2012, 3, No 3., pp. 223–242.

[23] *Gon S. S., Lee S. Z., Shen Z., Tang W. S.* Construction of Schauder decomposition on banach spaces of periodic functions // Proc. Edinb. Math. Soc., Volume 41, Issue 1 February 1998, pp. 61–91.

[24] *Gubner J. A., Chang W.-B.* Wavelet transforms for discrete-time periodic signals, Signal Process., 42 (1995), pp. 167–180.

[25] *Han B.* On dual wavelet tight frames // Appl. Comput. Harmonic Anal., 1997, V. 4., pp. 380–413.

[26] *Kirushev V. A., Malozemov V. N., and Pevnyi A. B.* Wavelet Decomposition of the Space of Discrete Periodic Splines // Math. Notes, Vol. 67, No. 5, (2000), pp. 603–610.

[27] *Korneichuk N.* The multivariate fundamental theorem of Algebra, Bezout's theorem and Nullstellensatz, in: D. K. Dimitrov et al. (eds.) Approximation Theory: a volume dedicated to Borislav Bojanov (Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia, 1991), pp. 73–97.

[28] *Krivoshein A., Protasov V., Skopina M.* Multivariate Wavelet Frames, Springer Singapore, 2016.

[29] *Lebedeva E.* On a connection between nonstationary and periodic wavelets // J. Math. Anal. Appl., 451:1, 2017, pp. 434–447.

[30] *Maksimenko I., Skopina M.* Multivariate periodic wavelets // St. Petersburg Math. J., 15, 2004, 165–190.

[31] *Meyer Y.* Ondelettes, Herman, Paris, 1990.

[32] *Ron A., Shen Z.* Gramian analysis of affine bases and affine frames // Approx. Theory VIII, V. 2: Wavelets (C.K. Chui and L. Schumaker, eds) World Scientific Publishing Co. Inc (Singapore), 1995, pp. 375–382.

[33] *Ron A., Shen Z.* Frame and stable bases for shift-invariant subspaces of L2(Rd) // Canad. J. Math., V. 47. N. 5., 1995, pp. 1051–1094.

[34] *Ron A., Shen Z.* Affine systems in L2(Rd): the analysis of the analysis operator // J. Func. Anal., V. 148, 1997, pp. 408–447.

[35] *Ron A., Shen Z.* Affine systems in L2(Rd): dual systems // J. Fourier. Anal. Appl., V. 3, 1997, pp. 617–637.

[36] *Skopina M.* Local convergence of Fourier series with respect to periodized wavelets // J. Approx. Theory., V. 94., 1998, pp. 191–202.

[37] *Skopina M.* Multiresolution analysis of periodic functions // East J. Approx., Vol. 3, Number 2 (1997), pp. 203–224.

[38] *Sz.-Nagy B.* Approximation properties of orthogonal expansions, Acta sci. math., 11.953/54, 15, 1953, pp. 31–37.

[39] *Timan A. F.* Theory of approximation of functions of a real variable, Translated from the Russian by J. Berry. Translation edited and with a preface by J. Cossar. Reprint of the 1963 English translation (Dover Publications, Inc., New York, 1994).

[40] *Zheludev V. A.* Periodic splines and wavelets // Contemp. Math., Vol. 190, 1995, pp. 339–354.