Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
имени В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Капустин Владимир Владимирович

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ, ИНТЕГРАЛЫ ТИПА КОШИ И МЕРЫ КЛАРКА

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Содержание

1 Введение

1.1 Общая характеристика работы

Результаты диссертации относятся к области математического анализа, находящейся на стыке теории функций и теории операторов, и связанной с теорией функциональных моделей операторов в гильбертовом пространстве.

Связь между теорией функций и теорией операторов, близких к унитарным или самосопряжённым, но не являющихся таковыми, проявилась в так называемой *характеристической функции* операторов. Впервые в некотором частном случае её определение появилось ещё в статье [23]. Оказалось, что с помощью характеристической функции можно не только изучать спектральные свойства операторов, но она также и определяет оператор с точностью до унитарной эквивалентности. Это направление прорабатывалось разными школами, см. [13, 11, 12, 24], а также [78], [77] и [48]. Внимание уделялось различным вопросам спектрального анализа операторов, и одним из первых возник вопрос о подобии изучаемого оператора унитарному оператору [81, 80]; или самосопряжённому, в зависимости от подхода [27]. Кроме того, исследовался вопрос о подобии двух модельных сжатий между собой в терминах их характеристических функций [58], а также о подобии модельного оператора нормальному [21]. Было обнаружено, что более широкий класс модельных сжатий будет охвачен, если ввести свойство квазиподобия, – несколько более слабое, чем подобие. Оказался естественным вопрос о построении “жордановых моделей” операторов, т.е. операторов специального вида, к которым с помощью перехода к квазиподобному оператору можно свести операторы из разных классов [79, 82, 86, 85], а также классификации сжатий относительно квазиподобия [14].

Общему случаю функциональных моделей сжатий в гильбертовых пространствах посвящена монография [35], более современное изложение многих вопросов оттуда можно также найти в [44]. Одним из центральным результатов теории является взаимно однозначное (с точностью до унитарной эквивалентности) соответствие между сжатиями и их характеристическими функциями – сжимающими аналитическими операторнозначными функциями в единичном круге. По каждой такой функции можно построить соответствующий ей модельный сжимающий оператор. Аналогично, для любого сжатия можно вычислить его характеристическую функцию, причём соответствующее ей модельное сжатие будет унитарно эквивалентно исходному сжатию.

Хотя и было ясно, что разные подходы к функциональным моделям в своей сути тесно взаимосвязаны, казалось желательным включить их в единую общую схему. Это и было сделано [65], а именно, была построена бескоординатная функциональная модель, для которой другие ранее известные были частными случаями. В качестве иллюстрации применения бескоординатного подхода см. [15].

Содержательные результаты получаются для сжатий, в том или ином смысле близких к унитарным (или изометрическим) операторам. Так, если T – сжатие и операторы $I - T^*T, I - TT^*$ имеют ранг 1, то характеристическая функция сжатия T будет скалярной, т.е. её значения будут операторами в одномерном пространстве. Даже в случае дефектных индексов, равных 1, функциональная модель имеет приложения в физике, см. [29]. При конечных дефектных индексах, а особенно в случае, когда дефектный оператор является ядерным (т.е. принадлежит классу операторов со следом), для такого класса операторных моделей получается широкий класс приложений в теории рассеяния, см. [22].

Если ввести дополнительное ограничение о сильной сходимости степеней оператора к нулевому оператору, то получится класс сжатий, обладающий простейшей моделью (с точки зрения теории функциональных моделей). Характеристические функции таких сжатий оказываются скалярными и внутренними, т.е. их абсолютные величины строго меньше 1 в единичном круге, а граничные значения имеют модуль, равный 1, почти всюду относительно меры Лебега на единичной окружности.

Пусть θ – скалярная внутренняя функция в единичном круге. Одним из основных гильбертовых пространств, рассматриваемых в диссертации, будет модельное пространство

$$K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2,$$

где H^2 – класс Харди, состоящий из аналитических функций в единичном круге с комплексными коэффициентами, имеющих вид

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n z^n, \qquad \|f\|^2 = \sum_{n \geqslant 0} |c_n|^2 < \infty.$$

Функции из H^2 имеют граничные значения на единичной окружности почти всюду относительно меры Лебега, через которые они изометрически отождествляются с функциями из пространства L^2 на окружности. При таком отождествлении функция $\theta \in H^2$ является внутренней, если $|\theta| = 1$ почти всюду на единичной окружности.

Внутренние функции описываются своими нулями внутри круга и сингулярной мерой на окружности, определяющей убывание при приближении к границе; для произвольной внутренней функции θ существует (единственное) представление вида

$$\theta(z) = \omega \cdot \prod_k \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k} \cdot \frac{\lambda_k - z}{1 - \bar{\lambda}_k z} \cdot \exp\left(\int \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) \right),$$

где ω – комплексное число с модулем 1; (λ_k) – набор точек (необязательно различных; наборы считаются совпадающими, если они совпадают как множества и совпадают кратности вхождения каждого элемента последовательности), являющихся нулями функции θ в открытом единичного круге, причём выполнено условие Бляшке

$$\sum_k (1 - |\lambda_k|) < \infty;$$

μ – конечная неотрицательная борелевская мера на единичной окружности, сингулярная относительно меры Лебега.

Подпространство θH^2 инвариантно относительно оператора сдвига $f \mapsto zf$. (Более того, по теореме Бёрлинга [45] описание всех ненулевых инвариантных подпространств оператора сдвига исчерпывается подпространствами указанного вида, соответствующими внутренним функциям.) Следовательно, K_θ инвариантно относительно сопряжённого оператора – обратного сдвига

$$f \mapsto \frac{f - f(0)}{z},$$

сужение которого на подпространство K_θ является сопряжённым оператором к модельному сжатию M_θ в K_θ. Сам оператор M_θ действует как умножение на независимую переменную с последующим ортогональным проектированием на K_θ.

Таким образом, модельные сжатия M_θ близки к унитарным операторам, и оказывается, что они являются одномерными возмущениями специального вида некоторых унитарных операторов. Развитая спектральная теория сжатий вида M_θ представлена в книге [28]; см. также [63, 64]. Многомерный случай рассамтривается в монографии [35]; близкие вопросы затрагиваются также в монографиях [54, 55, 16, 53].

В диссертации основное внимание будет сосредоточено не на сжатиях в модельных пространствах, а на унитарных операторах, определённых там некоторым естественным образом. Возьмём внутреннюю функцию θ и комплексное число α с модулем 1. Поскольку в единичном круге имеем $|\theta| < 1$, функция $\frac{\alpha+\theta}{\alpha-\theta}$ имеет положительную вещественную часть, которая представляется как преобразование Пуассона неотрицательной конечной борелевской меры на окружности. То, что $|\theta| = 1$ почти всюду, означает, что эта мера сингулярна, а если для простоты иллюстрации допустить, что $\theta(0) = 0$, то полученная мера будет вероятностной. Возвращаясь от гармонических вещественнозначных функций к аналитическим комплекснозначным, получаем семейство мер, определяемых соотношениями

$$\frac{\alpha + \theta(z)}{\alpha - \theta(z)} = \int \frac{1 + \bar{\xi} z}{1 - \bar{\xi} z}\, d\sigma_\alpha(\xi). \tag{1.1}$$

Меры σ_α впервые появились в статье Д. Кларка [49], и потому будут называться мерами Кларка. Большой вклад в их изучение был внесён А.Б. Александровым, см. [1, 2, 3, 4, 5], в связи с чем они иногда также называются мерами Александрова–Кларка. В связи с общими вопросами, касающимися мер Кларка, см. также [72, 71].

Если положить $\alpha = 1$, $\mu = \sigma_1$, то соотношение (1.1) переписывается как

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\, d\mu(\xi).$$

Последнее соотношение устанавливает взаимно однозначное соответствие между внутренними функциями θ с условием $\theta(0) = 0$ и сингулярными вероятностными мерами μ. То есть, можно не только строить меры Кларка по заданной внутренней функции, но и наоборот: если задана сингулярная [вероятностная] мера на окружности, то указанная формула позволяет построить по ней внутреннюю функцию θ [с условием $\theta(0) = 0$], для которой исходная мера μ будет мерой Кларка σ_1. Вопросы о мерах Кларка, соответствующих другим числам α с модулем 1, сводятся к случаю $\alpha = 1$ рассмотрением внутренней функции $\bar{\alpha}\theta$ вместо θ.

Кларк рассматривал унитарные операторы U_α в K_θ, которые при дополнительном предположении $\theta(0) = 0$ имеют вид

$$U_\alpha f = \begin{cases} zf, & (f, \bar{z}\theta) = 0 \\ \alpha, & f = \bar{z}\theta. \end{cases}$$

Условие $(f, \bar{z}\theta) = 0$ выделяет множество функций $f \in K_\theta$, для которых также $zf \in K_\theta$. Умножение на z отображает подпространство коразмерности 1 в другое подпространство, также имеющее коразмерность 1 и состоящее из функций, ортогональных константам. Поэтому для того, чтобы достроить оператор умножения на z до некоторого унитарного оператора на всём пространстве K_θ, требуется доопределить оператор на функции $\bar{z}\theta$, образом которой должна быть константа с модулем 1. Таким образом и появляется унимодулярный комплексный параметр α. Кларк доказал, что определённые выше “меры Кларка” σ_α являются спектральными мерами унитарных операторов U_α. Это открывает возможность изучения различных вопросов об унитарных операторах с сингулярной спектральной мерой на модели, связанной с пространством K_θ.

Дальнейшее развитие темы было связано с прояснением действия построенного Кларком унитарного оператора

$$V : K_\theta \to L^2(\mu),$$

осуществляющего унитарную эквивалентность оператора U_α в K_θ и оператора умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$, $\mu = \sigma_1$. (Для определённости зафиксируем $\alpha = 1$; аналогичные результаты имеют место и для остальных α с модулем 1.) А.Г. Полторацкий доказал [33], что у любой функции из K_θ существуют угловые граничные значения μ-почти всюду, и тем самым показал, что оператор V отображает функции из K_θ в соответствующие им граничные функции, рассматриваемые как элементы пространства $L^2(\mu)$. Этот результат особо интересен тем, что в отличие от классических результатов о существовании угловых граничных значений у функций из классов Харди почти всюду относительно меры Лебега, здесь утверждается существование граничных значений на множествах нулевой меры Лебега. Обратный к V оператор действует по формуле

$$f(z) = (1 - \theta(z)) \int \frac{(Vf)(\xi)\, d\mu(\xi)}{1 - \bar{\xi} z}, \qquad |z| < 1,$$

тем самым проявляя связь между теорией мер Кларка и интегралами типа Коши.

Также Полторацким был получен ряд результатов по теории мер Кларка [34, 67, 69, 70], где, в частности, им были установлены взаимосвязи с другими известными вопросами теории функций и теории операторов. Аналогично можно рассматривать внутренние функции в верхней полуплоскости и их меры Кларка на вещественной прямой, конструкция которых в своей сути получается из конструкции в круге с помощью конформного отображения. Получающиеся операторы теперь оказываются близкими к самосопряжённым, и, так же, как и на модели на окружности в простейшем случае скалярной внутренней характеристической функции соответствующие операторы оказываются отличающимися друг от друга на операторы ранга 1. А именно, функциональная модель на вещественной прямой соответствует семейству одномерных возмущений вида $A_p = A + p(\cdot, 1)1$ оператора A умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\mu)$, где μ – конечная борелевская мера на вещественной прямой, сингулярная относительно меры Лебега, p – вещественный параметр; спектральные меры операторов A_p являются мерами Кларка некоторой внутренней функции в верхней полуплоскости.

Меры Кларка неоднократно неявно появлялись в литературе, предшествующей статье Кларка. Так, результат W.F. Donoghue [52] о том, что спектральные меры упоминаемых выше операторов A_p взаимно сингулярны при различных p, по существу состоит в проверке того, что эти спектральные меры являются ни чем иным, как мерами Кларка. Результат о том, что оператор, сопоставляющий функциям из пространства Пэли–Винера последовательности их значений в точках вещественной прямой, образующих арифметические прогрессии, является унитарным, представляет собой частный случай конструкции мер Кларка. Обобщением пространств Пэли–Винера являются пространства де Бранжа, для которых также существуют аналогичные унитарные операторы, переводящие функции – элементы гильбертова пространства целых функций в последовательности их значений в точках некоторой последовательности на вещественной прямой, и это свойство играет существенную роль как в исследованиях самого Л. де Бранжа [47], так и в развитой в дальнейшем теории пространств, названных его именем.

Основные результаты диссертации объединены между собой тем, что они, хотя иногда не вполне явно, опираются на применение мер Кларка в задачах теории операторов. Хотя сама теория мер Кларка является “одномерной” и прямо связана с одномерными возмущениями операторов, уже в таком виде она позволяет решать некоторые задачи и о возмущениях из более широких классов, не переходя к более сложным аналогам теории мер Кларка для пространств векторнозначных функций и операторнозначных функций

θ. По-видимому, меры Кларка могут служить удобным средством в решении задач спектральной теории самосопряжённых (или унитарных) операторов с сингулярными спектральными мерами в вопросах, где естественным образом появляется аналитическая структура. Представляется, что более широкое привлечение техники мер Кларка в задачи из теории опрераторов содержит в себе большой потенциал, который может позволить получить и дальнейшие существенные продвижения в приложениях теории функциональных моделей к задачам теории операторов и связанными с ними задачами комплексного анализа,

Перейдём к описанию содержания диссертации. Основные её результаты представлены как теоремы, пронумерованные от 1 до 19, в отличие от остальных утверждений, нумерация которых привязана к главам и параграфам.

1.2 Интегралы типа Коши и сингулярные меры

В главе рассматриваются вопросы, связанные с пересадкой операторов, действующих в L^2-пространствах на единичной окружности, в пространства K_θ с помощью оператора, построенного Д. Кларком, т.е. с помощью нормированных некоторым естественным образом интегралов типа Коши. Изучаются как операторы, действующие в самом K_θ, так и из K_θ в L^2-пространства и из одного L^2-пространства в другое. Ряд первых результатов главы, помимо их прямого смысла, имеют подготовительное значение для дальнейших исследований усреднённых волновых операторов на сингулярном спектральном подпространстве. Эти результаты используются для естественного определения преобразования Гильберта относительно сингулярной меры через предельные значения интегралов типа Коши. Исследуется вопрос о существовании искомых граничных значений. В конце главы получены результаты о граничном поведении функций из K_θ.

При изучении операторов в L^2-пространствах важную роль играет коммутатор изучаемого оператора, действующего из одного L^2-пространства в другое, с умножением на независимую переменную. Связь между коммутаторами и интегралами типа Коши устанавливается следующим наблюдением: предположим, что оператор, действующий из одного L^2-пространства в другое, представляет собой преобразование Коши, трактуемое в каком-либо естественном смысле. Тогда его коммутатор с умножением на z легко вычисляется и имеет ранг 1.

В главе 2 широко используется хорошо известная связь между усреднениями выражений, используемых при построении волновых операторов в теории рассеяния, и интегралов типа Коши, которые строятся через функции, появляющиеся в выражении для коммутатора. А именно, пусть $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ – ограниченный оператор (μ, ν – пара борелевских мер на единичной окружности); и пусть коммутатор $XM_z - M_zX$ с умножением M_z на независимую переменную представляется в виде $\sum(\cdot, u_k), v_k$ (часто сумма предполагается конечной; либо, если она бесконечна, считается, что она мала в каком-либо смысле, например $\sum \|u_k\| \cdot \|v_k\| < \infty$). Абелевы средние операторов $M_z^n X M_z^{-n}$ выражаются через оператор, задаваемый интегралом типа Коши

$$\sum v(z) \cdot \int \frac{h(\xi)\overline{u(\xi)}\, d\mu(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z}, \qquad h \in L^2(\mu).$$

Существенное внимание уделено случаям, дающим понимание общей картины, а именно, когда ранг коммутатора не превосходит 2. Так, в случае коммутатора ранга 1 слабый абелев волновой оператор на сингулярном спектральном подпространстве существует всегда; однако в случае ранга 2 (а следовательно и при ранге выше 2) он уже может не существовать. Случай коммутатора ранга 2 связан с усечёнными операторами Тёплица; с определением преобразования Гильберта относительно сингулярной меры; с вопросами граничного поведения функций из K_θ. Эти темы и взаимосвязи между ними рассматриваются в диссертации. Поскольку на вопрос о существовании усреднённого волнового оператора в случае коммутатора ранга 2 в диссертации даётся отрицательный ответ, рассмотрение коммутаторов высших рангов в связи с рассматриваемыми задачами теряет смысл.

Теорема 1 ниже показывает, в каком смысле каждый оператор, коммутатор которого с умножением на z имеет ранг 1, задаётся через интеграл типа Коши. Важной частью утверждения является существование предельных значений интегралов при приближении к окружности; сам факт существования пределов даже и в более слабом смысле определяет абелев волновой оператор для указанного случая (при том, что в отличие от классических волновых операторов, изучаемых в теории рассеяния, спектральные меры унитарных операторов могут быть сингулярными), однако этот факт без утверждения о существовании граничных значений почти всюду может быть доказан значительно проще.

Теорема 1. *Пусть μ, ν – две положительные борелевские меры на единичной окружности $\mathbb{T}$, и пусть $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ – ограниченный линейный оператор, коммутатор которого с умножением на независимую переменную z является оператором ранга 1 :*

$$XM_z - M_zX = (\cdot, \varphi)\psi, \quad \varphi \in L^2(\mu),\ \psi \in L^2(\nu),$$

то есть, $X(zu) - zXu = (u, \varphi)\psi$ для любой функции $u \in L^2(\mu)$. Тогда для любой функции u из $L^2(\mu)$ интеграл типа Коши

$$\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\lambda) = \int \frac{\bar{z}u(z)\overline{\varphi(z)}d\mu(z)}{1 - \bar{z}\lambda}$$

имеет некасательные граничные значения $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(z)$ (изнутри единичного круга) при ν-почти всех z таких, что $\psi(z) \neq 0$. Определим оператор $B : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ формулой

$$(Bu)(z) = \psi(z)\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(z), \quad u \in L^2(\mu)$$

(полагаем $(Bu)(z) = 0$, если $\psi(z) = 0$).

Тогда

1) B *— ограниченный оператор;*

2) $A = X - B$ *коммутирует с умножением на z: $AM_z = M_zA$;*

3) $||A|| \leqslant ||X||$*;*

4) *сужения сингулярных частей мер μ и ν на множества, где соответственно $\varphi \neq 0$ и $\psi \neq 0$, взаимно сингулярны.*

Поскольку для абсолютно непрерывной части меры ν это утверждение легко вытекает из хорошо известных результатов, интерес представляет случай сингулярной меры ν. Также раздельно рассматриваются абсолютно непрерывная и сингулярная части меры μ. Для доказательства строится внутренняя функция θ, для которой сингулярная часть меры μ является мерой Кларка σ_1. Далее применяется следующий результат о вложениях пространств K_θ в L^2-пространства на окружности, имеющий самостоятельное значение в теории пространств K_θ.

Пространством L^0 называется пространство измеримых функций с топологией сходимости по мере; функции, различающиеся между собой на множестве нулевой меры, считаются совпадающими.

Теорема 2. *Возьмем произвольную внутреннюю функцию θ. Предположим, что $Y : K_\theta \to L^0(\tau)$ – линейное непрерывное отображение такое, что если $h, zh \in K_\theta$, то $Y(zh) = zYh$.*

Тогда существует функция $\gamma \in L^0(\tau)$ такая, что всякая функция $h \in K_\theta$ имеет конечные некасательные граничные значения $h(z)$ при τ-почти всех $z \in \mathbb{T}$, для которых $\gamma(z) \neq 0$, и для таких z имеем $(Yh)(z) = \gamma(z)h(z)$ τ-почти всюду. Для точек z, в которых $\gamma(z) = 0$, τ-почти везде $(Yh)(z) = 0$.

Если $\theta(0) = 0$, то $\gamma = Y1$.

Ранее А.Б. Александровым был получен результат о непрерывных операторах вложения, характеризуемых, например, тем, что непрерывным функции из K_θ соответствуют функции, задаваемые их граничными значениями. Здесь рассматривается формально более широкий класс операторов вложения с последующим домножением на некоторую функцию. Значение этого результата состоит в том, что такие операторы характеризуются удобным для работы перестановочным свойством, приведённым в формулировке теоремы.

Ряд дальнейших результатов касаются операторов в пространстве $L^2(\mu)$, где μ – сингулярная мера на окружности, коммутаторы которых с оператором умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$ являются малыми в некотором смысле.

Оказывается, на ядерные операторы (т.е. операторы из класса Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_1$), являющиеся коммутаторами ограниченных операторов в $L^2(\mu)$ с оператором умножения на z, имеется линейное ограничение. Условие, что мера μ сингулярна относительно меры Лебега, здесь существенно, и для абсолютно непрерывной меры μ аналогичный результат неверен.

Теорема 3. *Пусть μ – сингулярная мера на единичной окружности, U – оператор умножения на z в $L^2(\mu)$. Предположим, что K – ядерный оператор в $L^2(\mu)$, $K = \sum(\cdot, u_k)v_k$, $\sum \|u_k\| \cdot \|v_k\| < \infty$, причём $K = XU - UX$ для некоторого ограниченного оператора X в $L^2(\mu)$. Тогда μ-почти всюду имеем $\sum \bar{u}_k v_k = 0$.*

При исследовании усреднённых волновых операторов на сингулярном спектре и преобразования Гильберта относительно сингулярной меры требуется более подробное рассмотрение случая, когда коммутатор имеет ранг 2. В диссертации обычно рассматриваются методы суммирования Чезаро (арифметические средние) и Абеля, когда усреднения последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ имеют вид соответственно

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} x_n$$

и

$$(1-r)\sum r^n x_n,$$

где $0 < r < 1$, с направлениями соответственно $N \to +\infty$ и $r \nearrow 1$.

В случае коммутаторов специального вида обнаруживается связь с так называемыми усечёнными операторами Тёплица в K_θ. Для функции $\psi \in L^2$ усечённый оператор Тёплица A_ψ в K_θ определяется формулой

$$A_\psi h = P_\theta \psi h, \quad h \in K_\theta,$$

где P_θ – ортогональный проектор на K_θ. Этот оператор изначально определён на плотном множестве всех ограниченных функций из K_θ, и предполагается, что символ ψ такой, что A_ψ – ограниченный оператор, таким образом, определённый на всём пространстве. Основные свойства усечённых операторов Тёплица изучались Д. Сарасоном [76].

Возьмём внутреннюю функцию θ, для которой $\theta(0) = 0$, рассмотрим $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Унитарные операторы U_α в K_θ, $|\alpha| = 1$, действуют по формуле

$$U_\alpha f = \begin{cases} zf, & (f, \bar{z}\theta) = 0; \\ \alpha, & f = \bar{z}\theta. \end{cases}$$

Усечённые операторы Тёплица допускают описание в терминах коммутаторов. При $\alpha = 1$ имеем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть θ – внутренняя функция, $\theta(0) = 0$. Оператор A в K_θ является усечённым оператором Тёплица тогда и только тогда, когда для некоторой функции $\varphi \in K_\theta$ выполняется соотношение*

$$AU_1 - U_1 A = (\cdot, \bar{z}\theta)\varphi - (\cdot, \bar{z}\theta\bar{\varphi})1.$$

Это описание усечённых операторов Тёплица потребуется для изучения поведения последовательности операторов вида $(U^n X U^{-n})_{n \geqslant 0}$, где U – унитарный оператор умножения на независимую переменную, а X – ограниченный оператор в $L^2(\mu)$. Изучение этих операторных последовательностей, в частности, потребуется для дальнейших приложений. Абелевы средние этих операторов переписываются в виде интегрального оператора с ядром Коши, в подынтегральное выражение которого также входят функции, входящие в выражение для коммутатора $XU - UX$, имеющего ранг 2.

Имеем следующее достаточное условие сходимости.

Теорема 5. *Пусть μ – сингулярная вероятностная мера на единичной окружности, не имеющая точечных масс. Построим внутреннюю функцию θ, для которой μ является мерой Кларка σ_1, обозначим через V унитарный* *оператор* $V_1 : K_\theta \to L^2(\sigma_1) = L^2(\mu)$, *сопоставляющий функциям из* K_θ *их граничные значения* μ*-почти везде. Пусть* q *– ограниченная функция, непрерывная на открытом множестве, для дополнения* e *которого выполняется условие* $\mu e = 0$, *и предположим, что либо* $X = VT_qV^*$, *где* T_q *– усечённый оператор Тёплица с символом* q, *либо* $X = q(U_\alpha)$, *где* $\alpha \neq 1$. *Тогда средние Чезаро последовательности операторов* $(U^nXU^{-n})_{n\geqslant 0}$ *стремятся к оператору* $q(U)$ *в слабой операторной топологии.*

В случае, когда q – непрерывная функция на всей окружности, имеется сходимость в сильной операторной топологии.

Следующий результат показывает, что существуют ограниченные функции q, для которых усреднённой сходимости нет.

Теорема 6. *Пусть* θ *– внутренняя функция, причём* $\theta(0) = 0$, *и предположим, что* $\mu = \sigma_1$ *не имеет атомов;* U *– оператор умножения на* z *в* $L^2(\mu)$. *Тогда:*

1) *Существует усечённый оператор Тёплица* T_q *в* K_θ *с ограниченным символом* q, *для которого абелевы средние последовательности операторов* (U^nXU^{-n}), *где* $X = VT_qV^*$, *не имеют предела в слабой операторной топологии.*

2) *Для любого комплексного числа* $\alpha \neq 1$ *с модулем* 1 *существуют функции* $q \in L^\infty(\sigma_\alpha)$, *для которых абелевы средние последовательности операторов* (U^nXU^{-n}) *при* $X = Vq(U_\alpha)V^*$ *не имеют предела в слабой операторной топологии.*

Из этого результата вытекает следующее утверждение об отсутствии слабой усреднённой сходимости для операторов, определяемых выражениями, используемыми при построении волновых операторов в классической теории рассеяния, но в случае сингулярной спектральной меры у исходного невозмущенного унитарного оператора.

Теорема 7. *Для любого унитарного оператора* $U : H \to H$, *имеющего нетривиальную непрерывную сингулярную часть, существует унитарный* *оператор U_* в пространстве H такой, что* $\operatorname{rank}(U_* - U) = 2$*, и абелевы усреднения последовательности $U^n U_*^{-n}$, $n \geqslant 0$, не имеют предела в слабой операторной топологии.*

Аналогичное утверждение о паре самосопряжённых операторов выглядит следующим образом.

Теорема 8. *Пусть A – самосопряжённый оператор, не имеющий собственных векторов, спектральная мера которого сингулярна относительно меры Лебега. Тогда существует самосопряжённый оператор A_* такой, что разность $A_* - A$ имеет ранг 2 и предел операторов*

$$\int_0^{+\infty} \exp(itA_*)\, \exp(-itA)\, \epsilon \exp(-\epsilon t)\, dt$$

при $\epsilon \to 0$ не существует в слабой операторной топологии.

Отметим, что в случае разности ранга 1 спектральные меры рассматриваемых унитарных (либо самосопряжённых) операторов взаимно сингулярны на приводящем подпространстве, определяемом одномерным оператором разности, из чего вытекает слабая сходимость изучаемых выражений, т.е. существование усреднённого слабого волнового оператора.

Одной из важных причин для изучения волновых операторов является то, что в классической теории рассеяния они осуществляют унитарную эквивалентность приводящих частей двух унитарных или самосопряжённых операторов. Некоторое формально более слабое свойство сохраняется даже в случаях, когда усреднённый волновой оператор не существует (в отличие от случая, когда он существует и равен нулевому оператору).

Теорема 9. *Пусть $U_1 : H_1 \to H_1$, $U_2 : H_2 \to H_2$ – унитарные операторы, $X : H_1 \to H_2$ – ограниченный оператор. Обозначим через C_n средние Чезаро последовательности $(U_2^n X U_1^{-n})$. Рассмотрим подпространства*

$$\{h \in H_1 :\ (C_n h, k) \to 0 \quad \forall k \in H_2\}$$

и

$$\{k \in H_2 : \ (C_n h, k) \to 0 \quad \forall h \in H_1\};$$

они приводят операторы U_1, U_2 соответственно. Тогда спектральные меры сужений операторов U_1, U_2 на ортогональные дополнения этих подпространств взаимно абсолютно непрерывны.

Следующий ряд результатов связан с вопросом о построении преобразования Гильберта относительно сингулярной меры μ. Стандартное определение преобразования Гильберта через интеграл вида $\int \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\mu(\xi)$ здесь не годится, ибо значения такого интеграла, понимаемые естественным образом, часто (например, даже для постоянных функций) оказываются бесконечными. Естественно ввести разностную регуляризацию и отступить от единичной окружности на окружность меньшего радиуса. В результате получаются выражения следующего вида:

$$(\mathcal{H}_r f)(z) = \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi} z}\, d\mu(\xi).$$

Если они имеют предел в каком-либо естественном смысле при $r \nearrow 1$, то получающаяся функция, определённая μ-почти всюду, будет называться преобразованием Гильберта функции $f \in L^2(\mu)$ (относительно меры μ). Преобразование Гильберта не является ограниченным оператором в $L^2(\mu)$, более того, оно даже незамыкаемо. Тем не менее, вопрос о классе функций, для которых оно определено, оказывается весьма содержательным.

Особенность подхода состоит в рассмотрении регулярных интегральных операторов в $L^2(\mu)$ вида

$$h \mapsto \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi} z}\, h(\xi)\, d\mu(\xi),$$

зависящих от параметров $f \in L^2(\mu)$ и $r \in (0, 1)$, и естественно возникающих классов функций f: состоящего из функций f, для которых нормы этих операторов равномерно ограничены по r, и его подкласса, когда у этих операторов существует предел в слабой операторной топологии при $r \nearrow 1$. Для изучения поведения этих интегральных операторов при $r \nearrow 1$ рассматриваются операторы в $L^2(\mu)$, для которых выражения, используемые при построении усреднённых абелевых волновых операторов, переписываются через операторы указанного вида.

Из теоремы 5 вытекают достаточные условия существования предела в терминах непрерывности некоторого унитарного преобразования функции f, из которых видно, что класс функций f, для которых определено преобразование Гильберта, достаточно широк. Тем не менее, сходимость есть не для всех функций, определяющих операторы с равномерно ограниченными нормами.

Теорема 10. *Для любой сингулярной борелевской меры μ на единичной окружности, не имеющей атомов, существуют функции $f \in L^2(\mu)$ такие, что*

$$\left\| \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi} z} \, h(\xi) \, d\mu(\xi) \right\|_{L^2(\mu)} \leqslant \mathrm{const} \cdot \|h\|, \qquad h \in L^2(\mu),$$

с константой, зависящей от f и не зависящей от r (в частности, нормы функций $\mathcal{H}_r f$ в $L^2(\mu)$ равномерно ограничены по r), однако функции $\mathcal{H}_r f$ не имеют слабого предела в $L^2(\mu)$.

Заключительная группа результатов этой главы связана с изучением граничного поведения функций из K_θ. Пусть $\varphi \in K_\theta$. Тогда, согласно результату А.Г. Полторацкого, $\varphi(rz)$ имеет предел при $r \nearrow 1$ для σ_α-почти всех z. Для изучения скорости сходимости естественно определить функции g_r формулой

$$g_r(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(rz)}{\theta(z) - \theta(rz)}.$$

Если $\varphi = f$ μ-почти везде, где μ – мера Кларка σ_1 функции θ, то оказывается, что $g_r = \mathcal{H}_r f$. С помощью этого свойства выводятся следующие результаты.

Теорема 11. *Возьмём функцию $\varphi \in K_\theta$ и различные комплексные числа α_1, α_2 с модулем 1. Предположим, что φ совпадает с ограниченной функцией q σ_{α_1}-почти всюду. Тогда нормы g_r в $L^2(\sigma_{\alpha_2})$ ограничены равномерно по r.*

Условия сходимости рассматриваются отдельно для чисто-точечной и непрерывной частей меры σ_{α_2}. Для случая, когда эта мера имеет нагрузку в некоторой точке единичной окружности, сходимость вблизи этой точки имеется всегда.

Теорема 12. *При условиях теоремы 11, если σ_{α_2} имеет атом в точке ω, то $g_r(\omega)$ имеет предел при $r \nearrow 1$,*

$$\lim \, g_r(\omega) = -\sigma_{\alpha_2}(\{\omega\})(\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1) \int \frac{q(z)d\sigma_{\alpha_1}(z)}{|1 - \bar{z}\omega|^2} - \bar{\alpha}_1 \int \frac{q(z)d\sigma_{\alpha_1}(z)}{1 - \bar{z}\omega}.$$

Сходимости относительно непрерывной части меры σ_{α_2}, вообще говоря, может не быть. Однако достаточно широкое достаточное условие для сходимости даётся в терминах непрерывности унитарной пересадки граничных значений функции из K_θ.

Теорема 13. *При условиях теоремы 11, если φ совпадает σ_{α_1}-почти всюду с непрерывной функцией q, то предел функций g_r при $r \nearrow 1$ существует в $L^2(\sigma_{\alpha_2})$ и совпадает с функцией $\frac{\varphi - q}{\alpha_2 - \alpha_1}$ почти всюду относительно непрерывной части меры σ_{α_2}.*

1.3 Спектральный анализ почти унитарных операторов

Глава посвящена изучению спектральных свойств операторов, близких к унитарным. Одной из типовых задач теории функциональных моделей является вопрос о построении удобной для работы функциональной модели заданного оператора, т.е. оператора в некотором пространстве стандартного вида, унитарно эквивалентного исходному оператору. В отличие от ставшей классической теории функциональных моделей для сжатий, для случая произвольных операторов (т.е. не обязательно являющихся сжатиями) функциональная модель универсального вида не построена. Для исследования вопроса о стабильности абсолютно непрерывного спектра [61] применялся подход С.Н. Набоко, основанный на записи изучаемого оператора как возмущения некоторого сжимающего (или диссипативного) оператора через функциональную модель последнего. Предлагаемый нами подход основан на модельных операторах вида

$$f \mapsto zf - (zf)(\infty),$$

действующих в пространствах функций, аналитических в областях, содержащих бесконечно удалённую точку, причём предполагается, что функции – элементы пространства имеют нулевой предел на бесконечности, а модельный оператор действует как умножение на независимую переменную и последующее вычитание константы, обеспечивающее принадлежность получающейся функции модельному пространству. Если элементы модельного пространства представляются как интегралы Коши мер или распределений, то действию модельного оператора соответствует умножение этих мер или распределений на независимую переменную.

Для операторов, близких к унитарным, оказывается возможным построение таких моделей в пространствах функций, мероморфных везде, кроме некоторого подмножества единичной окружности.

Теорема 14. *Пусть U – унитарный оператор со спектральной мерой, сингулярной относительно меры Лебега. Пусть x, y – векторы, причем порождённое ими подпространство, приводящее U, совпадает со всем пространством; и пусть $T = U + (\cdot, x)y$. Тогда существуют функции $\varphi, \psi \in H^2$ со следующими свойствами:*

$|\varphi| = |\psi|$ почти всюду на единичной окружности;

$\psi(0) \neq 0$;

функция θ, определённая на окружности как $\theta = \varphi/\bar{\psi}$, является внутренней, причём $\theta(0) = 0$;

и при этом оператор T унитарно эквивалентен оператору вида $f \mapsto zf - (zf)(\infty)$ в модельном пространстве вида $\frac{H^2}{\varphi} \cap \frac{H^2_-}{\bar{\psi}}$ с нормой $\|f\| = \|f\varphi\|_{H^2}$.

Отметим, что функции построенного модельного пространства мероморфны внутри круга и вне его, поскольку принадлежат пространствам $\frac{H^2}{\varphi}$ и $\frac{H^2_-}{\bar{\psi}}$

соответственно, а функции последнего пространства естественным образом продолжаются во внешность круга и имеют нулевой предел на бесконечности. Действие модельного оператора заключается в умножении на независимую переменную, в результате чего у функций, получающихся таким образом из элементов модельного пространства, существование предела на бесконечности сохраняется, однако он уже может оказаться ненулевым; и последующим вычитанием постоянной функции, определяемым пределом на бесконечности, после чего значение в бесконечности опять станет нулевым и получающаяся функция попадёт в модельное пространство.

Полученный результат допускает естественное обобщение, если отказаться от ограничения о том, что спектральная мера возмущаемого унитарного оператора сингулярна. В таком случае граничные значения функций изнутри и извне круга уже могут не совпадать, а выражение для нормы в модельном пространстве теперь дополнительно содержит выражение, определяющее некоторый скачок на окружности.

Теорема 15. *Пусть U – унитарный оператор, x – его циклический вектор, $U + (\cdot, x)y$ – его одномерное возмущение. Тогда существует оператор специального вида, унитарно эквивалентный оператору $U + (\cdot, x)y$:*

– существует функция $\theta \in H^\infty$, $\|\theta\|_\infty \leqslant 1$, $\theta(0) = 0$, и функции $\varphi, \psi \in H^2$ такие, что $\psi(0) = 1$, и $\theta\bar{\psi} - \varphi \in \Delta L^2$, где $\Delta = (1 - |\theta|^2)^{1/2}$;

– модельное пространство состоит из пар функций, первая из которых мероморфна в единичном круге, а вторая – в его внешности:

$$\left\{ f = [f_+, f_-] : f_+ \in \frac{H^2}{\varphi},\ f_- \in \frac{H^2_-}{\bar{\psi}},\ f_+\varphi - f_-\bar{\psi}\theta \in \Delta L^2 \right\};$$

– норма в модельном пространстве определяется как

$$\|f\|^2 = \|f_-\bar{\psi}\|^2_{L^2} + \left\| \frac{f_+\varphi - f_-\bar{\psi}\theta}{\Delta} \right\|^2_{L^2};$$

– модельный оператор определяется формулой $f \mapsto zf - (zf)(\infty)$.

Случай одномерных возмущений унитарных операторов с сингулярной спектральной мерой связан с задачей, известной как вопрос об описании выступающих точек единичного шара пространства H^1, см. [73, 74, 68]. Этот вопрос допускает важную переформулировку. Пусть w – вес на единичной окружности: $w \geqslant 0$ почти всюду, $w \in L^1$, $\int w = 1$, и, кроме того, будем предполагать, что $\int |\log w| < \infty$. В весовом пространстве $L^2(w)$ рассмотрим два подпространства – аналитическое и антианалитическое, порождённых функциями z^n при $n \geqslant 0$ и $n < 0$ соответственно. Ответ на вопрос о том, когда между ними ненулевой угол, описывается классическими условиями Сегё и Макенхаупта; однако удовлетворительного описания весов, для которых пересечение этих пространств ненулевое, пока не найдено. Пусть φ – внешняя функция такая, что $|\varphi|^2 = w$, и рассмотрим пространство $I_\varphi = \frac{H^2}{\varphi} \cap \frac{H^2_-}{\bar{\varphi}}$, совпадающее с пересечением замыканий указанных множеств аналитических и антианалитических полиномов. Тогда функция φ^2, лежащая на единичной сфере пространства H^1, является выступающей точкой единичного шара в H^1 тогда и только тогда, когда это пересечение нулевое. У функций из пространства I_φ естественным образом определены значения в комплексной плоскости за исключением некоторого подмножества единичного круга, и в нём действует оператор $f \mapsto zf - (zf)(\infty)$; обозначим через σ_w его спектр, который пуст тогда и только тогда, когда $I_\varphi = \{0\}$. Из того, что этот оператор обладает большим запасом спектральных проекторов, вытекает следующий результат, из которого видно, что пересечение аналитического и антианалитического подпространств окажется нулевым тогда и только тогда, когда вес w будет локально малым в некотором смысле во всех точках окружности. Прояснение этого смысла остаётся интересным и важным открытым вопросом.

Теорема 16. *Утверждение о том, что некоторая точка ξ единичной окружности принадлежит спектру σ_w, зависит только от локального поведения веса w вблизи этой точки. Точнее, если два веса w_1 и w_2 совпадают в окрестности точки ξ, то либо ξ принадлежит обоим множествам σ_{w_1} и σ_{w_2}, либо не принадлежит ни одному из них.*

Следующий результат диссертации связан с прояснением вопроса о существовании ограниченного проектора на абсолютно непрерывное подпространство возмущения унитарного оператора.

Пусть $T : H \to H$ – возмущение унитарного оператора U оператором конечного ранга, причём спектр оператора T не покрывает единичный круг. Предположим, что оператор T записан в виде $T = (I - \Omega K \Omega^*)U$, где E – конечномерное гильбертово пространство, $K : E \to E$ и $\Omega : E \to H$ – некоторые операторы. Очевидно, такая запись всегда возможна. Пусть $U = U_{ac} \oplus U_s$ – разложение оператора U в прямую сумму его абсолютно непрерывной (U_{ac}) и сингулярной (U_s) частей. Сингулярное пространство $H_s(T)$ оператора T состоит из всех векторов h таких, что слабая резольвента $((T - \lambda I)^{-1}h, f)$ не имеет скачка почти всюду на единичной окружности при всех $f \in H$. Сингулярная часть T_s есть сужение оператора T на его сингулярное подпространство. Функции Φ и F, значения которых – операторы в E, определяются формулами

$$\Phi(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1}U\Omega$$

и

$$F(\lambda) = (I - K\Phi(\lambda))^{-1}K.$$

Для $h \in H$ положим

$$(Rh)(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1}Uh, \quad |\lambda| \neq 1.$$

Граничные значения функций Φ, F и Rh $(h \in H)$ изнутри единичного круга и извне определены корректно почти всюду относительно меры Лебега m и будут обозначаться соответственно через Φ_+, Φ_-; F_+, F_-; R_+h, R_-h. Если рассмотреть спектральное представление

$$H_{ac} = \int \oplus H(z)dm(z)$$

для оператора U_{ac}, то можно определить операторы $\Omega(z) : E \to H(z)$ соотношениями $\Omega(z)e = (\Omega e)(z)$ при m-почти всех z, где $e \in E$.

Для $h \in H$ определим функции $\mathcal{X}h$, $\mathcal{Y}h$ на единичной окружности формулами

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}h)(z) =& h(z) + \Omega(z)F_+(z)(R_+h)(z),\\ (\mathcal{Y}h)(z) =& h(z) - \Omega(z)F_-^*(z)(R_+h)(z).\end{aligned}$$

Это – $H(z)$-значные функции, определенные m-почти всюду для каждого $h \in H$.

Теорема 17. *При введённых выше обозначениях следующие утверждения равносильны.*

1) *Оператор T подобен прямой сумме $U_{ac} \oplus T_s$.*

2) *Оператор T подобен прямой сумме некоторого абсолютно непрерывного унитарного оператора и некоторого сингулярного (не обязательно унитарного) оператора.*

3) *Существуют ограниченные операторы*

$$X : H \to H_{ac}, \qquad Y : H_{ac} \to H$$

такие, что

$$XT = U_{ac}X, \quad TY = YU_{ac} \quad \text{и} \quad XY = I.$$

4) *Отображения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – ограниченные операторы из H в H_{ac}.*

Равносильность первых трёх утверждений доказывается стандартными средствами. Основное содержание теоремы связано с тем, что соответствующая ситуация описывается четвёртым утверждением. Отметим, что в спектральном представлении унитарного оператора U отображения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ переписываются в виде интегралов типа Коши, и тем самым изучаемый вопрос о подобии переписывается в терминах ограниченности двухвесовых преобразований Коши. В связи с условиями органиченности двухвесового преобразования Коши в скалярном случае см. например [62].

Последний результат применён к склейке двух симметрических операторов, а именно, получены условия подобия самосопряжённому оператору оператора, получающегося из пары симметрических операторов перемешиванием их граничных условий.

1.4 Возмущения изометрической полугруппы сдвигов на полуоси и группы сдвигов на оси

В этой главе исследуется спектральная структура изометрических полугрупп и унитарных групп, получающихся малыми возмущениями полугруппы сдвигов на полупрямой и группы сдвигов на прямой соответственно. Из известных теорем о стабильности абсолютно непрерывного спектра вытекает, что при возмущениях класса Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_1$ структура абсолютно непрерывного спектра сохраняется. Сингулярная часть спектра, напротив, может быть достаточно подвижной. Основной вопрос, рассматриваемый здесь, состоит в изучении возможной спектральной структуры сингулярного унитарного слагаемого, возникающего при возмущении. Оказывается, что при таком возмущении полугруппы сдвигов, что разность элементов возмущенной и невозмущенной полугрупп с одинаковым индексом принадлежит классу $\mathfrak{S}_1$, у возмущенной полугруппы могут появиться любые сингулярные унитарные прямые слагаемые (в том числе с любой кратностью). Если же рассматривать естественные унитарные дилатации таких полугрупп, то аналогичный результат будет верен, только если позволить разности попадать в несколько более широкий класс: пересечение всех $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, тогда как для изучаемой модели прямой аналог с разностями класса $\mathfrak{S}_1$ оказывается невозможным.

Рассмотрим пространство $L^2(\mathbb{R})$ и его подпространство $L^2(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций, обращающихся в ноль на левой полуоси. Операторы сдвига с параметром $t > 0$ действуют по формуле

$$(\tau_t f)(x) = f(x - t);$$

в случае унитарной группы на прямой этой же формулой определяются сдвиги и при отрицательных t.

Теорема 18. *Пусть* $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ *— полугруппа сдвигов на* $L^2(\mathbb{R}_+)$.

1) *Если* $(\tilde{\tau}_t)$ *— изометрическая полугруппа такая, что* $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$ *при всех* $t \geqslant 0$, *то когенератор полугруппы* $(\tilde{\tau}_t)$ *унитарно эквивалентен прямой*

сумме оператора простого (т.е. однократного) сдвига и унитарного оператора с сингулярной спектральной мерой.

2) *Для произвольного сингулярного унитарного оператора V с единственным ограничением, что число 1 не принадлежит его точечному спектру, существует изометрическая полугруппа $(\tilde{\tau}_t)$, когенератор которой унитарно эквивалентен прямой сумме оператора простого одностороннего сдвига в H^2 и оператора V, причём для всех $t \geqslant 0$ выполнено соотношение $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$.*

Если ослабить условие принадлежности классу $\mathfrak{S}_1$ до принадлежности всем классам $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, то ограничение о том, что спектральная мера V сингулярна, можно опустить.

Идея построения опирается на следующее рассуждение. Полугруппа сдвигов на полуоси унитарно эквивалентна полугруппе операторов умножения на внутренние функции $\exp\left(t \cdot \frac{z+1}{z-1}\right)$ в пространстве Харди H^2 в единичном круге. Когенератором этой полугруппы является оператор сдвига S, т.е. оператор умножения на z. Пусть θ – внутренняя функция, $\theta(0) = 0$. Рассмотрим одномерное возмущение $\tilde{S}$ оператора S вида $S + (\cdot, \bar{z}\theta)(1 - \theta)$. Нетрудно видеть, что оператор $\tilde{S}$ имеет диагональный вид относительно разбиения пространства $H^2 = K_\theta \oplus \theta H^2$, причём на первой компоненте получается унитарный оператор, а на второй – оператор, унитарно эквивалентный оператору сдвига S. Теперь можно рассмотреть полугруппу с когенератором $\tilde{S}$ и выяснить, при каких функциях θ будут выполнены требуемые свойства. На этом пути получаются любые сингулярные спектральные компоненты кратности 1. Чтобы получить произвольные конечные кратности, нужно провести аналогичное построение для разбиения пространства

$$H^2 = K_{\theta_1} \oplus K_{\theta_2} \oplus \cdots \oplus \theta H^2,$$

где θ – произведение внутренних функций θ_i. Для бесконечных кратностей это же самое рассуждение годится в несколько усложнённом варианте с отказом от условий $\theta_i(0) = 0$.

Теперь рассмотрим унитарную дилатацию возмущённой полугруппы сдвигов на полуоси, которая сама уже будет возмущением унитарной группы сдвигов на всей оси.

Как и выше, $(\tau_t, t \geqslant 0)$ – полугруппа сдвигов на правой полуоси, и теперь $(\tau'_t, t \in \mathbb{R})$ – группа сдвигов на всей вещественной оси. Элементы возмущённой полугруппы и возмущённой группы будут обозначаться через $\tilde{\tau}_t$ и $\tilde{\tau}'_t$ соответственно. То, что возмущённая группа является дилатацией возмущенной полугруппы, означает, что $\tilde{\tau}'_t f = \tau'_t f$ при $t < 0$, если f обращается в нуль на правой полуоси. Возмущения с таким свойством называются марковскими. Коциклом $(W_t, t \geqslant 0)$ называется семейство операторов, обладающих свойством $W_{t+s} = W_t \tau'_t W_s \tau'_{-t}$, $t, s \geqslant 0$, причём элементы коцикла связывают элементы возмущенной и исходной полугрупп формулой $\tilde{\tau}_t = W_t \tau_t$. Полугруппу из предыдущей теоремы можно достроить до унитарной дилатации с заменой класса $\mathfrak{S}_1$ на пересечение всех $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, для разности элементов коцикла и тождественного оператора.

Теорема 19. *Для любой группы унитарных операторов $(U_t, t \in \mathbb{R})$ со спектральной мерой, сингулярной относительно меры Лебега, найдётся коцикл $(W_t, t \geqslant 0)$, для которого $W_t - I \in \mathfrak{S}_p$ при всех $p > 1$, возмущённая группа унитарно эквивалентна ортогональной прямой сумме невозмущенной группы и группы $(U_t, t \in \mathbb{R})$, причём разности их элементов обладают свойством $\tilde{\tau}'_t - \tau'_t \in \mathfrak{S}_p$ при всех $p > 1$.*

Естественно возникает предположение, что при нетривиальных коциклических возмущениях выполнение условия $W_t - I \in \mathfrak{S}_1$ невозможно, т.е. при таком условии возмущённая группа обязательно окажется унитарно эквивалентной исходной группе сдвигов на прямой.

2 Интегралы типа Коши и сингулярные меры

Эта часть работы посвящена вопросу о некасательных, или угловых, граничных значениях для некоторых классов функций, голоморфных в единичном круге комплексной плоскости. Теоремы о существовании угловых граничных значений функций из классов Харди H^p почти всюду относительно меры Лебега являются классическими. Эти же вопросы для мер, сингулярных относительно меры Лебега, исследованы в гораздо меньшей степени. В работе А.Г. Полторацкого [33] получен ряд таких результатов для функций, являющихся отношением двух преобразований Коши комплексных мер на единичной окружности. Эти результаты непосредственно связаны с вопросом о существовании граничных значений у функций из подпространств K_θ пространства Харди H^2, инвариантных относительно оператора обратного сдвига. В статье [33] фактически доказано существование угловых граничных значений для преобразований Коши в случае L^2-пространств специального вида, построенных по мерам Кларка σ_α, связанным с внутренней функцией θ.

Для интегралов типа Коши используется обозначение

$$\mathcal{K}_\alpha(z) = \int \frac{d\alpha(\xi)}{1-\bar{\xi}z},$$

где α – комплексная борелевская мера с конечной вариацией на единичной окружности $\mathbb{T}$. Под угловым (некасательным) граничным значением функции f, заданной в единичном круге, в точке z единичной окружности понимается предел значений $f(\lambda)$, когда λ стремится к z, оставаясь внутри области $\{\lambda : |\arg(1-\bar{z}\lambda)| < \varepsilon\}$, где ε - некоторое (любое) число из интервала $(0, \pi/2)$, а символ arg обозначает аргумент комплексного числа, принимающий значение в промежутке $(-\pi, \pi]$.

Также рассматриваются преобразования, определённые на некотором пространстве $L^2(\mu)$, где μ - конечная борелевская мера на единичной окружности, и действующие в некоторое пространство $L^2(\nu)$ функций на окружности по формуле

$$f \in L^2(\mu) \mapsto \mathcal{K}_{f\mu};$$

при этом получающиеся значения функций понимаются в смысле угловых граничных значений ν-почти всюду, которые существуют не для всякой меры ν и существование которых для конкретных классов пространств надо доказывать.

При любом естественном понимании определения преобразования Коши (нас интересует понимание в смысле граничных значений) его коммутатор с оператором умножения на независимую переменную является оператором ранга 1, а именно, оператором $(\cdot, \bar{z})1$. Домножая оператор преобразования Коши слева и справа на операторы умножения на функции, можно получать операторы ранга 1 общего вида (некоторые из них могут оказаться неограниченными, тогда как нас интересуют только ограниченные преобразования). Вопрос восстановления оператора по его коммутатору тесно связан с конструкциями из теории рассеяния, которые будут обсуждаться в главе 2.3; при этом интегралы типа Коши соответствуют конструкции усреднённых абелевых волновых операторов. В главе 2.2 рассматривается случай коммутатора ранга 1. Конечные суммы интегралов типа Коши соответствуют коммутаторам конечного ранга. Случай коммутатора ранга 2 существенно отличается от случая ранга 1, и с ним связаны наиболее важные результаты этой части диссертации.

2.1 Предварительные сведения

2.1.1 Абелевы волновые операторы и интегралы типа Коши

В этом параграфе будут приведены необходимые в дальнейшем известные формулы, показывающие связь между конструкцией волнового оператора для пары унитарных операторов и интегралами типа Коши. Общая конструкция состоит из пары унитарных операторов U_1, U_2, действующих в гильбертовых пространствах H_1, H_2 соответственно, и “оператора отождествления” $X : H_1 \to H_2$. Здесь, в отличие от классической теории рассеяния, не накладывается условие абсолютной непрерывности спектральной меры унитарных операторов, и основной интерес представляет как раз случай сингулярных спектральных мер, обычно вообще не рассматриваемый в теории рассеяния. Часто предполагается, что оператор X изометрический, однако мы здесь предполагаем лишь только то, что он ограничен. Целью является изучение сходимости последовательности операторов $U_2^n X U_1^{-n}$, и её предел, если он существует, называется волновым оператором. Также рассматриваются и усреднённые волновые операторы. Так, если существует предел абелевых средних указанной последовательности, он называется абелевым волновым оператором.

Обозначим через K коммутатор

$$K = XU_1 - U_2 X.$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_2^n X U_1^{-n} &= X + \sum_{m=0}^{n-1} \left(U_2^{m+1} X U_1^{-(m+1)} - U_2^m X U_1^{-m} \right) \\ &= X - \sum_{m=0}^{n-1} U_2^m K U_1^{-(m+1)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Абелевы средние последовательности c_n имеют вид

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n c_n.$$

Перепишем абелевы средние последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ через коммутатор K:

$$\begin{aligned} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n X U_1^{-n} &= X - (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n-1} U_2^m K U_1^{-(m+1)} \\ &= X - \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+1} U_2^m K U_1^{-(m+1)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Отсюда видно, что сходимость абелевых средних последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ равносильна сходимости сумм

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n K U_1^{-(n+1)}.$$

Теперь допустим, что U_1, U_2 – операторы умножения на независимую переменную в пространствах $L^2(\mu), L^2(\nu)$ соответственно, где μ, ν – борелевские меры на единичной окружности. Если

$$K = (\cdot, u)v$$

– оператор ранга 1, то для $h \in L^2(\mu)$ имеем

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n K U_1^{-(n+1)} h\right)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n (U_1^{-(n+1)} h, u)(U_2^n v)(z)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int \bar{\xi}^{n+1} h(\xi)\overline{u(\xi)} d\mu(\xi) z^n v(z)\\ &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n \bar{\xi}^{n+1} z^n\right) h(\xi)\overline{u(\xi)} d\mu(\xi) v(z)\\ &= \int \frac{\bar{\xi} h(\xi)\overline{u(\xi)} d\mu(\xi)}{1 - r\bar{\xi} z} \cdot v(z)\\ &= \mathcal{K}_{\bar{\xi} h \bar{u} \mu}(rz) \cdot v(z).\end{aligned}$$

Аналогично, если K – оператор конечного ранга, записанный в виде конечной суммы

$$K = \sum_k (\cdot, u_k) v_k,$$

то

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n K U_1^{-(n+1)} h\right)(z) = \sum_k \mathcal{K}_{\bar{\xi} h \bar{u}_k \mu}(rz) \cdot v_k(z). \tag{2.3}$$

Таким образом, существование абелевых волновых операторов в случае коммутатора конечного ранга равносильно существованию пределов в $L^2(\nu)$ конечных сумм интегралов типа Коши, домноженных на функции $v_k \in L^2(\nu)$.

Поскольку случай, когда спектральная мера хотя бы одного из унитарных операторов U_1, U_2 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, покрывается классической теорией рассеяния (с учётом того обстоятельства, что из существования сильного предела у семейства операторов вытекает существование слабого предела у сопряжённого семейства), в центре внимания здесь будет случай, когда спектральные меры обоих унитарных операторов сингулярны. Для случая, когда спектр унитарного оператора с сингулярной спектральной мерой прост, т.е. почти всюду имеет кратность 1, полезной оказывается унитарно эквивалентная модель, построенная Д.Кларком [49]. Ей посвящён следующий параграф.

2.1.2 Меры Кларка и интегралы типа Коши

Пусть μ – вероятностная борелевская мера на единичной окружности, сингулярная относительно меры Лебега. (В статье Кларка не предполагается, что мера μ вероятностная, а рассматриваются любые конечные сингулярные меры.) Рассмотрим функцию θ, голоморфную в единичном круге, заданную соотношением

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\, d\mu(\xi). \tag{2.4}$$

Функция в правой части имеет положительную вещественную часть, поэтому θ принимает значения в единичном круге. Поскольку мера μ сингулярна, граничные значения правой, а следовательно и левой частей равенства лежат на мнимой оси в почти всех точках относительно меры Лебега, а значит граничные значения функции θ почти всюду имеют модуль 1. Это означает, что θ является *внутренней* функцией. Из условия, что μ – вероятностная мера, получается, что $\theta(0) = 0$. Обратно, для любой такой внутренней функции θ существует сингулярная вероятностная мера μ на окружности, для которой выполняется соотношение (2.4).

Если θ – внутренняя функция в единичном круге, то пространство θH^2 является подпространством класса Харди

$$H^2 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n : \sum |c_n|^2 < \infty \right\} \subset L^2(\mathbb{T}),$$

инвариантным относительно умножения на z. Его ортогональное дополнение

$$K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$$

инвариантно относительно оператора обратного сдвига

$$f \mapsto \frac{f - f(0)}{z}.$$

В случае, когда $\theta(0) = 0$, функции 1 и $\bar{z}\theta$ принадлежат пространству K_θ, и для функции $f \in K_\theta$ свойство $zf \in K_\theta$ равносильно тому, что

$$(f, \bar{z}\theta) = 0.$$

Таким образом оператор умножения на z в K_θ задан на подпространстве коразмерности 1, ортогональном функции $\bar{z}\theta$, и его образом является множество

$$\{f \in K_\theta :\ f(0) = 0\} = \{f \in K_\theta :\ (f, 1) = 0\},$$

также имеющее коразмерность 1. Для того, чтобы достроить оператор умножения на z до унитарного оператора на всём пространстве K_θ, требуется выбрать унимодулярный параметр – комплексное число α, $|\alpha| = 1$, и определить

$$U_\alpha(\bar{z}\theta) = \alpha.$$

В статье [49] Д.Кларк описал спектральные меры σ_α унитарных операторов U_α. В случае, когда $\theta(0) = 0$, описание Кларка выражается равенством

$$\frac{\alpha + \theta(z)}{\alpha - \theta(z)} = \int \frac{1 + \bar{\xi} z}{1 - \bar{\xi} z}\, d\sigma_\alpha(\xi).$$

Функция в левой части равенства имеет положительную вещественную часть в единичном круге, которая, будучи гармонической функцией, записывается как интеграл Пуассона положительной меры σ_α. Поскольку θ – внутренняя функция, меры σ_α сингулярные, а условие $\theta(0) = 0$ означает, что они вероятностные.

Отметим, что мера σ_α сосредоточена на множестве, где угловые граничные значения функции θ существуют и равны α. Поэтому меры σ_α, соответствующие различным числам α, взаимно сингулярны.

Зафиксируем некоторое комплексное число α с модулем 1. То, что мера σ_α является спектральной мерой унитарного оператора U_α в K_θ, означает существование унитарного оператора

$$V_\alpha : K_\theta \to L^2(\sigma_\alpha),$$

осуществляющего спектральное представление оператора U_α. Кларк определил его через граничные значения функций, образующих плотное множество в K_θ, а позже А.Г.Полторацкий [33] показал, что на самом деле угловые граничные значения σ_α-почти всюду существуют для всех функций из K_θ. Унитарный оператор V_α сопоставляет функциям из K_θ их граничные значения. Обратный оператор $V_\alpha^* : L^2(\sigma_\alpha) \to K_\theta$ действует по формуле

$$(V_\alpha^* h)(z) = (1-\theta(z))\mathcal{K}_{h\sigma_\alpha}(z) = (1-\theta(z))\int \frac{h(\xi)d\sigma_\alpha(\xi)}{1-\bar{\xi}z},$$

и, таким образом, значения в круге функций из K_θ восстанавливаются по их граничным значениям σ_α-почти всюду с помощью интегралов типа Коши.

2.1.3 Методы суммирования

Здесь даётся необходимая информация о методах усреднения для ограниченных последовательностей, занумерованных неотрицательными целыми числами. Возьмём направленное множество индексов α, которое как правило будет либо множеством неотрицательных целых чисел с направлением $n \to +\infty$, либо интервалом $[0,1)$ с направлением $r \nearrow 1$. Пусть $p_{\alpha,n}$ — веса, определяющие регулярный метод суммирования. Точнее, предположим, что

- $p_{\alpha,n} \geqslant 0$; для всех α $\sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} = 1$;
- для всех $n \geqslant 0$ $p_{\alpha,n} \xrightarrow[\alpha]{} 0$.

Усреднения последовательности (x_n) имеют вид

$$\tilde{x}_\alpha = \sum_n p_{\alpha,n} x_n.$$

Если (x_n) сходятся, то $\tilde{x}_\alpha$ также сходятся, однако обратное в общем случае неверно; это позволяет рассматривать усреднённые пределы последовательностей, которые не сходятся в обычном смысле. Первое свойство означает, что каждый элемент $\tilde{x}_\alpha$ является усреднением (x_n); по второму свойству предел (а также и сам факт его существования) не зависит от любого конечного числа элементов последовательности.

Здесь основными примерами регулярных методов суммирования будут метод Чезаро C_1 арифметических средних, где

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k,$$

и метод усреднения по Абелю,

$$\tilde{x}_r = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^n x_n, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

с направлением $r \nearrow 1$.

Метод суммирования по Чезаро, а следовательно и все более сильные методы суммирования, инвариантны относительно сдвигов. Это означает, что усреднения последовательностей (x_{n+m}) сходятся или нет одновременно при всех целых m. Для инвариантности относительно сдвигов достаточно, чтобы семейство

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_{\alpha,n} - p_{\alpha,n+1}|$$

было ограниченной функцией, стремящейся к нулю по α, для чего, в свою очередь, достаточно выполнения условия

$$p_{\alpha,n} \geqslant p_{\alpha,n+1} \quad \text{для всех } \alpha, n.$$

Очевидно, этим свойством обладают методы суммирования Чезаро и Абеля. При выполнении указанных условий для любой непостоянной унимодулярной геометрической прогрессии (x_n) ($x_n = \omega^n$, где $|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$) предел средних $\tilde{x}_\alpha$ существует и тогда уже обязательно равен нулю. Существование предела, вообще говоря, имеет место не для всех методов суммирования, инвариантных относительно сдвигов.

Здесь будут рассматриваться усреднения последовательностей операторов вида $(U_2^n X U_1^{-n})$, где U_1, U_2 – унитарные операторы в гильбертовом пространстве, X – ограниченный оператор. Тем самым изучаемая последовательность принимает значения в пространстве операторов, нормы которых не превышают $\|X\|$, и, тем самым, последовательность ограниченная. Чтобы перейти от последовательности операторов к обычной скалярной последовательности, можно рассмотреть скалярные произведения вида $(U_2^n X U_1^{-n} h_1, h_2)$ для произвольных пар векторов h_1, h_2. Для любой последовательности из сходимости её средних Чезаро вытекает сходимость её абелевых средних. Поскольку последовательность операторов $(U_2^n X U_1^{-n})$ ограничена, для неё также верно и обратное; это вытекает из теоремы Харди–Литтлвуда, см. [56].

Рассмотрим какой-либо метод суммирования, инвариантный относительно сдвигов. Тогда если усреднённый предел Y последовательности $(U_2^n X U_1^{-n})$ существует, то он сплетает операторы U_1 и U_2:

$$YU_1 = U_2 Y.$$

Действительно, $YU_1 - U_2 Y$ есть усреднённый предел последовательности элементов вида

$$(U_2^{n+1} X U_1^{-(n+1)}) U_1 - U_2 (U_2^n X U_1^{-n}) = 0.$$

В общем случае может оказаться, что предельный оператор существует, но не сплетает U_1 и U_2. Например, рассмотрим операторы в одномерном пространстве: $H_1 = H_2 = \mathbb{C}$, $U_1 = I$, $U_2 = -I$, $X = I$. Пусть метод суммирования сопоставляет последовательности (x_n) подпоследовательность (x_{2n}) (или усреднения этой подпоследовательности для некоторого регулярного метода суммирования). Тогда все элементы последовательности $U_2^{2n} X U_1^{-2n}$ равны I; следовательно, ее (усредненный) предел также равен I, однако $IU_1 \neq U_2 I$.

Вообще говоря, метод суммирования, для которого любая ограниченная последовательность имеет предел, существует всегда в смысле существования, проистекающего из аксиомы выбора. На пространстве l^∞ ограниченных последовательностей банахов предел определяется как (любой) непрерывный неотрицательный функционал, инвариантный относительно сдвигов, и сопоставляющий последовательностям, сходящимся в обычном смысле, их пределы. Формально банахов предел может быть реализован как предел некоторой очень сложной направленности, и тем самым – как усреднённый предел исходной последовательности. При этом ни один такой функционал не может быть предъявлен конструктивно. Здесь основное внимание будет уделено вопросу о сходимости усреднений ограниченной последовательности $(U_2^n X U_1^{-n})$, соответствующих более естественным методам суммирования, в первую очередь - сходимости средних Абеля (или, что равносильно, средних Чезаро).

2.2 Преобразование Коши для пары мер

В этой главе результаты А.Г. Полторацкого и А.Б. Александрова о некасательных граничных значениях псевдопродолжимых функций из H^2 на множествах нулевой меры Лебега используются для изучения операторов в L^2-пространствах на единичной окружности. Рассматривается произвольный ограниченный оператор, действующий из одного такого L^2-пространства в другое, коммутатор которого с умножением на независимую переменную есть оператор ранга 1. Доказано, что такой оператор представляется в виде суммы оператора умножения на некоторую функцию и преобразования Коши в смысле угловых граничных значений.

Основной результат этой главы состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть μ, ν – две положительные борелевские меры на единичной окружности $\mathbb{T}$, и пусть $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ – ограниченный линейный оператор, коммутатор которого с умножением на независимую переменную z является оператором ранга 1 :*

$$XM_z - M_zX = (\cdot, \varphi)\psi, \quad \varphi \in L^2(\mu),\ \psi \in L^2(\nu), \tag{2.5}$$

то есть, $X(zu) - zXu = (u, \varphi)\psi$ для любой функции $u \in L^2(\mu)$. Тогда для любой функции u из $L^2(\mu)$ интеграл типа Коши

$$\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\lambda) = \int \frac{\bar{z}u(z)\overline{\varphi(z)}d\mu(z)}{1 - \bar{z}\lambda}$$

имеет некасательные граничные значения $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(z)$ *(изнутри единичного круга) при* ν*-почти всех* z *таких, что* $\psi(z) \neq 0$. *Определим оператор* $B : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ *формулой*

$$(Bu)(z) = \psi(z)\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(z), \quad u \in L^2(\mu) \tag{2.6}$$

(полагаем $(Bu)(z) = 0$, *если* $\psi(z) = 0$*).*

Тогда

1) B *— ограниченный оператор;*

2) $A = X - B$ *коммутирует с умножением на* z*:* $AM_z = M_zA$*;*

3) $||A|| \leqslant ||X||$*;*

4) *сужения сингулярных частей мер* μ *и* ν *на множества, где соответственно* $\varphi \neq 0$ *и* $\psi \neq 0$*, взаимно сингулярны.*

Основное значение этого результата состоит в существовании граничных значений. Свойства 1) – 4) из этого уже вытекают стандартными средствами. Теорему 1 можно рассматривать с точки зрения теории рассеяния: в некотором простейшем (скалярном) случае показано, что слабый абелев волновой оператор существует и без предположения об абсолютной непрерывности спектра, присутствующего в классических результатах, т.е. в нашей теореме допускается, что у спектральной меры рассматриваемых унитарных операторов U_1, U_2 имеется сингулярная часть. Точнее, оказывается, что слабый абелев волновой оператор существует в случае, когда коммутатор $K = XU_1 - U_2X$ имеет ранг 1, поскольку в L^2-пространствах из сходимости почти всюду при ограниченности норм вытекает слабая сходимость. Однако ниже в предложении 2.13 будет дано существенно более простое доказательство этого факта.

А.Б. Александров [3] доказал (см. теорему 2.6 ниже), что из непрерывности оператора, сопоставляющего непрерывным функциям из K_θ их граничные значения почти всюду относительно некоторой меры на окружности, следует существование некасательных граничных значений у всех функций из K_θ. Наш результат имеет такой же смысл: ограниченность оператора преобразования Коши влечет существование угловых граничных значений. С помощью упомянутого выше результата Александрова будет получено описание непрерывных операторов, которые действуют из пространства K_θ в пространство измеримых функций на окружности, заданных почти всюду относительно некоторой меры, и "почти коммутируют" с умножением на независимую переменную.

Как непосредственное следствие теоремы для случая $\varphi = \bar{z}$, $\psi = 1$ получается следующая интерпретация вопроса об ограниченности преобразования Коши относительно пары мер на $\mathbb{T}$. Отсюда видно, что при любом естественном определении преобразования Коши, для которого выполнено свойство, описанное в п.1) ниже, из ограниченности преобразования Коши вытекает существование угловых граничных значений.

Следствие 2.1. *Пусть μ, ν – две меры на $\mathbb{T}$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *существует ограниченный оператор $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ такой, что $XM_z - M_zX = (\cdot, \bar{z})1$;*

2) *для любой функции $u \in L^2(\mu)$ интегралы типа Коши $\mathcal{K}_{u\mu}$ имеют некасательные граничные значения ν-почти всюду, причём оператор $B : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$, сопоставляющий функции u граничные значения функции $\mathcal{K}_{u\mu}$, ограничен.*

Замечание 1. Аналог утверждения 4) теоремы, очевидно, неверен для абсолютно непрерывных частей мер. Типичным примером является проектор Рисса P_+ в пространстве Харди H^2, где $\mu = \nu$ – мера Лебега на единичной окружности. Имеем $P_+M_z - M_zP_+ = (\cdot, \bar{z})1$, т.е. $\varphi = \bar{z}$, $\psi = 1$; функции φ и ψ сосредоточены на одном и том же множестве.

Замечание 2. Интересно рассмотреть нашу теорему в ее частном случае, когда пространства $L^2(\mu)$ и $L^2(\nu)$ конечномерны. Пусть μ, ν – меры на единичной окружности, носителями которых являются конечные множества $\{p_j\}$, $\{q_i\}$ соответственно. Матрицы операторов из $L^2(\mu)$ в $L^2(\nu)$ будут рассматриваться относительно естественных ортонормированных базисов в этих пространствах. Рассмотрим произвольный оператор $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$; пусть (x_{ij}) – его матрица. Ясно, что матрица оператора $XM_z - M_zX$ имеет вид $((p_j - q_i)x_{ij})$. В частности, отсюда видно, что $XM_z = M_zX$ в том и только том случае, когда $x_{ij} = 0$ при $p_j \neq q_i$, т.е. X – оператор умножения на некоторую функцию.

Определим операторы A и B с помощью их матриц (a_{ij}) и (b_{ij}): если $p_j = q_i$, то положим $a_{ij} = x_{ij}$ и $b_{ij} = 0$; если $p_j \neq q_i$, то наоборот, $a_{ij} = 0$ и $b_{ij} = x_{ij}$. Ясно, что $X = A + B$, $AM_z = M_zA$, и оператор B определяется оператором $XM_z - M_zX$. Каждая строка и каждый столбец матрицы (a_{ij}) содержит не более одного ненулевого элемента; значит, $||A|| = \max |a_{ij}| \leqslant ||X||$.

Теперь предположим, что $XM_z - M_zX = (\cdot, \varphi)\psi$ – оператор ранга 1; тогда матрица этого оператора имеет вид $(\bar{\varphi}_j \psi_i)$, где φ_j, ψ_i – коэффициенты функций φ, ψ относительно естественных ортонормированных базисов. Если $p_j = q_i$, то элемент с индексами i, j матрицы оператора $XM_z - M_zX$ нулевой, и, следовательно, хотя бы одна из функций φ, ψ обращается в ноль в точке $p_j = q_i$. (Аналог этого свойства для сингулярных мер на окружности содержится в утверждении 4) теоремы.) Таким образом, выражение в правой части формулы (2.6) корректно определено (полагаем его равным 0, если $\psi(z) = 0$). Нетрудно убедиться в том, что определения оператора B через матричные клетки и с помощью формулы (2.6) совпадают.

Замечание 3. Утверждения теоремы верны также при предположении, что X — непрерывный оператор из $L^2(\mu)$ в пространство $L^0(\nu)$ всех измеримых функций с топологией сходимости по мере ν. Это сразу следует из существования веса $w(z) > 0$, для которого X будет непрерывно действовать в весовое пространство $L^2(w\nu)$. Утверждение о том, что такой вес w существует, является следствием, например, из результатов главы III.H из [83] о факторизации операторов в L^p-пространствах. Очевидно, что определенные там свойства факторизации (определения 4 и 9) равносильны непрерывному действию рассматриваемого оператора в "слабое" и обычное L^p-пространства с некоторым весом. Пусть X — непрерывный оператор из некоторого гильбертова пространства H в пространство $L^0(\nu)$. Гильбертовы пространства являются пространствами “типа 2”, и, согласно теореме 6, существует измеримая функция γ такая, что все функции $\gamma X h$, $h \in H$, принадлежат слабому пространству $L_{2,\infty}$. Следовательно, X действует в весовое пространство L^p при $p < 2$. По следствию 11 отсюда вытекает, что X действует в весовое L^2-пространство.

2.2.1 Схема доказательства

Оператор A из теоремы 1 будет построен как усреднённый предел последовательности $M_z^n X M_z^{-n}$ при $n \to +\infty$. Поэтому можно рассматривать A как “волновой оператор” из теории рассеяния, в которой существование волновых операторов связано с существованием граничных значений интегралов типа Коши почти всюду относительно меры Лебега. Доказательство теоремы будет построено по аналогичной схеме, причем мера уже не будет предполагаться абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Для полноты изложения ниже приводится лемма, в которой теорема 1 сводится к вопросу о существовании граничных значений. Таким образом, здесь не используются ссылки на уже известные результаты теории рассеяния, и все необходимые сведения содержатся в тексте. Изложение основных фактов классической теории рассеяния для случая абсолютно непрерывной спектральной меры можно найти, например, в [38].

Лемма 2.2. *Предположим, что $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ – ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий условию (2.5) и такой, что для каждой функции $u \in L^2(\mu)$ функция $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}$ имеет угловые граничные пределы ν-почти всюду на множестве, на котором $\psi \neq 0$. Определим оператор $B : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ формулой (2.6). Тогда B – ограниченный оператор, и для $A = X - B$ выполнено соотношение $AM_z = M_z A$ и $||A|| \leqslant ||X||$.*

Доказательство. Формула (2.2) переписывается следующим образом:

$$X - \sum_{n=1}^{\infty} r^n M_z^{n-1}(XM_z - M_zX)M_z^{-n} = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n M_z^n X M_z^{-n}, \tag{2.7}$$

где $0 < r < 1$ и ряды сходятся по норме. Далее, для $u \in L^2(\mu)$ и $\xi \in \mathbb{T}$ по формуле (2.3) имеем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n M_z^{n-1}(XM_z - M_zX)M_z^{-n}u\right)(\xi) = r\psi(\xi)\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(r\xi).$$

Эти выражения поточечно сходятся к $\psi(\xi)\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\xi)$ при $r \to 1$. Норма оператора в правой части (2.7) не превосходит $(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n ||X|| = ||X||$. Следовательно, можно определить ограниченный оператор A через предельные выражения равенства (2.7); тогда $||A|| \leqslant ||X||$.

По построению имеем $X = A + B$, где оператор B задается формулой (2.6). Кроме того, если $u \in L^2(\mu)$, то

$$\begin{aligned}((BM_z - M_zB)u)(\xi) =& \psi(\xi)(\mathcal{K}_{u\bar{\varphi}\mu}(\xi) - \xi\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\xi))\\ =& \psi(\xi)\int \frac{(u(z)\overline{\varphi(z)} - \xi\bar{z}u(z)\overline{\varphi(z)})d\mu(z)}{1-\bar{z}\xi}\\ =& \psi(\xi)\int u(z)\overline{\varphi(z)}d\mu(z).\end{aligned}$$

Это означает, что $BM_z - M_zB = (\cdot, \varphi)\psi$, и из соотношения (2.5) вытекает, что $AM_z = M_zA$. $\square$

Из доказательства ясно, что достаточно было предполагать существование лишь радиальных (а не угловых) граничных значений.

Поскольку функции $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}$ принадлежат классам Харди H^p при любом $p \in (0,1)$, они имеют угловые граничные значения почти всюду относительно меры Лебега m на единичной окружности. Таким образом, получаем доказательство теоремы 1 в случае, когда ν – абсолютно непрерывная мера, что является классическим результатом теории рассеяния (в частном случае коммутатора ранга 1).

Предложение 2.3. *Теорема 1 верна в случае, когда мера ν абсолютно непрерывна.*

По лемме 2.2, чтобы доказать теорему 1, нужно установить существование угловых граничных значений у функции $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}$, $u \in L^2(\mu)$, ν_s-почти всюду на множестве, на котором $\psi \neq 0$ (ν_s обозначает сингулярную часть меры ν.) Для этого достаточно доказать, что некасательные граничные значения функции $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}$ существуют ν-почти всюду в частном случае, когда мера ν сингулярна и $\psi(z) \neq 0$ при ν-почти всех z. Действительно, если X – оператор из теоремы 1, то аналог соотношения (2.5) также справедлив и для меры $\chi\nu$ и оператора $u \mapsto \chi \cdot Xu$, где χ – индикатор множества нулевой меры Лебега, на котором $\psi \neq 0$ ν_s-почти всюду. Аналогично, абсолютно непрерывная и сингулярная части меры μ также могут рассматриваться отдельно, и без потери общности можно предполагать, что $\varphi \neq 0$ μ-почти всюду. Таким образом, *для полного доказательства теоремы 1 требуется доказать следующие две леммы.*

Лемма 2.4. *Пусть μ, ν – две сингулярные меры на единичной окружности, $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ – ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий соотношению (2.5). Предположим, что $\varphi(z) \neq 0$ при μ-почти всех z, и $\psi(z) \neq 0$ при ν-почти всех z. Тогда функции $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}$, $u \in L^2(\mu)$, имеют некасательные граничные значения ν-почти всюду, и меры μ и ν взаимно сингулярны.*

Лемма 2.5. *Предположим, что μ – абсолютно непрерывная мера, $d\mu = wdm$, где $w \in L^1$, $w \geqslant 0$, ν – сингулярная мера, $\psi(z) \neq 0$ при ν-почти всех z, и $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ – ограниченный линейный оператор, для которого выполнено условие (2.5). Тогда функции $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}$, где $u \in L^2(\mu)$, имеют угловые граничные значения ν-почти везде.*

Нам понадобится известное описание операторов $A : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$, перестановочных с умножением на z. Любой такой оператор представляет собой оператор умножения на некоторую функцию в следующем смысле. Представим каждую из мер μ и ν в виде суммы мер, соответственно абсолютно непрерывных и сингулярных относительно другой меры: $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где меры μ_1 и ν_1 взаимно абсолютно непрерывны, а меры μ_2 и ν_2 сингулярны относительно мер ν и μ соответственно. Пространства $L^2(\mu)$ и $L^2(\nu)$ распадаются в прямые суммы: $L^2(\mu) = L^2(\mu_1) \oplus L^2(\mu_2)$, $L^2(\nu) = L^2(\nu_1) \oplus L^2(\nu_2)$. Матрица оператора A относительно этих разложений может иметь единственную ненулевую клетку, отвечающую оператору $L^2(\mu_1) \to L^2(\nu_1)$, который представляет собой оператор умножения на некоторую функцию уже в естественном смысле. Аналогичное утверждение имеет место и в более общей ситуации, когда A — оператор, сплетающий два нормальных оператора N_1 и N_2: $AN_1 = N_2 A$. В нашем случае N_1 и N_2 являются операторами умножения на z в пространствах $L^2(\mu)$ и $L^2(\nu)$ соответственно.

В обеих леммах μ и ν – взаимно сингулярные меры, откуда вытекает, что не существует ненулевого оператора, сплетающего операторы умножения на z в пространствах $L^2(\mu)$ и $L^2(\nu)$. Следовательно, для разложения $X = A + B$ из теоремы в частных случаях, соответствующих приведённым леммам, $A = 0$ и $X = B$, и, значит, оператор X определяется только граничными значениями интегралов типа Коши: $(Xu)(z) = \psi(z)\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(z)$ при ν-почти всех z, $u \in L^2(\mu)$.

2.2.2 Вложения пространств K_θ в L^2-пространства на окружности

Множество $K_\theta \cap C_A$ всех непрерывных функций из K_θ плотно в K_θ. А.Б. Александров доказал [3] следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Пусть τ — конечная положительная борелевская мера на единичной окружности $\mathbb{T}$. Рассмотрим естественное отображение из $K_\theta \cap C_A$ в $L^0(\tau)$, сопоставляющее функции из $K_\theta \cap C_A$ ее значения на носителе τ, где $L^0(\tau)$ – пространство всех измеримых функций на $\mathbb{T}$ с топологией сходимости по мере τ. Предположим, что это отображение имеет непрерывное продолжение до отображения из K_θ в $L^0(\tau)$. Тогда каждая функция $h \in K_\theta$ имеет конечные некасательные граничные значения $h(z)$ τ-почти всюду на $\mathbb{T}$.*

Теперь предполагается приспособить теорему 2.6 к нашим целям. Ниже будет доказана теорема 2; в ней дается описание действия произвольного непрерывного линейного оператора $Y : K_\theta \to L^0(\tau)$, перестановочного с умножением на z в следующем смысле: из $h, zh \in K_\theta$ следует, что $Y(zh) = zYh$.

В следующей лемме содержится свойство, равносильное предположениям теоремы 2.6 при дополнительном ограничении $\theta(0) = 0$. Последнее равносильно тому, что постоянные функции принадлежат K_θ.

Лемма 2.7. *Пусть θ – внутренняя функция такая, что $\theta(0) = 0$. Предположим, что $Y : K_\theta \to L^0(\tau)$ – непрерывное линейное отображение, для которого из $h, zh \in K_\theta$ следует, что $Y(zh) = zYh$.*

1) *Если $Y1 = 0$, то Y – нулевой оператор.*

2) *Если $Y1 = 1$, то для любой функции $h \in K_\theta \cap C_A$ имеем $(Yh)(z) = h(z)$ при τ-почти всех z.*

В частности, пункт 2) леммы даёт "аксиоматическое" описание оператора вложения пространства K_θ в $L^2(\tau)$: от оператора требуется перестановочность с умножением на z из формулировки теоремы вместе с естественным определением вложения на постоянных функциях. Отметим, что аналогичное определение можно дать и в случае $\theta(0) \neq 0$, а именно, действие оператора вложения должно быть согласовано с оператором обратного сдвига $h \mapsto \frac{h-h(0)}{z}$:

$$Y\frac{h - h(0)}{z} = \frac{Yh - h(0)}{z}.$$

Доказательство. Для любой функции $h \in K_\theta$ функции $h - h(0)$ и $(h - h(0))/z$ лежат в K_θ. По предположению получаем

$$Yh = h(0) \cdot (Y1) + zY((h - h(0))/z). \tag{2.8}$$

Пусть p_n – n-й многочлен Тейлора функции h в нуле (его степень не превосходит n), и пусть $g_n = (h - p_n)/z^{n+1}$. Так как пространство K_θ инвариантно относительно оператора обратного сдвига $h \mapsto (h - h(0))/z$, легко увидеть, что $g_n \in K_\theta$. Индукцией по n из соотношения (2.8) получается следующая формула:

$$Yh = p_n \cdot (Y1) + z^{n+1} Y g_n.$$

Действительно, при $n = 0$ это совпадает с формулой (2.8): $p_0 = h(0)$, $g_0 = (h - h(0))/z$. Пусть $Yh = p_n \cdot (Y1) + z^{n+1} Y g_n$, и проверим эту формулу для $n + 1$. По соотношению (2.8), примененному к g_n, получаем $Y g_n = g_n(0) \cdot (Y1) + zY((g_n - g_n(0))/z)$. Следовательно,

$$Yh = p_n \cdot (Y1) + z^{n+1} Y g_n = p_n \cdot (Y1) + z^{n+1}(g_n(0) \cdot (Y1) + zY((g_n - g_n(0))/z)).$$

Ясно, что $p_n + z^{n+1} g_n(0) = p_{n+1}$ и $(g_n - g_n(0))/z = g_{n+1}$. Таким образом, $Yh = p_{n+1} \cdot (Y1) + z^{n+2} Y g_{n+1}$, как и требовалось.

По построению $g_n \to 0$ в K_θ. По предположению о непрерывности отображения Y имеем $Y g_n \to 0$ в $L^0(\tau)$. Отсюда следует, что $z^{n+1} Y g_n \to 0$ в $L^0(\tau)$, что равносильно сходимости $p_n \cdot (Y1) \to Yh$. Если $Y1 = 0$, это сразу же дает $Yh = 0$. Теперь рассмотрим случай, когда $Y1 = 1$, то есть $p_n \to Yh$ в $L^0(\tau)$. Хорошо известно, что последовательность абелевых средних многочленов Тейлора p_n непрерывной функции h равномерно сходится к h в единичном круге. Ясно, что предельные функции должны совпадать, т.е. $(Yh)(z) = h(z)$ при τ-почти всех z. Лемма доказана. $\square$

Напомним, что пространство $L^0(\mu)$ определяется как пространство измеримых функций (точнее, их классов, состоящих из функций, совпадающих μ-почти всюду) с топологией сходимости по мере.

Теорема 2. *Возьмем произвольную внутреннюю функцию θ. Предположим, что $Y : K_\theta \to L^0(\tau)$ – линейное непрерывное отображение такое, что если $h, zh \in K_\theta$, то $Y(zh) = zYh$.*

Тогда существует функция $\gamma \in L^0(\tau)$ такая, что всякая функция $h \in K_\theta$ имеет конечные некасательные граничные значения $h(z)$ при τ-почти всех $z \in \mathbb{T}$, для которых $\gamma(z) \neq 0$, и для таких z имеем $(Yh)(z) = \gamma(z)h(z)$ τ-почти всюду. Для точек z, в которых $\gamma(z) = 0$, τ-почти везде $(Yh)(z) = 0$.

Если $\theta(0) = 0$, *то* $\gamma = Y1$.

Доказательство. Сначала предположим, что $\theta(0) = 0$; тогда $1 \in K_\theta$. Множества, на которых $(Y1)(z) = 0$ и $(Y1)(z) \neq 0$, могут рассматриваться раздельно, что относится к частным случаям, когда функция $Y1$ тождественно равно нулю, и $(Y1)(z) \neq 0$ при τ-почти всех z, соответственно. Для первого из этих случаев требуемый факт, что Y – нулевой оператор, получается непосредственно из утверждения 1) леммы. Теперь допустим, что $Y1 \neq 0$ τ-почти всюду и рассмотрим отображение $Y_0 : h \mapsto Yh/Y1$, $h \in K_\theta$. Предположения леммы выполнены для оператора Y_0, причем $Y_0 1 = 1$. Тогда по пункту 2) леммы Y_0 отображает любую непрерывную функцию из K_θ в ее значения τ-почти всюду. Согласно теореме 2.6, из этого следует, что для любой функции $h \in K_\theta$ существуют некасательные граничные значения $h(z)$ при τ-почти всех $z \in \mathbb{T}$, и Y_0 отображает h в граничную функцию. Следовательно, $(Yh)(z) = (Y1)(z)h(z)$ при τ-почти всех z, что и требовалось.

Теперь пусть θ - произвольная внутренняя функция. Общий случай будет сведен к уже доказанному утверждению для случая внутренних функций, обращающихся в нуль в нуле, с помощью так называемого преобразования Крофута, сопоставляющего функции $f \in K_\theta$ функцию $\frac{f}{1-\overline{\theta(0)}\theta} \in K_{\theta_1}$, где θ_1 – внутренняя функция, заданная формулой $\theta_1(\lambda) = \frac{\theta(\lambda)-\theta(0)}{1-\overline{\theta(0)}\theta(\lambda)}$. Легко видеть, что $h \in K_{\theta_1}$ тогда и только тогда, когда $(1-\overline{\theta(0)}\theta)h \in K_\theta$. Рассмотрим отображение $Y_1 : K_{\theta_1} \to L^0(\tau)$, $Y_1 h = Y((1-\overline{\theta(0)}\theta)h)$, $h \in K_{\theta_1}$. Так как $\theta_1(0) = 0$, а из того, что $h, zh \in K_{\theta_1}$, очевидно следует соотношение $Y_1(zh) = zY_1 h$, из первой части этого доказательства вытекает существование функции γ_1, для которой $(Y_1 h)(z) = \gamma_1(z)h(z)$ в смысле угловых граничных значений. Поскольку $\bar{z}\theta_1 \in K_{\theta_1}$, функция $\bar{z}\theta_1$ имеет угловые граничные значения τ-почти всюду на множестве, на котором $\gamma_1 \neq 0$. Ясно, что это также верно для θ и $1-\overline{\theta(0)}\theta$. Так как $|\theta(0)| < 1$, функция $(1-\overline{\theta(0)}\theta)^{-1}$ также корректно определена в смысле угловых граничных значений. Таким образом, утверждение теоремы получается из определения оператора $Y1$ при $\gamma = (1-\overline{\theta(0)}\theta)^{-1}\gamma_1$. $\square$

Замечание 1. Если $Y : K_\theta \to L^0(\tau)$ – непрерывное отображение, то существует измеримая функция w такая, что $w > 0$ τ-почти всюду и Y непрерывно отображает K_θ в весовое пространство $L^2(w\tau)$, см. замечание 3 к теореме 1.

Замечание 2. Лемма 2.7 позволила вывести предположения теоремы 2 из условия $Y1 = 1$ и предположений леммы 2.7 о перестановочности оператора Y с умножением на z в K_θ. В оригинальном доказательстве [3] приведенной выше теоремы 2.6 можно рассматривать два этапа. Сначала из предположения теоремы, что Y отображает любую непрерывную функцию из K_θ в ее граничные значения, доказывается, что θ – "делитель" функции $\mathcal{K}_{\nu-gm}$ в единичном круге, где g – функция, определяющая функционал $h \mapsto \int(Yh)d\nu$, $h \in K_\theta$. Оставшаяся часть доказательства из [3] существования граничных значений является следствием этого утверждения без дальнейшего использования предположений.

Промежуточное свойство из [3] может быть выведено из предположений леммы 2.7 более прямым способом, т.е. без сведения к предположениям теоремы 2. Можно считать, что Y действует из K_θ в пространство $L^2(\nu)$, где $d\nu = wd\tau$, см. замечание 1. Поскольку $h(0) = (h, 1)$, из соотношения (2.8), где $Y1 = 1$, можно вывести следующее равенство для сопряженного оператора: $Y^*(zv) - zY^*v = (v, \bar{z})1 - (v, Y(\bar{z}\theta))\theta$, $v \in L^2(\nu)$. Применим его к функции $v = (z - \lambda)^{-1}$, где λ — точка единичного круга, и затем возьмем значения в точке λ; это даст желаемое соотношение $\mathcal{K}_\nu(\lambda) - g(\lambda) = \theta(\lambda)\mathcal{K}_{\bar{z}\bar{s}\nu}(\lambda)$, где $g = Y^*1 \in K_\theta$, $s = Y(\bar{z}\theta) \in L^2(\nu)$.

Потом, применяя оставшуюся часть доказательства из [3], получим существование угловых граничных значений как в теореме 2 без использования леммы 2.7, что дает несколько иное доказательство заключения теоремы 2 из предположений леммы 2.7 для случая $Y1 = 1$.

2.2.3 Доказательство

Доказательство лемм 2.4, 2.5 будет опираться на результаты работ [33], [3] о граничных значениях функций из подпространств K_θ пространства Харди H^2.

Пусть θ – внутренняя функция на единичной окружности $\mathbb{T}$, то есть $\theta \in H^2$ и $|\theta(z)| = 1$ для m-почти всех $z \in \mathbb{T}$, где m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Тогда K_θ обозначает ортогональное дополнение подпространства θH^2 в H^2:

$$K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2.$$

Предположим, что $\theta(0) = 0$, и построим меру Кларка σ_1 по формуле

$$\frac{1+\theta(\lambda)}{1-\theta(\lambda)} = \int \frac{1+\bar{z}\lambda}{1-\bar{z}\lambda} d\sigma_1(z), \tag{2.9}$$

см. §2.1.2. Мера σ_1 сингулярна относительно меры Лебега; имеем

$$\mathcal{K}_{\sigma_1}(\lambda) = \int \frac{d\sigma_1(z)}{1-\bar{z}\lambda} = (1-\theta(\lambda))^{-1}.$$

Оператор $V : K_\theta \to L^2(\sigma_1)$, отображающий функции из K_θ в их граничные значения σ_1-почти всюду, унитарен. Если $\theta(0) = 0$, то $h \in K_\theta$ восстанавливается по функции $f = Vh$ по формуле

$$h(\lambda) = (1-\bar{\alpha}\theta(\lambda)) \int \frac{f(z)d\sigma_1(z)}{1-\bar{z}\lambda} = \frac{\mathcal{K}_{f\sigma_1}(\lambda)}{\mathcal{K}_{\sigma_1}(\lambda)} \tag{2.10}$$

для комплексных чисел λ из единичного круга.

Доказательство леммы 2.5. По предположению мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега m, $d\mu = w\,dm$, а мера ν сингулярна. Будем предполагать, что функции φ, ψ выбраны так, что $||\psi|| = 1$; рассмотрим сингулярную меру σ, для которой $d\sigma = |\psi|^2 d\nu$. Пусть θ – внутренняя функция, определяемая формулой (2.9) при $\alpha = 1$; и пусть V – оператор из K_θ в $L^2(\sigma)$, где $\sigma = \sigma_1$. Определим унитарный оператор $W : L^2(\nu) \to K_\theta$ формулой $Wv = V^{-1}(v/\psi)$, $v \in L^2(\nu)$.

Возьмем оператор $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ такой, что $XM_z - M_zX = (\cdot, \varphi)\psi$. Меры μ и ν взаимно сингулярны, и поэтому не существует ненулевого оператора

$A : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ такого, что $AM_z = M_z A$. Следовательно, в сумме $X = A+B$ в теореме 1 для этого случая обязательно будет $A = 0$. Для сопряженного оператора X^* имеем $M_{\bar z}X^* - X^*M_{\bar z} = (\cdot, \psi)\varphi$, откуда $X^*M_z - M_zX^* = (\cdot, \bar z\psi)z\varphi$. Поэтому можно применить известную часть теоремы, касающуюся случая абсолютно непрерывной меры, к оператору X^*. Так как $A = 0$, X^* – преобразование Коши вида (2.6) с функциями $\bar z\psi, z\varphi$ вместо φ, ψ соответственно. Следовательно, для $v \in L^2(\nu)$ в m-почти всех точках z имеем формулу

$$(X^*v)(z) = z\varphi(z)\mathcal{K}_{v\bar\psi\nu}(z) = z\varphi(z)\mathcal{K}_{\frac{v}{\psi}\sigma}(z) = z\varphi(z)(1-\theta(z))^{-1}(Wv)(z),$$

где последнее равенство следует из (2.10) при $f = v/\psi$. Отсюда следует, что для любой функции $h \in K_\theta$, если положить $v = \psi V h = W^{-1}h$, то $\frac{\varphi h}{1-\theta} = \bar z X^* v \in L^2(\mu)$. При $h = 1$ получается, что $\frac{\varphi}{1-\theta} \in L^2(\mu)$.

Возьмем $u \in L^2(\mu)$. Имеем

$$(Xu, v) = (u, X^*v) = \int u(z)\frac{\overline{z\varphi(z)}}{1-\overline{\theta(z)}}\overline{(Wv)(z)}w(z)dm(z).$$

Поскольку воспроизводящее ядро k_λ в K_θ имеет вид $k_\lambda(z) = \frac{1-\overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{1-\bar\lambda z}$, $|\lambda| < 1$, и W — унитарный оператор, для $v = W^*k_\lambda$ отсюда следует, что

$$\begin{aligned}(WXu)(\lambda) =& (WXu, k_\lambda) = (Xu, W^*k_\lambda)\\ &= \int u(z)\frac{\overline{z\varphi(z)}}{1-\overline{\theta(z)}}\overline{k_\lambda(z)}w(z)dm(z)\\ &= \int u(z)\frac{\overline{z\varphi(z)}}{1-\overline{\theta(z)}}\frac{1-\theta(\lambda)\overline{\theta(z)}}{1-\bar z\lambda}w(z)dm(z)\\ &= \int \frac{1-\theta(\lambda)\overline{\theta(z)}}{1-\overline{\theta(z)}}\frac{\bar z u(z)\overline{\varphi(z)}w(z)dm(z)}{1-\bar z\lambda}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Так как $WXu \in K_\theta$, угловые граничные пределы этого выражения существуют σ-почти всюду.

Определим $f = \frac{\bar z u\bar\varphi w}{1-\bar\theta}$. Поскольку $u, \frac{\varphi}{1-\theta} \in L^2(\mu)$ и $d\mu = wdm$, получаем, что $f \in L^1$. Так как σ — сингулярная мера и комплексная мера fm сингулярна относительно σ, можно применить следствие 1 из теоремы 2.7 статьи

[33]. В нем утверждается, что функция $(1-\theta)\mathcal{K}_{fm} = \mathcal{K}_{fm}/\mathcal{K}_\sigma$ имеет нулевые некасательные граничные значения σ-почти всюду. Имеем

$$\begin{aligned}(1-\theta(\lambda))\mathcal{K}_{fm}(\lambda) =&(1-\theta(\lambda))\int \frac{f(z)dm(z)}{1-\bar{z}\lambda}\\ &= \int \frac{1-\theta(\lambda)}{1-\theta(z)}\frac{\bar{z}u(z)\overline{\varphi(z)}w(z)dm(z)}{1-\bar{z}\lambda}.\end{aligned}$$

Следовательно, соединяя это с (2.11), можно заключить, что сумма

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\theta(\lambda)\overline{\theta(z)}}{1-\overline{\theta(z)}}\frac{\bar{z}u(z)\overline{\varphi(z)}w(z)dm(z)}{1-\bar{z}\lambda} + \int \frac{1-\theta(\lambda)}{1-\theta(z)}\frac{\bar{z}u(z)\overline{\varphi(z)}w(z)dm(z)}{1-\bar{z}\lambda}\\ = \int \left(\frac{1-\theta(\lambda)\overline{\theta(z)}}{1-\overline{\theta(z)}} + \frac{1-\theta(\lambda)}{1-\theta(z)}\right)\frac{\bar{z}u(z)\overline{\varphi(z)}w(z)dm(z)}{1-\bar{z}\lambda}\\ = \int \frac{\bar{z}u(z)\overline{\varphi(z)}w(z)dm(z)}{1-\bar{z}\lambda} = \mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\lambda)\end{aligned}$$

имеет угловые граничные значения σ-почти всюду, или, что равносильно, ν-почти всюду. Лемма доказана. □

Доказательство леммы 2.4. Если требуется, перепишем оператор $(\cdot,\varphi)\psi$ так, чтобы $||\varphi|| = 1$. Отображение $u \mapsto \bar{z}u/\varphi$, $u \in L^2(\mu)$, изометрически отождествляет пространство $L^2(\mu)$ с пространством $L^2(\sigma)$, где $d\sigma = |\varphi|^2 d\mu$. При этом функция $\bar{z} \in L^2(\sigma)$ соответствует функции $\varphi \in L^2(\mu)$ и имеет норму 1. Из последнего утверждения вытекает, что $\sigma\mathbb{T} = 1$. Построим внутреннюю функцию θ по формуле (2.9) при $\alpha = 1$ и рассмотрим оператор $V : K_\theta \to L^2(\sigma)$, где $\sigma = \sigma_1$. Пусть $Y : K_\theta \to L^2(\nu)$ — соответствующая пересадка оператора X: $Yh = X(z\varphi Vh)$, $h \in K_\theta$. Применим соотношение

$$XM_z - M_zX = (\cdot,\varphi)\psi \tag{2.12}$$

к функции $z\varphi Vh$, $h \in K_\theta$; получим

$$X(z^2\varphi Vh) - zX(z\varphi Vh) = (z\varphi Vh, \varphi)\psi. \tag{2.13}$$

Теперь возьмем функцию $h \in K_\theta$, для которой также $zh \in K_\theta$. Это равносильно равенству $(h, \bar{z}\theta) = 0$ в K_θ, или $(Vh, \bar{z}) = 0$ в $L^2(\sigma)$, или $(z\varphi Vh, \varphi) = 0$

в $L^2(\mu)$. Поскольку V — оператор вычисления граничных значений, имеем $zVh = V(zh)$, и формула (2.13) для таких h может быть записана как $Y(zh) - zYh = 0$. Следовательно, можно применить теорему 2 к Y при $\tau = \nu$. В теореме говорится, что для любой функции $h \in K_\theta$ угловая граничная функция $h(z)$ существует ν-почти везде на множестве, на котором $Y1 \neq 0$, и Y отображает h в функцию $(Y1)(z)h(z)$. Имеем $(Y(\bar{z}\theta))(z) = (Y1)(z)\bar{z}\theta(z)$, откуда $zY(\bar{z}\theta) = \theta \cdot Y1$ (в частности, как уже было отмечено в доказательстве теоремы 2, θ имеет некасательные граничные значения ν-почти всюду на множестве, на котором $Y1 \neq 0$). Как следует из определения оператора Y, $Y1 = X(z\varphi)$ и $Y(\bar{z}\theta) = X(z\varphi\bar{z}) = X\varphi$. Соотношение (2.12), примененное к функции φ, дает $X(z\varphi) - zX\varphi = (\varphi, \varphi)\psi = \psi$. Значит,

$$\psi = Y1 - zY(\bar{z}\theta) = Y1 - \theta \cdot Y1 = (1 - \theta) \cdot Y1.$$

Поскольку по предположению $\psi \neq 0$ ν-почти всюду, можно заключить, что $\theta(z) \neq 1$ и $(Y1)(z) = \psi(z)/(1-\theta(z)) \neq 0$ при ν-почти всех z. Мера μ сосредоточена на том же самом множестве, где и σ, на котором по построению $\theta = 1$ в смысле некасательных граничных значений. Таким образом, μ и ν – взаимно сингулярные меры.

Оператор V^{-1} может быть восстановлен по формуле (2.10), из которой при $h = V^{-1}(\bar{z}u/\varphi)$ следует, что

$$(V^{-1}(\bar{z}u/\varphi))(\lambda) = (1 - \theta(\lambda))\mathcal{K}_{\frac{\bar{z}u}{\varphi}\sigma}(\lambda) = (1 - \theta(\lambda))\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\lambda).$$

Эта функция принадлежит K_θ, и, следовательно, по теореме 2 она имеет некасательные граничные значения ν-почти везде; выше было показано, что функция $1 - \theta$ имеет ненулевые угловые граничные значения ν-почти всюду. Следовательно, $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}$ также имеет некасательные граничные значения, и доказательство леммы завершено. $\square$

Таким образом, доказательство теоремы 1 закончено.

2.2.4 Другие пределы аналогичного вида

Сделаем несколько замечаний в связи со следствиями из теоремы 1 о различных способах определения граничных значений интегралов типа Коши.

Оператор A был построен как некоторый предел последовательности $M_z^n X M_z^{-n}$, где $n \to +\infty$; это дало представление $X = A + B$, где оператор B определяется по формуле (2.6) через граничные значения интегралов типа Коши при приближении к окружности изнутри единичного круга. Аналогично можно рассматривать предел при $n \to -\infty$, что то же самое, что предел последовательности $M_z^{-n} X M_z^n$ при $n \to +\infty$. Тогда аналог B' оператора B может быть определен по той же самой формуле (2.6), включающей граничные функции для внешности круга. Действительно, это вытекает из формул

$$X + \sum_{n=1}^{\infty} r^n M_z^{-n}(XM_z - M_z X)M_z^{n-1} = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n M_z^{-n} X M_z^n$$

и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n (M_z^{n-1}u, \varphi) M_z^{-n}\psi\right)(\xi) = -\psi(\xi)\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\xi/r), \quad u \in L^2(\mu).$$

Существование угловых граничных значений у функции $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}$ при приближении к окружности из внешности единичного круга является следствием этого же свойства для внутренности круга: имеем

$$\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(1/\bar{\lambda}) = -\overline{\lambda \mathcal{K}_{\bar{u}\varphi\mu}(\lambda)},$$

и видно, что правая часть имеет граничные значения изнутри при рассмотрении функции $z\bar{u}\varphi/\bar{\varphi} \in L^2(\mu)$ вместо u. Норма оператора $X - B'$, так же, как и норма $||A|| = ||X - B||$, не превосходит нормы оператора X.

Легко увидеть, что оператор $B - B'$ перестановочен с умножением на z; следовательно, его можно рассматривать как оператор умножения на некоторую функцию. Это означает, что для любой $u \in L^2(\mu)$ функция $(B - B')u$ обращается в нуль почти всюду по мере, являющейся частью меры ν, сингулярной относительно μ. Для абсолютно непрерывных мер это соответствует хорошо известному обстоятельству, что граничные значения преобразования Коши $\mathcal{K}_\alpha$ комплексной меры α на единичной окружности извне и изнутри совпадают m-почти всюду на множестве, на котором плотность меры α относительно меры Лебега равна нулю. Для сингулярной меры ν это наблюдение приводит к следующему утверждению.

Предложение 2.8. *Пусть μ, ν — меры на единичной окружности, $\varphi \in L^2(\mu)$, и предположим, что мера ν сингулярна. Если существуют функция $\psi \in L^2(\nu)$ такая, что $\psi \neq 0$ ν-почти везде, и ограниченный оператор X, для которого выполнено соотношение* (2.12)*, то для любой функции $u \in L^2(\mu)$ угловые граничные значения интеграла типа Коши $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\lambda)$ при приближении к окружности изнутри и извне существуют и совпадают ν-почти всюду.*

Чтобы это доказать, можно без потери общности предположить, что $\varphi \neq 0$ μ-почти всюду; тогда по утверждению 4) теоремы 1 меры μ и ν взаимно сингулярны. Тогда каким бы образом ни был определен интеграл типа Коши, получится один и тот же оператор. В частности, $B = B'$, и граничные значения функций $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\lambda)$, $u \in L^2(\mu)$, изнутри и извне единичного круга должны совпадать ν-почти везде. □

Замечание. Этот результат остается верным, если X действует непрерывно из $L^2(\mu)$ в пространство $L^0(\nu)$ и $\psi \in L^0(\nu)$, см. замечание 3 к теореме 1.

В заключение этой главы рассмотрим аналогичный вопрос для мер на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть μ, ν — две меры на $\mathbb{C}$ с компактными носителями, и пусть $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ – ограниченный линейный оператор, для которого выполнено соотношение (2.12). Естественно попытаться построить разложение $X = A + B$, где оператор A коммутирует с умножением на z, а оператор B представляет собой преобразование Коши в каком-либо смысле. Операторы, коммутирующие с умножением на z, – это операторы умножения на функции в точно таком же смысле, как было сказано выше про случай мер на окружности. Для мер, являющихся конечными линейными комбинациями точечных масс, справедливо все, что сказано в замечании 2 к теореме 1. Оператор $B : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ при этом задается формулой

$$(Bu)(\xi) = \psi(\xi) \int \frac{u(z)\overline{\varphi(z)}d\mu(z)}{z-\xi}, \quad u \in L^2(\mu). \tag{2.14}$$

Как и в формуле (2.6), если $\psi(\xi) = 0$, то $(Bu)(\xi) = 0$. Формула (2.6) является частным случаем формулы (2.14) для мер, сосредоточенных на единичной окружности ($|\xi| = |z| = 1$).

Для того, чтобы распространить теорему 1 на случай мер на комплексной плоскости, нужно придать смысл выражению (2.14) в случае произвольных мер, что позволило бы определить оператор B. В качестве приближений ядра $\frac{1}{z-\xi}$ интегрального оператора можно попробовать взять, например, ядра

$$\frac{\bar{z}-\bar{\xi}}{|z-\xi|^2+\varepsilon} = \frac{1}{z-\xi} \cdot \frac{|z-\xi|^2}{|z-\xi|^2+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0,$$

и рассмотреть предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Предположение. *Пусть $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ – ограниченный оператор, для которого выполнено соотношение (2.12). Тогда для любой функции $u \in L^2(\mu)$ выражения*

$$(B_\varepsilon u)(\xi) = \int \frac{u(z)\overline{\varphi(z)}}{z-\xi} \cdot \frac{|z-\xi|^2}{|z-\xi|^2+\varepsilon} d\mu(z)$$

имеют предел при $\varepsilon \to 0$ для ν-почти всех ξ таких, что $\psi(\xi) \neq 0$.

Это предположение верно в случае, когда меры μ, ν лежат на единичной окружности. Действительно, если $|\xi| = |z| = 1$, то

$$\frac{1}{z-\xi} \cdot \frac{|z-\xi|^2}{|z-\xi|^2+\varepsilon} = \frac{r}{1+r} \cdot \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}r\xi} + \frac{1}{1+r} \cdot \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\xi/r},$$

где r - любой из двух корней уравнения $(1-r)(1/r-1) = \varepsilon$, откуда

$$\int \frac{u(z)\overline{\varphi(z)}}{z-\xi} \cdot \frac{|z-\xi|^2}{|z-\xi|^2+\varepsilon} d\mu(z) = \frac{r}{1+r}\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(r\xi) + \frac{1}{1+r}\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\xi/r).$$

Если $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$, то r - положительное число, $r \to 1$. Поэтому предел последнего выражения представляет собой полусумму радиальных граничных значений функции $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}$ при приближении к окружности извне и изнутри единичного круга, существование которых было доказано выше.

2.3 Усреднённые волновые операторы

Конструкция состоит из пары унитарных операторов U_1, U_2, действующих в гильбертовых пространствах H_1, H_2 соответственно, и оператора $X : H_1 \to H_2$. Спрашивается, существует ли волновой оператор, являющийся пределом последовательности

$$U_2^n X U_1^{-n} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

описывающий асимптотическое поведение системы с дискретным временем. В параграфе 2.1.1 была показана хорошо известная взаимосвязь между абелевыми волновыми операторами и интегралами типа Коши.

Определим коммутатор K,

$$K = XU_1 - U_2X.$$

Случай $K = 0$ тривиален, поскольку тогда все элементы последовательности очевидно равны X; естественно спрашивать, что происходит, когда K мал (ранга 1, ранга 2, конечного ранга, из класса операторов со следом, и т.д.)

Если спектральные меры унитарных операторов абсолютно непрерывны относительно меры Лебега, то в классической теории рассеяния устанавливается существование сильных волновых операторов, когда коммутатор K принадлежит классу операторов со следом, см. [38].

Простые примеры, даже в одномерных пространствах, показывают, что в общем случае предел может не существовать. Действительно, возьмём $H_1 = H_2 = \mathbb{C}$, $U_1 = I$, $U_2 = \omega I$, где $|\omega| = 1$, $X = I$. Тогда ясно, что $U_2^n X U_1^{-n} = \omega^n I$. Если $\omega \neq 1$, то последовательность расходится. Однако можно надеяться, что предел будет существовать в каком-либо более слабом смысле, а именно, если применить некоторый метод суммирования. Например, рассмотрим метод суммирования, сопоставляющий последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ последовательность $(\tilde{x}_n)$ её средних Чезаро, $\tilde{x}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} x_m$. Для геометрических прогрессий $x_n = \omega^n$ ($|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$) имеем $\tilde{x}_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\omega^n}{1-\omega} \to 0$.

Если дана последовательность (x_n), то её абелевы средние имеют вид

$$(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n x_n,$$

где $0 < r < 1$ и предел рассматривается при $r \nearrow 1$. Положим

$$A_r = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n X U_1^{-n},$$

т.е. A_r – абелевы средние последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$.

Из сходимости средних Чезаро любой последовательности вытекает сходимость абелевых средних. Здесь рассматриваются только ограниченные последовательности, для которых обратное также верно [56], т.е. классы ограниченных последовательностей, у которых сходятся усреднения по Чезаро и по Абелю, совпадают. Представляется более естественным работать с методом суммирования по Абелю из-за его связи с интегралами типа Коши.

Общий вопрос может быть сформулирован следующим образом:

Пусть U_1, U_2 – унитарные операторы, и предположим, что X – такой оператор, что коммутатор $K = XU_1 - U_2X$ – оператор конечного ранга. Всегда ли существует предел усреднений по Абелю A_r последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ в слабой операторной топологии?

В случае, когда K имеет ранг 1, положительный ответ на него вытекает из теоремы 1. Ниже будет показано, что ответ вообще говоря отрицательный уже в случае коммутатора ранга 2.

2.3.1 Предварительные результаты

Рассмотрим простой, однако важный пример, накладывающий некоторые ограничения на то, что можно получить.

Возьмём оператор ранга 1, $X = (\cdot, a)b$. Тогда $U_2^n X U_1^{-n} = (\cdot, U_1^n a)U_2^n b$. Пусть U_1, U_2 операторы умножения на z в $L^2(\mu)$, $L^2(\nu)$, соответственно, где μ, ν – меры на единичной окружности, $a = 1$, $b = 1$. Тогда получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 = \hat{\mu}_n z^n$, где $\hat{\mu}_n = \int \bar{z}^n d\mu(z)$. Для мер μ, удовлетворяющим соотношению $\hat{\mu}_n \to 0$ при $n \to \infty$, получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 \to 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда μ – дискретная мера. Например, пусть μ – атом в точке ω единичной окружности, тогда пространство $L^2(\mu)$ одномерно. Получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 = (\bar{\omega} z)^n X1$, это выражение может расходиться; однако имеем сходимость средних Абеля: если $X1 = f \in L^2(\nu)$, то

$$(1-r)\sum r^n (U_2^n X U_1^{-n} 1)(z) = (1-r)\sum r^n (\bar{\omega} z)^n f = \frac{1-r}{1-r\bar{\omega} z}.$$

Для произвольной меры μ без атомов воспользуемся классической теоремой Винера, согласно которой для любой меры, не имеющей точечных масс, имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{-n\leqslant m\leqslant n} |\hat{\mu}(m)| = 0.$$

Отсюда следует, что средние Чезаро последовательности $U_2^n X U_1^{-n} 1$ стремятся к нулю.

Сходимость установлена на одном векторе $1 \in L^2(\mu)$; чтобы получить сходимость на остальных функциях из $L^2(\mu)$, например, достаточно заметить, что множество векторов, для которых имеется сходимость, есть замкнутое подпространство, приводящее оператор U_1.

При изучении слабой сходимости без потери общности можно считать, что кратность спектра унитарного оператора U_1 равна 1. Действительно, при изучении последовательности операторов $U_2^n X U_1^{-n}$, применённых к вектору $h \in H_1$, можно рассматривать подпространство, приводящее U_1, порождённое вектором h, вместо всего пространства H_1. Спектральная теорема для унитарных операторов может быть сформулирована следующим образом.

Пусть U — унитарный оператор в гильбертовом пространстве H, возьмём $h \in H$. Тогда существуют мера μ на единичной окружности и изометрическое отождествление приводящего подпространства, порождённого вектором h, с пространством $L^2(\mu)$ такое, что оператор умножения на z в $L^2(\mu)$ соответствует оператору U, а функция $1 \in L^2(\mu)$ – вектору h.

Таким образом, можно предполагать, что $H_1 = L^2(\mu)$, где μ — мера на единичной окружности, и U_1 — оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$. Без потери общности можно взять вероятностную меру μ. При рассмотрении сходимости в слабой операторной топологии можно предполагать, что и кратность спектра U_2 также равна 1. Следовательно, в качестве оператора U_2 можно взять оператор умножения на независимую переменную в $H_2 = L^2(\nu)$ для некоторой (вероятностной) меры ν на единичной окружности.

Нам понадобится следующий очевидный факт.

Предложение 2.9. *Допустим, что пространства H_1, H_2 представляются в виде прямых сумм подпространств, приводящих унитарные операторы U_1, U_2 соответственно, и оператор X таким образом может быть записан в матричной форме, соответствующей разложениям пространств H_1, H_2. Тогда слабые абелевы волновые операторы, соответствующие всей матрице X, существуют тогда и только тогда, когда они существуют для каждой матричной клетки X и соответствующих им сужений унитарных операторов.*

Предложение позволяет рассматривать части мер μ, ν, соответствующие разбиениям единичной окружности. В частности, это сводит общую задачу к двум частным случаям: 1) меры μ и ν взаимно сингулярны, и 2) $\mu = \nu$.

Первый случай достаточно прост.

Предложение 2.10. *Допустим, что спектральные меры унитарных операторов U_1, U_2 взаимно сингулярны. Тогда средние Чезаро последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ стремятся к нулю в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Средние Чезаро последовательности

$$U_2(U_2^n X U_1^{-n}) - (U_2^n X U_1^{-n})U_1$$

имеют вид $\frac{1}{n+1}(U_2^{n+1} X U_1^{-n} - XU_1)$, и значит они стремятся к нулевому оператору по норме. Следовательно, сходимость любой подпоследовательности средних Чезаро последовательности $(U_2^n X U_1^{-n} h)$ к некоторому вектору k равносильна тому, что подпоследовательность с теми же самыми индексами средних Чезаро векторов $(U_2^n X U_1^{-n})(U_1 h)$ стремится к $U_2 k$.

Теперь предположим, что для некоторого вектора $h_0 \neq 0$ средние Чезаро последовательности $(U_2^n X U_1^{-n} h_0)$ не сходятся слабо к нулю. Поскольку последовательность ограничена, можно найти её подпоследовательность, слабо сходящуюся к ненулевому вектору. Множество векторов h, для которых предел средних Чезаро векторов $(U_2^n X U_1^{-n} h)$ существует по этой подпоследовательности, есть нетривиальное замкнутое подпространство, приводящее оператор U_1. Соответствующие пределы определяют ненулевой оператор на этом приводящем подпространстве, и получается ненулевой оператор, сплетающий приводящую часть оператора U_1 с оператором U_2. Следовательно, нетривиальная приводящая часть U_1 унитарно эквивалентна приводящей части U_2. Но это противоречит предположению о том, что спектральные меры операторов U_1, U_2 взаимно сингулярны. □

Замечание. Без предположения, что мера μ сингулярна, результат неверен. Возьмём ортопроектор P_+ на H^2 в качестве примера оператора X на пространстве L^2 (относительно меры Лебега на единичной окружности), где $U_1 = U_2$ – оператор умножения на z. Тогда ясно, что $K = (\cdot, u)v$, где $u = \bar{z}$, $v = 1$ – оператор ранга 1, и таким образом $\bar{u}v = \bar{z}$. Похожие примеры могут быть построены для любых унитарных операторов U_1, U_2 с абсолютно непрерывными спектральными мерами.

Теперь будем считать, что $\mu = \nu$; поскольку нас интересуют слабые волновые операторы, можно полагать, что $H = L^2(\mu)$, а $U_1 = U_2$ – оператор умножения на z, который теперь будет обозначаться через U. Случай абсолютно непрерывной меры покрывается классической теорией рассеяния; сходимость в случае точечного спектра следует из примера, рассмотренного выше. Таким образом, представляет интерес случай, когда спектральные меры унитарных операторов подчинены скалярной сингулярной мере без точечных масс. Можно предполагать, что оператор K действует в $L^2(\mu)$, где μ – сингулярная мера без атомов, K – сумма вида $K = \sum(\cdot, u_n)v_n$. Основные результаты этой главы связаны со случаем, когда оператор K имеет ранг 2. Однако сначала будет получено несколько общих результатах о коммутаторах для случая сингулярной спектральной меры.

2.3.2 Коммутаторы

Предложение 2.11. *Пусть $U_1 : H_1 \to H_1$, $U_2 : H_2 \to H_2$ – унитарные операторы, $K : H_1 \to H_2$ – ограниченный оператор. Следующие утверждения равносильны.*

1) *нормы операторов $\sum_{k=1}^n U_2^k K U_1^{-k}$ равномерно ограничны по n;*

2) *нормы средних Чезаро операторов $\sum_{k=1}^n U_2^k K U_1^{-k}$ равномерно ограничны;*

3) *существует ограниченный оператор $X : H_1 \to H_2$ такой, что $K = XU_1 - U_2X$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Из 3) легко следует 1): если $K = XU_1 - U_2X$, то

$$\sum_{k=1}^n U_2^k K U_1^{-k} = U_2X - U_2^{n+1} X U_1^{-n},$$

и видно, что нормы этих операторов не превосходят $2 \cdot \|X\|$.

Если нормы средних Чезаро сумм $\sum_{k=1}^n U_2^k K U_1^{-k}$ равномерно ограничены, то из них можно выбрать *-слабо сходящуюся подпоследовательность. Тогда предел X этой подпоследовательности обладает свойством $K = XU_1 - U_2X$, и импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) доказана. $\square$

Теперь предположим, что K – ядерный оператор (т.е. принадлежит классу операторов со следом) в $L^2(\mu)$. Тогда K записывается в виде $K = \sum(\cdot, u_k)v_k$, причём u_k, v_k удовлетворяют соотношению

$$\sum ||u_k|| \cdot ||v_k|| < \infty.$$

Линейное отображение

$$\sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k \mapsto \sum \bar{u}_k v_k$$

корректно определено на классе ядерных операторов в $L^2(\mu)$ и является непрерывным (сжимающим) из класса ядерных операторов в пространство $L^1(\mu)$.

Теорема 3. *Пусть μ – сингулярная мера на единичной окружности, U – оператор умножения на z в $L^2(\mu)$. Предположим, что K – ядерный оператор в $L^2(\mu)$, $K = \sum(\cdot, u_k)v_k$, причём $K = XU - UX$ для некоторого ограниченного оператора X в $L^2(\mu)$. Тогда μ-почти всюду имеем $\sum \bar{u}_k v_k = 0$.*

Доказательство. Без потери общности будем считать, что μ – вероятностная мера. Построим θ и функции $f_k \in K_\theta$, $f_k = V^{-1}u_k$. Применим соотношение (2.3) к вектору h, $h(\xi) = \xi$; получим

$$(B_r h)(z) = r \cdot \sum v_k(z) \cdot \int \frac{\bar{u}_k(\xi) d\mu(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z} = \frac{r \cdot \sum v_k(z) f_k(rz)}{1 - \theta(rz)}.$$

В [33] показано, что функции $f_{k,r}$ со значениями $f_k(rz)$, рассматриваемые как элементы пространства $L^2(\mu)$, стремятся к $\bar{u}_k$ в $L^2(\mu)$, причём $||f_{k,r} - \bar{u}_k|| \leqslant ||u_k||$. Следовательно,

$$\sum v_k f_{k,r} \to \sum \bar{u}_k v_k \quad \text{в} \quad L^1(\mu).$$

С другой стороны, для функций $B_r h$, где $h(\xi) = \xi$, по построению нормы векторов $B_r h$ равномерно ограничены; поскольку $\theta(rz) \to 1$ для μ-почти всех z, получаем, что $1 - \theta_r \to 0$ в $L^2(\mu)$, и, следовательно, $(1 - \theta_r)(B_r h) \to 0$ в $L^1(\mu)$. Отсюда заключаем, что

$$\sum \bar{u}_k v_k = \lim \sum v_k f_{k,r} = \lim(1 - \theta_r)(B_r h) = 0,$$

как и требовалось. $\square$

Некоторый вариант обращения теоремы 3 имеет место для операторов из плотного множества относительно нормы класса ядерных операторов.

Предложение 2.12. *Среди операторов $K = \sum(\cdot, u_k)v_k$ из класса ядерных операторов в $L^2(\mu)$ со свойством $\sum \bar{u}_k v_k = 0$ операторы, которые представляются как коммутаторы $K = XU - UX$, образуют плотное множество в норме класса ядерных операторов.*

Доказательство. Достаточно взять множество всех операторов конечного ранга вида $K = \sum(\cdot, u_k)v_k$, где сумма конечна, а функции u_k, v_k бесконечно гладкие и удовлетворяют условию $\sum u_k v_k = 0$. $\square$

Теорема 3 вместе с предложением 2.10 позволяют полностью покрыть вопрос об усреднённых волновых операторах в случае коммутатора ранга 1 с простым доказательством, не требующим гораздо более тонких результатов о существовании граничных значений почти всюду у интегралов типа Коши, как в теореме 1.

Предложение 2.13. *Пусть U_1, U_2 – унитарные операторы с сингулярной спектральной мерой, и предположим, что X – такой оператор, что $K = XU_1 - U_2X$ является оператором ранга 1. Тогда средние Чезаро последовательности $(U_2^n X U_1^{-n})$ имеют предел в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что оператор $U_1 = U_2$ действует в $L^2(\mu)$, где μ – сингулярная мера на единичной окружности. Оператор K может быть записан в виде $K = (\cdot, u)v$. По теореме 3 имеем $\bar{u}v = 0$ μ-почти всюду. Сужения меры μ на множества, где $u \neq 0$ и $v \neq 0$, взаимно сингулярны. Остаётся применить предложение 2.10. $\square$

2.3.3 Коммутаторы со сжатиями

Этот параграф посвящен коммутаторам в модельных пространствах K_θ. Пусть θ – внутренняя функция на единичной окружности $\mathbb{T}$, т.е. $\theta \in H^\infty$, $|\theta| = 1$ почти всюду на $\mathbb{T}$ относительно меры Лебега m (мера m предполагается нормированной так, что $m\mathbb{T} = 1$). Определим модельное подпространство K_θ пространства Харди H^2 формулой $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$; модельный оператор M_θ в нем действует по формуле $M_\theta = P_\theta M_z|_{K_\theta}$, где M_z – оператор умножения на независимую переменную, а P_θ – ортопроектор на K_θ.

Для сокращения обозначений здесь L^2 всегда обозначает $L^2(\mathbb{T}, m)$. Операторы умножения на функции обозначаются буквой M с функцией в качестве нижнего индекса; так, оператор умножения на функцию α обозначается через

M_α. Проектор Рисса P_+ есть ортопроектор на H^2, $P_- = I - P_+$ – ортопроектор на ортогональное дополнение H^2_- подпространства H^2 в L^2. Если $s \in L^2$ и λ – точка единичного круга, то $(P_+s)(\lambda) = \int \frac{s(\xi)\xi dm(\xi)}{\xi - \lambda}$, т.е. граничные значения функции от λ, стоящей в правой части, совпадают с P_+s m-почти всюду на единичной окружности.

Целью этой работы является описание ядерных операторов, т.е. операторов из класса Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_1$, представимых в виде $XM_\theta - M_\theta X$ для некоторого ограниченного линейного оператора X в K_θ.

Предложение 2.14. *Пусть $L : K_\theta \to K_\theta$ – ядерный оператор,*

$$L = \sum (\cdot, u_n) v_n, \tag{2.15}$$

где $u_n, v_n \in K_\theta$ и

$$\sum ||u_n|| \cdot ||v_n|| < \infty. \tag{2.16}$$

(Ясно, что тогда $\sum \bar{u}_n v_n \in L^1$.)

1) *Если L представляется в виде $XM_\theta - M_\theta X$, то*

$$\sum \bar{u}_n v_n \in H^1_0 = \{f \in H^1 : f(0) = 0\}. \tag{2.17}$$

2) *Пусть $\varepsilon > 0$. Если $\sum \bar{u}_n v_n \in H^1_0$, то существует ядерный оператор, представимый в виде $XM_\theta - M_\theta X$ и близкий к L в $\mathfrak{S}_1$, т.е. такой, что норма их разности в $\mathfrak{S}_1$ не превосходит ε.*

Таким образом, в предложении устанавливается описание замыкания в $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов, представимых в виде коммутатора $XM_\theta - M_\theta X$ при некотором X. Интерес к такому вопросу возник в связи с известной задачей об описании функций φ на единичной окружности, для которых из того, что $XU - VX \in \mathfrak{S}_1$, следует, что $X\varphi(U) - \varphi(V)X \in \mathfrak{S}_1$, где U, V – пара унитарных операторов; в известных исследованиях на эту тему всегда дополнительно получается, что $||X\varphi(U) - \varphi(V)X||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \mathrm{const} \cdot ||XU - VX||_{\mathfrak{S}_1}$. Наиболее полный ответ на этот вопрос, по-видимому, даётся в статье В.В. Пеллера [32] в терминах классов Бесова. Вместо унитарных операторов можно рассматривать различные классы операторов и соответствующие им классы функций, применимые к операторам из заданного класса. В частности, такой вопрос можно поставить для сжатий класса C_0, т.е. таких сжатий T, для которых существует функция $\theta \in H^\infty$, не обращающаяся в нуль тождественно и такая, что $\theta(T) = 0$. Не умаляя общности, можно предполагать, что функция θ внутренняя; типичным оператором класса C_0 является оператор M_θ. Если зафиксировать внутреннюю функцию θ, то естественно рассмотреть класс $C_0(\theta)$ операторов T, для которых $\theta(T) = 0$. Естественным классом функций, применимых к операторам класса $C_0(\theta)$, является H^∞, а точнее – фактрор-алгебра $H^\infty/\theta H^\infty$. Разрешение сформулированного выше вопроса для оператора M_θ, т.е. для случая $U = V = M_\theta$, сразу привело бы и к обобщению на класс $C_0(\theta)$. С учётом результата этого параграфа этот вопрос (в формулировке с оценкой нормы) можно пересказать следующим образом: *для каких функций $\varphi \in H^\infty$ отображение $L \mapsto L_\varphi$, рассматриваемое на множестве ядерных операторов L, для которых $\Omega L \in \theta H^1$ (см. (2.19), (2.20) по поводу определения функции ΛL), ограничено относительно нормы класса $\mathfrak{S}_1$?*

Так как ядерный оператор L, заданный формулой (2.15), действует в подпространстве K_θ пространства L^2, L может быть записан как интегральный оператор, а именно,

$$(Lh)(z) = \int k(z,\xi)h(\xi)dm(\xi), \quad h \in K_\theta,$$

где

$$k(z,\xi) = \sum \overline{u_n(\xi)} v_n(z).$$

Отметим, что, таким образом, выражение $\sum \bar{u}_n v_n$, фигурирующее в теореме, представляет собой диагональ ядра k. Нетрудно проверить, что отображение, сопоставляющее ядерному оператору диагональ ядра в его записи в виде интегрального оператора, корректно определено на операторах конечного ранга, т.е. не зависит от выбора набора векторов u_n, v_n, опеределяющего один и тот же оператор L. Очевидно, это отображение линейно и непрерывно действует из $\mathfrak{S}_1$ в L^1 (его норма равна 1), и потому оно является сжимающим линейным отображением на всём классе $\mathfrak{S}_1$.

Если $s \in L^2$, то положим $\tilde{s} = \theta\bar{z}\bar{s}$. Так как $K_\theta = H^2 \cap \theta H^2_-$, нетрудно видеть, что функция s принадлежит или не принадлижит подпространству K_θ одновременно с $\tilde{s}$. Нам будет удобнее работать с оператором L, записанным в виде

$$L = \sum (\cdot, \tilde{u}_n) v_n \tag{2.18}$$

вместо (2.15), т.е. с функциями $\tilde{u}_n$ вместо u_n. Тогда условие (2.17) переписывается как

$$\Omega L \in \theta H^1, \tag{2.19}$$

где $\Omega : \mathfrak{S}_1 \to L^1$,

$$\Omega\left(\sum (\cdot, \tilde{u}_n) v_n\right) = \sum u_n v_n. \tag{2.20}$$

Пусть $\mathcal{K} : L^2 \to L^2$ – интегральный оператор с ядром k,

$$(\mathcal{K}h)(z) = \int k(z,\xi) h(\xi) dm(\xi).$$

Для $h \in L^2$ положим

$$(K_\varphi h)(z) = \int \frac{\varphi(\xi) - \varphi(z)}{\xi - z} k(z,\xi) h(\xi) dm(\xi).$$

Последнее выражение связано с функцией φ; сначала будем предполагать, что функция φ достаточно гладкая, что позволяет корректно определить оператор K_φ. Из теории двойных операторных интегралов хорошо известно (см., например, [46]), что если $\mathcal{K} = XM_z - M_z X$ для некоторого оператора X, то

$$K_\varphi = XM_\varphi - M_\varphi X. \tag{2.21}$$

По операторам $\mathcal{K}, K_\varphi$ построим операторы в K_θ:

$$L = P_\theta \mathcal{K}|_{K_\theta}, \quad L_\varphi = P_\theta K_\varphi|_{K_\theta}.$$

Возьмем оператор L ранга 1 на K_θ. Тогда $L = (\cdot, \tilde{u})v$ для некоторых функций $u, v \in K_\theta$; пусть $\mathcal{K}$ – оператор на L^2, заданный той же самой формулой. В представлении $\mathcal{K}$ в виде интегрального оператора ядро имеет вид

$k(z,\xi)=\overline{\tilde{u}(\xi)}v(z)$. Пусть φ – достаточно гладкая функция из H^∞. Для оператора K_φ и для $h\in K_\theta$ получаем:

$$(K_\varphi h)(z)=v(z)\int\frac{\varphi(\xi)-\varphi(z)}{\xi-z}\overline{\tilde{u}(\xi)}h(\xi)dm(\xi),$$

откуда

$$\begin{aligned}K_\varphi=&M_v(P_+M_\varphi-M_\varphi P_+)M_{\bar\theta u}\\=&M_v(P_+M_\varphi P_--P_-M_\varphi P_+)M_{\bar\theta u}=M_vP_+M_\varphi P_-M_{\bar\theta u}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Последнее равенство является следствием соотношения $P_-M_\varphi P_+=0$, которое верно, так как $\varphi\in H^\infty$.

Если $\alpha\in H^\infty$, то $\alpha(M_\theta)=P_\theta M_\alpha|_{K_\theta}$; $\alpha(M_\theta)=0$ тогда и только тогда, когда $\alpha\in\theta H^\infty$.

Если u,v – ограниченные функции, получаем

$$\begin{aligned}L_\varphi=&P_\theta K_\varphi|_{K_\theta}=P_\theta M_vP_+M_\varphi P_-M_{\bar\theta u}|_{K_\theta}\\=&P_\theta M_vP_\theta M_{\varphi\bar\theta}P_\theta M_u|_{K_\theta}=v(M_\theta)(P_\theta M_{\varphi\bar\theta})u(M_\theta).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Благодаря этой формуле оператор L_φ можно определить и для функций $\varphi\in H^\infty$ без предположений об их гладкости.

Доказательство предложения 2.14. 1) Пусть L – ядерный оператор на K_θ, и допустим, что $L=XM_\theta-M_\theta X$. Тогда для оператора $\mathcal{K}=(XP_\theta)M_z-M_z(XP_\theta)$ имеем $L=P_\theta\mathcal{K}|_{K_\theta}$. Если $\varphi\in H^\infty$, то в силу соотношения (2.21) с оператором XP_θ вместо X получаем $K_\varphi=XP_\theta M_\varphi-M_\varphi XP_\theta$, и $L_\varphi=P_\theta K_\varphi|_{K_\theta}=X\varphi(M_\theta)-\varphi(M_\theta)X$. В частности, отсюда следует, что если $\varphi\in\theta H^\infty$, то $L_\varphi=0$.

Введем обозначение

$$\Phi_\theta=\{P_\theta\alpha:\alpha\in H^\infty\};$$

норма на Φ_θ определяется равенством

$$||\varphi||_{\Phi_\theta}=\inf\{||\alpha||_{H^\infty}:P_\theta\alpha=\varphi\}.$$

Если $\varphi\in\Phi_\theta$, то оператор $\varphi(M_\theta)$ определен естественным образом, и его норма равна $||\varphi||_{\Phi_\theta}$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ класс операторов, которые могут быть представлены в виде конечной суммы $\sum(\cdot, \tilde{u}_n)v_n$, где $u_n, v_n \in \Phi_\theta$. Если $L = \sum(\cdot, \tilde{u}_n)v_n \in \mathfrak{F}$ и $\varphi = \theta$, из формулы (2.23) вытекает, что

$$L_\varphi = \sum v_n(M_\theta)u_n(M_\theta) = (\sum u_n v_n)(M_\theta).$$

Поскольку $L_\varphi = 0$, получаем, что внутренняя функция θ является делителем аналитической функции $\sum u_n v_n$, т.е. $\sum u_n v_n \in \theta H^2$ (и даже $\sum u_n v_n \in \theta H^p$ при всех $p > 1$).

В общем случае при выполнении условий (2.18) и (2.16), т.е. без предположения $L \in \mathfrak{F}$, требуется доказать, что $\sum u_n v_n \in \theta H^1$.

Определим оператор $\mathcal{K}$ на L^2 формулой (2.18), т.е. той же самой формулой, по которой оператор L действует в K_θ. Будем искать условие на L, равносильное тому, что $L_\varphi = 0$ для всех $\varphi \in \theta H^\infty$. Аналогично соотношению (2.22) получаем

$$K_\varphi = \sum M_{v_n} P_+ M_\varphi P_- M_{\bar{\theta} u_n}.$$

Возьмем ограниченную функцию $h \in K_\theta$, и пусть $\varphi \in \theta H^\infty$. (Хорошо известно, что ограниченные функции из K_θ плотны в K_θ.) Ясно, что $K_\varphi h \in H^1$, и

$$||K_\varphi h||_1 \leqslant \sup|\varphi| \cdot \sup|h| \cdot (\sum ||u_n|| \cdot ||v_n||).$$

(Отметим, что из того, что правая часть конечна, вытекает сходимость рассматриваемых здесь рядов). Свойство $L_\varphi = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $K_\varphi h \in \theta H^1$ для всех таких h и φ. Вектор $M_\varphi P_+ M_{\bar{\theta} u_n} h$ лежит в θH^2, следовательно, всегда имеем $(M_{v_n} P_+ M_\varphi P_+ M_{\bar{\theta} u_n})h \in \theta H^1$. Таким образом, остается проверить, что

$$\left(\sum M_{v_n} P_+ M_\varphi M_{\bar{\theta} u_n}\right)h = \sum M_{v_n} P_+ \varphi \bar{\theta} u_n h \in \theta H^1.$$

Поскольку по предположению $\varphi \in \theta H^\infty$, получаем, что $\varphi \bar{\theta} u_n h \in H^2$, и поэтому интересующее нас свойство переписывается так:

$$\sum v_n \varphi \bar{\theta} u_n h = (\sum v_n u_n)\bar{\theta}\varphi h \in \theta H^1$$

для всех $\varphi \in \theta H^\infty$ и всех ограниченных функций $h \in K_\theta$. Очевидно, что это свойство равносильно условию $\sum u_n v_n \in \theta H^1$, то есть имеют место свойства (2.19), (2.20). Так как для оператора L рассматривалось представление (2.18) вместо (2.15), первое утверждение предложения доказано.

Для доказательства второго утверждения нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.15. *Пусть $\varepsilon > 0$. Для любого ядерного оператора L в K_θ такого, что $\Omega L \in \theta H^1$, существует оператор $\hat{L}$ в K_θ из класса $\mathfrak{F}$ такой, что $||L - \hat{L}|| < \varepsilon$, и для которого также $\Omega \hat{L} \in H^1_0$.*

Доказательство. Пусть $L = \sum (\cdot, \tilde{u}_n) v_n$, $u, v \in K_\theta$. Поскольку ограниченные функции плотны в K_θ, можно взять ограниченные функции вместо u_n, v_n, и рассмотреть конечную сумму так, чтобы норма разности L и полученного оператора $L_1 \in \mathfrak{F}$ не превосходила $\varepsilon/3$. Однако, нам также требуется, чтобы отображение Ω переводило искомый оператор в θH^1. По построению имеем

$$\Omega L_1 \in L^\infty \quad \text{и} \quad ||\Omega L_1 - \Omega L||_{L^1} \leqslant ||L_1 - L||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \varepsilon/3.$$

Пусть $u, v \in K_\theta = H^2 \cap \theta H^2_-$. Тогда

$$uv \in H^1 \cap \theta^2 \bar{z}^2 \overline{H^1}.$$

Следовательно, Ω отображает любой ядерный оператор, действующий в пространстве K_θ, в пространство $H^1 \cap \theta^2 \bar{z}^2 \overline{H^1}$. Так как $\Omega L \in \theta H^1$, имеем $\Omega L \in \theta H^1 \cap \theta^2 \bar{z}^2 \overline{H^1}$, и, следовательно

$$z\bar{\theta}\Omega L \in zH^1 \cap \theta \bar{z} \overline{H^1}.$$

Возьмем ограниченную функцию $f \in zH^1 \cap \theta \bar{z} \overline{H^1}$, для которой имеем $||z\bar{\theta}\Omega L - f||_{L^1} \leqslant \varepsilon/3$. Тогда для

$$g = \Omega L_1 - \bar{z}\theta f = (\Omega L_1 - \Omega L) + \bar{z}\theta(z\bar{\theta}\Omega L - f)$$

имеем

$$||g||_{L^1} \leqslant ||\Omega L_1 - \Omega L||_{L^1} + ||z\bar{\theta}\Omega L - f||_{L^1} \leqslant 2\varepsilon/3.$$

Также ясно, что g —ограниченная функция и $g \in H^1 \cap \theta^2\bar{z}^2\overline{H^1}$. Следовательно $g \in H^\infty$, и существуют ограниченные функции $p, q \in H^2$ такие, что $g = pq$ и $||p||_{H^2} \cdot ||q||_{H^2} \leqslant 2\varepsilon/3$. Определим $L_2 = (\cdot, P_\theta\tilde{p})P_\theta q$. Тогда $L_2 \in \mathfrak{F}$, $||L_2||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant 2\varepsilon/3$, и

$$\Omega L_2 - g = P_\theta p \cdot P_\theta q - pq \in \theta H^1.$$

Положим $\hat{L} = L_1 - L_2$. Оператор $\hat{L}$ принадлежит классу $\mathfrak{F}$, поскольку оба оператора L_1 и L_2 принадлежат $\mathfrak{F}$,

$$||\hat{L} - L||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant ||L_1 - L||_{\mathfrak{S}_1} + ||L_2||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \varepsilon,$$

и, наконец, $\Omega\hat{L} = \Omega L_1 - \Omega L_2 = (\bar{z}\theta f + g) - \Omega L_2 = \bar{z}\theta f - (\Omega L_2 - g) \in \theta H^1$. $\square$

Таким образом, предложение будет доказано, если любой оператор $L \in \mathfrak{F}$, для которого $\Omega L \in \theta H^1$, удастся записать в виде $L = XM_\theta - M_\theta X$ для некоторого оператора X в K_θ.

На пространстве K_θ имеем $M_\theta = M_z - (\cdot, \bar{z}\theta)\theta$. Если $\alpha \in H^\infty$, то $\alpha(M_\theta)^* = P_\theta M_{\bar{\alpha}}|_{K_\theta}$. Для $\alpha \in \Phi_\theta$ получаем

$$\begin{aligned}
\alpha(M_\theta)^*M_\theta - M_\theta\alpha(M_\theta)^* =& P_+M_{\bar{\alpha}}M_\theta - P_\theta M_z P_+ M_{\bar{\alpha}} \\
=& P_\theta(P_+M_{\bar{\alpha}}M_z - (\cdot, \bar{z}\theta)P_+M_{\bar{\alpha}}\theta - M_zP_+M_{\bar{\alpha}}) \\
=& P_\theta(P_+M_z - M_zP_+)M_{\bar{\alpha}} - (\cdot, \bar{z}\theta)P_\theta\bar{\alpha}\theta \\
=& P_\theta P_0 M_z M_{\bar{\alpha}} - (\cdot, \bar{z}\theta)P_\theta\bar{\alpha}\theta \\
=& (\cdot, \bar{z}\alpha)P_\theta 1 - (\cdot, \bar{z}\theta)P_\theta\bar{\alpha}\theta \\
=& (\cdot, P_\theta\bar{z}\alpha)P_\theta 1 - (\cdot, P_\theta\bar{z}\theta)P_\theta\bar{\alpha}\theta.
\end{aligned}$$

Пусть $u, v \in \Phi_\theta$. Рассмотрим оператор $X = v(M_\theta)M_\theta^*\tilde{u}(M_\theta)^*$. Применяя последнюю формулу при $\alpha = z\tilde{u}$ и принимая во внимание, что $\bar{\alpha}\theta = u \in \Phi_\theta$, получаем

$$\begin{aligned}
XM_\theta - M_\theta X =& v(M_\theta)(\alpha(M_\theta)^*M_\theta - M_\theta\alpha(M_\theta)^*) \\
=& (\cdot, P_\theta\bar{z}\alpha)v(M_\theta)P_\theta 1 - (\cdot, P_\theta\bar{z}\theta)v(M_\theta)P_\theta\bar{\alpha}\theta \qquad (2.24) \\
=& (\cdot, \tilde{u})v - (\cdot, P_\theta\bar{z}\theta)P_\theta uv.
\end{aligned}$$

Теперь возьмем оператор L в K_θ из класса $\mathfrak{F}$, пусть $L = \sum(\cdot, \tilde{u}_n)v_n$, где сумма конечна, $u_n, v_n \in \Phi_\theta$, и предположим, что $\sum u_n v_n \in \theta H^1$. Поскольку $u_n, v_n \in \Phi_\theta$, имеем $\sum u_n v_n \in \theta H^2$, откуда $P_\theta \sum u_n v_n = 0$. По формуле (2.24) для $X = \sum v_n(M_\theta)M_\theta^* \tilde{u}_n(M_\theta)^*$ получаем

$$XM_\theta - M_\theta X = \sum(\cdot, \tilde{u}_n)v_n - (\cdot, P_\theta \bar{z}\theta)P_\theta \sum u_n v_n = \sum(\cdot, u_n)v_n = L.$$

Доказательство предложения закончено. □

2.3.4 Сходимость семейств интегральных операторов

Пусть μ – борелевская мера на единичной окружности, K – интегральный оператор в $L^2(\mu)$,

$$(Kh)(z) = \int k(z,\xi)h(\xi)d\mu(\xi), \quad h \in L^2(\mu), \tag{2.25}$$

Если $K = \sum_n(\cdot, u_n)v_n$, то K записывается как интегральный оператор (2.25) с ядром k,

$$k(z,\xi) = \sum \bar{u}_n(\xi)v_n(z).$$

Как и ранее, U – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$. Абелевы средние B_r операторов $X - U^nXU^{-n}$ выражаются через коммутатор по формуле (2.2). Если K – интегральный оператор (2.25), то

$$(B_r h)(z) = \int k(z,\xi)\frac{\bar{\xi}h(\xi)d\mu(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z}. \tag{2.26}$$

Предложение 2.16. *Пусть K – интегральный оператор (2.25) в $L^2(\mu)$. Если K записывается в виде $K = XU - UX$ для некоторого ограниченного оператора X, и для μ-почти всех z выполнено соотношение*

$$\int\left|\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}\right|d\mu(\xi) < \infty,$$

то средние Чезаро операторов (2.26) сходятся в слабой оператороной топологии к интегральному оператору B с ядром $\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}$:

$$(Bh)(z) = \int\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}h(\xi)d\mu(\xi), \qquad h \in L^2(\mu).$$

При этом усреднённые пределы последовательности $U^n X U^{-n}$ существуют при $n \to \pm\infty$ и равны $X - B$.

Оператор B корректно определён на плотном множестве ограниченных функций $h \in L^2(\mu)$ и может быть распространён на всё пространство $L^2(\mu)$ по непрерывности.

Доказательство. Зафиксируем точку z такую, что

$$M(z) = \int \left| \frac{k(z,\xi)}{\xi - z} \right| d\mu(\xi) < \infty.$$

Применим операторы B_r, B к вектору $h = 1$:

$$(B_r 1)(z) = \int k(z,\xi) \frac{d\mu(\xi)}{\xi - rz}, \qquad (B1)(z) = \int k(z,\xi) \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z},$$

откуда

$$(B_r 1)(z) - (B1)(z) = -\int k(z,\xi) \frac{(1-r)z}{(\xi - rz)(\xi - z} d\mu(\xi).$$

Абсолютная величина выражения в интеграле не превосходит $|\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}|$; подынтегральные выражения стремятся к нулю почти всюду. Таким образом, $(B_\alpha 1)(z) - (B1)(z) \to 0$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости, откуда вытекает и слабая сходимость. Следовательно, $B_\alpha h \to Bh$ слабо для любого вектора h из приводящего подпространства, порождённого функцией 1, т.е. для всех $h \in L^2(\mu)$. □

Заметим, что если $\iint |\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}|^2 d\mu(\xi) d\mu(z) < \infty$, то все операторы B_α и оператор B принадлежат классу Гильберта–Шмидта и, кроме того, $B_\alpha \to B$ по норме Гильберта–Шмидта; тогда оператор K обладает свойствами из условий предложения автоматически.

2.3.5 Случай коммутатора ранга 2

Теперь предположим, что $\operatorname{rank} K = 2$. Как и ранее, можно работать в пространстве $L^2(\mu)$. Запишем

$$K = (\cdot, u_1) v_1 + (\cdot, u_2) v_2.$$

По теореме 3 получаем

$$\bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 \equiv 0.$$

Для множеств, где хотя бы одна из функций u_1, u_2, v_1, v_2 равна нулю, вопрос сводится к случаю меньшего ранга. Таким образом, задача сведена к случаю, когда все функции ненулевые. Из дальнейшего видно, что существование или отсутствие усреднённых волновых операторов определяется функцией

$$f = \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} = -\frac{v_2}{v_1}.$$

Нам достаточно, пользуясь предложением 2.9, считать, что все функции u_1, u_2, v_1, v_2 отделены от нуля и от бесконечности. Тогда вместо оператора X можно рассмотреть оператор $M_{v_1^{-1}} X M_{\bar{u}_2^{-1}}$, где M_α обозначает оператор умножения на функцию α. Очевидно, существование волнового оператора для X равносильно его существованию для $M_{v_1^{-1}} X M_{\bar{u}_2^{-1}}$. Исходный оператор K преобразуется в оператор

$$(\cdot, u_1/u_2)1 + (\cdot, 1)v_2/v_1 = (\cdot, \bar{f})1 - (\cdot, 1)f,$$

который теперь будет обозначаться через K. Итак, общий случай задачи о существовании слабых усреднённых волновых операторов с коммутатором ранга 2 сведён к частному случаю, когда K – оператор в $L^2(\mu)$ при сингулярной вероятностной мере μ на единичной окружности,

$$K = (\cdot, \bar{f})1 - (\cdot, 1)f, \qquad f \in L^2(\mu). \tag{2.27}$$

Более того, достаточно рассматривать случаи вещественнозначных или унимодулярных функций f. В первом случае, поскольку коммутатор K имеет вид $XU - UX$ тогда и только тогда, когда K^* также представляется в таком виде, общий случай комплекснозначной функции f сводится к случаю, когда функция f вещественнозначная. Это рассуждение позволяет рассматривать только самосопряжённые операторы K. Тогда K может быть записан в виде $K = (\cdot, a)a \pm (\cdot, b)b$. По теореме 3 получаем, что $|a|^2 \pm |b|^2 = 0$, откуда знак может быть только минусом и K не может быть положительным или отрицательным оператором. Также μ-почти всюду имеем $|a| = |b|$. Преобразуем пространство $L^2(\mu)$ в весовое пространство $L^2(|a|^2\mu)$ унитарным оператором умножения на функцию $1/a$; тогда K перейдёт в оператор $(\cdot, 1)1 - (\cdot, f)f$ при унимодулярной функции $\varphi = b/a$. Если вместо оператора K рассмотреть его суперпозицию с оператором умножения на f, получится формула (2.27).

Преобразуем формулу (2.27) в связи с удобствами, доставляемыми рассмотрением оператора XU вместо X. Тогда соответствующий коммутатор записывается в виде

$$(\cdot, \bar{z}\bar{f})1 - (\cdot, \bar{z})f. \tag{2.28}$$

2.3.6 Функции от унитарных операторов в K_θ

Рассмотрим важный класс операторов, состоящий из функций от некоторых естественных унитарных операторов U_α в K_θ.

Пусть θ – внутренняя функция в единичном круге, $\theta(0) = 0$; α – комплексное число с модулем 1. Напомним, что мера Кларка σ_α определяется соотношением

$$\frac{1 + \bar{\alpha}\theta(z)}{1 - \bar{\alpha}\theta(z)} = \int \frac{1 + \bar{\xi}z}{1 - \bar{\xi}z} d\sigma_\alpha(\xi); \tag{2.29}$$

при любом α мера σ_α сингулярна относительно меры Лебега. Подстановка $z = 0$ в соотношение (2.29) показывает, что σ_α – вероятностная мера.

Определим унитарные операторы U_α в K_θ формулой

$$U_\alpha h = P_\theta z h + \alpha(h, \bar{z}\theta)1, \tag{2.30}$$

где P_θ обозначает ортогональный проектор на K_θ. Отметим следующий результат параграфа 12 статьи [76], который нам понадобится и будет обсуждаться ниже: все L^∞-функции от U_α являются усечёнными операторами Тёплица.

Операторы U_α унитарно эквивалентны операторам умножения на z в $L^2(\sigma_\alpha)$, см. [49]; унитарная эквивалентность осуществляется вложением

$$K_\theta \hookrightarrow L^2(\sigma_\alpha),$$

определяемым через угловые граничные значения функций из K_θ, см. [33]. Здесь и далее под вложением понимается отображение, сопоставляющее функциям из исходного пространства K_θ их значения, рассматриваемые как элементы другого L^2-пространства.

Значения функций из K_θ внутри единичного круга могут быть восстановлены по их значениям σ_α-почти всюду формулой

$$\varphi(z) = (1 - \bar{\alpha}\theta(z)) \int \frac{\varphi(\xi) d\sigma_\alpha(\xi)}{1 - \bar{\xi} z}. \tag{2.31}$$

Если $q \in L^\infty(\sigma_\alpha)$, то оператор $q(U_\alpha)$ умножает на q граничные значения функций из K_θ на множестве, на котором $\theta = \alpha$; точнее, для $h \in K_\theta$ $q(U_\alpha)h$ есть функция из K_θ, у которой граничные значения σ_α-почти везде равны граничным значениям h, умноженным на q. Пусть $\varphi \in K_\theta$ – функция, определяемая условием $\varphi = q$ σ_α-почти всюду. Сравнивая значения функций σ_α-почти везде, получаем, что $\varphi = q(U_\alpha)1$; аналогично, соотношение $q(U_\alpha)^* \bar{z}\theta = \bar{z}\theta\bar{\varphi}$ вытекает из того, что $\bar{z}\theta\bar{\varphi}$ – функция из K_θ, значения σ_α-почти всюду у которой равны значениям функции $\bar{q} \cdot \bar{z}\theta$. Поскольку оператор $q(U_\alpha)$ коммутирует с U_α и $U_1 = U_\alpha + (1 - \alpha)(\cdot, \bar{z}\theta)1$, получаем

$$\begin{aligned} q(U_\alpha)U_1 - U_1 q(U_\alpha) =& (1 - \alpha)((\cdot, \bar{z}\theta)q(U_\alpha)1 - (\cdot, q(U_\alpha)^* \bar{z}\theta)1) \\ =& (1 - \alpha)((\cdot, \bar{z}\theta)\varphi - (\cdot, \bar{z}\theta\bar{\varphi})1). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Теперь возьмём сингулярную вероятностную меру μ на единичной окружности, построим внутреннюю функцию θ по формуле (2.29) при $\alpha = 1$ и $\mu = \sigma_1$:

$$\frac{1 + \theta(z)}{1 - \theta(z)} = \int \frac{1 + \bar{\xi} z}{1 - \bar{\xi} z} d\mu(\xi), \tag{2.33}$$

и пусть V – унитарное вложение

$$V : K_\theta \hookrightarrow L^2(\mu) = L^2(\sigma_1).$$

Обозначим через U оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$; имеем

$$V U_1 V^* = U.$$

Для $q \in L^\infty(\sigma_\alpha)$ определим оператор $X : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ формулой

$$X = \frac{1}{1-\alpha} V q(U_\alpha) V^{-1}. \tag{2.34}$$

Из соотношения (2.32) легко получается формула для коммутатора:

$$K = XU - UX = (\cdot, \bar{z}) f - (\cdot, \bar{z}\bar{f}) 1, \tag{2.35}$$

где $f = V\varphi \in L^2(\mu)$, то есть, $\varphi = f$ μ-почти всюду. Для неотрицательных целых n имеем

$$X - U^{n+1} X U^{-(n+1)} = \sum_{m=0}^{n} U^m K U^{-(m+1)}. \tag{2.36}$$

Обозначим через B_r абелевы средние последовательности (2.36):

$$B_r = X - (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n U^{n+1} X U^{-(n+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} r^m U^m K U^{-(m+1)}. \tag{2.37}$$

Формулу (2.35) можно переписать как

$$(Kh)(z) = \int (f(z) - f(\xi)) \xi h(\xi) d\mu(\xi),$$

откуда из (2.37) получаем

$$\begin{aligned} (B_r h)(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} r^m z^m \int (f(z) - f(\xi)) \xi^{-m} h(\xi) d\mu(\xi) \\ &= \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi} z} h(\xi) d\mu(\xi). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Поскольку множество векторов $h \in L^2(\mu)$, для которых $B_r h$ сходятся при $r \nearrow 1$, является подпространством, приводящим U, сходимость при $h \equiv 1$ влечёт сходимость при всех $h \in L^2(\mu)$. Таким образом, для оператора X, определённого соотношением (2.34), абелевы средние последовательности операторов $U^n X U^{-n}$ имеют предел тогда и только тогда, когда сходятся функции (2.38) при $h \equiv 1$, которые далее будут обозначаться через $\mathcal{H}_r f$:

$$(\mathcal{H}_r f)(z) = \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi} z} d\mu(\xi).$$

2.3.7 Усреднённые волновые операторы и усечённые операторы Тёплица

Возьмём внутреннюю функцию θ, для которой $\theta(0) = 0$, рассмотрим $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Для функции $\psi \in L^2$ усечённый оператор Тёплица A_ψ в K_θ определяется формулой

$$A_\psi h = P_\theta \psi h, \quad h \in K_\theta.$$

Этот оператор изначально определён на плотном множестве всех ограниченных функций из K_θ, и предполагается, что символ ψ такой, что A_ψ – ограниченный оператор, таким образом, определённый на всём пространстве. Основные свойства усечённых операторов Тёплица изучались в статье [76].

Обозначим через μ меру Кларка σ_1 функции θ, определяемую соотношением (2.33). Поскольку $\theta(0) = 0$, μ – вероятностная мера. Возьмём оператор X в $L^2(\mu)$, предположим, что выполнена формула (2.35): $XU - UX = (\cdot, \bar{z})f - (\cdot, \bar{z}\bar{f})1$ для некоторой $f \in L^2(\mu)$. Построим $\varphi \in K_\theta$ так, чтобы $\varphi = f$ μ-почти всюду; положим

$$A = V^* X V,$$

где V – унитарное вложение $K_\theta \hookrightarrow L^2(\mu)$. Определим оператор U_1 формулой (2.30) при $\alpha = 1$. Поскольку $VU_1 = UV$, имеем следующую формулу для коммутатора:

$$\begin{aligned} AU_1 - U_1 A =& V^* X V U_1 - U_1 V^* X V \\ =& V^*(XU - UX)V \\ =& (\cdot, V^*\bar{z})V^* f - (\cdot, V^*(\bar{z}\bar{f}))V^* 1. \end{aligned}$$

Граничные значения функций $\bar{z}\theta, \varphi, \bar{z}\theta\bar{\varphi}, 1 \in K_\theta$ совпадают μ-почти везде с функциями $\bar{z}, f, \bar{z}\bar{f}, 1 \in L^2(\mu)$ соответственно. Следовательно,

$$AU_1 - U_1 A = (\cdot, \bar{z}\theta)\varphi - (\cdot, \bar{z}\theta\bar{\varphi})1. \tag{2.39}$$

Теорема 4. *Оператор A в K_θ является усечённым оператором Тёплица тогда и только тогда, когда для некоторой функции $\varphi \in K_\theta$ выполняется соотношение* (2.39).

Доказательство. В теореме 8.1 статьи [76] говорится, что A является усечённым оператором Тёплица тогда и только тогда, когда для любой пары векторов $f, g \in K_\theta$ таких, что $zf, zg \in K_\theta$ имеем $(Azf, zg) = (Af, g)$. Для $f \in K_\theta$ свойство $zf \in K_\theta$ означает, что $(f, \bar{z}\theta) = 0$. То, что $h \in K_\theta$ имеет вид $h = zg$ при $g \in K_\theta$, равносильно условию $(h, 1) = 0$. Следовательно, A является усечённым оператором Тёплица тогда и только тогда, когда из соотношений $(f, \bar{z}\theta) = 0$, $(h, 1) = 0$ вытекает, что $(Azf, h) = (Af, \bar{z}h)$, или, что равносильно, $((AU_1 - U_1A)f, h) = 0$. Очевидно, это так, если выполняется формула (2.39).

Обратно, если A – усечённый оператор Тёплица, то, как было показано, из соотношений

$$(f, \bar{z}\theta) = 0, \qquad (h, 1) = 0$$

вытекает, что $((AU_1 - U_1A)f, h) = 0$. Поэтому оператор $AU_1 - U_1A$ можно записать в виде

$$AU_1 - U_1A = (\cdot, \bar{z}\theta)\varphi + (\cdot, \gamma)1 \tag{2.40}$$

для некоторых $\varphi, \gamma \in K_\theta$. Для оператора $X = VAV^*$ в $L^2(\mu)$ коммутатор $XU - UX$ является оператором ранга 2 в $L^2(\mu)$, формула которого получается из правой части соотношения (2.40), если заменить функции из K_θ на их граничные значения μ-почти всюду. В теореме 3 говорится, что если μ – сингулярная мера на единичной окружности и X – оператор в $L^2(\mu)$ такой, что коммутатор $XU - UX$ является конечной суммой $\sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k$, то $\sum u_k v_k = 0$ μ-почти всюду. Поэтому $z\bar{\theta}\varphi + \bar{\gamma} = 0$ в μ-почти всех точках. Следовательно, γ – функция из K_θ, значения которой μ-почти всюду равны значениям функции $-\bar{z}\theta\bar{\varphi}$. Поскольку $\bar{z}\theta\bar{\varphi} \in K_\theta$, получаем $\gamma = -\bar{z}\theta\bar{\varphi}$, откуда следует соотношение (2.39). □

Для усечённого оператора Тёплица A определим $\varphi \in K_\theta$ по формуле (2.39), и пусть $f \in L^2(\mu)$ – функция, для которой $\varphi = f$ μ-почти всюду. Будем говорить, что f *ассоциирована* с A. Отметим, что функции φ и f определены с точностью до аддитивной константы; действительно, для постоянной функции φ в правой части (2.39) получается ноль. Стандартный выбор φ может быть определён условием $\varphi(0) = 0$.

Теперь обсудим, как функция φ из выражения для коммутатора (2.39) может быть найдена по символу ψ усечённого оператора Тёплица. Очевидно, символы из $\theta H^2 + \overline{\theta H^2}$ определяют нулевой оператор, так что можно рассматривать только символы ψ, принадлежащие $K_\theta + \overline{K_\theta}$. Для $\psi \in K_\theta + \overline{K_\theta}$ запишем

$$\begin{aligned}\psi_+ =& P_+\psi = A1 \in K_\theta,\\ \psi_- =& P_-\psi \in \overline{K_\theta},\\ \psi_0 =& (\psi, 1) = (A1, 1) = (A(\bar{z}\theta), \bar{z}\theta).\end{aligned}$$

Также имеем

$$(\psi_-, 1) = 0, \quad A(\bar{z}\theta) = (\psi_- + \psi_0)\bar{z}\theta.$$

Для символа ψ тогда получаем

$$\psi = \psi_+ + \psi_- = A1 + (z\bar{\theta} \cdot A(\bar{z}\theta) - \psi_0) = A1 + z\bar{\theta} \cdot A(\bar{z}\theta) - (A1, 1). \tag{2.41}$$

Предложение 2.17. 1. *Если A – усечённый оператор Тёплица в K_θ, причём $\psi_0 = (A1, 1) = 0$, то*

$$\varphi = A1 - zA(\bar{z}\theta) \tag{2.42}$$

с точностью до аддитивной константы.

2. *Если $A = A_\psi$, причём $\psi \in K_\theta + \overline{K_\theta}$, то*

$$\varphi = \psi_+ - \theta\psi_- \tag{2.43}$$

(также с точностью до аддитивной константы); оператор A_ψ коммутирует с U_1 тогда и только тогда, когда $\varphi = \psi_+ - \theta\psi_- \equiv const$.

Из соотношения (2.43) вытекает, что для символа $\psi \in K_\theta + \overline{K_\theta}$ φ есть функция из K_θ, совпадающая с ψ σ_{-1}-почти всюду.

Доказательство. 1. Возьмём функцию φ, у которой $\varphi(0) = 0$, и применим соотношение (2.39) к вектору $\bar{z}\theta$:

$$(AU_1 - U_1A)(\bar{z}\theta) = (\bar{z}\theta, \bar{z}\theta)\varphi - (\bar{z}\theta, \bar{z}\theta\bar{\varphi})1 = \varphi - \varphi(0) = \varphi.$$

С другой стороны, поскольку $U_1(\bar{z}\theta) = 1$, имеем

$$(AU_1 - U_1A)(\bar{z}\theta) = A1 - U_1A(\bar{z}\theta) = A1 - zA(\bar{z}\theta),$$

где соотношение $U_1A(\bar{z}\theta) = zA(\bar{z}\theta)$ является следствием предположения, что $(A(\bar{z}\theta), (\bar{z}\theta)) = \psi_0 = 0$. Приравнивая правые части, получаем формулу (2.42).

2. Случай, когда ψ – постоянная функция, тривиален, и без ограничения общности можно считать, что $\psi_0 = 0$. По свойству (2.42) для $A = A_\psi$ при $\psi \in K_\theta + \overline{K_\theta}$ имеем

$$\varphi = A_\psi 1 - zA_\psi(\bar{z}\theta) = \psi_+ - z(\psi_- + \psi_0)\bar{z}\theta = \psi_+ - \theta\psi_-,$$

и формула (2.43) доказана. □

Возьмём $q \in L^\infty(\sigma_\alpha)$, $|\alpha| = 1$. То, что $q(U_\alpha)$ – усечённый оператор Тёплица, было доказано в статье [76], параграф 12; это также прямо вытекает из теоремы 4 и формулы (2.32).

Символом усечённого оператора Тёплица $q(U_\alpha)$ является функция $(1 + \alpha\bar{\theta})\varphi$, где $\varphi \in K_\theta$, $\varphi = q$ σ_α-почти всюду. Действительно, эта формула очевидна, если q – константа. Следовательно, можно предполагать, что $0 = \int q\, d\sigma_\alpha = \varphi(0)$, и, таким образом, $\bar{z}\varphi \in K_\theta$. Оператор $q(U_\alpha)$ умножает граничные значения в σ_α-почти всех точках на функцию q. Поэтому $q(U_\alpha)1$ – функция, равная q в σ_α-почти всех точках, то есть, $q(U_\alpha)1 = \varphi$. Аналогично, значения функции $\bar{z}\theta$ совпадают с $\alpha\bar{z}$ σ_α-почти всюду; следовательно, значения σ_α-почти всюду у функции $q(U_\alpha)(\bar{z}\theta)$ равны $q \cdot \alpha\bar{z}$, и получаем, что $q(U_\alpha)(\bar{z}\theta) = \alpha \cdot \bar{z}\varphi$. По формуле (2.41) при $A = q(U_\alpha)$ имеем

$$\psi = q(U_\alpha)1 + z\bar{\theta} \cdot q(U_\alpha)(\bar{z}\theta) - (q(U_\alpha)1, 1) = \varphi + z\bar{\theta} \cdot \alpha\, \bar{z}\varphi - \int q\, d\sigma_\alpha = (1 + \alpha\bar{\theta})\varphi,$$

что и требовалось. □

2.3.8 Условия сходимости

Как обычно, μ – вероятностная сингулярная мера на единичной окружности, θ – внутренняя функция, определённая соотношением (2.33). Теперь будем изучать последовательности операторов $(U^n X U^{-n})$ в $L^2(\mu)$, где X – оператор, для которого коммутатор $XU - UX$ имеет вид (2.35) для некоторой функции $f \in L^2(\mu)$. По теореме 4 это равносильно тому, что $X = VAV^*$, где A – усечённый оператор Тёплица в K_θ, и тогда функция f ассоциирована с A. Класс всех функций, ассоциировнных с усечёнными операторами Тёплица, будет обозначаться через $\mathcal{B}(\mu)$. Слабая сходимость абелевых средних последовательности $(U^n X U^{-n})$ зависит только от f, и класс функций $f \in \mathcal{B}(\mu)$, для которых такая сходимость имеется, будет обозначаться через $\mathcal{C}(\mu)$. Ниже будут получены более прямые описания принадлежности функции $f \in L^2(\mu)$ классам $\mathcal{B}(\mu)$ и $\mathcal{C}(\mu)$.

Существуют достаточные условия для усреднённой сходимости операторов $U^n X U^{-n}$ в терминах непрерывности символов усечённых операторов Тёплица и функций, применяемых к унитарным операторам U_α. Напомним, что $V : K_\theta \hookrightarrow L^2(\mu)$ – унитарное вложение, определяемое через граничные значения.

Лемма 2.18. *Пусть q – непрерывная функция на единичной окружности. Предположим, что либо $X = VT_qV^*$, где T_q – усечённый оператор Тёплица с символом q, либо $X = Vq(U_\alpha)V^*$, где U_α – унитарный оператор, определённый формулой* (2.30). *Тогда средние Чезаро последовательности операторов $(U^n X U^{-n})_{n\geqslant 0}$ имеют предел в сильной операторной топологии. Предельный оператор коммутирует с U и совпадает с $q(U)$ на ортогональном дополнении ко всем собственным векторам оператора U.*

Доказательство. Операторы $T_q - q(U_\alpha)$ компактны, когда $|\alpha| = 1$ и q – непрерывная функция на единичной окружности. Действительно, для $q(z) = z^n$, $T_q - q(U_\alpha)$ – оператор конечного ранга: если $n \geqslant 0$, то $T_{z^n} = T_z^n$, и, поскольку $T_z - U_\alpha$ – оператор ранга 1, получаем $\operatorname{rank}(T_z^n - U_\alpha^n) \leqslant n$; аналогично, $\operatorname{rank}(T_{\bar z} - U_\alpha^*) = 1$, и для $n < 0$ имеем $T_{z^n} = T_{\bar z}^{-n}$ и $\operatorname{rank}(T_z^n - U_\alpha^n) \leqslant -n$. Следовательно, если q – тригонометрический многочлен, то $T_q - q(U_\alpha)$ – оператор конечного ранга. Любая непрерывная функция равномерно приближается полиномами, а предел по норме операторов конечного ранга является компактным оператором.

Таким образом, в обоих случаях $V^*XV - q(U_1)$ – компактный оператор, и, поскольку $Vq(U_1)V^* = q(U)$, оператор $X - q(U)$ также компактен.

Сначала рассмотрим собственные вектора оператора U. Предположим, что $Uh = \omega h$, $|\omega| = 1$. Для $L = (\cdot, a)b$ имеем

$$U^n L U^{-n} h = \bar\omega^n (h, a) U^n b;$$

сходимость вытекает из того, что средние Чезаро последовательности $\bar\omega^n U^n b$ стремятся к проекции вектора b на собственное подпространство U, соответствующее собственному числу ω. Если оператор L компактен, он принадлежит замыканию по норме линейных комбинаций всех операторов ранга 1, и получается сходимость на подпространстве, порождённом всеми собственными векторами U.

Теперь рассмотрим средние Чезаро сужений операторов $(U^n L U^{-n})_{n \geqslant 0}$ на подпространство, ортогональное всем собственным векторам U, где L – компактный оператор. Хорошо известно, что они сходятся к нулю в сильной операторной топологии; автор не смог найти ссылку на оригинальный источник; доказательство для операторов ранга 1 было приведено в главе 2.3.1, переход к компактным операторам сразу следует из возможности аппроксимации по норме компактных операторов операторами конечного ранга.

Положим $L = X - q(U)$, тогда $U^n X U^{-n} = q(U) + U^n L U^{-n}$, откуда и следует утверждение леммы. □

Следствие 2.19. *Пусть θ – внутренняя функция такая, что $\theta(0) = 0$, и предположим, что мера σ_1 не имеет атомов. Возьмём усечённый оператор*

Тёплица A в K_θ, и пусть функция $\varphi \in K_\theta$ определена формулой (2.39). Если φ совпадает с непрерывной функцией q σ_α-почти всюду при некотором $\alpha \neq 1$ с модулем 1, то сильный предел последовательности средних Чезаро операторов $U_1^n A U_1^{-n}$ существует и равен $A - \frac{1}{1-\alpha}(q(U_\alpha) - q(U_1))$.

Доказательство. Из формулы (2.32) следует, что $A - \frac{1}{1-\alpha} q(U_\alpha)$ коммутирует с U_1. Следовательно,

$$\begin{aligned} U_1^n A U_1^{-n} =& U_1^n \left(A - \frac{1}{1-\alpha} q(U_\alpha) \right) U_1^{-n} + U_1^n \cdot \frac{1}{1-\alpha} q(U_\alpha) U_1^{-n} \\ =& \left(A - \frac{1}{1-\alpha} q(U_\alpha) \right) + \frac{1}{1-\alpha} V^* U^n (V q(U_\alpha) V^*) U^{-n} V. \end{aligned}$$

По лемме средние Чезаро второго слагаемого в последнем выражении стремятся к $\frac{1}{1-\alpha} V^* q(U) V = \frac{1}{1-\alpha} q(U_1)$, и доказательство закончено. $\square$

Теперь покажем, что слабая сходимость сохраняется, если допустить некоторые разрывы. Ради простоты удобно предполагать, что у меры μ нет атомов. Это предположение не является слишком обременительным, так как на подпространстве собственных векторов всегда имеется сильная сходимость средних Чезаро, а также поскольку это ограничение накладывается при изучении сходимости функций $\mathcal{H}_r$.

Теорема 5. *Пусть μ – сингулярная вероятностная мера на единичной окружности, не имеющая точечных масс. Построим внутреннюю функцию θ, для которой μ является мерой Кларка σ_1. Пусть q – ограниченная функция, непрерывная на открытом множестве, для дополнения e которого выполняется условие $\mu e = 0$, и предположим, что либо $X = V T_q V^*$, где T_q – усечённый оператор Тёплица с символом q, либо $X = q(U_\alpha)$, где $\alpha \neq 1$, U_α – унитарный оператор, определённый по формуле (2.30). Тогда средние Чезаро последовательности операторов $(U^n X U^{-n})_{n \geqslant 0}$ стремятся к оператору $q(U)$ в слабой операторной топологии.*

Если допустить, что μ может иметь атомы, результат сохраняется с таким же заключением, как в лемме 2.18.

Доказательство. Возьмём произвольную функцию $h \in K_\theta$; достаточно установить сходимость средних Чезаро последовательности, элементы которой имеют вид

$$(U^n X U^{-n} h, h) = (V^* X V\, V^* U^{-n} h, V^* U^{-n} h) = \int q \cdot |V^* U^{-n} h|^2 \, d\nu,$$

к $(q(U)h, h) = \int q\, |h|^2 \, d\mu$, где ν – либо мера Лебега, если рассматривается случай усечённых операторов Тёплица, либо $\nu = \sigma_\alpha$ в случае, когда $X = q(U_\alpha)$. Средние Чезаро выражений $(U^n X U^{-n} h, h)$ записываются как $\int q\, w_n \, d\nu$, где w_n – средние Чезаро функций $|V^* U^{-n} h|$. Если u – непрерывная функция на всей единичной окружности, по лемме 2.18 имеем $\int u\, w_n \, d\nu \to \int u \, d\tilde{\mu}$, где $d\tilde{\mu} = |h|^2 \, d\mu$.

Из предположения следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует непрерывная функция u на единичной окружности со значениями на отрезке $[0, 1]$ такая, что $u = 1$ на e, $\tilde{\mu}(\{u \neq 0\}) < \epsilon$. Можно считать, что $|q| \leqslant 1$ везде. Запишем $q = q_1 + q_2$, где $q_1 = (1 - u)q$ – непрерывная функция, и потому $\int q_1\, w_n \, d\nu$ стремится к $\int q_1 \, d\tilde{\mu}$; функция $q_2 = uq$ удовлетворяет условию $|q_2| \leqslant u$, причём

$$\int u \, d\tilde{\mu} \leqslant \tilde{\mu}(\{u \neq 0\}) < \epsilon.$$

Имеем $\left|\int q_2\, w_n \, d\nu\right| \leqslant \int u\, w_n \, d\nu$; правая часть стремится к $\int u \, d\tilde{\mu} < \epsilon$. Таким образом, $\int q_2\, w_n \, d\nu$ становится малым при больших n, откуда легко следует нужная сходимость. □

2.3.9 Отсутствие сходимости

Теперь покажем, что иногда сходимости может не быть.

Теорема 6. *Пусть θ – внутренняя функция, причём $\theta(0) = 0$, и предположим, что $\mu = \sigma_1$ не имеет атомов; U – оператор умножения на z в $L^2(\mu)$. Тогда:*

1) *Существует усечённый оператор Тёплица T_q в K_θ с ограниченным символом q, для которого абелевы средние последовательности операторов*

$(U^n X U^{-n})$, где $X = VT_qV^*$, не имеют предела в слабой операторной топологии.

2) *Для любого комплексного числа $\alpha \neq 1$ с модулем 1 существуют функции $q \in L^\infty(\sigma_\alpha)$, для которых абелевы средние последовательности операторов $(U^n X U^{-n})$ при $X = Vq(U_\alpha)V^*$ не имеют предела в слабой операторной топологии.*

В обоих случаях коммутатор $XU - UX$ имеет вид (2.35) для некоторой функции $f \in L^2(\mu)$. Если сходимости нет, получается, что $f \in \mathcal{B}(\mu) \setminus \mathcal{C}(\mu)$.

Доказательство. Допустим, что, наоборот, абелевы средние всегда сходятся, и в частности абелевы средние чисел

$$(U^n X U^{-n} 1, 1) = (V^* X V\, V^* U^{-n} 1, V^* U^{-n} 1) = \int q \cdot |V^* U^{-n} 1|^2 \, d\nu$$

имеют предел для любой функции $u \in L^\infty(\nu)$, где ν – нормированная мера Лебега на единичной окружности в первом случае, и $\nu = \sigma_\alpha$ – во втором. Поскольку пространство $L^1(\nu)$ слабо секвенциально полно, абелевы средние функций $|V^* U^{-n} 1|^2$ тогда должны иметь предел $s \in L^1(\nu)$. С другой стороны, из леммы 2.18 вытекает, что для любой непрерывной функции q средние Чезаро чисел $(U^n X U^{-n} 1, 1)$ стремятся к $(q(U)1, 1) = \int q \, d\mu$. Следовательно, $\mu = s \cdot \nu$, но это невозможно, поскольку меры μ и ν взаимно сингулярны. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теперь обсудим конструкцию функций $f \in \mathcal{B}(\mu) \setminus \mathcal{C}(\mu)$. Функция f будет получена как функция, ассоциированная с усечённым оператором Тёплица, либо в терминах его символа, либо в терминах $q \in L^\infty(\sigma_\alpha)$ для оператора $q(U_\alpha)$; кроме того, наше построение начинается с объектов (например, весов w_n), формулы которых невозможно в простой форме выписать явно. Таким образом, было бы интересно найти более явные примеры. Тем не менее, представляется, что наша конструкция даёт некоторую информацию о самом эффекте, каким образом изучаемый предел может не существовать. Кроме того, в точности то же самое рассуждение применимо не только для метода суммирования по Абелю, но и для любого метода суммирования, для которого существует более сильный матричный метод суммирования, который также сильнее, чем метод Чезаро арифметических средних.

В доказательстве теоремы 6 строится последовательность неотрицательных функций $w_n \in L^1(\nu)$, которые являются усреднениями функций $|U_1^{-n}V^*1|^2$, где либо ν — мера Лебега, либо $\nu = \sigma_\alpha$ при некотором $\alpha \neq 1$. Тогда $\int w_n\,d\nu = 1$ для любого n, и $w_n\nu \to \mu$ $*$-слабо: $\int q w_n\,d\nu \to \int q\,d\mu$ для любой непрерывной функции q. Поскольку меры μ и ν взаимно сингулярны, существуют функции $q \in L^\infty(\nu)$, для которых сходимости нет. Возьмём усечённый оператор Тёплица с символом q в случае, когда ν – мера Лебега, или оператор $q(U_\alpha)$, если $\nu = \sigma_\alpha$. Тогда для ассоциированной с ним функции $f \in L^2(\mu)$ получаем $f \in \mathcal{B}(\mu) \setminus \mathcal{C}(\mu)$.

Чтобы понять поведение последовательности $(U^n X U^{-n}1, 1)$ в случае, когда сходимости нет, рассмотрим конструкцию соответствующей функции $q \in L^\infty(\nu)$. Из $*$-слабой сходимости мер $w_n\nu$ к μ и из того, что меры μ и ν взаимно сингулярны вытекает, что для любого $\epsilon > 0$ существует множество e, для которого $\nu(e) < \epsilon$, и индекс n такой, что $\int_e w_n\,d\nu \geqslant 1 - \epsilon$.

Несложно построить возрастающую последовательность натуральных чисел (n_k) и последовательность (e_k) попарно непересекающихся подмножеств единичной окружности, объединение которых даёт всю окружность, для которых

$$\int_{e_k} w_{n_k}\,d\nu \geqslant \frac{3}{4}.$$

Определим функцию q формулой

$$q = \sum_k (-1)^k \chi_{e_k},$$

где χ_{e_k} обозначает характеристическую функцию множества e_k. Имеем

$$\left|(-1)^k \int_{\mathbb{T}} q w_{n_k}\,d\nu - \int_{e_k} w_{n_k}\,d\nu\right| \leqslant \left|\int_{\mathbb{T}\setminus e_k} q w_{n_k}\,d\nu\right| \leqslant \int_{\mathbb{T}\setminus e_k} w_{n_k}\,d\nu \leqslant \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$(-1)^k \cdot \int_{\mathbb{T}} q w_{n_k}\,d\nu \geqslant \frac{1}{2},$$

и таким образом подпоследовательность $(\int qw_{n_k})$ не имеет предела.

Теперь сформулируем общий результат о существовании пар унитарных операторов, для которых слабый абелев волновой оператор не существует.

Теорема 7. *Для любого унитарного оператора $U : H \to H$, имеющего нетривиальную непрерывную сингулярную часть, существует унитарный оператор U_* в пространстве H такой, что $\operatorname{rank}(U_* - U) = 2$, и абелевы усреднения последовательности $U^n U_*^{-n}$, $n \geqslant 0$, не имеют предела в слабой операторной топологии.*

Приводимое здесь доказательство неконструктивно; представляется интересным найти конкретные примеры, когда абелевы волновые операторы не существуют.

Доказательство. Достаточно доказать теорему в случае, когда U – оператор умножения на z в $L^2(\mu)$, μ – вероятностная сингулярная мера на единичной окружности, не имеющая атомов. Зафиксируем $\alpha \neq 1$, построим унитарный оператор U_α в $L^2(\mu)$ по формуле (2.30), положим $\nu = \sigma_\alpha$. Возьмем $X = \gamma(U_\alpha)$, где $\gamma \in L^\infty(\nu)$. Поскольку $U - U_\alpha$ – оператор ранга 1, а операторы $\gamma(U_\alpha)$ и U_α коммутируют, имеем

$$\operatorname{rank}\left(\gamma(U_\alpha)U - U\gamma(U_\alpha)\right) \leqslant 2.$$

Если γ – функция, значения которой имеют модуль 1, то $X = \gamma(U_\alpha)$ – унитарный оператор в $L^2(\mu)$, для которого $\operatorname{rank}(XU - UX) \leqslant 2$. Для $U_* = XUX^{-1}$ имеем

$$U_* - U = (XU - UX)X^{-1},$$

следовательно, $\operatorname{rank}(U_* - U) \leqslant 2$, и усредненная сходимость последовательности $U^n U_*^{-n} = U^n X U^{-n} X^{-1}$ равносильна усредненной сходимости операторов $U^n X U^{-n}$.

Если имеется слабая сходимость абелевых средних последовательности $U^n \gamma(U_\alpha) U^{-n}$ для любой функции γ с модулем 1, то по линейности такая сходимость будет и для всех $\gamma \in L^\infty(\nu)$. Из теоремы 6 следует, что это неверно. $\square$

Как видно из доказательства теоремы, утверждение теоремы остаётся верным, если вместо метода абелевых средних взять любой метод суммирования, обладающий следующим свойством: *существует более сильный регулярный метод суммирования, у которого индекс усреднений пробегает множество всех натуральных чисел, и который также сильнее, чем метод Чезаро.*

Можно ожидать, что результат остается верным и без предположения о существовании метода суммирования, более сильного, чем метод Чезаро. Однако нас здесь интересует лишь то, что сходимость не достигается рассмотрением более сильных методов суммирования, и поэтому методы суммирования, существенно несравнимые с методом Чезаро, не рассматриваются.

Без предположения о существовании более сильного метода суммирования, у которого усреднения занумерованы числами натурального ряда, теорема неверна. Контрпримеры получаются с помощью банаховых пределов, которые однако невозможно предъявить конструктивно. Некоторый зазор остаётся неисследованным, он связан с конструктивными методами суммирования, которые не сводятся к последовательностям усреднений и требуют рассмотрения направленностей.

2.3.10 Случай пары самосопряжённых операторов

В этом параграфе рассматривается вопрос об усреднённых волновых операторах для пары самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве с сингулярной спектральной мерой. Сначала рассмотрим случай возмущения оператором ранга 1.

Предложение 2.20. *Если A, A_* – самосопряжённые операторы, разность которых имеет ранг 1, то у семейства операторов*

$$\epsilon \int_0^{1/\epsilon} \exp(itA_*)\, \exp(-itA)\, dt$$

существует слабый предел при $\epsilon \to 0$.

Доказательство. На абсолютно непрерывном подпространстве оператора A существует сильный предел самих операторов

$$\exp(itA_*)\exp(-itA)$$

при $t \to +\infty$ [20]. На сингулярном подпространстве (точнее, на сингулярной части приводящего подпространства, порождённого вектором, определяющим возмущение) при одномерном возмущении спектральные меры исходного и возмущенного операторов взаимно сингулярны [52], поэтому достаточно установить сходимость к нулевому оператору для приводящих частей самосопряжённых операторов со взаимно сингулярными спектральными мерами. Далее рассуждение опирается на ту же идею, что и доказательство предложения 2.22, и в нём уже не используется предположение о ранге возмущения. Если бы не было сходимости к нулю на каком-либо векторе h, то существовала бы последовательность $(\epsilon_n) \to 0$, по которой была бы слабая сходимость на векторе h к ненулевому элементу. Следовательно, была бы и слабая сходимость к ненулевому оператору, сплетающему рассматриваемые самосопряжённые операторы, на всём приводящем подпространстве, содержащем h. Последнее невозможно, если спектральные меры взаимно сингулярны. $\square$

В случае возмущений ранга 2 усреднённый предел может не существовать. Рассмотрим оператор усреднения, сопоставляющий функции f на полуоси $\{t > 0\}$ функцию от ϵ

$$\int_0^{+\infty} f(t)\cdot \epsilon w(\epsilon t)\,dt, \tag{2.44}$$

где w – вес на полуоси, $\int_0^{+\infty} w(t)\,dt = 1$. Можно взять веса

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

и

$$w(t) = \exp(-t),$$

аналогичные весам, определяющим средние Чезаро и Абеля для последовательностей; мы их также будем называть методами усреднения Чезаро и Абеля соответственно. Кроме методов Чезаро и Абеля существуют и другие естественные методы усреднения, соответствующие весам из класса W, состоящего из суммируемых функций, преобразование Фурье–Меллина

$$\int_0^{+\infty} w(t)\, t^{-ix}\, dt$$

которых не обращается в 0 ни при каком вещественном x. Согласно тауберовой теореме Винера, если f – ограниченная функция, то сходимость при $\epsilon \to 0$ средних для одного веса из класса W влечёт сходимость и для всех остальных весов из этого класса.

Пусть A – самосопряжённый оператор, не имеющий собственных векторов, спектральная мера которого сингулярна относительно меры Лебега, и пусть

$$A_p = A + p(\cdot, e)e$$

– его самосопряжённое возмущение оператором ранга 1, где $e \neq 0$ – некоторый вектор и $p \neq 0$ – вещественное число. Приводящие подпространства операторов A и A_p, порождённые вектором e, совпадают; будем считать, что они совпадают и со всем пространством. Тогда спектральные меры операторов A и A_p взаимно сингулярны [52]; обозначим их через μ и ν соответственно. Возьмём $u \in L^\infty(\nu)$, определим $X = u(A_p)$. Следующая лемма аналогична теореме 6.

Лемма 2.21. *Функцию $u \in L^\infty(\nu)$ можно выбрать так, чтобы предел операторов*

$$\int_0^{+\infty} \exp(itA)\, u(A_p)\, \exp(-itA)\, \epsilon w(\epsilon t)\, dt, \tag{2.45}$$

при $\epsilon \to 0$, где $w(t) = \exp(-t)$, не существовал в слабой операторной топологии.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна, и что предел существует для любой функции $u \in L^\infty(\nu)$. Тогда в частности получается сходимость интегралов

$$\int_0^\infty (\exp(itA)u(A_p)\exp(-itA)e, e)\,\epsilon w(\epsilon t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty (u(A_p)\exp(-itA)e,\, \exp(-itA)e)\,\epsilon w(\epsilon t)\,dt$$

для любой функции u, когда ϵ пробегает любую последовательность, стремящуюся к нулю. В спектральном представлении самосопряжённого оператора A_p скалярное произведение под интегралом переписывается как $\int u|s_t|^2\,d\nu$, где функции s_t $(t > 0)$ соответствуют векторам $\exp(-itA)e$. Таким образом, интегралы

$$\int_0^\infty \left(\int u|s_t|^2\,d\nu\right)\epsilon w(\epsilon t)\,dt = \int u\left(\int_0^\infty |s_t|^2\,\epsilon w(\epsilon t)\,dt\right)d\nu$$

сходятся при $\epsilon \to 0$ для всех $u \in L^\infty(\nu)$. В силу слабой секвенциальной полноты пространства $L^1(\nu)$ получаем, что предел равен $\int u\,s\,d\nu$ для некоторой функции $s \in L^1(\nu)$.

С другой стороны, если u – непрерывная функция на вещественной прямой (включая бесконечно удалённую точку), то рассуждения, аналогичные приведённым в доказательстве теоремы 6 (разность $u(A_p) - u(A)$ – компактный оператор, и усреднения операторов

$$\exp(itA)u(A_p)\exp(-itA)$$

стремятся к $u(A)$), приводят к тому, что этот предел равен $\int u\,d\mu$. Предположение о существовании предела для всех $u \in L^\infty(\nu)$ привело к соотношению $d\mu = s\,d\nu$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Теорема 8. *Пусть A – самосопряжённый оператор, не имеющий собственных векторов, спектральная мера которого сингулярна относительно меры Лебега. Тогда существует самосопряжённый оператор A_* такой, что разность $A_* - A$ имеет ранг 2 и предел операторов*

$$\int_0^{+\infty} \exp(itA_*)\,\exp(-itA)\,\epsilon w(\epsilon t)\,dt$$

при $\epsilon \to 0$*, где* $w(t) = \exp(-t)$*, не существует в слабой операторной топологии.*

Из доказательства будет видно, что результат может быть усилен следующим образом. Пусть, кроме оператора A, также дан самосопряжённый оператор $A_\diamond$ такой, что разность $A_\diamond - A$ имеет ранг 1. Оператор A_* может быть найден среди самосопряжённых возмущений ранга 1 оператора $A_\diamond$.

Доказательство. Можно считать, что оператор $A_\diamond$ совпадает с возмущением A_p оператора A из леммы при некотором $p \neq 0$. Заметим, что функцию u в лемме можно выбрать так, чтобы её значения по модулю были бы равны 1. Действительно, из сходимости для всех унимодулярных функций u по линейности следовала бы сходимость и для всех ограниченных функций u. Если $u \in L^\infty(\nu)$ – унимодулярная функция, то $X = u(A_p)$ – унитарный оператор, коммутирующий с A_p. Определим $h = X^* e$,

$$A_* = A_\diamond - p(\cdot, h)h = A + p(\cdot, e)e - p(\cdot, h)h.$$

Имеем

$$A_* = A_p - p(\cdot, h)h = X^* A_p X - p(\cdot, X^* e)X^* e = X^*(A_p - p(\cdot, e)e)X = X^* A X$$

и, таким образом,

$$\exp(itA_*) = X^* \exp(itA)X.$$

Операторы (2.45) не сходятся слабо при $\epsilon \to 0$ в силу выбора u, поэтому и требуемый предел не существует. □

2.4 Волновые операторы и унитарная эквивалентность

Конструкция волнового оператора состоит из пары унитарных (или самосопряжённых) операторов, действующих, в общем случае, в двух различных пространствах, и “оператора отождествления”, действующего из первого пространства во второе. Если $U_1 : H_1 \to H_1$, $U_2 : H_2 \to H_2$ – унитарные операторы, $X : H_1 \to H_2$ – ограниченный оператор, то волновой оператор есть предел последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$; также можно рассматривать усреднённые волновые операторы, соответствующие различным методам суммирования. В классической схеме теории рассеяния X – изометрический оператор; тогда волновой оператор Y, являющийся сильным пределом изометрических операторов, также изометричен и сплетает операторы U_1 и U_2: $YU_1 = U_2 Y$. Следовательно, сужение оператора U_2 на образ оператора Y оказывается унитарно эквивалентным оператору U_1.

Во многих более общих ситуациях сплетающее соотношение

$$YU_1 = U_2 Y$$

сохраняется, хотя Y может не быть изометрией; более того, Y может иметь ненулевое ядро. Рассмотрим полярное разложение $Y = V_Y \cdot |Y|$, где $|Y| = (Y^*Y)^{1/2}$, V_Y – частичная изометрия, то есть, оператор, действующий как изометрия на ортогональном дополнении к своему ядру. Тогда $V_Y U_1 = U_2 V_Y$, и сужение U_1 на ортогональное дополнение ядра оператора Y оказывается унитарнно эквивалентным сужению U_2 на замыкание образа Y.

Интересно взглянуть с этой точки зрения на ситуацию, когда усреднённый волновой оператор не существует. Наша основная мысль здесь состоит в том, что отсутствие предела, определяющего волновой оператор, тем не менее даёт нам нетривиальные сплетающие соотношения, что даёт, например, больше информации, чем случай, когда предел существует, но равен нулевому оператору.

В качестве непосредственного следствия предложения 2.10 о случае взаимно сингулярных мер получается следующий результат.

Теорема 9. *Пусть $U_1 : H_1 \to H_1$, $U_2 : H_2 \to H_2$ – унитарные операторы, $X : H_1 \to H_2$ – ограниченный оператор. Обозначим через C_n средние Чезаро последовательности $(U_2^n X U_1^{-n})$. Рассмотрим подпространства*

$$\{h \in H_1 : \ (C_n h, k) \to 0 \quad \forall k \in H_2\}$$

и

$$\{k \in H_2 : \ (C_n h, k) \to 0 \quad \forall h \in H_1\};$$

они приводят операторы U_1, U_2 соответственно. Тогда спектральные меры сужений операторов U_1, U_2 на ортогональные дополнения этих подпространств взаимно абсолютно непрерывны.

Доказательство. По лемме все части оператора U_1, спектральные меры которых сингулярны относительно спектральной меры оператора U_2, содержатся в подпространстве, на котором операторы C_n слабо стремятся к нулю. Чтобы получить аналогичный факт для частей U_2 со спектральными мерами, сингулярными относительно спектральной меры оператора U_1, нужно применить то же самое рассуждение к сопряжённым операторам. $\square$

Обратим внимание на то, что ситуация, описываемая теоремой, покрывает случаи, когда усреднённый волновой оператор не существует. Остаётся открытым интересный вопрос об условиях, обеспечивающих унитарную эквивалентность, которая означает, что спектральные меры не только взаимно абсолютно непрерывны, но также и функции, описывающие локальные спектральные кратности, совпадают. Отметим, что выше пары унитарных операторов с разностью ранга 2, для которых усреднённый волновой оператор не существует, строились так, что операторы в парах были унитарно эквивалентны один другому.

2.5 Преобразование Гильберта относительно сингулярной меры

В этой главе будет показано, что наша конструкция связана с преобразованием Гильберта относительно конечной сингулярной борелевской меры μ на единичной окружности, не имеющей точечных масс.

Пусть μ – конечная борелевская мера на единичной окружности и $f \in L^1(\mu)$. Если μ – мера Лебега, то стандартное определение преобразование Гильберта задаётся формулой

$$\int \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\mu(\xi),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Другое естественное описание того же самого значения задаётся пределом при $r \nearrow 1$ выражений

$$\int \frac{f(\xi)}{\xi - rz}\, d\mu(\xi).$$

Если же μ – сингулярная мера, то это выражение не может задавать интересующее нас отображение даже для бесконечно гладких функций f: для неотрицательной функции f значения $\int \frac{f(\xi)}{1-r\bar{\xi}z} d\mu(\xi)$ стремятся к бесконечности при $r \nearrow 1$ в μ-почти всех точках, в которых $f \neq 0$. Действительно, это вытекает из того, что вещественная часть этого выражения совпадает с преобразованием Пуассона меры $f\mu$ с точностью до аддитивной константы $\int f\, d\mu$. Поэтому естественно ввести регуляризацию следующего вида:

$$\int \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - rz}\, d\mu(\xi).$$

В связи с нашими предыдущими построениями нам будет удобнее работать с выражением вида

$$(\mathcal{H}_r f)(z) = \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z}\, d\mu(\xi),$$

сходимость которого равносильна сходимости предыдущего выражения.

Естественно считать предел функций $\mathcal{H}_r f$ *преобразованием Гильберта* функции f относительно меры μ, которое определено для всех функций f таких, что предел существует.

Преобразование Гильберта не является ограниченным оператором в $L^2(\mu)$; более того, оно даже незамыкаемо [10].

Если f – достаточно гладкая функция на единичной окружности (например, если f имеет непрерывную производную), то можно определить оператор X формулой

$$(Xh)(z) = \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - \bar{\xi}z} h(\xi) d\mu(\xi), \quad h \in L^2(\mu).$$

Пусть U – оператор умножения на независимую переменную в пространстве $H = L^2(\mu)$. Коммутатор операторов X и U тогда является оператором ранга 2:

$$XU - UX = (\cdot, \bar{z})f - (\cdot, \bar{z}\bar{f})1. \tag{2.46}$$

Напомним, что средние Абеля последовательности $(X - U^n X U^{-n})$ имеют вид

$$h \mapsto \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z} h(\xi) d\mu(\xi), \tag{2.47}$$

см. (2.26); при $h \equiv 1$ получается функция $\mathcal{H}_r f$. Если для некоторого ограниченного оператора X в $L^2(\mu)$ коммутатор имеет вид (2.46), то нормы операторов (2.47) равномерно ограничены по r:

$$\left\| \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z} h(\xi) d\mu(\xi) \right\|_{L^2(\mu)} \leqslant \mathrm{const} \cdot \|h\|_{L^2(\mu)}, \quad h \in L^2(\mu), \tag{2.48}$$

где константа зависит от f и не зависит от r. Обратное также верно.

Предложение 2.22. *Для функции $f \in L^2(\mu)$ существование оператора X в $L^2(\mu)$, для которого выполнено соотношение* (2.46)*, равносильно оценке* (2.48).

Доказательство. Возьмем $f \in L^2(\mu)$ и предположим, что выполнена оценка (2.48). Для $h \equiv 1$ найдем последовательность (r_n), стремящуюся к 1 и такую, что функции $\int \frac{f(z)-f(\xi)}{1-r_n\bar{\xi}z} d\mu(\xi)$ слабо сходятся в $L^2(\mu)$. Пусть X – оператор, отображающий функцию $h \in L^2(\mu)$ в слабый предел функций $\int \frac{f(z)-f(\xi)}{1-r_n\bar{\xi}z} h(\xi) d\mu(\xi)$, определенный на множестве тех h, для которых предел существует. По построению последовательности (r_n) значение $X1$ определено.

Для $r < 1$, $h \in L^2(\mu)$ имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z} \xi h(\xi) d\mu(\xi) - z \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z} h(\xi) d\mu(\xi) \\ = \int (f(z) - f(\xi)) \frac{\xi - z}{1 - r\bar{\xi}z} h(\xi) d\mu(\xi) \\ = \int (f(z) - f(\xi)) \xi h(\xi) d\mu(\xi) \\ - (1 - r) \cdot z \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z} h(\xi) d\mu(\xi). \end{aligned} \tag{2.49}$$

В силу оценки (2.48) последний интеграл задаёт функцию в $L^2(\mu)$, норма которой ограничена равномерно по r, следовательно, при $r \nearrow 1$ всё выражение стремится к $\int (f(z)-f(\xi))\xi h(\xi)\,d\mu(\xi) = (Kh)(z)$, где $K = (\cdot, \bar{z})f - (\cdot, \bar{z}\bar{f})1$. Отсюда видно, что вектор Xh опеределен тогда и только тогда, когда определен вектор $X(Uh)$, и, кроме того, $XU - UX = K$.

Таким образом значение Xz^n определено для всех целых n, и следовательно по линейности X задан на плотном подмножестве пространства $L^2(\mu)$. Из условия (2.48) вытекает, что тогда X – оператор, определенный на всем пространстве $L^2(\mu)$. □

Предложение 2.23. *Предположим, что X – оператор, удовлетворяющий соотношению (2.46) для некоторой функции $f \in L^2(\mu)$. Тогда абелевы средние последовательности $U^n X U^{-n}$ имеют предел (в сильной или слабой операторной топологии) тогда и только тогда, когда функции $\mathcal{H}_r f$ сходятся (по норме пространства $L^2(\mu)$ или слабо соответственно).*

Доказательство. Требуется доказать, что из сходимости функций $\mathcal{H}_r f$ следует сходимость операторов (2.47). Из оценки (2.48) и из сходимости выражений (2.49) следует, что множество всех h, для которых предел функций $\int \frac{f(z)-f(\xi)}{1-r\bar{\xi}z} h(\xi) d\mu(\xi)$ существует при $r \nearrow 1$, является замкнутым подпространством, приводящим унитарный оператор U. Таким образом, если установлена сходимость для функции h, тождественно равной 1, то сразу получается сходимость и для всех $h \in L^2(\mu)$. □

Таким образом, классы функций $\mathcal{B}(\mu)$ и $\mathcal{C}(\mu)$ допускают равносильные описания: класс $\mathcal{B}(\mu)$ состоит из функций $f \in L^2(\mu)$, для которых операторы (2.47) равномерно ограничены, т.е. имеет место оценка (2.48), а класс $\mathcal{C}(\mu)$ состоит из функций $f \in \mathcal{B}(\mu)$ таких, что функции $\mathcal{H}_r f$ слабо сходятся при $r \nearrow 1$.

Из теоремы 6 вытекает следующий результат.

Теорема 10. *Для любой сингулярной борелевской меры μ на единичной окружности, не имеющей атомов, классы $\mathcal{B}(\mu)$ и $\mathcal{C}(\mu)$ не совпадают. Иными* *словами, есть существуют функции $f \in L^2(\mu)$ такие, что выполнена оценка* (2.48) *(в частности, нормы функций $\mathcal{H}_r f$ в $L^2(\mu)$ равномерно ограничены по r), однако функции $\mathcal{H}_r f$ не имеют слабого предела в $L^2(\mu)$.*

Этот результат представляет собой только утверждение о существовании, тогда как было бы интересно описать некоторые классы или по крайней мере найти какие-либо конкретные примеры таких функций f.

Доказательство. Можно считать, что μ – вероятностная мера; построим внутреннюю функцию θ, для которой $\mu = \sigma_1$, т.е. выполнено соотношение

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\, d\mu(\xi),$$

Возьмем $\alpha \neq 1$, $|\alpha| = 1$, и положим $\nu = \sigma_\alpha$:

$$\frac{\alpha+\theta(z)}{\alpha-\theta(z)} = \int \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\, d\nu(\xi),$$

см. § 2.1.2.

По теореме 6 найдем функцию $\gamma \in L^\infty(\nu)$ такую, что абелевы средние операторов $U^n\gamma(U_\alpha)U^{-n}$ не имеют предела в слабой операторной топологии.

По формуле (2.30), так как оператор $\gamma(U_\alpha)$ коммутирует с U_α, получаем

$$\gamma(U_\alpha)U - U\gamma(U_\alpha) = (1-\alpha)\left((\cdot,\bar{z})\gamma(U_\alpha)1 - (\cdot,\gamma(U_\alpha)^*\bar{z})1\right).$$

Следовательно, для оператора $X = \frac{-1}{1-\alpha}\gamma(U_\alpha)U^*$ имеем

$$\begin{aligned} XU - UX =& \frac{-1}{1-\alpha}(\gamma(U_\alpha)U - U\gamma(U_\alpha))U^* \\ =&(\cdot, U\gamma(U_\alpha)^*\bar{z})1 - (\cdot,1)\gamma(U_\alpha)1 \\ =&(\cdot,g)1 - (\cdot,1)f, \end{aligned}$$

где $f = \gamma(U_\alpha)1$, $g = U\gamma(U_\alpha)^*\bar{z}$.

Равенство $f = \bar{g}$ сразу получается, например, из теоремы 3, согласно которой если X – оператор в $L^2(\mu)$ (с сингулярной мерой μ) такой, что коммутатор $XU - UX$ является конечной суммой $\sum(\cdot,\bar{u}_k)v_k$, то $\sum u_k v_k = 0$ μ-почти всюду. Таким образом получаем соотношение (2.46).

Теперь по предложению 2.22 имеем оценку (2.48), а по предложению 2.23 сходимости нет. □

В заключение этого параграфа обсудим вопрос о сходимости функнций $\mathcal{H}_r f$ для класса функций $f \in L^2(\mu)$, совпадающих μ-почти всюду с непрерывной функцией на единичной окружности.

Можно сформулировать достаточные условия для существования преобразования Гильберта в терминах непрерывности, однако не самой функции f, а ее унитарной пересадки в пространство $L^2(\sigma_\alpha)$. Р. Бессонов [10] построил меру μ и непрерывную функцию f, для которых оценка (2.48) не выполняется. Также в статье [10] вопрос о волновых операторах для случая коммутатора вида (2.46) сведен с помощью теоремы Лузина к случаю, когда f – непрерывная функция. Из результатов статьи [10] следует, что если бы для любой сингулярной меры μ и для любой непрерывной функции f, удовлетворяющей оценке (2.48), была бы сходимость функций $\mathcal{H}_r f$, то волновые операторы существовали бы в общем случае коммутаторов ранга 2; поскольку наш основной результат опровергает это заключение, существуют сингулярные меры μ и непрерывные функции f такие, что имеет место оценка (2.48), но функции $\mathcal{H}_r f$ не сходятся в $L^2(\mu)$. Естественно предположить, что *для любой* конкретной меры μ непрерывность функции f не влечет ни оценку (2.48), ни слабую сходимость функций $\mathcal{H}_r f$ в случае, когда оценка (2.48) имеет место. Также есть основания предполагать, что непрерывность функции f не является необходимым условием для сходимости операторов (2.47), т.е. что существуют разрывные функции f, для которых операторы (2.47) имеют предел.

Сформулируем ряд предположений.

1. *Для любой сингулярной меры μ на единичной окружности, не имеющей атомов, существует непрерывная функция f на единичной окружности такая, что нормы функций $\mathcal{H}_r f$ не являются равномерно ограниченными по r.*

2. *Для любой сингулярной меры μ на единичной окружности, не имеющей атомов, существует непрерывная функция f на единичной окружности, для которой имеет место оценка* (2.48), *но функции $\mathcal{H}_r f$ не имеют предела*

в слабой топологии.

3. *Для любой сингулярной меры μ на единичной окружности, не имеющей атомов, существует функция $f \in L^2(\mu)$, не совпадающая μ-почти всюду с непрерывной функцией на единичной окружности и такая, что операторы (2.47) имеют сильный предел при $r \nearrow 1$.*

2.6 Граничное поведение функций из K_θ

Как и выше, θ – внутренняя функция, но также рассматриваются и случаи, когда $\theta(0) \neq 0$; $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Меры Кларка σ_α определены формулой

$$\frac{\alpha + \theta(z)}{\alpha - \theta(z)} = \int \frac{1 + \bar{\xi} z}{1 - \bar{\xi} z}\, d\sigma_\alpha(\xi),$$

см. §2.1.2. Для функции $\varphi \in K_\theta$ определим g_r формулой

$$g_r(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(rz)}{\theta(z) - \theta(rz)}. \tag{2.50}$$

Если $\varphi = f$ μ-почти везде, по формуле (2.31) для μ-почти всех z имеем

$$\begin{aligned} g_r(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(rz)}{1 - \theta(rz)} &= \varphi(z) \cdot \frac{1}{1 - \theta(rz)} - \frac{\varphi(rz)}{1 - \theta(rz)} \\ = f(z) \cdot \int \frac{d\mu(\xi)}{1 - \bar{\xi} \cdot rz} &- \int \frac{f(\xi) d\mu(\xi)}{1 - \bar{\xi} \cdot rz} = (\mathcal{H}_r f)(z), \end{aligned}$$

что по формуле (2.38) равно $B_r h$ при $h \equiv 1$:

$$g_r = B_r 1. \tag{2.51}$$

В этом параграфе изучаются следствия совпадения функций g_r и $\mathcal{H}_r f$.

Теорема 11. *Возьмём функцию $\varphi \in K_\theta$ и различные комплексные числа α_1, α_2 с модулем 1. Предположим, что φ совпадает с ограниченной функцией q σ_{α_1}-почти всюду. Тогда нормы g_r в $L^2(\sigma_{\alpha_2})$ ограничены равномерно по r.*

Имеем следующее достаточное условие для того, чтобы g_r имела предел в точке единичной окружности.

Теорема 12. *В условиях теоремы 11, если σ_{α_2} имеет атом в точке ω, то $g_r(\omega)$ имеет предел при $r \nearrow 1$,*

$$\lim g_r(\omega) = -\sigma_{\alpha_2}(\{\omega\})(\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1) \int \frac{q(z)d\sigma_{\alpha_1}(z)}{|1-\bar{z}\omega|^2} - \bar{\alpha}_1 \int \frac{q(z)d\sigma_{\alpha_1}(z)}{1-\bar{z}\omega}. \qquad (2.52)$$

Сходимость интегралов в (2.52) обеспечивается свойством

$$\int \frac{d\sigma_\alpha(z)}{|1-\bar{z}\omega|^2} < \infty,$$

см. предложение 4 статьи [1]; для замкнутости изложения оно будет проверено ниже при доказательстве теоремы.

Поскольку нормы g_r в $L^2(\sigma_{\alpha_2})$ ограничены по теореме 11, из поточечной сходимости, установленной в теореме 12, вытекает L^2-сходимость на части пространства $L^2(\sigma_{\alpha_2})$, соответствующей точечным массам меры σ_{α_2}. Чтобы получить сходимость на всём $L^2(\sigma_{\alpha_2})$, заменим ограниченность в условии теоремы 11 на непрерывность.

Теорема 13. *При условиях теоремы 11, если φ совпадает σ_{α_1}-почти всюду с непрерывной функцией q, то предел функций g_r при $r \nearrow 1$ существует в $L^2(\sigma_{\alpha_2})$ и совпадает с функцией $\frac{\varphi - q}{\alpha_2 - \alpha_1}$ почти всюду относительно непрерывной части меры σ_{α_2}.*

Можно сравнить этот результат с формулой (2.1) из [59], где про функцию на вещественной прямой были сделаны более сильные предположения. Обе формулы связывают продолжение по непрерывности, преобразование Гильберта и отображение, сопоставляющее граничным значениям функции из K_θ, соответствующим мере σ_{α_1}, граничные значения той же функции σ_{α_2}-почти всюду.

Свойство непрерывности функции q может быть ослаблено в свете теоремы 5.

Если $\alpha_1 = \alpha_2$, утверждение теоремы 13 перестаёт быть верным; более того, даже неверно заключение теоремы 11. А именно, как показывает пример из [10], φ может совпадать с непрерывной функцией σ_1-почти всюду, но нормы g_r в $L^2(\sigma_1)$ при этом неограничены.

По-видимому, если точка ω, для которой $\sigma_{\alpha_2}(\omega) > 0$, лежит в носителе меры σ_{α_1}, предел $g_r(\omega)$ существует по теореме 12, но его значение может не совпадать со значением, вычисляемым согласно теореме 13.

Без потери общности предположим, что $\alpha_2 = 1$. Действительно, в противном случае рассмотрим внутреннюю функцию $\bar{\alpha}_2\theta$ вместо θ и число $\alpha = \alpha_1\bar{\alpha}_2$ с модулем 1 вместо α_1. Таким образом, зафиксируем α, $\alpha \neq 1$; будем использовать обозначение $\mu = \sigma_1$; для μ-почти всех z имеем $\theta(z) = 1$. Угловая граничная функция функции φ на подмножестве окружности, на котором $\theta = 1$, обозначается через f: $f \in L^2(\mu)$, $\varphi = f$ μ-почти везде.

Доказательство теоремы 11. Случай $\theta(0) = 0$. Тогда $\mu = \sigma_1$ – вероятностная мера. Пусть $\varphi \in K_\theta$ совпадает σ_α-почти всюду с функцией $q \in L^\infty(\sigma_\alpha)$. Согласно формуле (2.51) имеем $g_r = B_r 1$. По построению имеем $\|B_r\| \leqslant 2\,\|X\|$, и потому нормы функций g_r в $L^2(\mu)$ ограничены равномерно по r.

Случай $\theta(0) \neq 0$ будет сведён к случаю $\theta(0) = 0$. Положим $\lambda = \theta(0)$, определим $\theta_\lambda = \frac{1-\bar{\lambda}}{1-\lambda} \cdot \frac{\theta-\lambda}{1-\bar{\lambda}\theta}$. Тогда $\theta_\lambda(0) = 0$, и можно проверить, что

$$\frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda|^2} \cdot \frac{1+\theta_\lambda}{1-\theta_\lambda} + 2i\frac{\operatorname{Im}\lambda}{|1-\lambda|^2}.$$

Следовательно, если взять вещественные части, то видно, что мера σ_1 функции θ и соответствующая мера функции θ_λ отличаются лишь постоянным множителем $\frac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda|^2}$.

Возьмём $\varphi \in K_\theta$ и определим $\varphi_\lambda = \frac{\varphi}{1-\bar{\lambda}\theta} \in K_{\theta_\lambda}$. Значения функции φ_λ σ_α-почти везде отличаются от значений φ на множитель $1 - \bar{\lambda}\alpha$, поэтому предположение о том, что φ совпадает σ_α-почти всюду с ограниченной функцией равносильно тому жа самому свойству функции φ_λ. Уже доказанная часть теоремы тогда даёт ограниченность норм функций $\frac{\varphi_\lambda-(\varphi_\lambda)_r}{1-(\theta_\lambda)_r}$ в $L^2(\mu)$, $\mu = \sigma_1$. В μ-почти всех точках имеем $\theta = 1$, и

$$\frac{\varphi_\lambda - (\varphi_\lambda)_r}{1-(\theta_\lambda)_r} = \frac{\frac{\varphi}{1-\bar{\lambda}} - \frac{\varphi_r}{1-\bar{\lambda}\theta_r}}{1 - \frac{1-\bar{\lambda}}{1-\lambda} \cdot \frac{\theta_r-\lambda}{1-\bar{\lambda}\theta_r}} = \frac{1-\lambda}{1-|\lambda|^2} \cdot \frac{\varphi-\varphi_r}{1-\theta_r} + \frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{1-|\lambda|^2} \cdot \varphi.$$

По этому соотношению нормы функций $g_r = \frac{\varphi - \varphi_r}{1-\theta_r}$ в $L^2(\mu)$ также ограничены.

$\square$

Доказательство теоремы 12. Положим $\alpha = \alpha_1 \bar{\alpha}_2$ и рассмотрим пару $\alpha, 1$ вместо α_1, α_2. Допустим, что $\sigma_1(\{\omega\}) > 0$, и что для $\varphi \in K_\theta$ $\varphi = q$ σ_α-почти всюду, $q \in L^\infty(\sigma_\alpha)$, $\alpha \neq 1$. Требуется доказать, что $g_r(\omega)$ стремится к пределу (2.52) при $r \nearrow 1$.

Если λ – точка из открытого единичного круга, то воспроизводящее ядро k_λ для пространства K_θ имеет вид

$$k_\lambda(z) = \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{1 - \bar{\lambda} z};$$

для $\varphi \in K_\theta$ имеем $\varphi(\lambda) = (\varphi, k_\lambda)$.

Воспользуемся результатами [39, 40], переписанными в терминах воспроизводящих ядер. То, что $\sigma_1(\{\omega\}) > 0$, означает, что функционал $\varphi \mapsto \varphi(\omega)$ ограничен на K_θ. Тогда воспроизводящее ядро k_λ также корректно определено и при $\lambda = \omega$ по той же самой формуле, и $k_\omega \in K_\theta$. Поэтому граничная функция функции k_ω принадлежит $L^2(\sigma_\alpha)$, а именно, $\int |k_\omega(z)|^2 d\sigma_\alpha < \infty$. Поскольку $\theta(z) = \alpha \neq 1$ σ_α-почти везде и $\theta(\omega) = 1$, для σ_α-почти всех z имеем $k_\omega(z) = \frac{1-\alpha}{1-\bar{\omega} z}$, и, таким образом,

$$\int \frac{d\sigma_\alpha(z)}{|1 - \bar{\omega} z|^2} < \infty. \tag{2.53}$$

Теперь видно, что интегралы в (2.52) сходятся.

Кроме того известно, что тогда радиальная производная

$$\theta'(\omega) = \lim \frac{\theta(\omega) - \theta(r\omega)}{\omega - r\omega}$$

существует и

$$\theta'(\omega) = \frac{1}{\omega \sigma_1(\{\omega\})} \neq 0.$$

Значит, существование предела g_r в точке ω равносильно существованию радиальной производной у функции φ в точке ω, и

$$\lim_{r \nearrow 1} g_r(\omega) = \frac{\varphi'(\omega)}{\theta'(\omega)} = \omega \sigma_1(\{\omega\}) \varphi'(\omega).$$

(Как вытекает из [39, 40], факт, что $\varphi'(\omega)$ существует для всех $\varphi \in K_\theta$ сильнее, чем существование значений в точке ω. Следовательно, в общем случае, если $\sigma_1(\{\omega\}) > 0$, могут быть функции $\varphi \in K_\theta$, у которых производная $\varphi'(\omega)$ не существует.)

Имеем

$$\omega\varphi'(\omega) = \omega \cdot \lim_{r\nearrow 1} \frac{\varphi(\omega) - \varphi(r\omega)}{\omega - r\omega} = \lim_{r\nearrow 1} \frac{(\varphi, k_\omega) - (\varphi, k_{r\omega})}{1-r}.$$

Поскольку вложение $K_\theta \hookrightarrow L^2(\sigma_\alpha)$ является унитарным оператором, скалярное произведение функций из K_θ переписывается как скалярное произведение в $L^2(\sigma_\alpha)$:

$$\omega\varphi'(\omega) = \lim_{r\nearrow 1} \frac{\int \varphi \bar{k}_\omega d\sigma_\alpha - \int \varphi \bar{k}_{r\omega} d\sigma_\alpha}{1-r} = \lim_{r\nearrow 1} \int q \cdot \frac{\bar{k}_\omega - \bar{k}_{r\omega}}{1-r}\, d\sigma_\alpha. \tag{2.54}$$

Для σ_α-почти всех z имеем $\theta(z) = \alpha$; поэтому по формулам воспроизводящих ядер в таких точках получаем $k_\omega(z) = \frac{1-\alpha}{1-\bar{\omega}z}$, $k_{r\omega}(z) = \frac{1-\overline{\theta(r\omega)}\alpha}{1-r\bar{\omega}z}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{k_\omega(z)} - \overline{k_{r\omega}(z)}}{1-r} &= \frac{1}{1-r} \cdot \left(\frac{1-\bar{\alpha}}{1-\omega\bar{z}} - \frac{1-\theta(r\omega)\bar{\alpha}}{1-r\omega\bar{z}} \right) \\ &= -\frac{1-\bar{\alpha}}{(1-\bar{\omega}z)(1-r\omega\bar{z})} - \frac{1-\theta(r\omega)}{1-r} \cdot \frac{\bar{\alpha}}{1-r\omega\bar{z}}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Функция θ имеет радиальную производную в точке ω, тем самым функция $\frac{1-\theta(r\omega)}{1-r}$ ограничена и абсолютная величина правой части (2.55) оценивается через $\frac{const}{|1-\bar{\omega}z|^2}$ равномерно по r. Согласно (2.53), для сходимости интеграла в (2.54) достаточно установить сходимость $\frac{\bar{k}_\omega - \bar{k}_{r\omega}}{1-r}$ σ_α-почти всюду. Таким образом,

$$\lim_{r\nearrow 1} g_r(\omega) = \sigma_1(\{\omega\}) \cdot \omega\varphi'(\omega) = \sigma_1(\{\omega\}) \cdot \int q \cdot \lim_{r\nearrow 1} \frac{\bar{k}_\omega - \bar{k}_{r\omega}}{1-r}\, d\sigma_\alpha. \tag{2.56}$$

Из (2.55) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{r\nearrow 1} \frac{\overline{k_\omega(z)} - \overline{k_{r\omega}(z)}}{1-r} &= -\frac{1-\bar{\alpha}}{(1-\bar{\omega}z)(1-\omega\bar{z})} - \omega\theta'(\omega) \cdot \frac{\bar{\alpha}}{1-\omega\bar{z}} \\ &= -\frac{1-\bar{\alpha}}{|1-\bar{\omega}z|^2} - \frac{\bar{\alpha}}{\sigma_1(\{\omega\}) \cdot (1-\omega\bar{z})} \end{aligned}$$

для σ_α-почти всех z. Если подставить это в (2.56), получится (2.52) при $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1$. $\square$

Доказательство теоремы 13. Как и выше, предположим, что $\alpha_2 = 1$, к чему общий случай сводится рассмотрением $\alpha = \alpha_1 \bar{\alpha}_2$ вместо α_1. Сначала рассмотрим случай $\theta(0) = 0$.

Пусть $\varphi \in K_\theta$, $\mu = \sigma_1$, и пусть $f \in L^2(\mu)$ – граничная функция функции φ: $\varphi = f$ μ-почти всюду. Функции g_r определены формулой (2.50), и g_r совпадают с $\mathcal{H}_r f$ как элементы пространства $L^2(\mu)$. По предположению функция $\varphi \in K_\theta$ совпадает σ_α-почти везде с непрерывной функцией q при некотором $\alpha \neq 1$. Требуется доказать, что g_r имеют предел в $L^2(\mu)$, и что

$$g_r \to \frac{f - q}{1 - \alpha} \quad \text{в } L^2(\mu_c) \quad \text{при} \quad r \nearrow 1,$$

где μ_c – непрерывная часть меры μ. Сходимость на атомической части μ есть следствие теоремы 12, если принять во внимание теорему 11, по которой нормы g_r в $L^2(\mu)$ ограничены.

По теореме 2.18 средние Чезаро, а значит и абелевы средние операторов $U_1^n \frac{q(U_\alpha)}{1-\alpha} U_1^{-n}$ имеют сильный предел, который на ортогональном дополнении K ко всем собственным векторам U_1 совпадает с $\frac{q(U_1)}{1-\alpha}$. Тем самым предел операторов B_r, определённых в параграфе 2.3.6, существует, и на K совпадает с $X - \frac{q(U)}{1-\alpha}$. Применяя эту сходимость к вектору $h \equiv 1 \in L^2(\mu)$ и используя то, что $B_r 1 = g_r$, получаем, что функции g_r имеют предел, который μ_c-почти всюду совпадает с $\left(X - \frac{q(U)}{1-\alpha}\right) 1$. Это, в свою очередь, совпадает с граничными значениями μ_c-почти всюду (напомним, что $\mu = \sigma_1$) функции $\left(\frac{q(U_\alpha)}{1-\alpha} - \frac{q(U_1)}{1-\alpha}\right) 1 \in K_\theta$. Сравнивая граничные значения σ_α-почти везде, получаем, что $q(U_\alpha)1 = \varphi$. Поскольку $\varphi = f$ и $q(U_1)1 = q$ μ-почти всюду, заключаем, что $\lim_{r \nearrow 1} g_r = \frac{f-q}{1-\alpha}$ μ_c-почти везде, что и требовалось.

Редукция случая $\theta(0) \neq 0$ к случаю $\theta(0) = 0$ повторяет такую же редукцию в доказательстве теоремы 11. $\square$

3 Спектральный анализ почти унитарных операторов

Глава посвящена изучению спектральных свойств операторов, близких к унитарным. Близость рассматриваемых операторов к унитарным можно выразить следующим свойством, определяющим класс так называемых почти унитарных операторов: оператор является почти унитарным, если он является ядерным (т.е. класса $\mathfrak{S}_1$) возмущением некоторого унитарного оператора, и его спектр не заполняет единичный круг (как известно, в таком случае спектр внутри круга представляет собой последовательность точек λ_n, удовлетворяющую условию Бляшке $\sum(1 - |\lambda_n|) < \infty$).

3.1 Функциональные модели одномерных возмущений унитарных операторов

Одной из типовых задач теории функциональных моделей является вопрос о построении удобной для работы функциональной модели заданного оператора, т.е. оператора в некотором пространстве стандартного вида, унитарно эквивалентного исходному оператору. В отличие от ставшей классической теории функциональных моделей для сжатий, для случая произвольных операторов (т.е. не обязательно являющихся сжатиями) функциональная модель универсального вида не построена. Для исследования вопроса о стабильности абсолютно непрерывного спектра [61] применялся подход С.Н. Набоко [25, 26], основанный на записи изучаемого оператора как возмущения некоторого сжимающего (или диссипативного) оператора через функциональную модель последнего. Предлагаемый нами подход основан на модельных операторах вида

$$f \mapsto zf - (zf)(\infty),$$

действующих в пространствах функций, аналитических в областях, содержащих бесконечно удалённую точку, причём предполагается, что функции –

элементы пространства имеют нулевой предел на бесконечности, а модельный оператор действует как умножение на независимую переменную и последующее вычитание константы, обеспечивающее принадлежность получающейся функции модельному пространству. Если элементы модельного пространства представляются как интегралы Коши мер или распределений, то действию модельного оператора соответствует умножение этих мер или распределений на независимую переменную.

Для операторов, близких к унитарным, оказывается возможным построение таких моделей в пространствах функций, мероморфных везде, кроме некоторого подмножества единичной окружности. Результаты, представленные в диссертации, касаются возмущений унитарных операторов операторами ранга 1. Для возмущений высшего ранга требуется рассмотрение пространств, состоящих из аналитических векторнозначных функций; соответствующее обобщение представляется достаточно стандартным.

3.1.1 Случай сингулярного спектра

Теорема 14. *Пусть U – унитарный оператор со спектральной мерой, сингулярной относительно меры Лебега. Пусть x, y – векторы, причем порождённое ими подпространство, приводящее U, совпадает со всем пространством; и пусть $T = U + (\cdot, x)y$. Тогда существуют функции $\varphi, \psi \in H^2$ со следующими свойствами:*

– $|\varphi| = |\psi|$ *почти всюду на единичной окружности;*

– $\psi(0) \neq 0$*;*

– *функция θ, определённая на окружности как $\theta = \varphi/\bar{\psi}$, является внутренней, причём $\theta(0) = 0$;*

и при этом оператор T унитарно эквивалентен оператору вида

$$f \mapsto zf - (zf)(\infty)$$

в модельном пространстве $\frac{H^2}{\varphi} \cap \frac{H^2_-}{\bar{\psi}}$ с нормой $\|f\| = \|f\varphi\|_{H^2}$.

Отметим, что функции построенного модельного пространства мероморфны внутри круга и вне его, поскольку принадлежат пространствам $\frac{H^2}{\varphi}$ и $\frac{H^2_-}{\bar\psi}$ соответственно, а функции последнего пространства естественным образом продолжаются во внешность круга и имеют нулевой предел на бесконечности. Действие модельного оператора заключается в умножении на независимую переменную, в результате чего у функций, получающихся таким образом из элементов модельного пространства, существование предела на бесконечности сохраняется, однако он уже может оказаться ненулевым; и последующим вычитанием постоянной функции, определяемым пределом на бесконечности, после чего значение в бесконечности опять станет нулевым и получающаяся функция попадёт в модельное пространство.

Если сделать преобразование $f \mapsto \frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right)$, то получится пространство аналогичного вида, в котором функции φ и ψ поменяются местами, а оператору $f \mapsto zf - (zf)_\infty$ будет соответствовать оператор обратного сдвига $f \mapsto \frac{f - f(0)}{z}$. Таким образом, как следствие получаем, что одномерные возмущения сингулярных унитарных операторов унитарно эквивалентны сужениям операторов обратного сдвига в H^2/φ на инвариантные подпространства.

Резольвента построенного модельного оператора имеет вид

$$g \mapsto \frac{g - g(\lambda)}{z - \lambda};$$

точечный спектр состоит из тех λ, для которых соответствующая собственная функция $\frac{1}{z-\lambda}$ принадлежит пространству.

Если $\varphi = \theta$ – внутренняя функция, $\psi = 1$, то получается сжатие с характеристической функцией θ.

Доказательство. Сначала покажем, что модельный оператор, о котором идёт речь в теореме, унитарно эквивалентен оператору вида $U_1 + (\cdot, \bar z\theta)\left(\theta - 1 - \varphi/\overline{\psi(0)}\right)$ в пространстве K_θ, где U_1 – унитарный оператор, определённый формулой

$$U_1 h = \begin{cases} zh, & (h, \bar z\theta) = 0 \\ 1, & h = \bar z\theta, \end{cases}$$

и тем самым унитарно эквивалентный оператору умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$, где $\mu = \sigma_1$ – мера Кларка функции θ. Действительно, оператор умножения на φ унитарно отображает модельное пространство из формулировки теоремы на K_θ. Пусть $h \in K_\theta$. Тогда $h/\varphi = \bar{\theta}h/\bar{\psi}$, причём $\bar{\theta}h \in H^2_-$. Поэтому функция $z\bar{\theta}h$ продолжается аналитически во внешность круга и имеет предел на бесконечности, равный $(z\bar{\theta}h, 1) = (h, \bar{z}\theta)$; предел аналитического продолжения функции $\bar{\psi}$ на бесконечности равен $\overline{\psi(0)}$. Следовательно, модельный оператор отображает функцию $\frac{h}{\varphi}$ в

$$\frac{zh}{\varphi} - \left(\frac{zh}{\varphi}\right)_\infty = \frac{zh}{\varphi} - \frac{(h, \bar{z}\theta)}{\overline{\psi(0)}},$$

и, возвращаясь обратно в K_θ с помощью оператора умножения на φ, получаем, что функция h отображается в $zh - (h, \bar{z}\theta)\varphi/\overline{\psi(0)}$. Теперь требуемое утверждение сразу же получается при раздельном рассмотрении случаев $(h, \bar{z}\theta) = 0$ и $h = \bar{z}\theta$.

Предположим, что x – циклический вектор оператора U, то есть наименьшее подпространство, приводящее U и содержащее x, совпадает со всем пространством. Не умаляя общности, можно считать, что $\|x\| = 1$. По спектральной теореме существует мера μ такая, что оператор U унитарно эквивалентен оператору умножения на z в $L^2(\mu)$, причём соответствие пространств таково, что вектор x переходит в функцию $\bar{z}$. Построим внутреннюю функцию θ, для которой μ является мерой Кларка σ_1 (поскольку $\|x\| = 1$, мера μ вероятностная и тем самым $\theta(0) = 0$) и отождествим исходное пространство с K_θ естественным образом. Вектору x соответствует функция $\bar{z}\theta \in K_\theta$, и обозначим через η функцию, соответствующую вектору y. Положим $\varphi = \theta - 1 - \eta$, $\psi = 1 - \theta - \theta\eta = \theta\bar{\varphi}$ (имеем $\psi(0) = 1$). Тогда исходный оператор унитарно эквивалентен оператору $U_1 + (\cdot, \bar{z}\theta)\eta$ в K_θ, который, в свою очередь, унитарно эквивалентен построенному модельному оператору.

Общий случай теоремы будет сведён к уже доказанному. Можно считать, что $y \neq 0$ и $\|y\| = 1$. Обозначим через H_y наименьшее подпространство, приводящее оператор U и содержащее y. Таким же образом, как выше, построим вспомогательную внутреннюю функцию θ по вектору $U^*y \in H_y$. Пусть $Y : H_y \to K_\theta$ – оператор, осуществляющий унитарную эквивалентность сужения U на H_y и U_1, причём $Yy = 1$. Возьмём комплексное число α с модулем 1. Имеем

$$T = U + (\cdot, x)y = U_\alpha - (\cdot, (1-\bar{\alpha})U^*y + x)y,$$

где $U_\alpha = U - (\cdot, (1-\bar{\alpha})U^*y)y$. Для сведения к уже рассмотренному случаю, когда x – циклический вектор, достаточно показать, что число α можно выбрать так, чтобы вектор $x_\alpha = (1-\bar{\alpha})U^*y + x$ был бы циклическим для оператора U_α. Пусть $\kappa \in K_\theta$ – образ при пересадке в K_θ ортогональной проекции вектора x_α на H_y. Тогда требуемая цикличность равносильна соотношению $\kappa + (1-\bar{\alpha})\bar{z}\theta \neq 0$ σ_α-почти всюду, или, иначе, $\gamma \neq 0$ σ_α-почти всюду, где $\gamma = 1 - \theta - z\kappa$. Поскольку $\gamma \in H^2$ и $\gamma(0) = 1$, множество, на котором $\gamma = 0$, имеет нулевую меру Лебега. Значит, это множество имеет нулевую меру для почти всех мер σ_α; нам для завершения доказательства достаточно взять одну из них. $\square$

3.1.2 Общий случай одномерных возмущений унитарных операторов: запись модели для сжатий

Предыдущий результат допускает естественное обобщение, если отказаться от ограничения о том, что спектральная мера возмущаемого унитарного оператора сингулярна. В таком случае граничные значения функций изнутри и извне круга уже могут не совпадать, а выражение для нормы в модельном пространстве H теперь дополнительно содержит выражение, определяющее некоторый скачок на окружности.

Для $f \in H$ потребуем, чтобы ее сужение f_- на внешность круга было функцией из H^2_-, сужение f_+ на внутренность круга было функцией класса Смирнова $\mathcal{N}_+$, т.е. при умножении на некоторую внешнюю функцию оно становилось бы ограниченным. На скачок $f_+ - f_-$ наложим ограничение, чтобы он принадлежал пространству $L^2(w\,dm)$, где m – нормированная мера Лебега на окружности, w – некоторый вес такой, что отрицательная часть функции

$\log w$ суммируема (допускается, чтобы $w = +\infty$ на множестве положительной меры – на этом множестве функции из H не имеют скачка). Норму определим по формуле

$$\|f\|^2 = \|f_-\|^2_{L^2} + \|f_+ - f_-\|^2_{L^2(wdm)}. \tag{3.1}$$

Пусть θ – внешняя функция такая, что $|\theta|^2 = \frac{w}{1+w}$. Докажем, что тогда оператор, определенный формулой $f \mapsto zf - (zf)_\infty$, имеет характеристическую функцию θ. Для этого достаточно показать, что он унитарно эквивалентен модельному оператору M_θ с характеристической функцией θ, который строится следующим образом. Мы приведем бескоординатную версию функциональной модели [65].

Конструкция определяется двумя изометрическими вложениями π, π_* пространства L^2 на единичной окружности в некоторое гильбертово пространство $\mathcal{H}$, причем сумма образов операторов π, π_* плотна в $\mathcal{H}$, а оператор $\pi_*^*\pi$ действует в L^2 как оператор умножения на θ. В пространстве $\mathcal{H}$ действует унитарный оператор U, действие которого согласовано с вложениями π, π_*:

$$U(\pi a + \pi_* a) = \pi z a + \pi_* z a_*, \quad a,\ a_* \in L^2.$$

Модельные пространство и оператор определяются по формулам:

$$K_\theta = \left\{h \in \mathcal{H} : \pi_*^* h \in H^2,\ \pi^* h \in H^2_-\right\}, \quad M_\theta h = P_\theta U h,$$

где P_θ – ортопроектор в $\mathcal{H}$ на K_θ. Определим $\Delta = (1-|\theta|^2)^{1/2}$, $e = \{\xi : |\xi| = 1, \Delta(\xi) \neq 0\}$. Для классической модели С.-Надя, Фойаша имеют место следующие формулы:

$$\mathcal{H} = L^2 \oplus L^2(e), \quad \pi = \begin{pmatrix} \theta \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad \pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определим оператор Y из пространства $\mathcal{H}$ в некоторое пространство пар функций: для $h \in \mathcal{H}$ положим

$$Yh = \left[\theta^{-1}\pi_*^* h,\, \pi^* h\right].$$

(Для удобства будем использовать квадратные скобки для обозначения пар функций.) Если ввести нормировку для пар $[f_+, f_-]$ по формуле (3.1), то оператор Y окажется изометрическим. Действительно, для $h = \pi a + \pi_* a_*$, где a,

$a_* \in L^2$ (такие векторы образуют плотное множество), имеем

$$\begin{aligned}\|Yh\|^2 =&\|\pi^* h\|^2_{L^2} + \|\theta^{-1}\pi_*^* h - \pi^* h\|_{L^2(wdm)}\\ =&\|a+\overline{\theta}a_*\|^2_{L^2} + \|\theta^{-1}(\theta a + a_*) - (a+\overline{\theta}a_*)\|^2_{L^2(wdm)}\\ =&\|a+\overline{\theta}a_*\|^2_{L^2} + \left\|\frac{\theta}{\Delta}(a+\theta^{-1}a_* - a - \overline{\theta}a_*)\right\|^2_{L^2}\\ =&\|a+\overline{\theta}a_*\|^2 + \|\Delta a_*\|^2\\ =&(a,a) + (\theta a, a_*) + (\overline{\theta}a_*, a) + (a_*, a_*)\\ =&(\pi a + \pi_* a_*, \pi a + \pi_* a_*) = \|h\|^2.\end{aligned}$$

Кроме того, для $h \in K_\theta$ пара функций $Yh = [f_+, f_-]$ определяет элемент пространства H, если первую функцию рассматривать как мероморфную функцию внутри круга, а вторую – вне круга. Если же $f = [f_+, f_-] \in H$, то

$$h = \pi f_- + \tau_* \frac{\theta(f_+ - f_-)}{\Delta} \tag{3.2}$$

– элемент пространства K_θ такой, что $Yh = f$. В этой формуле изометрический оператор $\tau_* : L^2(e) \to \mathcal{H}$ определяется из равенства $\tau_*\Delta = \pi_* - \pi\overline{\theta}$. Значит, оператор Y унитарно отображает K_θ на H.

Осталось проверить, что $YM_\theta = TY$. Пусть $h \in K_\theta$. Имеем:

$$M_\theta h = P_\theta U h = Uh - \pi j_0 \pi^* U h,$$

где j_0 – оператор вычисления нулевого коэффициента, т.е. ортопроектор на одномерное подпространство постоянных функций. Далее, если положить $A = j_0 z \pi^* h$, то

$$\begin{aligned}YM_\theta h &= \left[\theta^{-1}\pi_*^* Uh - j_0\pi^* Uh,\ \pi^* Uh - j_0 \pi^* Uh\right] =\\ &= \left[z\theta^{-1}\pi_*^* h - A,\ z\pi^* h - A\right] = zYh - A = TYh.\end{aligned}$$

Мы показали, что оператор Y осуществляет унитарную эквивалентность операторов M_θ и T. Если же допустить, что функция f_+ может иметь внутреннюю функцию ϑ в знаменателе, т.е. $\vartheta f_+ \in \mathcal{N}_+$, то в качестве θ нужно взять функцию, внутренний сомножитель которой равен ϑ, а модуль определяется из условия $|\theta|^2 = \frac{w}{1+w}$. Полученный оператор T будет иметь характеристическую функцию θ.

3.1.3 Унитарные операторы

Приведем конструкцию, связывающую унитарный оператор кратности 1 с построениями на функциональной модели. При этом нам понадобится характеристическая функция сжатия и один способ ее вычисления, давно известный, но не очень часто используемый в настоящее время.

Пусть M – вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве K, $D=(I-M^*M)^{1/2}$, $D_*=(I-MM^*)^{1/2}$, $\mathcal{D}=\operatorname{clos}\operatorname{range}D$, $\mathcal{D}_*=\operatorname{clos}\operatorname{range}D_*$. Характеристическая функция θ_0 определяется как функция в единичном круге, значения которой – операторы из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}_*$,

$$\theta_0(\lambda)d=\big(-M+\lambda D_*(I-\lambda M^*)^{-1}D\big)d,\quad d\in\mathcal{D}.$$

Это – классическое определение характеристической функции. Более удобным представляется другое определение. Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_*$ – некоторые гильбертовы пространства, $j:K\to\mathcal{E}$, $j_*:K\to\mathcal{E}_*$ – некоторые операторы с плотными образами такие, что $j^*j=D^2=I-M^*M$, $j_*^*j_*=D_*^2=I-MM^*$. Определим унитарные операторы $\kappa:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$, $\kappa_*:\mathcal{D}_*\to\mathcal{E}_*$ из соотношений $j=\kappa D$, $j_*=\kappa_*D_*$, и положим

$$\theta(\lambda)=\kappa_*\theta_0(\lambda)\kappa^*.$$

(Поскольку в этой формуле операторы κ и κ_* унитарны и не зависят от λ, говорят, что функции θ_0 и θ "совпадают". Значит, такое определение "совпадает" с классическим.)

Имеет место формула

$$\theta_0(\lambda)D=D_*(I-\lambda M^*)^{-1}(\lambda-M),$$

откуда

$$\begin{aligned}\theta(\lambda)j=&\theta(\lambda)\kappa D=\kappa_*\theta_0(\lambda)D\\ =&\kappa_*D_*(I-\lambda M^*)^{-1}(\lambda-M)=j_*(I-\lambda M^*)^{-1}(\lambda-M).\end{aligned}$$

Следовательно, из соотношения

$$(I-\lambda M^*)f=(\lambda-M)h,$$

где f, $h \in K$, следует, что

$$\theta(\lambda) jh = j_* f. \tag{3.3}$$

Приведем вычисления характеристической функции θ для следующего случая. Пусть μ – борелевская мера на единичной окружности $\mathbb{T}$, $\mu\mathbb{T} = 1$, $K = L^2(\mu)$,

$$M = z - (\cdot, \overline{z})1 = z(I - (\cdot, \overline{z})\overline{z}).$$

Тогда M – вполне неунитарное сжатие, и можно взять $\mathcal{E} = \mathcal{E}_* = \mathbb{C}$, $jh = (h, \overline{z})$, $j_* f = (f, 1)$. Если $(I - \lambda M^*)f = (\lambda - M)h$, то

$$(1 - \lambda\overline{z})f + \lambda(f, 1)\overline{z} = (\lambda - z)h + (h, \overline{z})1,$$

откуда, деля на $\lambda - z$, получаем

$$-\overline{z}f + (f, 1)\frac{\lambda\overline{z}}{\lambda - z} = h + (h, \overline{z})\frac{1}{\lambda - z}.$$

Рассмотрим функции, стоящие в левой и правой частях этого равенства, как элементы $L^2(\mu)$, и напишем их скалярные произведения с функцией $\overline{z}$:

$$-(f, 1) + (f, 1)\int \frac{\lambda d\mu(z)}{\lambda - z} = (h, \overline{z}) + (h, \overline{z})\int \frac{z d\mu(z)}{\lambda - z}.$$

Отсюда по формуле (3.3) следует, что

$$\theta(\lambda) = \frac{j_* f}{jh} = \frac{(f, 1)}{(h, \overline{z})} = \frac{1 + \int \frac{z d\mu(z)}{\lambda - z}}{-1 + \int \frac{\lambda d\mu(z)}{\lambda - z}},$$

или

$$\frac{1 + \theta(\lambda)}{1 - \theta(\lambda)} = \int \frac{z + \lambda}{z - \lambda}\, d\mu(z). \tag{3.4}$$

Если мера μ сингулярна, то полученная формула совпадает с формулой, связывающей внутреннюю функцию и её меру Кларка. В общем случае получается соответствие между функциями из единичного шара пространства H^∞ и произвольными борелевскими мерами на окружности.

Ясно, что для любой функции $\theta \in H^\infty$ такой, что $\|\theta\|_\infty \leqslant 1$ и $\theta(0) = 0$, существует положительная мера μ на окружности $\mathbb{T}$ такая, что $\mu\mathbb{T} = 1$ и выполнено соотношение (3.4). По такой функции θ построим меру μ и оператор M, а также оператор T как в конструкции общего случая сжатий со скалярными характеристическими функциями. Операторы M и T унитарно эквивалентны, поскольку их характеристические функции совпадают.

Отметим, что для оператора T в случае $\theta(0) = 0$ имеем $(zf)_\infty = (f, \frac{1}{z})$, где $\frac{1}{z}$ – функция из пространства H, для которой $f_+ = \frac{1}{z}$, $f_- = \overline{z}$. Действительно, из определения нормы (3.1) следует, что

$$\left(f, \frac{1}{z}\right) = \left(f_-, \frac{1}{z}\right) + (f_+ - f_-, 0) = (f_-, \overline{z}) = (zf_-)_\infty.$$

Второе слагаемое в скалярном произведении пропадает, так как функция $\frac{1}{z}$ не имеет скачка на окружности. Оператор, действующий из пространства H в пространство $L^2(\mu)$ и осуществляющий унитарную эквивалентность операторов T и M, переводит функцию $\frac{1}{z}$, которая принадлежит ядру оператора T, в функцию $\overline{z}$ из ядра оператора M (с точностью до мультипликативной унимодулярной константы).

3.1.4 Переход к модели возмущения

Пусть теперь оператор T задан формулой

$$f \mapsto zf - (zf)(\infty) \tag{3.5}$$

и $g \in H$ – такой элемент, что $(zf)_\infty = (f, g)$ для всех $f \in H$. Пусть a – некоторая функция, определяющая элемент пространства H. Рассмотрим пространство H_a, состоящее из функций вида $\frac{f}{1-a}$, где f пробегает все пространство H. Норма на пространстве H_a определяется как $\left\|\frac{f}{1-a}\right\|_{H_a} = \|f\|_H$, что в случае L^2-пространств означает появление веса. Таким образом, оператор деления на $1-a$ унитарно отображает H на H_a. Оператор T_a определяется по формуле (3.5), но теперь в пространстве H_a. Если $f \in H$, то $\frac{f}{1-a} \in H_a$, и, поскольку $\lim_{z\to\infty} a(z) = 0$,

$$\begin{aligned} T_a\frac{f}{1-a} =& \frac{zf}{1-a} - \left(\frac{zf}{1-a}\right)_\infty = \frac{zf}{1-a} - (zf)_\infty \\ =& \frac{zf - (zf)_\infty + (zf)_\infty a}{1-a} = \frac{Tf + (f,g)a}{1-a}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор T_a унитарно эквивалентен оператору $T + (\cdot, g)a$ в пространстве H.

Пусть U – унитарный оператор кратности 1, x – его циклический вектор, y – некоторый вектор. Рассмотрим оператор $U + (\cdot, x)y$; не умаляя общности можно считать, что $\|x\| = 1$.

Применим проведенные выше построения для представления такого оператора в виде (3.5).

Так как U – циклический унитарный оператор, он унитарно эквивалентен оператору умножения на z в некотором пространстве $L^2(\nu)$, где ν – конечная мера на единичной окружности. Пусть вектору x соответствует функция $\gamma \in L^2(\nu)$; так как x – циклический вектор, имеем $\gamma \neq 0$ ν-п.в. Пусть μ – мера, $d\mu = |\gamma|^2 d\nu$. Тогда оператор умножения на $\overline{z}/\gamma$ унитарно отображает $L^2(\nu)$ на $L^2(\mu)$, причем функция γ переходит в $\overline{z}$. Для простоты будем считать, что U и есть оператор умножения на z в $L^2(\mu)$, а $x = \overline{z}$. Так как $\|x\| = 1$, получаем, что $\mu\mathbb{T} = 1$. Построим функцию θ по формуле (3.4), и по ней – соответствующий оператор T, унитарно эквивалентный оператору $M = z - (\cdot, \overline{z})1 = U - (\cdot, x)Ux$.

Пусть Γ – оператор, осуществляющий унитарную эквивалентность: $T = \Gamma M \Gamma^*$, и пусть $a = \Gamma(Ux + y)$. Как было показано выше, $g = \Gamma\overline{z}$. Тогда оператор $U + (\cdot, x)y = M + (\cdot, x)(Ux + y)$ унитарно эквивалентен оператору $\Gamma M \Gamma^* + (\cdot, \Gamma x)a = T + (\cdot, g)a$, и, следовательно, унитарно эквивалентен оператору T_a.

Теорема 15. *Пусть U – унитарный оператор, x – его циклический вектор, $U + (\cdot, x)y$ – его одномерное возмущение. Тогда существует оператор специального вида, унитарно эквивалентный оператору $U + (\cdot, x)y$:*

– существует функция $\theta \in H^\infty$, $\|\theta\|_\infty \leqslant 1$, $\theta(0) = 0$, и функции $\varphi, \psi \in H^2$ такие, что $\psi(0) = 1$, и $\theta\bar{\psi} - \varphi \in \Delta L^2$, где $\Delta = (1 - |\theta|^2)^{1/2}$;

– модельное пространство состоит из пар функций, первая из которых мероморфна в единичном круге, а вторая – в его внешности:

$$\left\{ f = [f_+, f_-] : f_+ \in \frac{H^2}{\varphi},\ f_- \in \frac{H^2_-}{\bar{\psi}},\ f_+\varphi - f_-\bar{\psi}\theta \in \Delta L^2 \right\};$$

– *норма в модельном пространстве определяется как*

$$\|f\|^2 = \|f_-\bar{\psi}\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{f_+\varphi - f_-\bar{\psi}\theta}{\Delta}\right\|_{L^2}^2;$$

– *модельный оператор определяется формулой* $f \mapsto zf - (zf)(\infty)$.

Доказательство основано на построениях, проведенных перед формулировкой теоремы. Отметим, что функция θ здесь – характеристическая функция сжатий M и T, которые унитарно эквивалетны между собой. Формулы в формулировке теоремы получаются так же, как выше при переходе от оператора T к оператору $T + (\cdot, g)a$. Оператор T действует в пространстве пар функций

$$\{Yh = [\theta^{-1}\pi_*^* h, \pi^* h] : h \in K_\theta\},$$

причем пара функций $[u_+, u_-]$, где $u_+ \in H^2/\theta$, $u_- \in H^2_-$, определяет некоторый элемент h пространства K_θ в том смысле, что $u_+ = \theta^{-1}\pi_*^* h$, $u_- = \pi^* h$, тогда и только тогда, когда $\theta(u_+ - u_-) \in \Delta L^2(e)$, в силу формулы (3.2), и норма элемента h определяется согласно формуле (3.1):

$$\|h\|^2 = \|u_-\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{\theta}{\Delta}(u_+ - u_-)\right\|_{L^2}^2.$$

Элементу a соответствует пара функций $Ya = [\theta^{-1}\pi_*^* a, \pi^* a]$. Согласно нашей схеме, чтобы построить функции, соответствующие модели оператора $T + (\cdot, g)a$ в виде (3.5), нужно перейти от функций Yh к функциям $\frac{Yh}{1-Ya}$. Определим функции $\varphi, \psi \in H^2$ формулами $\varphi = \theta - \pi_*^* a$, $\overline{\psi} = 1 - \pi^* a$. Если пара $[u_+, u_-]$, где $u_+ \in H^2/\theta$, $u_- \in H^2_-$, определяет некоторый элемент пространства K_θ, то при делении на функцию $1 - Ya$ мы получаем новую пару $[f_+, f_-]$, где

$$f_+ = \frac{u_+}{1 - \theta^{-1}\pi_*^* a} = \frac{\theta u_+}{\varphi} \in \frac{H^2}{\varphi}, \qquad f_- = \frac{u_-}{1 - \pi^* a} = \frac{u_-}{\overline{\psi}} \in \frac{H^2_-}{\overline{\psi}}.$$

Соотношение $\theta(u_+ - u_-) \in \Delta L^2(e)$ переписывается в требуемом виде $f_+\varphi - f_-\overline{\psi}\theta \in \Delta L^2$, и выражение для нормы получается непосредственно подстановкой формул для f_+ и f_-. $\square$

3.1.5 Выступающие точки единичного шара пространства H^1

Случай одномерных возмущений унитарных операторов с сингулярной спектральной мерой связан с задачей, известной как вопрос об описании выступающих точек единичного шара пространства H^1. Этот вопрос допускает важную переформулировку. Пусть w – вес на единичной окружности: $w \geqslant 0$ почти всюду, $w \in L^1$, $\int w = 1$, и, кроме того, будем предполагать, что $\int |\log w| < \infty$. В весовом пространстве $L^2(w)$ рассмотрим два подпространства – аналитическое и антианалитическое, порождённых функциями z^n при $n \geqslant 0$ и $n < 0$ соответственно. Ответ на вопрос о том, когда между ними ненулевой угол, описывается классическими условиями Сегё и Макенхаупта; однако удовлетворительного описания весов, для которых пересечение этих пространств ненулевое, пока не найдено. Пусть φ – внешняя функция такая, что $|\varphi|^2 = w$, и рассмотрим пространство $I_w = \frac{H^2}{\varphi} \cap \frac{H^2_-}{\bar{\varphi}}$, совпадающее с пересечением замыканий в $L^2(w)$ указанных множеств аналитических и антианалитических полиномов. Тогда функция φ^2, лежащая на единичной сфере пространства H^1, является выступающей точкой единичного шара в H^1 тогда и только тогда, когда это пересечение нулевое [73]. У функций из пространства I_w естественным образом определены значения в комплексной плоскости за исключением некоторого подмножества единичной окружности, и в нём действует оператор $f \mapsto zf - (zf)(\infty)$; обозначим этот оператор через T_w, а через σ_w его спектр, который пуст тогда и только тогда, когда $I_w = \{0\}$. Из того, что T_w обладает большим запасом спектральных проекторов, вытекает следующий результат, из которого видно, что пересечение аналитического и антианалитического подпространств окажется нулевым тогда и только тогда, когда вес w будет локально малым в некотором смысле во всех точках окружности. Вопрос о том, как выразить в явной форме локальные свойства веса w, чтобы обеспечить принадлежность точки ξ множеству σ_w, остается открытым, и его решение дало бы описание выступающих точек единичного шара H^1 в терминах локального поведения их модулей.

Теорема 16. *Справедливость утверждения о том, что некоторая точка ξ единичной окружности принадлежит спектру σ_w, зависит только от локального поведения веса w вблизи этой точки. Точнее, если два веса w_1 и w_2 совпадают в окрестности точки ξ, то либо ξ принадлежит обоим множествам σ_{w_1} и σ_{w_2}, либо не принадлежит ни одному из них.*

Доказательство. Возьмём вес w, рассмотрим оператор T_w в пространстве I_w. Точка λ комплексной плоскости не принадлежит спектру оператора T_w тогда и только тогда, когда все функции из пространства I_w аналитичны в λ. Действительно, резольвента оператора T_w имеет вид $f \mapsto \frac{f-f(\lambda)}{z-\lambda}$, поэтому если все функции из I_w аналитичны в λ, то эта формула позволяет определить резольвенту $(T_w - \lambda I)^{-1}$. Обратно, если резольвента существует в точке λ, то для $f \in I_w$ её значение в точке λ определяется по формуле

$$f(\lambda) = -l(T_w - \lambda I)^{-1} f,$$

где l функционал на I_w: $lf = (zf)_\infty$, $f \in I_w$. Теперь возьмём два веса w_1 и w_2, совпадающих в окрестности точки ξ, и пусть ξ принадлежит спектру оператора T_{w_1}. Тогда существует функция $f \in I_{w_1}$, которая имеет особенность (т.е. не является аналитической) в точке ξ. Поскольку точки, которые являются концами дуг, для которых соответствующие спектральные проекторы операторов T_w ограничены, образуют множество полной меры Лебега на окружности [19], для пары весов, совпадающих в окрестности заданной точки ξ, выберем такую дугу e, содержащую ξ, чтобы веса совпадали и в окрестности замыкания дуги e. Построим соответствующий этой дуге спектральный проектор Q оператора T_{w_1} и применим его к функции f. Полученная функция Qf будет аналитической вне e, и при этом у неё также будет особенность в точке ξ, поскольку при применении к f дополнительного спектрального проектора $I - Q$ получится функция, аналитическая на дуге e и, в частности, в точке ξ. По построению функция Qf является элементом пространства I_{w_1} и аналитична вне дуги e. Поскольку веса совпадают в окрестности замыкания e, получаем, что $Qf \in L^2(w_2)$. Кроме того, Qf принадлежит классу

Смирнова в единичном круге и в его внешности; следовательно, $Qf \in I_{w_2}$. Поскольку Qf имеет особеность в точке ξ, получаем, что ξ является точкой спектра оператора T_{w_2}. $\square$

3.2 Вопросы подобия

3.2.1 Общий результат для почти унитарных операторов

Здесь будет рассмотрен вопрос о существовании ограниченного спектрального проектора на абсолютно непрерывное подпространство почти унитарного оператора. Такой проектор существует тогда и только тогда, когда оператор подобен прямой сумме своих абсолютно непрерывной и сингулярной частей.

Пусть $T : H \to H$ – возмущение унитарного оператора U оператором конечного ранга, причём спектр оператора T не покрывает единичный круг. Предположим, что T записывается в виде

$$T = (I - \Omega K \Omega^*)U, \tag{3.6}$$

где E – конечномерное гильбертово пространство, $K : E \to E$ и $\Omega : E \to H$ – некоторые операторы. Пусть $U = U_{ac} \oplus U_s$ – разложение оператора U в прямую сумму его абсолютно непрерывной (U_{ac}) и сингулярной (U_s) частей. Сингулярное пространство $H_s(T)$ оператора T состоит из всех векторов h таких, что слабая резольвента $((T-\lambda I)^{-1}h, f)$ не имеет скачка почти всюду на единичной окружности при всех $f \in H$. Сингулярная часть T_s есть сужение оператора T на его сингулярное подпространство. Функции Φ и F, значения которых – операторы в E, определяются формулами

$$\Phi(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1} U \Omega$$

и

$$F(\lambda) = (I - K\Phi(\lambda))^{-1} K.$$

Для $h \in H$ положим

$$(Rh)(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1} U h, \quad |\lambda| \neq 1.$$

Имеем следующую формулу для резольвенты оператора T:

$$(T-\lambda I)^{-1}h=(U-\lambda I)^{-1}(h+\Omega F(\lambda)(Rh)(\lambda)). \tag{3.7}$$

Граничные значения функций Φ, F и Rh ($h \in H$) изнутри единичного круга и извне определены корректно почти всюду относительно меры Лебега m и будут обозначаться соответственно через Φ_+, Φ_-; F_+, F_-; R_+h, R_-h. Если рассмотреть спектральное представление

$$H_{ac}=\int \oplus H(z)dm(z)$$

для оператора U_{ac}, то можно определить операторы $\Omega(z): E \to H(z)$ соотношениями $\Omega(z)e=(\Omega e)(z)$ при m-почти всех z, где $e \in E$.

Для $h \in H$ определим функции $\mathcal{X}h$, $\mathcal{Y}h$ на единичной окружности формулами

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}h)(z) =&h(z)+\Omega(z)F_+(z)(R_+h)(z),\\ (\mathcal{Y}h)(z) =&h(z)-\Omega(z)F_-^*(z)(R_+h)(z).\end{aligned}$$

Это – $H(z)$-значные функции, определенные m-почти всюду для каждого $h \in H$.

Теорема 17. *При введённых выше обозначениях следующие утверждения равносильны.*

1) *Оператор T подобен прямой сумме $U_{ac} \oplus T_s$.*

2) *Оператор T подобен прямой сумме некоторого абсолютно непрерывного унитарного оператора и некоторого сингулярного (не обязательно унитарного) оператора.*

3) *Существуют ограниченные операторы*

$$X: H \to H_{ac}, \qquad Y: H_{ac} \to H$$

такие, что

$$XT=U_{ac}X, \quad TY=YU_{ac} \quad \textit{и} \quad XY=I.$$

4) *Отображения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – ограниченные операторы из H в H_{ac}.*

Равносильность первых трёх утверждений доказывается стандартными средствами. Основное содержание теоремы связано с тем, что соответствующая ситуация описывается четвёртым утверждением. Отметим, что в спектральном представлении унитарного оператора U отображения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ переписываются в виде интегралов типа Коши, и тем самым изучаемый вопрос о подобии переписывается в терминах ограниченности двух весовых преобразований Коши.

Доказательство. Импликация 1) $\implies$ 2) тривиальна.

Условие 3) означает, что T подобен прямой сумме оператора U_{ac} и сужения T на ядро X. Следовательно, условие 1) равносильно совокупности условия 3) и условия, что ядро оператора X есть сингулярное подпространство оператора T. Используем это свойство для доказательства импликации 4) $\implies$ 1); для этого проверим, что если отображения $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ задают ограниченные операторы, то $\mathcal{X}T = U_{ac}\mathcal{X}$, $T\mathcal{Y}^* = \mathcal{Y}^*U_{ac}$, $\mathcal{X}\mathcal{Y} = I$, и ядро оператора X совпадает с сингулярным подпространством оператора T.

Докажем, что $(\mathcal{X}Th)(z) = z(\mathcal{X}h)(z)$. Поскольку $T = (I - \Omega K \Omega^*)U$, требуется показать, что почти всюду выполняется равенство

$$(\mathcal{X}Uh)(z) - z(\mathcal{X}h)(z) = (\mathcal{X}\Omega K \Omega^* Uh)(z).$$

Из определений отображения $\mathcal{X}$ и функции R_+h получаем

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}Uh)(z) - z(\mathcal{X}h)(z) =& \Omega(z)F_+(z)\left((R_+Uh)(z) - z(R_+h)(z)\right)\\ =& \Omega(z)F_+(z)\Omega^*Uh\end{aligned}$$

и

$$(\mathcal{X}\Omega K\Omega^*Uh)(z) = \Omega(z)K\Omega^*Uh + \Omega(z)F_+(z)(R_+\Omega K\Omega^*Uh)(z).$$

Следовательно, для доказательства требуемого равенства левых частей достаточно установить равенство

$$F_+(z)e = Ke + F_+(z)(R_+\Omega Ke)(z)$$

при $e = \Omega^* U h$. При любом $e \in E$ имеем $(R\Omega e)(\lambda) = \Phi(\lambda)e$, так что $(R_+\Omega K e)(z) = \Phi_+(z)Ke$; соотношение $F_+ = K + F_+\Phi_+ K$ очевидно, и сплетающее соотношение для $\mathcal{X}$ доказано.

Чтобы доказать сплетающее соотношение для $\mathcal{Y}$, проверим, что для почти всех z имеем $(\mathcal{Y}T^*h)(z) = \bar{z}(\mathcal{Y}h)(z)$, $h \in H$. Если сюда подставить формулу для T, требуемое соотношение перепишется в виде

$$\bar{z}(\mathcal{Y}h)(z) - (\mathcal{Y}U^*h)(z) = -(\mathcal{Y}U^*\Omega K^*\Omega^*h)(z).$$

По определению $\mathcal{Y}$ левая часть равна $-\Omega(z)F_-^*(z)\bar{z}\Omega^*h$, а правая имеет вид

$$-(U^*\Omega K^*\Omega^*h)(z) + \Omega(z)F_-^*(z)(R_+U^*\Omega K^*\Omega^*h)(z),$$

поэтому для $e = \Omega^*h$ достаточно проверить, что

$$-\Omega(z)F_-^*(z)\bar{z}e = -\bar{z}\Omega(z)K^*e + \Omega(z)F_-^*(z)(R_+U^*\Omega K^*e)(z),$$

для чего, в свою очередь, достаточно выполнения соотношения

$$F_-^*(z)e - K^*e + zF_-^*(z)(R_+U^*\Omega K^*e)(z) = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned}(RU^*\Omega K^*e)(\lambda) = \Omega^*(U-\lambda I)^{-1}\Omega K^*e &= \Omega^*\frac{1}{\lambda}((U-\lambda I)^{-1}U - I)\,\Omega K^*e\\ &= \frac{\Phi(\lambda)-\Phi(0)}{\lambda}\,K^*e,\end{aligned}$$

откуда

$$(R_+U^*\Omega K^*e)(z) = \frac{\Phi_+(z)-\Phi(0)}{z}\,K^*e = -\bar{z}\Phi_-^*(z)K^*e,$$

и остаётся проверить, что

$$F_-^*(z) - K^* - F_-^*(z)\Phi_-^*(z)K^* = 0.$$

Последнее соотношение следует непосредственно из определения функции F.

Для любого абсолютно непрерывного унитарного оператора U_* и любого оператора X такого, что $XT = U_*X$, ядро оператора X содержит сингулярное подпространство оператора T, см. [60]. Покажем, что ядро отображения

$\mathcal{X}$ совпадает с сингулярным подпространством T. Для этого достаточно доказать, что ядро $\mathcal{X}$ содержится в сингулярном подпространстве T, т.е. если $\mathcal{X}h = 0$, то слабая резольвента из определения сингулярного подпространства не имеет скачка на окружности. Это будет сразу вытекать из следующей формулы для скачка резольвенты. Пусть $f, g \in H$, и положим

$$r(\lambda) = ((T - \lambda I)^{-1} f, g).$$

Скачком функции r будем называть разность $r_+ - r_-$ граничных значений изнутри единичного круга и извне его. Оказывается, что для скачка в точке z единичной окружности имеет место формула

$$\bar{z}\,((\mathcal{X}f)(z), (\mathcal{Y}g)(z)).$$

Проверим эту формулу. Из формулы (3.7) получаем

$$\begin{aligned}
((T - \lambda I)^{-1} f, g) =& ((U - \lambda I)^{-1} f, g) + ((U - \lambda I)^{-1} \Omega F(\lambda)(Rh)(\lambda), g) \\
=& ((U - \lambda I)^{-1} f, g) + (F(\lambda)(Rf)(\lambda), \Omega^*(U^* - \bar{\lambda} I)^{-1} g) \\
=& ((U - \lambda I)^{-1} f, g) - \frac{1}{\lambda}(F(\lambda)(Rf)(\lambda), (Rg)(1/\bar{\lambda})).
\end{aligned}$$

Для унитарного оператора U скачок резольвенты $((U - \lambda I)^{-1} f, g)$ в точке z единичной окружности равен $\bar{z}(f(z), g(z))$. Выразим скачок второго выражения в последней формуле через функции, являющиеся параметрами конструкции. Имеем

$$\begin{aligned}
&z(r_+(z) - r_-(z)) - ((\mathcal{X}f)(z), (\mathcal{Y})(z) \\
&\quad= (f(z), g(z)) - (F_+(z)(R_+f)(z), (R_-g(z)) - (F_-(z)(R_-f(z), (R_+g)(z)) \\
&\qquad\quad - (f(z) + \Omega(z)F_+(z)(R_+f)(z), g(z) - \Omega(z)F_-^*(z)(R_+g)(z)) \\
&\quad= (F_+(z)(R_+f)(z), \Omega(z)^*g - (R_+g)(z)) + (F_-(z)(R_-f)(z), (R_+g)(z)) \\
&\qquad\quad - (\Omega(z)F_+(z)(R_+f)(z), g(z)) \\
&\qquad\quad + (F_-(z)\Omega(z)^*(f(z) + \Omega(z)F_+(z)(R_+f(z)), (R_+g)(z)) \\
&\quad= (-F_+(z)(R_+f)(z) + F_-(z)(R_-f)(z), (R_+g)(z)) \\
&\qquad\quad + (F_-(z)\Omega(z)^*f(z) + F_-(z)\Omega(z)^*\Omega(z)F_+(z)(R_+f)(z), (R_+g)(z)) \\
&\quad= ((-F_+(z) + F_-(z) + F_-(z)\Omega(z)^*\Omega(z)F_+(z))(R_+f)(z), (R_+g)(z),
\end{aligned}$$

и остаётся показать, что $F_+(z) - F_-(z) = F_-(z)\Omega(z)^*\Omega(z)F_+(z)$. Действительно,

$$\begin{aligned} F_+(z) - &F_-(z) - F_-(z)\Omega(z)^*\Omega(z)F_+(z) \\ =&(I - K\Phi_+(z))^{-1}K - (I - K\Phi_-(z))^{-1}K \\ &\qquad - (I - K\Phi_-(z))^{-1}K\Omega(z)^*\Omega(z)(I - K\Phi_+(z))^{-1}K \\ =&0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\Phi_+(z) - \Phi_-(z) = \Omega(z)^*\Omega(z).$$

Из уже доказанных сплетающих соотношений вытекает, что

$$(\mathcal{X}\mathcal{Y})U_{ac} = \mathcal{X}T\mathcal{Y} = U_{ac}(\mathcal{X}\mathcal{Y}).$$

Осталось проверить, что $\mathcal{X}\mathcal{Y} = I$. Это будет сделано с помощью классического результата теории рассеяния [57, 66]:
если U_1, U_2 – унитарные операторы и $AU_1 - U_2A$ – ядерный оператор, т.е. оператор из класса Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_1$, то существуют сильные пределы операторов $U_2^n A U_1^{-n}$ при $n \to \pm\infty$.
Применим этот результат к паре унитарных операторов U, U_{ac}, а в качестве оператора A будем брать операторы $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Сильные пределы последовательностей операторов $U_{ac}^n \mathcal{X} U^{-n}$, $U^n \mathcal{Y} U_{ac}^{-n}$ при $n \to +\infty$ существуют, причём из конструкции операторов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ ясно, что эти пределы совпадают с тождественным оператором на абсолютно непрерывном подпространстве. (Последнее утверждение легко проверяется непосредственно; также оно сразу следует из леммы 3.1 об общем виде сплетающих операторов.) Воспользуемся так называемым цепным правилом, т.е. мультипликативным свойством операции построения волнового оператора: предел операторов $U_{ac}^n\,(\mathcal{X}\mathcal{Y})\,U_{ac}^{-n}$ при $n \to +\infty$ равен произведению пределов, о которых шла речь выше, т.е. равен тождественному оператору, что и требовалось доказать. Доказательство импликации 4) $\implies$ 1) завершено.

Лемма 3.1. *Пусть U_* – унитарный оператор с абсолютно непрерывной спектральной мерой, и пусть X – ограниченный оператор, для которого*

$XT = U_*X$. Обозначим через $\tilde{X}$ сильный предел операторов $U_*^n X U^{-n}$ при $n \to +\infty$. Тогда $X = \tilde{X}\mathcal{X}$, т.е. в спектральном представлении операторов U_{ac} и U_* имеем $(Xh)(z) = \tilde{X}(z)(\mathcal{X}h)(z)$, $h \in H$.

Аналогично, если $TY = YU_*$, то $Y^* = \tilde{Y}^*\mathcal{Y}$, где $\tilde{Y}^*$ – сильный предел операторов $U_*^n Y^* U^{-n}$ при $n \to +\infty$.

Доказательство. Докажем утверждение про выражение для оператора X. Предположим, что $XT = U_*X$. Тогда из определения оператора T получаем, что $XU - U_*X = \Gamma\Omega^*U$, где $\Gamma : E \to H$, $\Gamma = X\Omega K$. Пусть в спектральном представлении оператора U_{ac} значения оператора Γ вычисляются через операторы $\Gamma(z)$, т.е. Γ отображает вектор E в векторнозначную функцию со значениями $\Gamma(z)e$ в пространствах $H(z)$ (напомним, что оператор U_{ac} действует в прямом интеграле пространств $H_{ac} = \int \oplus H(z)\, dm(z)$ как умножение на z). Пусть $\hat{\Gamma}$ – оператор умножения на функции со значениями $\Gamma(z)$, переводящее E-значные функции в функции со значениями в $H(z)$ (для того, чтобы такая получающаяся функция определяла элемент пространства H_{ac}, требуется, чтобы она была квадратично суммируемой). Имеем

$$X = \tilde{X} + \hat{\Gamma}R_+,$$

где, как и раньше, R_+ – отображение, сопоставляющее вектору $h \in H$ граничные значения изнутри единичного круга функции Rh,

$$(Rh)(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1}Uh.$$

Действительно, абелевы средние последовательности $U_*^n X U^{-n}$ стремятся к оператору $\tilde{X}$; найдём их формулу через используемые здесь объекты. Для $h \in H$ запишем разность исходного оператора и абелевых средних последовательности $U_*^n X U^{-n}$ через коммутатор:

$$Xh - (1 - r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n U_*^n X U^{-n} h = \sum_{n=1}^{\infty} r^n U_*^n \Gamma\Omega^* U^{-n+1} h;$$

требуется показать, что правая часть при $r \nearrow$ стремится к $\hat{\Gamma}R_+h$. Вычислим её значение в точке z единичной окружности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \bar{z}^n \Gamma(z)\Omega^* U^{-n+1}h = r\Gamma(z)\Omega^*(U - rzI)^{-1}Uh = r\hat{\Gamma}(z)(Rh)(rz),$$

откуда и следует требуемое.

Следовательно,

$$\Gamma = X\Omega K = \tilde{X}\Omega K + \hat{\Gamma}R_+\Omega K.$$

Из соотношения $R_+\Omega e = \Phi_+ e$ получаем

$$\hat{\Gamma}(z) = \tilde{X}(z)\hat{\Omega}(z)K + \hat{\Gamma}(z)\Phi_+(z)K,$$

откуда

$$\hat{\Gamma}(z) = \tilde{X}(z)\hat{\Omega}(z)K(I - \Phi_+K)^{-1} = \tilde{X}(z)\hat{\Omega}(z)F_+(z).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}(Xh)(z) =& \tilde{X}(z)h(z) + \hat{\Gamma}(z)(R_+h)(z)\\ =& (\tilde{X}h)(z) + \tilde{X}(z)\hat{\Omega}(z)F_+(z)(R_+h)(z)\\ =& \tilde{X}(z)(\mathcal{X}h)(z),\end{aligned}$$

как и требовалось.

Теперь покажем, что 1) $\implies$ 4). Как говорилось выше, условие 1) равносильно условию 3) с дополнительным свойством, что ядро оператора X есть сингулярное подпространство T. Возьмём операторы X, Y из условия 3) и построим ограниченые операторы $\tilde{X}, \tilde{Y}$ как сильные пределы последовательностей $U_{ac}^n \mathcal{X} U^{-n}$, $U^n \mathcal{Y} U_{ac}^{-n}$ при $n \to +\infty$. Поскольку $XY = I$, по цепному правилу имеем $\tilde{X}\tilde{Y} = I$. Отсюда $\tilde{Y}\tilde{X}\tilde{Y} = \tilde{Y}$, и, так как образ оператора $\tilde{Y}$ плотен, имеем $\tilde{Y}\tilde{X} = I$. Положим $X_1 = \tilde{Y}X$, $Y_1 = Y\tilde{X}$. Тогда

$$\begin{aligned}X_1T =& \tilde{Y}XT = \tilde{Y}U_{ac}X = U_{ac}\tilde{Y}X = U_{ac}X_1,\\ TY_1 =& TY\tilde{X} = YU_{ac}\tilde{X} = Y\tilde{X}U_{ac} = Y_1U_{ac}.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\tilde{X}_1 = \tilde{Y}\tilde{X} = I, \qquad \tilde{Y}_1 = \tilde{Y}\tilde{X} = I.$$

По доказанному выше, операторы, сплетающие операторы T и U_{ac} определяются их образами в результате применения к ним операции $\tilde{}$. Следовательно, $X_1 = \mathcal{X}$, $Y_1^* = \mathcal{Y}$; поскольку операторы X_1, Y_1 ограничены по построению, условие 4) доказано.

Для доказательства импликации 2) $\implies$ 1) воспользуемся следующей формой теоремы об устойчивости абсолютно непрерывного спектра:
пусть $T_1 = U_1 + A_1$, $T_2 = U_2 + A_2$, где операторы U_1, U_2 унитарные, а A_1, A_2 – ядерные. Если операторы T_1 и T_2 подобны, то абсолютно непрерывные части U_1 и U_2 унитарно эквивалентны.
Предположим, что выполнено свойство 2), т.е. оператор T подобен прямой сумме $U_* \oplus T_*$, где U_* – унитарный оператор с абсолютнор непрерывной спектральной мерой, T_* – сингулярный почти унитарный оператор. Тогда если взять униатрные операторы, отличающиеся от T и $U_* \oplus T_*$ на ядерные операторы, то их абсолютно непрерывные части будут унитарно эквивалентны между собой. Поскольку T_* – сингулярный оператор, абсолютно непрерывная часть соответствующего ему унитарного оператора тривиальна. По построению T – ядерное возмущение оператора U. Следовательно, операторы U_{ac} и U_* унитарно эквивалентны, и можно считать, что $U_* = U_{ac}$.

Подобие операторов T и $U_{ac} \oplus T_*$ может быть записано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} U_{ac} & 0 \\ 0 & T_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}, \qquad T \begin{pmatrix} Y & Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & Y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{ac} & 0 \\ 0 & T_* \end{pmatrix},$$

где операторы $\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} Y & Y' \end{pmatrix}$ взаимно обратные. Свойство 3) доказано, и для того, чтобы доказать свойство 1), остаётся заметить, что поскольку при преобразовании подобия сингулярное подпространство оператора переходит в сингулярное подпространство ему подобного, ядро оператора X совпадает с сингулярным подпостранством оператора T. Импликация 2) $\implies$ 1) доказана.

Осталось проверить импликацию 3) $\implies$ 1), для чего требуется доказать, что если выполнено условие 3), то ядро оператора X совпадает с сингулярным подпространством оператора T.

Поскольку пространство E конечномерно, не умаляя общности можно считать, что все пространства $H(z)$ из спектрального разложения пространства H также конечномерны. Запишем оператор X в виде $X = \tilde{X}\mathcal{X}$. Образ оператора X плотен, следовательно, операторы $\tilde{X}(z)$ имеют плотные образы при почти всех z. Поскольку пространства $H(z)$, в которых они действуют, конечномерны, получается, что операторы $\tilde{X}(z)$ обратимы. Значит, ядро оператора X совпадает с ядром $\mathcal{X}$, которое, как было доказано, совпадает с сингулярным подпространством оператора T.

Теорема 17 полностью доказана. □

3.2.2 Симметрические операторы

В оставшейся части этой главы теорема 17 применяется к склейке двух симметрических операторов. Это позволяет получить условия подобия самосопряжённому оператору оператора, получающегося из пары симметрических операторов перемешиванием их граничных условий.

Пусть l – симметрический оператор с плотной областью определения $\operatorname{Dom} l$ в гильбертовом пространстве H,

$$(lf, g) = (f, lg), \quad f, g \in \operatorname{Dom} l.$$

Будем предполагать, что оператор l – *чистый*, что означает, что l не имеет приводящих подпространств, на которых он действует как самосопряженный оператор. Пусть $\mathcal{L} = l^*$ – сопряженный оператор,

$$(\mathcal{L}f, g) = (f, lg), \quad f \in \operatorname{Dom} \mathcal{L}, \quad g \in \operatorname{Dom} l.$$

Исходный оператор l является сужением оператора $\mathcal{L}$ на свою область определения: $l \subset \mathcal{L}$. Имеет место формула фон Неймана:

$$\operatorname{Dom} \mathcal{L} = \operatorname{Dom} l \dotplus \ker(\mathcal{L} - iI) \dotplus \ker(\mathcal{L} + iI).$$

Мы будем рассматривать операторы, для которых

$$\dim\ker(\mathcal{L} - iI) = \dim\ker(\mathcal{L} + iI) < \infty.$$

Совокупность (H, Γ, Γ'), в которой Γ, Γ' – линейные отображения из $\operatorname{Dom}\mathcal{L}$ во вспомогательное гильбертово пространство E, называется *пространством граничных значений*, если отображение $f \mapsto \Gamma f \oplus \Gamma' f$ из $\operatorname{Dom}\mathcal{L}$ в $E \oplus E$ сюръективно, и для любых $f, g \in \operatorname{Dom}\mathcal{L}$

$$(\mathcal{L}f, g) - (f, \mathcal{L}g) = (\Gamma' f, \Gamma g) - (\Gamma f, \Gamma' g). \tag{3.8}$$

Область определения оператора l есть множество

$$\operatorname{Dom} l = \{f \in \operatorname{Dom}\mathcal{L} : \Gamma f = \Gamma' f = 0\}.$$

Здесь и далее μ обозначает комплексное число такое, что $\operatorname{Im}\mu \neq 0$. Отображение $f \mapsto \Gamma f$ является взаимно однозначным соответствием между пространствами $\ker(\mathcal{L} - \mu I)$ и E. Это позволяет определить *функцию Вейля* M соотношением

$$\Gamma' f = M(\mu)\Gamma f, \quad f \in \ker(\mathcal{L} - \mu I),$$

значения которой – операторы в E. Функция M – аналитическая в областях $\{\mu : \operatorname{Im}\mu > 0\}$ и $\{\mu : \operatorname{Im}\mu < 0\}$; при этом $M(\bar{\mu}) = M(\mu)^*$, и $\operatorname{Im} M(\mu) = \frac{1}{2i}(M(\mu) - M(\mu)^*)$ – неотрицательный оператор при $\operatorname{Im}\mu > 0$. Доказательства всех этих свойств непосредственно вытекают из определений, ключевую роль при этом играет соотношение (3.8).

Обозначим через L_∞ *расширение Дирихле* оператора l:

$$L_\infty f = \mathcal{L}f, \quad f \in \operatorname{Dom} L_\infty = \{g \in \operatorname{Dom}\mathcal{L} : \Gamma g = 0\}.$$

Тогда L_∞ – самосопряженный оператор. Его спектральная мера может быть вычислена через функцию Вейля таким же образом, как это делается для оператора Шредингера с вещественным потенциалом на полуоси. Нам удобнее работать на единичной окружности, чем на вещественной прямой; поэтому мы построим спектральную меру унитарного оператора U – преобразования Кэли оператора L_∞,

$$U = (L_\infty - iI)(L_\infty + iI)^{-1}. \tag{3.9}$$

Функция $\lambda \mapsto M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$, значения которой – операторы в E, имеет неотрицательную мнимую часть в единичном круге. Следовательно, существует неотрицательная операторнозначная мера $\mathcal{W}$ на единичной окружности (которую можно понимать так: существуют скалярная положительная мера ν на окружности и семейство неотрицательных операторов $W(z) : E \to E$, заданных ν-почти всюду; $d\mathcal{W}(z) = W(z)d\nu(z)$), причем

$$\operatorname{Im} M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) = \int \frac{1-|\lambda|^2}{|z-\lambda|^2}\, d\mathcal{W}(z), \quad |\lambda| < 1. \tag{3.10}$$

Гармоническая функция $\operatorname{Im} M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$ является мнимой частью аналитической функции $M\left(i\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$, для которой имеет место формула

$$i\left(\operatorname{Re} M(i) - M\left(i\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right) = \int \frac{z+\lambda}{z-\lambda}\, d\mathcal{W}(z). \tag{3.11}$$

В левой части возникает слагаемое $\operatorname{Re} M(i)$, так как при $\lambda = 0$ правая часть представляет собой неотрицательный оператор.

Сформулируем следующее известное утверждение о функциональной модели расширений симметрических операторов, см. [17].

Теорема 3.2. *Пусть l – чистый симметрический оператор в пространстве H, $\mathcal{L} = l^*$, E – конечномерное гильбертово пространство, и тройка (H, Γ, Γ'), где $\Gamma, \Gamma' : \operatorname{Dom} \mathcal{L} \to E$, определяет пространство граничных значений. Пусть M – соответствующая функция Вейля, а $\mathcal{W}$ – операторнозначная мера на единичной окружности, для которой имеет место формула* (3.10).

Тогда пространство H можно отождествить с помощью унитарного оператора с пространством $L^2(\mathcal{W})$ E-значных функций (скалярное произведение в котором задается формулой

$$(f, g) = \int (W(z)f(z), g(z))d\nu(z),$$

если $d\mathcal{W}(z) = W(z)d\nu(z))$. *При этом отождествлении подпространству* $\ker(\mathcal{L}+iI)$ *соответствует пространство* $\{f(z) \equiv e : e \in E\}$*, а* $\ker(\mathcal{L}-iI)$ *переходит в подпространство* $\{f(z) \equiv \bar{z}e : e \in E\}$*; если* $h \in H$*,* $h \in \ker(\mathcal{L} \pm iI)$*, то для соответствующего вектора* e *имеем* $e = \Gamma h$*. Оператору* L_∞ *соответствует оператор умножения на* $i\frac{1+z}{1-z}$*, а его преобразованию Кэли – оператору* U *– оператор умножения на* z*.*

Доказательство получается так же, как вычисляется спектральная мера расширения Дирихле оператора Шрёдингера на полуоси в терминах функции Вейля. Другой способ состоит в вычислении характеристической функции операторов L_B (см. §3) при $B = M(i)$, которая совпадает с характеристической функцией соответствующего оператора в пространстве $L^2(\mathcal{W})$ (преобразованием Кэли которого является суперпозиция умножения на z с ортопроектором на ортогональное дополнение к подпространству постоянных функций); совпадение характеристических функций равносильно унитарной эквивалентности операторов, и остается аккуратно проверить дополнительные свойства изучаемого отождествления. Определим оператор $\Omega : E \to H$,

$$\Omega E \subset \ker(\mathcal{L} + iI), \quad \Gamma\Omega e = e \quad (e \in E). \tag{3.12}$$

Тогда

$$\Omega^*\Omega = \operatorname{Im} M(i). \tag{3.13}$$

Действительно, для $e_1, e_2 \in E$ имеем

$$\begin{aligned}
&-2i(\Omega^*\Omega e_1, e_2) = (-i\Omega e_1, \Omega e_2) - (\Omega e_1, -i\Omega e_2) = \\
&= (\mathcal{L}\Omega e_1, \Omega e_2) - (\Omega e_1, \mathcal{L}\Omega e_2) = (\Gamma'\Omega e_1, \Gamma\Omega e_2) - (\Gamma\Omega e_1, \Gamma'\Omega e_2) = \\
&= (M(i)^*\Gamma\Omega e_1, \Gamma\Omega e_2) - (\Gamma\Omega e_1, M(i)^*\Gamma\Omega e_2) = -2i(\operatorname{Im} M(i)e_1, e_2).
\end{aligned}$$

Воспользуемся отождествлением, построенным в теореме 3.2, и будем считать, что $H = L^2(\mathcal{W})$. Тогда $\Omega e \equiv e$ $(e \in E)$,

$$\Omega^* h = \int h(z) d\mathcal{W}(z), \quad h \in L^2(\mathcal{W}).$$

Отсюда следует, что

$$\Omega^*(U-\lambda I)^{-1}Uh = \int \frac{z\,h(z)}{z-\lambda}\,d\mathcal{W}(z). \tag{3.14}$$

Теперь построим функцию Φ, $\Phi(\lambda) = \Omega^*(U-\lambda I)^{-1}U\Omega$. С помощью отождествления из теоремы 3.2 и формул (3.11) и (3.13) получаем:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= \frac{1}{2}(\Omega^*(U-\lambda I)^{-1}(U+\lambda I)\Omega + \Omega^*\Omega) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{z+\lambda}{z-\lambda}\,d\mathcal{W}(z) + \operatorname{Im} M(i)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(i\left(\operatorname{Re} M(i) - M\left(i\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right) + \operatorname{Im} M(i)\right) = \\ &= \frac{i}{2}\left(M(i)^* - M\left(i\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Эта теорема будет применена к широкому классу расширений симметрических операторов для проверки подобия их абсолютно непрерывных частей самосопряженным оператором. Чтобы применить теорему 17, нужно вычислить все выражения, приведенные в этом параграфе, для преобразований Кэли изучаемых операторов. Для проверки подобия затем нужно проверить выполнение своства 4) теоремы 17.

3.2.3 Почти разрешимые расширения

Пусть для симметрического оператора l, рассматривавшегося в предыдущем параграфе, определено пространство граничных значений вида $\{H, \Gamma, \Gamma'\}$. Расширение $L = L_B$ оператора l называется *почти разрешимым* (относительно пары отображений Γ, Γ'), если его область определения имеет вид

$$\operatorname{Dom} L = \{f \in \operatorname{Dom}\mathcal{L} : \Gamma' f = B\Gamma f\},$$

где B – некоторый оператор в пространстве E. Тогда $L = \mathcal{L}\big|_{\operatorname{Dom} L}$. Пусть L_∞ – расширение Дирихле, и U – его преобразование Кэли (3.9); оператор Ω задан соотношениями (3.12). Обозначим через T преобразование Кэли оператора L:

$$T = (L-iI)(L+iI)^{-1}.$$

Оказывается, оператор T можно привести к виду (3.6). Действительно, очевидно, что на ортогональном дополнении к ядру $\ker(\mathcal{L} - iI)$, которое совпадает с образом оператора $l + iI$, действие операторов T и U одинаково, а именно, $(l + iI)h$ отображается на $(l - iI)h$, $h \in H$. Для оставшейся части доказательства формулы (3.6) воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.3. *Пусть μ_1, μ_2 – комплексные числа. Предположим, что L – расширение оператора l, $l \subset L \subset \mathcal{L}$, и μ_2 не является точкой спектра оператора L. Если $h \in \ker(\mathcal{L} - \mu_1 I)$, то*

$$f = (L - \mu_1 I)(L - \mu_2 I)^{-1} h \in \ker(\mathcal{L} - \mu_2 I).$$

Кроме того, для $L = L_B$ имеем

$$\Gamma f = (B - M(\mu_2))^{-1}(B - M(\mu_1))\Gamma h; \tag{3.16}$$

если же $L = L_\infty$, то $\Gamma f = \Gamma h$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L} - \mu_2 I) f =& (\mathcal{L} - \mu_2 I)(L - \mu_1 I)(L - \mu_2 I)^{-1} h \\
=& (\mathcal{L} - \mu_2 I)(L - \mu_2 I)(L - \mu_2 I)^{-1} h \\
&+ (\mathcal{L} - \mu_2 I)(\mu_2 - \mu_1)(L - \mu_2 I)^{-1} h \\
=& (\mathcal{L} - \mu_2 I) h + (\mu_2 - \mu_1) h \\
=& (\mathcal{L} - \mu_1 I) h = 0,
\end{aligned}$$

откуда $f \in \ker(\mathcal{L} - \mu_2 I)$. Если $L = L_B$, то

$$f - h = (\mu_2 - \mu_1)(L - \mu_2 I)^{-1} h \in \operatorname{Dom} L,$$

и следовательно, $\Gamma'(f - h) = B\Gamma(f - h)$. По определению функции Вейля имеем $\Gamma' h = M(\mu_1)\Gamma h$ и $\Gamma' f = M(\mu_2)\Gamma f$. Таким образом,

$$B\Gamma(f - h) = \Gamma' f - \Gamma' h = M(\mu_2)\Gamma f - M(\mu_1)\Gamma h,$$

то есть $(B - M(\mu_2))\Gamma f = (B - M(\mu_1))\Gamma h$, откуда следует (3.16). Для случая $L = L_\infty$ аналогично получаем $f - h \in \operatorname{Dom} L_\infty$, что и означает, что $\Gamma f = \Gamma h$.

$\square$

Продолжим проверку формулы (3.6). Остается рассмотреть случай, когда $h \in \ker(\mathcal{L} - iI)$, и для таких h нужно проверить, что $Th = (I - \Omega K \Omega^*)Uh$. Из леммы 3.3 вытекает, что

$$Uh = (L_\infty - iI)(L_\infty + iI)^{-1}h \in \ker(\mathcal{L} + iI) \quad \text{и} \quad \Gamma Uh = \Gamma h,$$

а также что

$$Th = (L - iI)(L + iI)^{-1}h \in \ker(\mathcal{L} + iI)$$

и

$$\Gamma Th = (B - M(i)^*)^{-1}(B - M(i))\Gamma h.$$

Таким образом, обе части соотношения $Th = (I - \Omega K \Omega^*)Uh$ лежат в $\ker(\mathcal{L} + iI)$, а поэтому, чтобы доказать это равенство, достаточно проверить, что

$$\Gamma Th = \Gamma(I - \Omega K \Omega^*)Uh,$$

или

$$(B - M(i)^*)^{-1}(B - M(i))\Gamma h = \Gamma Uh - \Gamma \Omega K \Omega^* Uh.$$

Поскольку $\Gamma Uh = \Gamma h$ и $\Gamma\Omega = I$, последнее соотношение равносильно равенству

$$K\Omega^* Uh = \Gamma h - (B - M(i)^*)^{-1}(B - M(i))\Gamma h.$$

Правая часть равна $(B - M(i)^*)^{-1} \cdot 2i \operatorname{Im} M(i)\Gamma h$, и с учетом формулы (3.13) остается показать, что

$$K\Omega^* Uh = 2i(B - M(i)^*)^{-1}\Omega^*\Omega\Gamma h.$$

Поскольку $h \in \ker(\mathcal{L} - iI)$, с помощью леммы 3.3 и соотношения (3.9) получаем, что $\Omega\Gamma h = Uh$, и требуемое соотношение, очевидно, выполнено для

$$K = 2i(B - M(i)^*)^{-1}.$$

Напомним, что функция Φ задается формулой (3.15). Согласно общей схеме, требуется вычислить функцию F, $F(\lambda) = (I - K\Phi(\lambda))^{-1}K$. Имеем

$$\begin{aligned} I - K\Phi(\lambda) =& I - 2i(B - M(i)^*)^{-1} \cdot \frac{i}{2}\left(M(i)^* - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right) \\ =& (B - M(i)^*)^{-1}\left(B - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} F(\lambda) =& \left(B - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)^{-1}(B - M(i)^*) \cdot 2i(B - M(i)^*)^{-1} \\ =& 2i\left(B - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Для функции Rh по формуле (3.14) имеем

$$(Rh)(\lambda) = \int \frac{zh(z)}{z-\lambda}\, d\mathcal{W}(z), \tag{3.18}$$

где $h(z)$ – значения функции из пространства $L^2(\mathcal{W})$, соответствующей вектору h в смысле отождествления из теоремы 3.2. Согласно теореме 3.2, все операторы $\Omega(z)$ равны тождественному оператору: $\Omega(z) \equiv I$.

Теперь *условие* 4) *теоремы* 17 *переписывается следующим образом: операторы* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *ограничены тогда и только тогда, когда ограничены отображения из пространства* $L^2(\mathcal{W})$ *в его абсолютно непрерывную часть – пространство* $L^2(\mathcal{W}_{ac})$ E*-значных функций, сопоставляющие функции* $h \in L^2(\mathcal{W})$ *граничные значения функции* Rh *изнутри круга, см. формулу* (3.18)*, умноженные (слева) на функции* F_+ *и* F_-^* *соответственно*, где F_+ и F_- – граничные значения функции F, заданной формулой (3.17), соответственно изнутри и извне единичного круга.

В предложенную выше схему вкладывается результат работы [50], где изучается оператор двукратного дифференцирования на вещественной оси, домноженный на функцию $\operatorname{sign} x$, и доказывается, что он подобен самосопряжённому оператору. Обобщение этого результата было получено в статье [36], где вместо оператора двукратного дифференциирования рассматривались операторы Шрёдингера и были доказаны условия, достаточные для подобия самосопряжённому оператору. В обеих статьях изучаемые операторы удобно рассмотреть как расширение (гладкую склейку) прямой суммы симметрических операторов, заданных на полуосях. Предложенный выше метод позволяет включить указанные результаты в общую схему разрешения вопроса о подобии самосопряжённому оператору несамосопряжённых расширений симметрических операторов.

4 Возмущения изометрической полугруппы сдвигов на полуоси и группы сдвигов на оси

4.1 Возмущения изометрической полугруппы сдвигов на полуоси

Рассмотрим изометрическую полугруппу сдвигов $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$(\tau_t f)(x) = \begin{cases} f(x-t), & x \geqslant t, \\ 0, & x < t, \end{cases} \qquad f \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

В этом параграфе рассматриваются возмущения $(\tilde{\tau}_t)$ полугруппы (τ_t), обладающие следующими свойствами:

$(\tilde{\tau}_t)_{t\geqslant 0}$ – сильно непрерывная полугруппа изометрических операторов на $L^2(\mathbb{R}_+)$;

разность $\tilde{\tau}_t - \tau_t$ принадлежит некоторому идеалу Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$ при всех $t > 0$.

Основная задача – описать все возможные спектральные типы возмущенных изометрических полугрупп. Спектральный тип полугруппы однозначно определяет полугруппу с точностью до унитарной эквивалентности; он определяется спектральным типом когенератора полугруппы (формальное определение будет дано ниже).

Будет установлено, что для унитарной компоненты в разложении Вольда–Колмогорова когенератора полугруппы $(\tilde{\tau}_t)_{t\geqslant 0}$ любой сингулярный спектральный тип может быть получен с помощью $\mathfrak{S}_1$-возмущений. Предлагается явная конструкция возмущения с заданным спектральным типом, построенная на основе теории модельных подпространств класса Харди H^2. Также показано, что при $p > 1$ возмущением класса $\mathfrak{S}_p$ можно получить любой предписанный спектральный тип унитарной компоненты возмущенной полугруппы.

При $p = 1$ из устойчивости абсолютно непрерывного спектра унитарной дилатации следует, что абсолютно непрерывные части когенераторов унитарных дилатаций полугрупп (τ_t) и $(\tilde{\tau}_t)$ унитарно эквивалентны (подробнее см. ниже). Когенератор полугруппы (τ_t) унитарно эквивалентен оператору одностороннего сдвига в пространстве Харди H^2. Таким образом, при $p = 1$ задача сводится к описанию всех возможных сингулярных частей, и будет показано, что любой сингулярный тип может быть реализован некоторой полугруппой $(\tilde{\tau}_t)_{t\geqslant 0}$. Для $p = 2$ в статьях [7, 8] было показано, что у унитарной компоненты возможен любой спектральный тип; для случая сингулярной спектральной меры была также построена модель таких возмущений. Здесь мы покажем, что подобные результаты справедливы и при всех $p > 1$.

Одна из возможных мотиваций данного исследования связана с марковскими возмущениями унитарной группы сдвигов. Полугруппа $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ представляет собой сужение на $L^2(\mathbb{R}_+)$ унитарной группы сдвигов $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$, $(\gamma_t f)(x) = f(x-t)$, действующей в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ на всей прямой (при отождествлении пространств $L^2(\mathbb{R}_+)$ и $L^2(\mathbb{R}_-)$ с подпространствами функций из $L^2(\mathbb{R})$, тождественно равных нулю на полуосях $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно). Рассмотрим возмущенную унитарную группу $(\tilde{\gamma}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ и предположим, что она обладает так называемым марковским свойством, которое означает, что возмущенные операторы совпадают с невозмущенными на левой полуоси $\mathbb{R}_-$ при $t < 0$, т.е.

$$\tilde{\gamma}_t f = \gamma_t f, \quad \text{если} \quad f = 0 \ \text{ на } \ \mathbb{R}_+, \quad t < 0. \tag{4.1}$$

Как обычно, марковское свойство может быть интерпретировано в том смысле, что „прошлое не зависит от будущего“. Марковские возмущения с дополнительным свойством $\tilde{\gamma}_t - \gamma_t \in \mathfrak{S}_2$, $t \in \mathbb{R}$, были исследованы в статье [41] в связи с изучением коциклических возмущений потока сдвигов Пауэрса [43]. Вопросу о возможности выполнения свойств $\tilde{\gamma}_t - \gamma_t \in \mathfrak{S}_p$ при $p < 2$ будет посвящена следующая глава диссертации.

4.1.1 Унитарные группы, изометрические полугруппы и их когенераторы

Напомним основные свойства генераторов и когенераторов сильно непрерывных унитарных групп и их аналоги для изометрических полугрупп. Подробное изложение этих вопросов можно найти в [18, 35, 37].

Генератором A сильно непрерывной унитарной группы $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ называют оператор, определенный как $Ax = \lim_{t\to 0}\frac{U_t - I}{t}x$ на множестве тех векторов x, для которых предел существует. Тогда оператор iA самосопряжен и $U_t = \exp(tA)$. Когенератором группы $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ называют унитарный оператор $B = (A+I)(A-I)^{-1}$. Для того чтобы унитарный оператор был когенератором некоторой унитарной группы, необходимо и достаточно, чтобы его точечный спектр не содержал точку 1. Элементы группы выражаются через ее когенератор B по формуле

$$U_t = \varphi_t(B), \tag{4.2}$$

где

$$\varphi_t(z) = \exp\Big(t\frac{z+1}{z-1}\Big). \tag{4.3}$$

Более того, поскольку

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi_t(z)\,dt = \frac{1-z}{2},$$

получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}U_t\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi_t(B)\,dt = \frac{I-B}{2},$$

следовательно, когенератор может быть выражен через элементы группы при $t \geqslant 0$ как

$$B = I - 2\int_0^{+\infty} e^{-t}U_t\,dt.$$

Предположим теперь, что дана сильно непрерывная полугруппа изометрических операторов $(V_t)_{t\geqslant 0}$ в гильбертовом пространстве H_0. Тогда можно рассмотреть ее унитарную дилатацию, т.е. унитарную группу $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$, действующую на большем пространстве H так, что подпространство H_0 инвариантно для U_t при $t > 0$, и $V_t = U_t|_{H_0}$, $t > 0$ (см. [35]). Если $t \geqslant 0$, то $\varphi_t \in H^\infty$. Поэтому подпространство H_0 инвариантно также и относительно когенератора B группы (U_t), и естественно определить когенератор изометрической полугруппы (V_t) как сужение оператора B на H_0. Формула (4.2) остается справедливой, если вместо операторов B и U_t, $t > 0$, применить ее к их сужениям на H_0.

Для рассматриваемых классов операторов спектральный тип оператора определяется как класс операторов, унитарно эквивалентных исходному. Поскольку унитарные группы и изометрические полугруппы однозначно определяются своими когенераторами, и наоборот, спектральный тип группы (полугруппы) естественно определить через спектральный тип ее когенератора. Для класса унитарных операторов спектральный тип определяется скалярной мерой на единичной окружности $\mathbb{T}$, относительно которой спектральная мера унитарного оператора абсолютно непрерывна, и целочисленной функцией на $\mathbb{T}$, подсчитывающей локальную кратность в почти каждой точке относительно заданной меры. Согласно разложению Вольда–Колмогорова для когенератора, каждая сильно непрерывная изометрическая полугруппа разлагается в прямую сумму унитарной и вполне неунитарной частей. Первая из них есть полугруппа унитарных операторов с индексами из $\mathbb{R}_+$, и она может быть естественным образом продолжена до унитарной группы с индексами из $\mathbb{R}$. Последняя есть полугруппа вполне неунитарных операторов, т.е. операторов, унитарно эквивалентных оператору одностороннего сдвига. Таким образом, спектральный тип изометрической полугруппы определяется спектральным типом когенератора ее унитарной части и кратностью одностороннего сдвига.

Следующее (возможно, известное) утверждение показывает, что кратность одностороннего сдвига сохраняется при компактных возмущениях полугруппы, а ядерные возмущения сохраняют абсолютно непрерывную часть когенератора. Для полноты изложения мы дадим краткое доказательство.

Лемма 4.1. *Пусть $(V_t)_{t\geqslant 0}$, $(\tilde{V}_t)_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывные полугруппы изометрических операторов в гильбертовом пространстве H.*

1) *Если оператор $\tilde{V}_t - V_t$ компактен для всех $t \geqslant 0$, то вполне неунитар-*

ные части полугрупп $(V_t)_{t\geqslant 0}$ и $(\tilde{V}_t)_{t\geqslant 0}$ унитарно эквивалентны, т.е. кратности сдвигов совпадают.

2) *Если $\tilde{V}_t - V_t \in \mathfrak{S}_1$ для всех $t \geqslant 0$, то абсолютно непрерывные унитарные части полугрупп $(V_t)_{t\geqslant 0}$ и $(\tilde{V}_t)_{t\geqslant 0}$ унитарно эквивалентны.*

Доказательство леммы 4.1. Докажем утверждение 1. Применяя следующее утверждение:

Пусть $T(t)$, $t \geqslant 0$, – сильно непрерывное семейство компактных операторов такое, что $\sup_{t\geqslant 0} \|T(t)\| < \infty$. Тогда оператор $\int_0^\infty e^{-t} T(t)dt$ компактен.

к $T(t) = \tilde{V}_t - V_t$, получаем, что оператор $\int_0^\infty e^{-t}(\tilde{V}_t - V_t)dt$ компактен. Это означает, что разность когенераторов полугрупп (V_t) и $(\tilde{V}_t)$ компактна. Следовательно, у когенераторов совпадают индексы Фредгольма, которые в точности равны кратностям сдвига.

Теперь докажем утверждение 2. Обозначим через Q подпространство, на котором когенератор полугруппы $(\tilde{V}_t)$ действует как абсолютно непрерывный унитарный оператор. Обозначим через Z естественное вложение подпространства Q в H. Из предположения $\tilde{V}_t - V_t \in \mathfrak{S}_1$ следует, что $Z(\tilde{V}_t|_Q) - \gamma_t Z \in \mathfrak{S}_1$, где $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — унитарная дилатация полугруппы (V_t). Тогда, согласно классической теории рассеяния для пары унитарных операторов, существует сильный предел изометрий $\gamma_t Z(\tilde{V}_t|_Q)^{-1}$ при $t \to +\infty$, определяющий изометрический волновой оператор W (см. [38, теорема 6.5.5]). По построению образ оператора W содержится в H и приводит группу (γ_t). Следовательно, оператор W осуществляет унитарную эквивалентность между сужением полугруппы $(\tilde{V}_t)$ на подпространство Q и некоторой унитарной частью полугруппы (V_t).

Мы показали, что абсолютно непрерывная унитарная часть полугруппы $(\tilde{V}_t)$ унитарно эквивалентна некоторой части полугруппы (V_t). Аналогично абсолютно непрерывная унитарная часть полугруппы (V_t) унитарно эквивалентна некоторой части полугруппы $(\tilde{V}_t)$. Тогда по спектральной теореме абсолютно непрерывные унитарные части полугрупп (V_t) и $(\tilde{V}_t)$ унитарно эквивалентны. $\square$

Отсюда немедленно получается следующее следствие для возмущений полугруппы сдвигов.

Следствие 4.2. *Пусть* $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ *— полугруппа сдвигов, а* $(\tilde{\tau}_t)_{t\geqslant 0}$ *— некоторая сильно непрерывная полугруппа изометрических операторов в* $L^2(\mathbb{R}_+)$.

1) *Если оператор* $\tilde{\tau}_t - \tau_t$ *компактен для всех* $t \geqslant 0$, *то существует унитарная группа* $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *такая, что полугруппа* $(\tilde{\tau}_t)$ *унитарно эквивалентна прямой сумме* $(\tau_t) \oplus (\omega_t)$, $t \geqslant 0$.

2) *Если к тому же* $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$ *при* $t \geqslant 0$, *то спектральная мера когенератора группы* (ω_t) *сингулярна.*

Для определяемой ниже модели на единичной окружности следствие 4.2 означает, что при условии $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_1$, $t > 0$, у оператора $\tilde{S}$ кратность сдвига равна 1, и спектральная мера его унитарного слагаемого обязательно сингулярна относительно меры Лебега.

4.1.2 Модель в пространстве H^2

Здесь иногда будет удобно работать на модели в классе Харди H^2 на единичной окружности $\mathbb{T}$, унитарно эквивалентной исходной (см. §4.1.4). Полугруппа $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ унитарно эквивалентна действующей в пространстве H^2 полугруппе операторов умножения на функции φ_t, $t \geqslant 0$, где функции φ_t определены формулой (4.3).

В этом случае когенератором невозмущенной группы будет оператор одностороннего сдвига S, т.е. оператор умножения на независимую переменную z в H^2. Обозначим через $\tilde{S}$ когенератор возмущенной полугруппы; тогда ее элементы имеют вид $\varphi_t(\tilde{S})$.

Теперь введем новый параметр для нашей модели возмущений, а именно внутреннюю функцию θ в единичном круге (функцию $\theta \in H^2$ называют внутренней, если $|\theta| = 1$ почти везде на $\mathbb{T}$). Рассмотрим подпространство

$$K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2.$$

В дальнейшем нас интересуют возмущения $\tilde{S}$ оператора сдвига S со следующими свойствами:

(i) $\tilde{S}$ — оператор на H^2, диагональный относительно разложения $H^2 = K_\theta \oplus \theta H^2$;

(ii) $\tilde{S}$ действует на θH^2 как умножение на z;

(iii) сужение оператора $\tilde{S}$ на K_θ — унитарный оператор, и 1 не является его собственным числом.

Условия (i)–(iii) означают, что $\tilde{S}$ — изометрия, унитарная и вполне неунитарная части которой действуют на K_θ и θH^2 соответственно. Число 1 не принадлежит точечному спектру оператора $\tilde{S}$, и поэтому изометрическая полугруппа с когенератором $\tilde{S}$ определена корректно.

Теперь сформулируем результаты этой главы. Первый из них состоит в том, что любое сингулярное слагаемое V может быть получено с помощью ядерного возмущения полугруппы сдвигов в терминах модели на окружности.

Предложение 4.3. *Пусть V — сингулярный унитарный оператор спектральной кратности $n \leqslant \infty$, для которого 1 не является собственным числом, и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся внутренняя функция θ и оператор $\tilde{S}$ со свойствами* (i)–(iii) *такие, что*

a) *сужение оператора $\tilde{S}$ на K_θ унитарно эквивалентно оператору V;*

b) $\operatorname{rank}(\tilde{S} - S) \leqslant n$;

c) $||\tilde{S} - S||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \varepsilon$;

d) $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_1$ *при всех $t > 0$.*

Как следствие предложения 4.3 получаем следующий результат для возмущений полугруппы сдвигов на полуоси.

Теорема 18. *Пусть $(\tau_t)_{t \geqslant 0}$ — полугруппа сдвигов на $L^2(\mathbb{R}_+)$.*

1) *Если $(\tilde{\tau}_t)$ — изометрическая полугруппа такая, что $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$ при всех $t \geqslant 0$, то когенератор полугруппы $(\tilde{\tau}_t)$ унитарно эквивалентен прямой сумме оператора простого (т.е. однократного) сдвига и унитарного оператора с сингулярной спектральной мерой.*

2) *Для произвольного сингулярного унитарного оператора* V *с единственным ограничением, что число* 1 *не принадлежит его точечному спектру, существует изометрическая полугруппа* $(\tilde{\tau}_t)$, *когенератор которой унитарно эквивалентен прямой сумме оператора простого одностороннего сдвига в* H^2 *и оператора* V, *причём для всех* $t \geqslant 0$ *выполнено соотношение* $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$.

В качестве еще одного следствия предложения 4.3 получается, что для $p > 1$ аналогичное утверждение верно и без предположения, что унитарный оператор V сингулярен.

Следствие 4.4. *Пусть* V *— унитарный оператор такой, что* 1 *не является его собственным числом. Тогда найдутся внутренняя функция* θ *и оператор* $\tilde{S}$ *со свойствами* (i)–(iii) *такой, что сужение оператора* $\tilde{S}$ *на* K_θ *унитарно эквивалентно оператору* V, *и* $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_p$ *при всех* $p > 1$.

В случае $p = 2$ аналоги предложения 4.3 и следствия 4.4 были доказаны в статьях [7, 8]. Здесь будут также отдельно рассмотрены результаты о классе $\mathfrak{S}_2$, так как в терминах нашей модели их доказательства существенно упрощаются, и можно ожидать, что найденные условия точны. Существенно новые результаты связаны с более узкими классами $\mathfrak{S}_p$ при $p < 2$ и, в особенности, при $p = 1$.

В статьях [42, 7] конструкция оператора $\tilde{S}$ была основана на результатах Ахерна и Кларка о триангуляции [40]. Вместо этого здесь используется конструкция Кларка [49], устанавливающая изометрическое соответствие между пространством K_θ и пространством $L^2(\mu)$ для некоторой сингулярной меры μ на единичной окружности. Этот подход позволяет связать аппроксимационные свойства разности $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$ с дифференциальными свойствами меры μ.

Положение существенно меняется, если перейти к „естественной“ унитарной дилатации возмущенного оператора $\tilde{S}$ со свойствами (i)–(iii) (см. §4.1.1). Пусть U — оператор двустороннего сдвига в $L^2(\mathbb{T})$ и пусть $\tilde{U}$ — дилатация оператора $\tilde{S}$ с марковским свойством, т.е. такая, что $\tilde{U}^*$ совпадает с U^* на H^2_-.

Оказывается, что в этом случае $\varphi_t(\tilde U)-\varphi_t(U)$ никогда не будет принадлежать идеалу $\mathfrak{S}_1$. Однако для любого унитарного оператора V найдутся оператор $\tilde S$ со свойствами (i)–(iii) и марковская унитарная дилатация $\tilde U$ оператора $\tilde S$ такие, что сужение оператора $\tilde S$ на K_θ унитарно эквивалентно оператору V, а $\varphi_t(\tilde U)-\varphi_t(U)\in\mathfrak{S}_p$ при всех $p>1$. Унитарные дилатации будут подробно рассмотрены в следующей главе.

В первую очередь будет рассмотрен случай, когда V — сингулярный унитарный оператор спектральной кратности 1, и для него строится конструкция Кларка. Модель определяется внутренней функцией θ, или сингулярной мерой μ на окружности, связанной с мерой μ соотношением (4.4) ниже, или соответствующей сингулярной мерой ν на вещественной прямой. При этом $\operatorname{rank}(\tilde S-S)=1$. Будут найдены условия на меры μ, ν, при которых операторы $\varphi_t(\tilde S)-\varphi_t(S)$ принадлежат $\mathfrak{S}_2$ или $\mathfrak{S}_1$ при всех $t>0$. С использованием свойств мер μ, ν из нашей конструкции сначала будет доказано предложение 4.3 в частном случае кратности 1, из которого затем будет выведен результат в общем случае. Затем теорема 18 и следствие 4.4 будут выведены из предложения 4.3.

4.1.3 Пространства K_θ и модельная конструкция

Здесь будет предложена специальная модель возмущения, удовлетворяющего условиям (i)–(iii), связанная с сингулярной мерой μ на единичной окружности $\mathbb{T}$ и с внутренней функцией θ, порожденной мерой μ.

Пусть μ — мера на $\mathbb{T}$, сингулярная относительно меры Лебега m, и $\mu(\{1\})=0$. Определим функцию θ формулой

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)}=\int_{\mathbb{T}}\frac{1+\bar\xi z}{1-\bar\xi z}\,d\mu(\xi),\quad z\in\mathbb{D}.\tag{4.4}$$

Хорошо известно, что θ — внутренняя функция. Мера μ является мерой Кларка функции Θ и сосредоточена на множестве, на котором функция θ имеет некасательные граничные значения, равные 1.

Для $u \in L^2(\mu)$ положим

$$(\Omega u)(z) = (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{u(\xi)d\mu(\xi)}{1-\bar{\xi}z}. \tag{4.5}$$

Как показал Кларк [49], Ω — унитарный оператор, действующий из $L^2(\mu)$ на K_θ. Более того, некасательные граничные значения функции Ωu существуют и совпадают с u μ-почти везде [33]. Аналоги этих результатов для пространств векторнозначных функций можно найти в [95].

Здесь символ V обозначает оператор умножения на независимую переменную ξ в пространстве $L^2(\mu)$. Отметим, что 1 не будет собственным числом оператора V, так как $\mu(\{1\}) = 0$. Найдем формулу для унитарно эквивалентной пересадки $\Omega V \Omega^*$ оператора V в пространство K_θ. Для $h = \Omega u$, $u \in L^2(\mu)$, имеем

$$\begin{aligned}(\Omega V \Omega^* h)(z) - zh(z) &= (\Omega V u)(z) - z(\Omega u)(z) \\ &= (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{(\xi - z)u(\xi)d\mu(\xi)}{1-\bar{\xi}z} \\ &= (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \xi u(\xi) d\mu(\xi).\end{aligned}$$

Учитывая, что $\int_{\mathbb{T}} \xi u(\xi) d\mu(\xi) = (u, \bar{\xi})_{L^2(\mu)} = (h, \Omega\bar{\xi})_{K_\theta}$, получаем

$$\Omega V \Omega^* h = zh + (h,g)(1-\theta), \quad h \in K_\theta,$$

где $g = \Omega\bar{\xi} \in K_\theta$ (нетрудно проверить, что $g(z) = \frac{\theta(z)-\theta(0)}{z(1-\theta(0))}$, однако в дальнейшем это не будет использоваться).

Напомним, что символ S обозначает оператор сдвига на H^2, и определим оператор $\tilde{S}$ на H^2 как

$$\tilde{S} = S + (\cdot, g)(1-\theta). \tag{4.6}$$

Тогда K_θ — инвариантное подпространство оператора $\tilde{S}$, и сужение $\tilde{S}$ на K_θ унитарно эквивалентно V. Очевидно, операторы $\tilde{S}$ и S совпадают на θH^2. Итак, имеет место следующее предложение.

Предложение 4.5. *Оператор $\tilde{S}$, определенный формулой (4.6), обладает свойствами* (i)–(iii)*; сужение оператора $\tilde{S}$ на K_θ унитарно эквивалентно* *оператору V умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\mu)$. Таким образом, оператор $\tilde{S}$ унитарно эквивалентен оператору $S \oplus V$.*

Оператор $\tilde{S}$ отличается от умножения на z на оператор ранга 1: $\tilde{S} - S = (\cdot, g)(1-\theta)$, для нормы которого имеем

$$\|\tilde{S} - S\| = \|g\|_{K_\theta} \cdot \|1-\theta\|_{H^2} = \|\bar{\xi}\|_{L^2(\mu)} \cdot \|1-\theta\|_{H^2} < 2\sqrt{\mu(\mathbb{T})}. \tag{4.7}$$

Как правило, мы будем работать с мерами μ, удовлетворяющими дополнительному соотношению

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2} < \infty. \tag{4.8}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\mu(\{1\}) = 0$. Условие (4.8) хорошо известно в теории внутренних функций и модельных пространств. Оно равносильно любому из следующих утверждений (см., например, [75, гл. VI]):

(i) функция θ, определенная формулой (4.4), имеет конечную некасательную производную в точке 1;

(ii) каждая функция из K_θ имеет в точке 1 конечный некасательный предел.

При этом функция $\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta}{1-z}$ принадлежит K_θ и является воспроизводящим ядром в точке 1,

$$\left\|\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta}{1-z}\right\|^2_{K_\theta} = \left\|\frac{1-\overline{\theta(1)}}{1-z}\right\|^2_{L^2(\mu)} < 4\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2}.$$

4.1.4 Эквивалентные модели

Исходная конструкция представляла собой модель сдвигов в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$. Здесь будут рассматриваться также и другие модели, унитарно эквивалентные исходной.

Эквивалентная модельная конструкция на вещественной прямой может быть получена из модели сдвигов в $L^2(\mathbb{R}_+)$ применением преобразования Фурье. Оно переводит пространство $L^2(\mathbb{R}_+)$ в класс Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$ в верхней полуплоскости. Изометрическая группа сдвигов $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ переходит в полугруппу операторов умножения на функции $\exp(itz)$.

В случае модели на единичной окружности $\mathbb{T}$ мы также работаем с пространством Харди H^2, рассматриваемом как подпространство в L^2. В обозначениях L^2, H^2 мы опускаем обозначения для меры, подразумевая, что речь идет о нормированной мере Лебега m на $\mathbb{T}$, $m(\mathbb{T}) = 1$. Оператор S умножения на независимую переменную z будет когенератором невозмущенной изометрической полугруппы, которая состоит из операторов вида $\varphi_t(S)$, где функция φ определена формулой (4.3). Иными словами, невозмущенная полугруппа в H^2 есть полугруппа операторов умножения на внутренние функции φ_t, $t \geqslant 0$.

Теперь приведем ряд формул, устанавливающих унитарную эквивалентность моделей на единичной окружности $\mathbb{T}$ и на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Для переменной $z \in \mathbb{T}$ положим $x = i\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$. С мерой μ на $\mathbb{T}$ свяжем меру ν на $\mathbb{R}$,

$$d\mu(z) = \frac{d\nu(x)}{\pi(1+x^2)}. \tag{4.9}$$

Условие (4.8) равносильно тому, что $\nu(\mathbb{R}) < \infty$. Отображение

$$u \mapsto v, \quad v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)} \cdot u\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big) \tag{4.10}$$

является унитарным оператором из $L^2(\mu)$ на $L^2(\nu)$, а также из $L^2 = L^2(\mathbb{T})$ на $L^2(\mathbb{R})$; при этом класс Харди H^2 отображается на $H^2(\mathbb{C}_+)$. Функция $u \in L^2(\mu)$ выражается через $v \in L^2(\nu)$ по формуле

$$u(z) = \frac{2i\sqrt{\pi}}{1-z} \cdot v\Big(i\frac{1+z}{1-z}\Big).$$

4.1.5 Функции от операторов S и $\tilde{S}$

Пусть теперь $\tilde{S}$ — возмущение ранга 1 оператора S, определенное формулой (4.6). Возьмем функцию $\varphi \in H^\infty$, непрерывную вплоть до $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. Тогда операторы $\varphi(S)$ и $\varphi(\tilde{S})$ корректно определены.

На подпространстве θH^2 оператор $\tilde{S}$ совпадает с S и, следовательно, $\varphi(\tilde{S})$ совпадает с $\varphi(S)$. Таким образом, необходимо исследовать только сужение разности $\varphi(\tilde{S}) - \varphi(S)$ на подпространство K_θ, что делает естественным рассмотрение оператора

$$X : L^2(\mu) \to H^2, \quad X = (\varphi(\tilde{S}) - \varphi(S))\Omega, \tag{4.11}$$

где оператор Ω определен формулой (4.5). Возьмем $u \in L^2(\mu)$. Тогда

$$\begin{aligned}(Xu)(z) &= (1-\theta(z))\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\xi)u(\xi)}{1-\bar{\xi}z}d\mu(\xi) - \varphi(z)(1-\theta(z))\int_{\mathbb{T}} \frac{u(\xi)}{1-\bar{\xi}z}d\mu(\xi) \\ &= (1-\theta(z))\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(z)}{\xi - z}\xi u(\xi)d\mu(\xi), \quad u \in L^2(\mu).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Поскольку Ω — унитарный оператор из $L^2(\mu)$ на K_θ, оператор $\varphi(\tilde{S}) - \varphi(S)$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_p$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathfrak{S}_p$, при этом их $\mathfrak{S}_p$-нормы совпадают.

Равенство (4.10) устанавливает унитарную эквивалентность между $L^2(\mu)$ и $L^2(\nu)$, а также между H^2 и $H^2(\mathbb{C}_+)$. Используя это отождествление, определим оператор $Y : L^2(\nu) \to H^2(\mathbb{C}_+)$ как унитарную пересадку оператора X. Имеем

$$\begin{aligned}(Yv)(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)}(Xu)\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)} \cdot (1-\theta(z))\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(z)}{\xi - z}\xi u(\xi)d\mu(\xi) \\ &= (1-\Theta(x)) \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(\zeta)-\psi(x)}{\zeta - x}v(\zeta)d\nu(\zeta), \quad v \in L^2(\nu),\end{aligned} \tag{4.13}$$

где

$$\psi(x) = \varphi\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big), \quad \Theta(x) = \theta\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big), \quad x \in \mathbb{C}_+.$$

Отметим, что в том случае, когда функция θ определена равенством (4.4), для функции Θ справедливо соотношение

$$\frac{1+\Theta(x)}{1-\Theta(x)} = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{\zeta - x} - \frac{\zeta}{1+\zeta^2}\Big)d\nu(\zeta), \quad x \in \mathbb{C}_+.$$

Следующее предложение напрямую вытекает из определения оператора Y.

Предложение 4.6. *Операторы $\varphi(\tilde{S}) - \varphi(S)$ и Y принадлежат или не принадлежат идеалам $\mathfrak{S}_p$ одновременно, и $||\varphi(\tilde{S}) - \varphi(S)||_{\mathfrak{S}_p} = ||Y||_{\mathfrak{S}_p}$.*

4.1.6 Оценки нормы Гильберта–Шмидта

Определим интегральный оператор $K : L^2(\nu) \to H^2(\mathbb{C}_+)$ как

$$(Kv)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(\zeta) - \psi(x)}{\zeta - x} v(\zeta) d\nu(\zeta), \quad v \in L^2(\nu). \tag{4.14}$$

Если $K \in \mathfrak{S}_p$, то также и $Y \in \mathfrak{S}_p$, и, очевидно,

$$\|Y\|_{\mathfrak{S}_p} \leqslant 2 \cdot \|K\|_{\mathfrak{S}_p}. \tag{4.15}$$

Для нормы оператора K в идеале $\mathfrak{S}_2$ получаем

$$\|K\|_{\mathfrak{S}_2}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \left| \frac{\psi(\zeta) - \psi(x)}{\zeta - x} \right|^2 dx\, d\nu(\zeta). \tag{4.16}$$

Рассмотрим полугруппы вида $(\varphi_t(S))$, $(\varphi_t(\tilde{S}))$, где $\varphi_t(z) = \exp(t\frac{z+1}{z-1})$, $t > 0$. Соответствующие функции ψ_t имеют вид

$$\psi_t(x) = \varphi_t\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big) = e^{itx}.$$

Теперь сформулируем условие на меру ν, обеспечивающее принадлежность оператора K классу Гильберта–Шмидта сразу для всех t. Для этого будет получена точная формула для интеграла (4.16) с $\psi = \psi_t$; это даст условие, достаточное для включения $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_2$ при всех t.

Предложение 4.7. *Предположим, что выполнено условие (4.8). Тогда для всех $t > 0$ имеем*

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \left| \frac{\psi_t(\zeta) - \psi_t(x)}{\zeta - x} \right|^2 dx\, d\nu(\zeta) = 2\pi t \cdot \nu(\mathbb{R}) = 8\pi^2 t \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2} < \infty. \tag{4.17}$$

Доказательство. Используя формулу $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \alpha s}{s^2} ds = \pi|\alpha|$, для интеграла по мере Лебега в левой части равенства (4.17) получим

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{it\zeta} - e^{itx}|^2}{(\zeta - x)^2} dx = 4 \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}(\zeta - x)}{(\zeta - x)^2} dx = 2\pi t.$$

Правое равенство в (4.17) вытекает из соотношения $\nu(\mathbb{R}) = 4\pi \int \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2}$. $\square$

Следствие 4.8. *Если μ удовлетворяет условию (4.8), то*

$$\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_2$$

при всех $t > 0$;

$$\|\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant 2\sqrt{2t}\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2}\right)^{1/2}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Утверждение немедленно вытекает из предложения 4.6 и соотношений (4.15), (4.16) и (4.17). □

В §4.1.7 будет найдено некоторое условие „малости“ меры μ в точке 1 (см. (4.21)), достаточное для принадлежности оператора $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$ классу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$.

Из представления (4.13) оператора Y в виде интегрального оператора следует, что $Y \in \mathfrak{S}_2$ тогда и только тогда, когда

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |1-\Theta(x)|^2 \left|\frac{\psi(\zeta)-\psi(x)}{\zeta - x}\right|^2 dx d\nu(\zeta) < \infty.$$

Можно ожидать, что условие $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, эквивалентное условию (4.8), будет также и необходимым для включения $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_2$, т.е. множитель $1 - \Theta(z)$ не влияет существенно на сходимость интеграла в формуле (4.16).

Известен пример такой меры ν на прямой, что оператор $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$ не принадлежит классу Гильберта–Шмидта при всех $t \neq 0$. Напомним, что $\tilde{S} - S$ — оператор ранга 1, и его норму можно сделать сколь угодно малой.

4.1.7 Оценки для ядерной нормы

В этом параграфе вместо класса Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2$ будут рассматриваться идеалы $\mathfrak{S}_p$ при $p < 2$ и, прежде всего, класс ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$. Согласно соотношению (4.15), чтобы доказать, что $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_p$, достаточно показать, что $K \in \mathfrak{S}_p$, где оператор K определен формулой (4.14) при $\psi = \psi_t$, $\psi_t(x) = e^{itx}$. Мы сведем этот вопрос к задаче о вложениях пространства Пэли–Винера $\mathcal{P}W_t$ целых функций экспоненциального типа не выше t, квадратично суммируемых на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Операторы вложения пространств аналитических функций и их принадлежность идеалам $\mathfrak{S}_p$ были подробно исследованы О. Г. Парфеновым [30, 31]. В статье [9] получены обобщения результатов Парфенова для коинвариантных подпространств K_θ.

Рассмотрим оператор, сопряженный к оператору K, заданному формулой (4.14) при $\psi = \psi_t$, $\psi_t(x) = e^{itx}$:

$$(K^*f)(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{-it\zeta} - e^{-itx}}{\zeta - x} f(x)dx$$
$$= e^{-\frac{it\zeta}{2}} \int e^{-\frac{itx}{2}} f(x)\Big(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}(x-\zeta)}{x-\zeta}\Big)dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Хорошо известно, что функция $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}(x-\zeta)}{x-\zeta}$ является воспроизводящим ядром в точке ζ для пространства $\mathcal{P}W_{t/2}$, что означает, что эта функция принадлежит пространству $\mathcal{P}W_{t/2}$, и скалярное произведение любой функции f из $\mathcal{P}W_{t/2}$ с воспроизводящим ядром равно $f(\zeta)$. Поэтому $K^*f = 0$, если функция $\tilde f$, $\tilde f(x) = e^{-\frac{itx}{2}} f(x)$, ортогональна пространству $\mathcal{P}W_{t/2}$. Если $\tilde f \in \mathcal{P}W_{t/2}$, то

$$(K^*f)(\zeta) = e^{-\frac{it\zeta}{2}}\cdot \tilde f(\zeta) = e^{-it\zeta} f(\zeta).$$

Отсюда видно, что оператор K^* принадлежит или не принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_p$ одновременно с оператором $E_{\nu,t/2}$, осуществляющим вложение пространства $\mathcal{P}W_{t/2}$ в $L^2(\nu)$.

Следующий критерий был найден О. Г. Парфеновым [30, 31].

Теорема 4.9. *Пусть* $\Delta_n = [n, n+1)$. *Тогда* $E_{\nu,t} \in \mathfrak{S}_p$, $p > 0$, *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\nu(\Delta_n)\big)^{p/2} < \infty. \tag{4.19}$$

При этом

$$\|E_{\nu,t}\|^p_{\mathfrak{S}_p} \leqslant C(p)\, t^{p/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\nu(\Delta_n)\big)^{p/2}. \tag{4.20}$$

Если вернуться к мере μ на $\mathbb{T}$, то условие (4.19) переписывается как

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{\gamma_n} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2}\Big)^{p/2} < \infty,$$

где дуги γ_n определены при $n > 0$ как $\gamma_n = \{e^{i\varphi} : \pi/(n+1) \leqslant \varphi \leqslant \pi/n\}$ и симметричным образом при $n < 0$.

Получим условие, аналогичное по форме условию (4.8) и достаточное для соотношения (4.19), а значит, и для включения $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_p$.

Предложение 4.10. *Пусть $0 < p < 2$. Если мера μ удовлетворяет условию*

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^q} < \infty \tag{4.21}$$

для некоторого $q > 1 + 2/p$, то $K \in \mathfrak{S}_p$ и, следовательно,

$$\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_p.$$

В частности, из (4.21) при $q > 3$ следует, что $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_1$, причем

$$\|\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant M_q \cdot t^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^{\,q}} \right)^{1/2}, \tag{4.22}$$

где константа M_q зависит только от q.

Доказательство. Перепишем условие (4.21) в терминах меры ν, определенной формулой (4.9):

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2+1)^{r/2} d\nu(x) = 2^q \pi \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^q} < \infty, \tag{4.23}$$

где $r = q - 2 > (2-p)/p$. Тогда по неравенству Гёльдера с показателями $2/p$ и $2/(2-p)$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\nu(\Delta_n)\big)^{p/2} \right)^{2/p} &\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (|n|+1)^{-pr/(2-p)} \right)^{(2-p)/p} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} (|n|+1)^r \, \nu(\Delta_n) \\ &= \mathrm{const} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} (|n|+1)^r \, \nu(\Delta_n) \\ &\leqslant \mathrm{const} \cdot \int_{\mathbb{R}} (|t|+1)^r d\nu(t). \end{aligned}$$

Теперь утверждение следует из теоремы Парфенова и неравенства (4.20). $\square$

Показатель 3 точен, и для $q = 3$ второе утверждение предложения перестает быть верным. В самом деле, выберем ν так, чтобы $\nu(\Delta_n) = \big((|n|+1)\log(|n|+2)\big)^{-2}$. Тогда условие (4.23) выполнено, но (4.19) не выполнено, и потому оператор K не принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1$.

4.1.8 Операторы кратности > 1

Теперь применим приведенную выше конструкцию для случая кратности 1 для распространения полученного результата на случай произвольной кратности.

Пусть $\{\mu_n\}$ — семейство сингулярных мер на единичной окружности, где n пробегает либо конечное множество $\{1, 2, \dots, N\}$ для некоторого натурального N, либо весь натуральный ряд $\mathbb{N}$. Будем предполагать, что для некоторого $q > 3$

$$\sum_n \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_n(\xi)}{|1-\xi|^q} \right)^{1/2} < \infty. \tag{4.24}$$

Для каждого n построим, как в §4.1.3, функцию θ_n, определенную формулой (4.4) с μ_n вместо μ. Пусть оператор $\Omega_n : L^2(\mu_n) \to K_{\theta_n}$ действует по формуле (4.5) с $g_n = \Omega_n \bar{\xi}$, а V_n — оператор умножения на z в пространстве $L^2(\mu_n)$. Положим

$$\hat{\theta}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \theta_k.$$

Оператор $\Omega : \sum \oplus L^2(\mu_n) \to H^2$ зададим как

$$\Omega\left(\sum \oplus u_n \right) = \sum \hat{\theta}_n \Omega_n u_n.$$

Поскольку условие (4.24) выполнено для некоторого $q > 3$, оно справедливо и для $q = 2$. Следовательно,

$$\sum_n \left\| \frac{1 - \overline{\theta_n(1)}\theta_n}{1-z} \right\|_{L^2} < 2 \sum_n \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_n(\xi)}{|1-\xi|^2} \right)^{1/2} < \infty. \tag{4.25}$$

Поэтому ряд

$$\sum_n \overline{\hat{\theta}_n(1)}\hat{\theta}_n \frac{(1 - \overline{\theta_n(1)}\theta_n)}{1-z}$$

сходится в пространстве L^2. Его частичные суммы имеют вид $\frac{1-\overline{\hat{\theta}_n(1)}\hat{\theta}_n}{1-z}$. Таким образом, его сумма может быть записана как $\frac{1-\theta}{1-z}$ для внутренней функции θ, совпадающей с произведением функций θ_n с точностью до умножения на константу, по модулю равную единице. Легко видеть, что оператор Ω изометрично отображает $\sum \oplus L^2(\mu_n)$ на K_θ.

Определим оператор $\tilde{S}$ в пространстве H^2 формулой

$$\tilde{S} = S + \sum_n (\cdot, \hat{\theta}_n g_n)\, \hat{\theta}_n \cdot (1 - \theta_n), \tag{4.26}$$

обобщающей определение (4.6). Тогда оператор $\tilde{S}$ диагонален относительно разложения $H^2 = \sum \oplus \hat{\theta}_n K_{\theta_n} \oplus \theta H^2$. В самом деле, операторы $\tilde{S}$ и S совпадают на θH^2, а на каждом из подпространств $\hat{\theta}_n K_{\theta_n}$ оператор $\tilde{S}$ является унитарной пересадкой оператора умножения на z в $L^2(\mu_n)$. Для $f = \Omega_n u \in K_{\theta_n}$ имеем $\tilde{S}(\hat{\theta}_n f) = \hat{\theta}_n \Omega_n(zu) \in \hat{\theta}_n K_{\theta_n}$.

Таким образом, оператор $\tilde{S}$ удовлетворяет условиям (i)–(iii). Аналогично оценке (4.7) получаем оценку для ядерной нормы разности $\tilde{S} - S$:

$$\|\tilde{S} - S\|_{\mathfrak{S}_1} < 2 \sum_n \sqrt{\mu_n(\mathbb{T})}. \tag{4.27}$$

Чтобы оценить ядерную норму разности $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$, воспользуемся неравенством (4.22), которое дает нам соотношение

$$\|\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant M_q \cdot t^{1/2} \cdot \sum_n \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_n(\xi)}{|1 - \xi|^{\,q}} \right)^{1/2}. \tag{4.28}$$

Доказательство предложения 4.3. Возьмем произвольный унитарный оператор V, спектральная мера которого сингулярна относительно меры Лебега и не имеет нагрузки в точке 1. Тогда существуют такие сингулярные унитарные операторы V_n кратности 1, что $V = \oplus \sum V_n$. Рассмотрим меры μ_n такие, что каждый из операторов V_n унитарно эквивалентен умножению на независимую переменную ξ в пространстве $L^2(\mu_n)$. Можно считать, что меры μ_n удовлетворяют условию (4.24) при $q > 3$, и $\sum_n \sqrt{\mu_n(\mathbb{T})} < \varepsilon/2$; в противном случае эти свойства могут быть выполнены после умножения мер μ_n на подходящие положительные веса. Определим оператор $\tilde{S}$ по формуле (4.26). Тогда из условия (4.27) вытекает оценка $\|\tilde{S} - S\|_{\mathfrak{S}_1} < \varepsilon$, и для всех $t > 0$ оператор $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$ будет ядерным с оценкой для нормы (4.28). $\square$

Замечание 4.11. *Для нормы Гильберта–Шмидта из* (4.18) *следует оценка*

$$\|\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant 2\sqrt{2t}\left(\sum_n \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_n(\xi)}{|1-\xi|^2}\right)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы 18. Утверждение 1 получается как частный случай леммы 4.1. Утверждение 2 немедленно следует из предложения 4.3 после перехода к модели, связанной с полугруппой сдвигов на прямой. В самом деле, в конструкции из предложения 4.3 разности элементов полугрупп на пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ принадлежат классу ядерных операторов, что и требуется. □

Доказательство следствия 4.4. Пусть V — произвольный унитарный оператор такой, что 1 не является его собственным числом. Тогда $V = (A - iI)(A + iI)^{-1}$ для некоторого самосопряженного оператора A, а элементы полугруппы имеют вид $\varphi_t(V) = \exp(itA)$. Применяя вариант теоремы Вейля–фон Неймана, принадлежащий Куроде (см. [20] и [38, теорема 6.2.5]), к какому-либо симметрично нормированному идеалу, содержащемуся во всех классах $\mathfrak{S}_p$ с $p > 1$, по заданному самосопряженному оператору можно построить такой близкий к нему самосопряженный оператор с чисто точечным спектром, что разность между ним и исходным оператором принадлежит $\mathfrak{S}_p$ для всех $p > 1$, причем нормы могут быть сколь угодно малыми.

Представим оператор A как прямую сумму ограниченных операторов A_n и, применив теорему Куроды, построим операторы A'_n такие, что нормы $\|A_n - A'_n\|_{\mathfrak{S}_p}$ малы. Из результатов Дэвиса [51] вытекает, что $\exp(itA_n) - \exp(itA'_n)$ принадлежит всем классам $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Таким образом, мы можем построить самосопряженный оператор A' такой, что $\exp(itA) - \exp(itA')$ принадлежит всем классам $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Значит, это выполнено и для всех $t > 0$, поскольку из включения $\exp(itA) - \exp(itA') \in \mathfrak{S}_p$ следует включение $\exp(2itA) - \exp(2itA') \in \mathfrak{S}_p$. Теперь утверждение следует из предложения 4.3, примененного к унитарному оператору $V' = (A' - iI)(A' + iI)^{-1}$. □

4.2 Возмущения унитарной группы сдвигов на оси

В этой главе описывается конструкция возмущений полугруппы сдвигов на полупрямой, основанная на использовании теории модельных пространств. Показано, что подбирая внутреннюю функцию, определяющую модельное пространство, можно добиться того, что элементы возмущенной полугруппы будут отличаться от элементов исходной на заданные операторы класса Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$. Отдельно рассматривается случай возмущений класса со следом $\mathfrak{S}_1$.

4.2.1 Предварительные построения

Пусть $(\tau_t,\ t \geqslant 0)$ и $(\tau'_t,\ t \in \mathbb{R})$ – полугруппа сдвигов в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ и группа сдвигов (ее унитарная дилатация) в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, определенные формулами

$$(\tau_t f)(x) = \begin{cases} f(x-t), & x > t. \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant t, \end{cases} \qquad f \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

и

$$(\tau'_t g)(x) = g(x-t), \qquad g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Иногда удобно считать, что мультипликативная группа алгебры ограниченных операторов в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ вложена в мультипликативную группу алгебры операторов в $L^2(\mathbb{R})$ таким образом, что элементы первой действуют на функции с носителем на отрицательной полуоси как тождественное отображение. В этом смысле операторы, действующие в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, будут рассматриваться также и как операторы в $L^2(\mathbb{R})$. Сильно непрерывное семейство унитарных операторов $(W_t,\ t \geqslant 0)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ называется коциклом полугруппы сдвигов $(\tau_t,\ t \geqslant 0)$, если выполнено условие (см. [43])

$$W_{t+s} = W_t \tilde{\tau}_t W_s \tau'_{-t}, \quad t, s \geqslant 0, \qquad W_0 = I. \tag{4.29}$$

Из условия (4.29) вытекает, что семейство изометрических операторов

$$(\tilde{\tau}_t = W_t \tau_t,\ t \geqslant 0)$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ образует полугруппу (т.е. $\tilde{\tau}_{t+s} = \tilde{\tau}_t \tilde{\tau}_s,\, t, s \geqslant 0$), которую будем называть *коциклическим возмущением* полугруппы сдвигов $(\tau_t,\ t \geqslant 0)$.

В этой главе будет показано, что любое коциклическое возмущение $(\tilde{\tau}_t)$ полугруппы (τ_t) унитарно эквивалентно ортогональной сумме

$$(\tilde{\tau}_t) \cong (U_t \oplus \tau_t), \tag{4.30}$$

где $(U_t,\ t \geqslant 0)$ – полугруппа унитарных операторов, причем справедливы следующие два результата. Здесь и далее все рассматриваемые полугруппы предполагаются сильно непрерывными; символом $\mathfrak{S}_p$ обозначаются классы операторов Шаттена–фон Неймана.

Теорема 19. *Для любой группы унитарных операторов $(U_t, t \in \mathbb{R})$ со спектральной мерой, сингулярной относительно меры Лебега, найдётся коцикл $(W_t, t \geqslant 0)$, для которого $W_t - I \in \mathfrak{S}_p$ при всех $p > 1$, возмущённая группа унитарно эквивалентна ортогональной прямой сумме невозмущенной группы и группы $(U_t, t \in \mathbb{R})$, причём разности их элементов обладают свойством* $\tilde{\tau}_t' - \tau_t' \in \mathfrak{S}_p$ при всех $p > 1$.

Как следствие из теоремы 19 получается аналогичный результат для произвольной (не обязательно сингулярной) спектральной меры.

Следствие 4.12. *Для произвольной полугруппы унитарных операторов $(U_t,\ t \geqslant 0)$ и для любого $p > 1$ найдется коцикл $(W_t,\ t \geqslant 0)$, удовлетворяющий условию*

$$W_t - I \in \mathfrak{S}_p$$

для всех $p > 1$, для которого соотношение (4.30) выполняется для коциклического возмущения $(\tilde{\tau}_t = W_t \tau_t,\ t \geqslant 0)$.

Ниже будет показано (предложение 4.17), что в рассматриваемой нами модели коциклических возмущений условие $W_t - I \in \mathfrak{S}_1$ никогда не выполняется. Таким образом, результаты работы в определенном смысле неулучшаемы. Естественно предположить, что этот факт обобщается и на общий случай.

Гипотеза. Для любого коцикла $(W_t,\ t \geqslant 0)$ такого, что $W_t - I \in \mathfrak{S}_1$ при всех $t \geqslant 0$, возмущенная полугруппа $(\tilde{\tau}_t = W_t\tau_t,\ t \geqslant 0)$ унитарно эквивалентна исходной: $(\tilde{\tau}_t) \cong (\tau_t)$.

Отметим, что связанная с рассматриваемым вопросом задача о марковских коциклических возмущениях группы унитарных операторов была поставлена в [6], а в работах [7, 8] были построены марковские коциклы со свойством $W_t - I \in \mathfrak{S}_2,\ t \geqslant 0$. Свойство $\tilde{\tau}'_t - \tau'_t \in \mathfrak{S}_1$ рассматривалось в предыдущей главе, где изучались возмущения $(\tilde{\tau}_t,\ t \geqslant 0)$ полугруппы сдвигов $(\tau_t,\ t \geqslant 0)$, для которых $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_p,\ p \geqslant 1$. Отличие результатов этой главы состоит в том, что рассматриваемые возмущения обладают дополнительным свойством коцикличности, что требует рассмотрения унитарных дилатаций полугрупп.

Следующее свойство потребуется нам для построения модели коциклов.

Лемма 4.13. *Пусть* $(\tilde{\tau}_t,\ t \geqslant 0)$ *– коциклическое возмущение полугруппы сдвигов* $(\tau_t,\ t \geqslant 0)$ *коциклом* $(W_t,\ t \geqslant 0)$*. Тогда определив семейство унитарных операторов* $(W_{-t},\ t \geqslant 0)$ *в пространстве* $L^2(\mathbb{R}_+)$ *формулой*

$$W_{-t} = \tau'_{-t} W_t^* \tau_t, \qquad t \geqslant 0, \tag{4.31}$$

получим, что семейство операторов $(\tilde{\tau}'_t,\ t \in \mathbb{R})$*, где*

$$\tilde{\tau}'_t = W_t \tilde{\tau}_t,$$

образует группу унитарных операторов в пространстве $L^2(\mathbb{R})$*, причем*

$$\tilde{\tau}'_t f = \begin{cases} \tilde{\tau}_t f, & \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_+, \quad t \geqslant 0, \\ \tilde{\tau}_t f, & \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_-, \quad t \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказательство. Как и выше, будем считать, что действия унитарных операторов $W_t,\ t \geqslant 0$, заданные первоначально в пространстве H, продолжатся тождественным действием на функции f с носителем $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_-$. Тогда формула (4.31) задает продолжение семейства $(W_t,\ t \geqslant 0)$ унитарных операторов в $L^2(\mathbb{R}_+)$ для отрицательных значений параметра t. При этом остается выполненным свойство коцикла

$$W_{t+s} = W_t \tilde{\tau}_t W_s \tau'_{-t}, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

что следует из формулы

$$I = W_{-t+t} = W_{-t} \tau'_{-t} W_t \tilde{\tau}_t, \qquad t \geqslant 0,$$

вытекающей из определения (4.31). Для завершения доказательства осталось заметить, что если $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_-$, то

$$\tilde{\tau}'_{-t} f = W_{-t} \tau'_{-t} f = \tau'_{-t} W_t^* f = \tau'_{-t} f, \qquad t \geqslant 0.$$

□

4.2.2 Модель коциклического возмущения, основанная на когенераторе полугруппы

Напомним, что генератором сильно непрерывной полугруппы изометрических операторов $(\tilde{\tau}_t,\ t \geqslant 0)$ называют (возможно, неограниченный) симметрический оператор $A = s - \lim_{t \to 0+} \frac{\tilde{\tau}_t - I}{it}$, а когенератором полугруппы называют изометрический оператор $V = (A - iI)(A + iI)^{-1}$. Для того, чтобы изометрический оператор был когенератором некоторой изометрической полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы число 1 не принадлежало его точечному спектру. Исходная полугруппа будет состоять из унитарных операторов тогда и только тогда, когда A – самосопряженный оператор, или, что тоже самое, когда V является унитарным оператором, для которого точка 1 не принадлежит его точечному спектру. Если ввести функции

$$\varphi_t(z) = \exp\left(t \frac{z+1}{z-1}\right), \qquad t \geqslant 0, \tag{4.32}$$

то по когенератору V элементы полугруппы восстанавливаются по формуле $\tilde{\tau}_t = \varphi_t(V)$, $t \geqslant 0$. Отметим, что функции φ_t ограничены и аналитичны в единичном круге $\mathbb{D}$.

Оператор сдвига S в пространстве Харди задан формулой

$$(Sf)(z) = zf(z), \qquad f \in H^2. \tag{4.33}$$

Аналогичным образом, когенератор группы сдвигов в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ унитарно эквивалентен оператору (двустороннего) сдвига S' в пространстве $L^2(\mathbb{T})$.

Возьмём нетривиальное инвариантное подпространство оператора сдвига S в H^2; согласно теореме Берлинга (см. [63]) оно имеет вид, θH^2 для некоторой внутренней функции $\theta \in H^\infty$. Ортогональное дополнение

$$K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$$

является модельным пространством, рассматривавшимся выше. Таким образом, пространство Харди H^2 разбивается в прямую сумму:

$$H^2 = K_\theta \oplus \theta H^2.$$

Операторы, являющиеся когенераторами рассматриваемых здесь полугрупп, будут диагональными относительно этого разложения, и, более того, указанное разложение будет их разложением Вольда–Колмогорова: на θH^2 они будут совпадать с оператором умножения на независимую переменную, а их сужения на K_θ будут унитарными операторами. Для дилатаций получаем разложение

$$L^2 = H^2_- \oplus K_\theta \oplus \theta H^2,$$

причём сужение когенератора на H^2 сохраняет указанные свойства, и, кроме того, на H^2_- он действует естественным образом, что можно выразить следующей формулировкой: оператор, сопряжённый с когенератором возмущённой группы, действует на H^2_- как умножение на $\bar{z}$. В некотором достатчоно грубом смысле такие когенераторами задают общий вид коциклических возмущений, а именно, любое коциклическое возмущение унитарно эквивалентно возмущению указанного вида. Однако наша цель состоит в том, чтобы возмущения кроме того были и достаточно малыми, т.е. разность между элементами возмущенной и невозмущенной групп должна попадать в некоторый класс Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$.

4.2.3 Модель возмущения, основанная на мерах Кларка

Пусть U – унитарная часть в разложении Вольда–Колмогорова когенератора коциклического возмущения. В этом параграфе нас будет интересовать случай, когда U унитарно эквивалентен оператору умножения на z в пространстве $L^2(\mu)$, причем мера μ сингулярна относительно меры Лебега. Заметим также, что U по условию является когенератором полугруппы, и, следовательно, число 1 не принадлежит его точечному спектру. Операторы умножения на z в пространствах $L^2(\mu)$ и $L^2(\tilde{\mu})$ унитарно эквивалентны, если меры $\tilde{\mu}$ и μ взаимно абсолютно непрерывны. Умножая меру μ на положительный вес, можно добиться того, чтобы она удовлетворяла следующему дополнительному условию, играющему важную роль в дальнейшем:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^q} < +\infty \tag{4.34}$$

для некоторого $q > 3$.

Пусть μ – конечная сингулярная борелевская мера на единичной окружности. Определим внутреннюю функцию θ формулой

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\xi+z}{\xi-z} d\mu(\xi); \tag{4.35}$$

таким образом, μ является мерой Кларка σ_1 для θ. Унитарный оператор U в модельном пространстве K_θ,

$$Uf = \Omega U \Omega^* f = zf + (f,g)(1-\theta), \ f \in K_\theta, \tag{4.36}$$

где

$$g(z) = \frac{\theta(z) - \theta(0)}{z(1 - \theta(0))} \in K_\theta,$$

унитарно эквивалентен оператору умножения на z в пространстве $L^2(\mu)$, см. [49]. Унитарная эквивалентность осуществляется унитарным оператором $\Omega : L^2(\mu) \to K_\theta$,

$$(\Omega f)(z) = (1 - \theta(z)) \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi) d\mu(\xi)}{1 - \bar{\xi} z}, \qquad f \in L^2(\mu), \quad |z| < 1. \tag{4.37}$$

Оператор (4.36) является сужением на модельное пространство K_θ изометрического оператора V, действующего в пространстве H^2 по формуле

$$(Vf)(z) = zf(z) + (f, g)(1 - \theta(z)), \qquad f \in H^2. \tag{4.38}$$

Унитарной дилатацией изометрического оператора (4.38) будет оператор

$$(V'f)(z) = zf(z) + (f, g)(1 - \theta(z)) - (f, \bar{z})(1 - \overline{\theta(1)}\theta(z)), \quad f \in \tilde{L}^2. \tag{4.39}$$

Заметим, что

$$(V'^* f)(z) = \bar{z} f(z), \qquad f \in H^2_-.$$

Следовательно, формулы (4.38), (4.39) определяют модель когенератора коциклического возмущения, и при этом унитарная часть когенератора в разложении Вольда–Колмогорова унитарно эквивалентна оператору умножения на z в пространстве $L^2(\mu)$ с мерой μ, сингулярной относительно меры Лебега.

4.2.4 Близость коциклических возмущений

Применим функции (4.32) к когенератору V полугруппы изометрических операторов, получающихся пересадкой полугруппы $(\tilde{\tau}_t,\ t \geqslant 0)$ в пространство H^2. Изометрический оператор V является сужением унитарного оператора V', определенного формулами (4.38), (4.39) на подпространство H^2. Напомним, что символы S и S' обозначают операторы сдвига на H^2 и $L^2(\mathbb{T})$ соответственно. Нам потребуется следующее утверждение, доказанное в предыдущей главе:

Предложение 4.14. *Пусть спектральная мера μ унитарного оператора* (4.36) *удовлетворяет условию*

$$\mathfrak{M}_q(\mu) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^q} < +\infty \tag{4.40}$$

для некоторого $q > 3$. Тогда

$$\varphi_t(V) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_1, \quad t \geqslant 0,$$

причем

$$\|\varphi_t(V) - \varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant C_q t^{1/2} (\mathfrak{M}_q(\mu))^{1/2},$$

где константа C_q зависит только от q.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 19 играет следующее предложение, позволяющее оценить компоненты унитарной дилатации.

Предложение 4.15. *Пусть спектральная мера унитарного оператора* (4.36) *удовлетворяет условию* (4.40) *для некоторого $q > 3$. Тогда*

$$\varphi_t(V') - \varphi_t(S') \in \mathfrak{S}_p, \qquad p > q' = \frac{q}{q-1}, \quad t \geqslant 0,$$

причем

$$\|\varphi_t(V') - \varphi_t(S')\|_{\mathfrak{S}_p} \leqslant \omega(\mathfrak{M}_q(\mu)),$$

где ω – некоторая положительная функция такая, что $\omega(r) \to 0$ при $r \searrow 0$.

Доказательство. Доказательство предложения состоит из нескольких этапов.

Анализ компонент унитарной дилатации. Рассматривая матрицу оператора $\varphi_t(V') - \varphi_t(S')$ относительно разложения $K = H^2_- \oplus K_\theta \oplus \theta H^2$, нетрудно видеть, что все компоненты кроме одной будут принадлежать классу $\mathfrak{S}_1$. В самом деле, для блока $K_\theta \oplus \theta H^2 \to K_\theta \oplus \theta H^2$ утверждение вытекает из предложения 4.14. Переходя к сопряженнному оператору, заключаем, что блок $H^2_- \oplus K_\theta \to H^2_- \oplus K_\theta$ также входит в $\mathfrak{S}_1$. По построению компонента $H^2 \to H^2_-$

равна нулю. Таким образом, осталось рассмотреть компоненту, отвечающую оператору $H^2_- \to \theta H^2$. Более того, заметим, что на пространстве $\bar\varphi_t H^2_-$ оба оператора $\varphi_t(V')$ и $\varphi_t(S')$ действуют как операторы умножения на φ_t, и, следовательно, $\varphi_t(V') - \varphi_t(S') = 0$ на $\bar\varphi_t H^2_-$. Осталось изучить действие оператора $\varphi_t(V') - \varphi_t(S')$ на подпространстве $\bar\varphi_t H^2 \ominus H^2 = \bar\varphi_t K_{\varphi_t}$.

Обозначим через $Q : \bar\varphi_t K_{\varphi_t} \to H^2$ сужение оператора $\varphi_t(V') - \varphi_t(S')$ на подпространство $\bar\varphi_t K_{\varphi_t}$.

Включение компоненты Q в идеалы $\mathfrak{S}_p$. Покажем, что для $v \in K_{\varphi_t}$ справедливо равенство

$$Q(\bar\varphi_t v) = -(1 - \overline{\theta(1)}\theta)v. \tag{4.41}$$

Если $u \in H^2_-$, то для произвольной функции $\varphi \in H^\infty$ имеет место равенство

$$P_+\varphi(V')u = \overline{\theta(1)}\theta \cdot P_+(\varphi u), \quad P_-\varphi(V')u = P_-(\varphi u). \tag{4.42}$$

В самом деле, это равенство нетрудно проверить для случая, когда $\varphi(z) = z^n$, $n > 0$, а $u(z) = z^m$, $m < 0$. По линейности и непрерывности равенство (4.42) справедливо для всех $u \in H^2_-$ и $\varphi(z) = z^n$, $n > 0$. Наконец, в силу линейности и $*$-слабой непрерывности, равенство (4.42) выполнено и для произвольной функции $\varphi \in H^\infty$.

Поскольку $\varphi_t(S')u = \varphi_t u$, из равенства (4.42) вытекает, что

$$\big(\varphi_t(V') - \varphi_t(S')\big)u = (\overline{\theta(1)}\theta - 1) \cdot P_+(\varphi_t u), \qquad u \in H^2_-.$$

Подставляя $u = \bar\varphi_t v$, получим равенство (4.41).

Таким образом, включение $\varphi_t(V') - \varphi_t(S') \in \mathfrak{S}_p$ равносильно включению

$$M_{1-\bar\theta(1)\theta}|_{H^2 \ominus \varphi_t H^2} \in \mathfrak{S}_p, \tag{4.43}$$

где символ M_g обозначает оператор умножения на функцию $g \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Пересадка в полуплоскость. Будет удобно доказывать включение (4.43), сделав “унитарную пересадку” из единичного круга в верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Положим

$$\Theta(z) = \theta\left(\frac{z-i}{z+i}\right).$$

Тогда Θ – внутренняя функция в верхней полуплоскости: $\Theta \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, и $|\Theta(x)| = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$, где значения функции Θ на прямой понимаются в смысле некасательных граничных значений. Определив меру ν на вещественной прямой условием

$$d\mu(\xi) = \frac{d\nu(x)}{\pi(1+x^2)}, \qquad \xi = \frac{x-i}{x+i},$$

получим

$$\frac{1-\Theta(z)}{1+\Theta(z)} = \frac{2}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-z} - \frac{x}{x^2+1}\right) d\nu(x).$$

Из условия (4.40) вытекает, что

$$\nu(\mathbb{R}) < +\infty,$$

так что предел $\lim\limits_{y\to+\infty}\Theta(iy)$ существует; обозначим его через $\Theta(\infty)$. Имеем $|\Theta(\infty)| = 1$ и $1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta \in L^2(\mathbb{R})$, причем

$$\|1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta\|_{L^2(\mathbb{R})} = |1 - \Theta(\infty)| \cdot \sqrt{\nu(\mathbb{R})}.$$

Условие (4.40) равносильно тому, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (1+|t|)^{q-2} d\nu(t) < \infty.$$

Формула

$$(Lf)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)} f\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$$

осуществляет унитарное отображение пространства $L^2(\mathbb{T})$ на $L^2(\mathbb{R})$, при котором пространство Харди $H^2(\mathbb{D})$ переходит в пространство Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$. При таком преобразовании включение (4.43) переходит в соотношение

$$M_{1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta}|_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{S}_p, \tag{4.44}$$

где $\mathcal{K} = H^2(\mathbb{C}_+) \ominus e^{itz}H^2(\mathbb{C}_+)$. Пространство Пэли–Винера $\mathcal{P}W_a$ состоит из всех целых функций экспоненциального типа не выше a, сужение которых на вещественную прямую принадлежит $L^2(\mathbb{R})$; при этом, согласно классической теореме Пэли–Винера, $\mathcal{P}W_a = e^{-iaz}H^2(\mathbb{C}_+) \ominus e^{iaz}H^2(\mathbb{C}_+)$. Тогда включение (4.44) эквивалентно вопросу о том, будет ли вложение пространства Пэли–Винера $\mathcal{P}W_{t/2}$ в пространство $L^2(\mathbb{R}, w(t)dt)$ на прямой с весом $w(t) = |1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta|^2$ принадлежать $\mathfrak{S}_p$. Этот вопрос был решен О.Г. Парфеновым в работе [31], где получен следующий результат:

Теорема 4.16. *Для всякого* $p > 0$ *оператор вложения* $\mathcal{J}$ *пространства* $\mathcal{P}W_a$, $a > 0$, *в пространство* $L^2(\mathbb{R}, w(t)dt)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{S}_p$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{N}_p(w) = \sum_k \Bigg(\int\limits_k^{k+1} w(x)dx \Bigg)^{p/2} < \infty.$$

Из доказательства теоремы Парфенова немедленно следует оценка (см. также [9], где аналогичный результат получен для общих модельных пространств):

$$\|\mathcal{J}\|^p_{\mathfrak{S}_p} \leqslant \mathfrak{N}_p(w).$$

Применение теоремы Парфенова. Из включения $(1-\xi)^{-q} \in L^1(\mu)$ следует, что функционал Φ,

$$\Phi(g) = \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{1 - \overline{\theta(1)}\theta(\xi)}{1-\xi} \right)^q g(\xi)d\xi, \qquad g \in K_\theta,$$

ограничен на K_θ, и $|\Phi(g)| \leqslant C(q)\mathfrak{M}_q(\mu)\|g\|_2$. Отметим, что для $q \in \mathbb{N}$ значение $\Phi(g)$ совпадает с радиальным пределом $g^{(q-1)}(1)$ производной порядка $q-1$ функции g в точке $z = 1$.

Таким образом, ограниченный функционал Φ на K_θ порождается функцией $\big(\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta(\xi)}{1-\xi}\big)^q \in H^2(\mathbb{D})$. Строго говоря, функция $\big(\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta(\xi)}{1-\xi}\big)^q$ не принадлежит пространству K_θ, но нетрудно показать, что норма ее проекции на подпространство θH^2 оценивается через норму ее проекции на K_θ. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1 - \overline{\theta(1)}\theta(\xi)}{1-\xi} \right|^{2q} dm(\xi) \leqslant \omega(\mathfrak{M}_q(\mu)), \tag{4.45}$$

где $\omega(r) \to 0$ при $r \searrow 0$ (на самом деле $\omega(r) \leqslant C(q)r$, но явная форма функции ω не имеет для нас значения). Сделав замену переменной, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} |1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^{2q}(|t|+1)^{2q-2}dt < \infty.$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, найдем

$$\begin{aligned}
&\int_k^{k+1} |1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2 dt \\
&\qquad \leqslant \left(\int_k^{k+1} |1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^{2q}(|t|+1)^{2q-2}dt\right)^{1/q} \left(\int_k^{k+1} \frac{dt}{(|t|+1)^2}\right)^{1/q'} \\
&\qquad \leqslant \frac{C^{1/q}}{(|k|+1)^{2/q'}}.
\end{aligned}$$

Предположим, что $p > q'$; тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_k^{k+1} |1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2 dt\right)^{p/2} \leqslant C^{p/2q} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(|k|+1)^{p/q'}} < \infty.$$

Таким образом, учитывая оценку (4.45), при $p > q'$ получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_k^{k+1} |1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2 dt\right)^{p/2} \leqslant \omega(\mathfrak{M}_q(\mu)),$$

с некоторой функцией ω, $\omega(r) \searrow 0$ при $r \searrow 0$. Теперь, применяя теорему Парфенова, получаем включение (4.44). Предложение полностью доказано. $\square$

В рассматриваемой здесь модели коциклических возмущений соотношение $W_t - I \in \mathfrak{S}_p$ равносильно включению $\varphi_t(V') - \varphi_t(S') \in \mathfrak{S}_p$. В заключение параграфа отметим, что разность $\varphi_t(V') - \varphi_t(S')$ не может принадлежать классу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$ одновременно для всех $t \geqslant 0$.

Предложение 4.17. *Пусть θ – внутренняя функция, V' – унитарный оператор в L^2, являющийся когенератором коциклического возмущения, причём сужение V' на θH^2 совпадает с оператором умножения на z, сужение V'^**

на H^2_- совпадает с оператором умножения на $\bar{z}$, и сужение V' на K_θ является унитарным оператором. Если при этом $\varphi_t(V') - \varphi_t(S') \in \mathfrak{S}_1$ для всех $t \geqslant 0$, то θ – унимодулярная константа.

Доказательство. Из доказательства предложения 4.15 вытекает, что включение $\varphi_t(V') - \varphi_t(S') \in \mathfrak{S}_1$ равносильно тому, что

$$\mathfrak{N}_1(|1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2) < \infty.$$

Отсюда следовало бы, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|\, dt \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_k^{k+1} |1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2\, dt \right)^{1/2} < \infty,$$

и, значит, функция $1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta$ принадлежит пространству Харди H^1. Но тогда

$$\int_{\mathbb{R}} \big(1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)\big)\, dt = 0,$$

что невозможно, так как $\mathrm{Re}\,(1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta) > 0$ почти везде на $\mathbb{R}$ для любой непостоянной внутренней функции Θ. $\square$

4.2.5 Случай произвольной спектральной кратности

Пусть U – унитарная часть в разложении Вольда–Колмогорова произвольного когенератора коциклического возмущения. Любой унитарный оператор U может быть представлен в виде не более чем счетной суммы

$$U = \oplus_k U_k,$$

в которой операторы U_k унитарно эквивалентны операторам умножения в подходящих пространствах $L^2(\mu_k)$, где μ_k – меры на окружности $\mathbb{T}$,

$$(U_k f)(z) = z f(z), \quad f \in L^2(\mu_k).$$

Умножая на положительные веса, быстро убывающие при приближении к точке 1, можно выбрать меры μ_k таким образом, чтобы условие

$$\sum_k \left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_k(\xi)}{|1 - \xi|^q} \right)^{1/q} < \infty \tag{4.46}$$

было выполнено для всех $q > 0$. Определим внутренние функции θ_k, связанные с мерами μ_k формулой (4.4). Условие (4.46) гарантирует, что произведение $\prod_k \theta_k$ сходится к внутренней функции θ. Положим

$$\hat{\theta}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \theta_k$$

и определим когенератор V' по формуле

$$V' = S' + \sum_n (\cdot, \hat{\theta}_n g_n)\hat{\theta}_n(1 - \theta_n) - (\cdot, \overline{z})(1 - \overline{\theta(1)}\theta),$$

где

$$g_n(z) = \frac{\theta_n(z) - \theta(0)}{z(1 - \theta_n(0))}.$$

Доказательство теоремы 19. Оператор $V = V'|_K$ является диагональным по отношению к ортогональному разложению

$$K = \oplus_k \hat{\theta}_k K_{\theta_k} \oplus \theta K.$$

Из условия (4.46) и предложения 4.14 вытекает, что

$$\varphi_t(V) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_1, \qquad t \geqslant 0.$$

То же самое условие (4.46) и предложение 4.15 гарантируют включение

$$\varphi_t(V') - \varphi_t(S') \in \mathfrak{S}_p, \qquad t \geqslant 0,$$

для $p > q'$. Поскольку, по выбору мер, условие (4.46) выполнено для сколь угодно больших значений q, имеем $\varphi_t(V') - \varphi_t(S') \in \mathfrak{S}_p$ при любом $p > 1$. $\square$

Доказательство следствия 4.12. Пусть U – когенератор произвольной полугруппы унитарных операторов, являющейся унитарной частью в разложении Вольда–Колмогорова коциклического возмущения. Тогда найдется такой оператор Δ, принадлежащий всем классам $\mathfrak{S}_p$ для $p > 1$, что возмущение $U + \Delta$ будет иметь сингулярный спектр (см. [20]). При этом

$$\varphi_t(U + \Delta) - \varphi_t(U) \in \mathfrak{S}_p,\ t \geqslant 0.$$

Теперь для завершения доказательства достаточно применить теорему 19. $\square$

Список литературы

[1] А.Б. Александров, *Кратность граничных значений внутренних функций*, Изв. АН Арм.ССР **22** (1987), №5, 490–503.

[2] А.Б. Александров, *Внутренние функции и связанные с ними пространства псевдопродолжимых функций*, Зап. науч. семин. ПОМИ, **170** (1989), 7–33.

[3] А.Б. Александров, *О существовании угловых граничных значений псевдопродолжимых функций*, Зап. науч. семин. ПОМИ, **222** (1995), 5-17.

[4] А.Б. Александров, *Изометрические вложения коинвариантных подпространств оператора сдвига*, Зап. науч. семин. ПОМИ, **232** (1996), 5–15.

[5] А.Б. Александров, *О принципе максимума для псевдопродолжимых функций*, Зап. науч. семин. ПОМИ, **217** (1994), 26–35.

[6] Г. Г. Амосов, *О марковских возмущениях группы унитарных операторов, ассоциированной со случайным процессом со стационарными приращениями*, Теория вероятностей и её применения, **49** (2004), 145–155.

[7] Г. Г. Амосов, А. Д. Баранов, *О дилатации сжимающих коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов на прямой*, Мат. заметки **79** (2006), №1, 3–18.

[8] Г. Г. Амосов, А. Д. Баранов, *О дилатации сжимающих коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов на прямой*. II, Мат. заметки **79** (2006), №5, 779–780.

[9] А. Д. Баранов, *Вложения модельных подпространств класса Харди*: *компактность и идеалы Шаттена–фон Неймана*, Изв. РАН. Сер. мат. **73** (2009), №6, 3–28.

[10] Р.В. Бессонов, *Волновые операторы прошлого и будущего на сингулярном спектре*, Зап. Научн. Семин. ПОМИ, **389** (2011), 5–20.

[11] М.С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов*, М., Наука, 1969.

[12] В.М. Бродский, И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *О характеристических функциях обратимого оператора*, Acta Sci. Math. **32** (1971), no. 1-2, 141–164.

[13] М.С. Бродский, М.С. Лифшиц, *Спектральный анализ несамосопряжённых операторов и промежуточные системы*, Успехи мат. наук **13** (1958), №1, 3–85.

[14] В.И. Васюнин, Н.Г. Макаров *О квазиподобии модельных сжатий с неравными дефектами*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **149** (1986), 24–37.

[15] В.И. Васюнин, *Две классические теоремы о модели в бескоординатном изложении*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **178** (1989), 5–22.

[16] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов*, М., Наука, 1965.

[17] В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов*, Укр. мат. журн. **44** (1992), вып. 4, 435–459.

[18] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

[19] В.В. Капустин, *Функциональное исчисление для почти изометрических операторов*, Зап. Научн. Семин. ПОМИ, **217** (1994), 59–73.

[20] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[21] В.Э. Кацнельсон, *Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов*, Функц. анализ и его прил. **1** (1967), №2, 39–51.

[22] П. Лакс, Р. Филлипс, *Теория рассеяния*, М.: Мир, 1971.

[23] М.С. Лифшиц, *Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Мат. сб. **19** (1946), 239–262.

[24] М.С. Лифшиц, *О спектральном разложении линейных несамосопряжённых операторов*, Мат. сб., **34** (1954), №1, 145–199.

[25] С.Н. Набоко, *Абсолютно непрерывный спектр недиссипативного оператора и функциональная модель. I*, Зап. науч. семин. ПОМИ, **65** (1976), 90–102.

[26] С.Н. Набоко, *Абсолютно непрерывный спектр недиссипативного оператора и функциональная модель. II*, Зап. науч. семин. ПОМИ, **73** (1977), 118–135.

[27] С.Н. Набоко, *Об условиях подобия унитарным и самосопряженным операторам*, Функц. анализ и его прил. **18** (1984), №1, 16–27.

[28] Н.К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, Москва, 1980.

[29] Б.С. Павлов, *Спектральный анализ дифференциального оператора с "размазанным"граничным условием*, Сб. Проблемы матем. физики. Изд. ЛГУ, 1973, вып. 6, с. 101–119.

[30] О. Г. Парфенов, *О свойствах операторов вложения некоторых классов аналитических функций*, Алгебра и анализ **3** (1991), №2, 199–222.

[31] О. Г. Парфенов, *Весовые оценки преобразования Фурье*, Зап. науч. семин. ПОМИ **222** (1995), 151–162.

[32] В. В. Пеллер, *Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряженных операторов*, Функциональный анализ и его приложения, **19** (1985), № 2, 37–51.

[33] А.Г. Полторацкий, *Граничное поведение псевдопродолжимых функций*, Алгебра и анализ **5** (1993), №2, 189-210.

[34] А.Г. Полторацкий, *Спектральный сдвиг Крейна и возмущения спектров ранга один*, Алгебра и анализ **10** (1998), №5, 143–183.

[35] Б. Сёкефальфи-Надь, Ч. Фойаш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, Москва, 1970.

[36] М.М. Фаддеев, Р.Г. Штеренберг, *О подобии некоторых сингулярных дифференциальных операторов самосопряженным*, Зап. науч. семин. ПОМИ **270** (2000), 336–349.

[37] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.

[38] Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*, СПбГУ, СПб., 1994.

[39] P. R. Ahern, D. N. Clark, *Radial limits and invariant subspaces*, Amer. J. Math. **92** (1970), 332–342.

[40] P. R. Ahern, D. N. Clark, *On functions orthogonal to invariant subspaces*, Acta Math. **124** (1970), 191–204.

[41] G. G. Amosov, *Cocycle perturbation of quasifree algebraic K-flow leads to required asymptotic dynamics of associated completely positive semigroup*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **3** (2000), 237–246.

[42] G. G. Amosov, A. D. Baranov, *On perturbations of the group of shifts on the line by unitary cocycles*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 11, 3269–3273.

[43] W. Arveson, *Continuous analogues of Fock space*, Mem. Amer. Math. Soc. **80** (1989), no. 409, iv+66pp.

[44] H. Bercovici, *Operator theory and arithmetic in H^∞*, Math. Surveys and Monographs, no.26, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[45] A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239–255.

[46] M.Sh. Birman, M.Z. Solomyak, *Double operator integrals in a Hilbert space*, Integral Equations Operator Theory, **47** (2003), No. 2, 131–168.

[47] L. de Branges, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1968.

[48] L. de Branges, J. Rovnyak, *Canonical models in quantum scattering theory*, in: Perturbation theory and its appl.in quant. mech, ed. C. Wilcox, Wiley, New York, 1966, 295–392.

[49] D.N. Clark, *One dimensional perturbations of restricted shifts*, J. Anal. Math. **25** (1972), 169–191.

[50] B. Ćurgus, B. Najman, *The operator* $(\mathrm{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$ *is similar to a selfadjoint operator in* $L^2(\mathbb{R})$, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1125–1128.

[51] E. B. Davies, *Lipschitz continuity of functions of operators in the Schatten classes*, J. London Math. Soc.(2) **37** (1988), no. 1, 148–157.

[52] W.F. Donoghue, *On the perturbation of spectra*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 559–579.

[53] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators. Part* 3*, Spectral operators*, (Pure and Appl. Math **7**), New York, Wiley – Interscience, 1971.

[54] H. Dym, H.P. McKean, *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem*, New York, Academic Press, 1976.

[55] H. Helson, *Lecures on invariant subspaces*, New York, Academic Press, 1964.

[56] J. Karamata, *Über die Hardy–Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes*, Math. Z. **32** (1930), no. 1, 319–320.

[57] T. Kato, Perturbation of continuous spectra by trace class operators, Proc. Japan Acad. **33** (1957), 260–264.

[58] T.L. Kriete III, *Similarity of canonical models*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), no.2, 326–330.

[59] C. Liaw, S. Treil, *Rank one perturbations and singular integral operators*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no.6, 1947–1975.

[60] N.G. Makarov, *Canonical subspaces of almost unitary operators*, A. Haar Mem. Conf., Budapest 1985, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai **49** (1987), 611–621.

[61] N.G. Makarov, V.I. Vasyunin, *A model for noncontractions and stability of the continuous spectrum*, in: Complex Analysis and Spectral Theory, Seminar, Leningrad (1979/80), Lecture Notes in Math. **864** (1981), 365-412.

[62] F. Nazarov, A. Volberg, *Bellman function, two-weight Hilbert transform, and embeddings of the model space* K_θ, J. d'Analyse Math., **87** (2002), 385–414.

[63] N. K. Nikolski, *Operators, functions, and systems*: *an easy reading.* Vol. 1, Math. Surveys Monogr., vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[64] N. K. Nikolski, *Operators, functions, and systems*: *an easy reading.* Vol. 2, Math. Surveys Monogr., vol. 93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[65] N. K. Nikolskii, V. I. Vasyunin, *A unified approach to the function models, and the transcription problem*, The Gohberg anniversary collection, vol. 2 (Calgary, 1988), Operator theory: Adv. and Appl., vol. 41, Birkhäuser, Basel-Boston (1989), 405–434.

[66] D.B. Pearson, *A generalization of the Birman trace theorem*, J. Funct. Anal. **28** (1978), no.2, 182–186.

[67] A.G. Poltoratski, *Finite rank perturbations of singular spectra*, Int. Math. Res. Notices (1997), no.9, 421-436.

[68] A. Poltoratski, *Properties of exposed points in the unit ball of H^1*, Indiana Univ. Math. **50** (2001), no.4, 1789-1806.

[69] A.G. Poltoratski, *Maximal properties of the normalized Cauchy tramsform*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no.1, 1–17.

[70] A.G. Poltoratski, *Equivalence up to a rank one perturbation*, *Pacific J. Math.* **194** (2000), no.1, 175–188.

[71] A. Poltoratski, D. Sarason, *Aleksandrov–Clark measures*, Recent advances in operator-related function theory, Contemp. Math., **393**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 1–14.

[72] E. Saksman, *An elementary introduction to Clark measures*, in Topics in complex analysis and operator theory, Univ. Malaga, 2007, 85–136.

[73] D. Sarason, *Exposed points in H^1, I*, Operator Theory Adv. and Appl., **41** (1989), 485–496.

[74] D. Sarason, *Exposed points in H^1, II*, Operator Theory Adv. and Appl. **48** (1990), 333–347.

[75] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disc*, Univ. Arkansas Lecture Notes in Math. Sci., vol. 10, Wiley-Intersci., New York, 1994.

[76] D. Sarason, *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators*, Operators and Matrices **1** (2007), no. 4, 491-526.

[77] J.J. Schaffer, *On unitary dilations of contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), no.2, 322.

[78] B. Sz.-Nagy, *Sur les contactions de l'espace de Hilbert*, Acta Sci. Math. **15** (1953), no.1, 87–92.

[79] B. Sz.-Nagy, *Quasi-similarity of operators of class C_0*, Hilbert Space Operators Operator Algebras, Colloquia math. Soc. Janos Bolyai **5** (1972), 513-517.

[80] B. Sz.-Nagy, *Similarity to unitary operators*, Operator theory, Proc. 4th Conf., Timisoara 1979, (1980), 85–87.

[81] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Similitude des operateurs de classe C_ρ a des contractions*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A **264** (1967), 1063-1065.

[82] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Jordan model for contractions of class C_0*, Acta Sci. Math. **36** (1974), 305–322.

[83] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, Cambridge Stud. Adv. Math., 25, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[84] P.Y. Wu, *Approximate decompositions of certain contractions*, Acta Sci. Math. **44** (1982), 137–149.

[85] P.Y. Wu, *Which $C_{\cdot 0}$-contraction is quasi-similar to its Jordan model*? Acta Sci. Math. **47** (1984), 449–455.

[86] P.Y. Wu, *Contractions quasisimilar to an isometry*, Acta Sci. Math. **53** (1989), no.1-2, 139–145.

Публикации автора по теме диссертации

[87] V. Kapustin, *Hyperreflexivity of contractions close to isometries*, Bolibruch, A. A. (ed.) et al., Mathematics in St. Petersburg. Providence, RI: American Mathematical Society. Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. **174** (1996), 193–203.

[88] В.В. Капустин, *Одномерные возмущения сингулярных унитарных операторов*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **232** (1996), 118–122.

[89] В.В. Капустин, *Характеристические функции и их факторизации*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **247** (1997), 71–78.

[90] В.В. Капустин, *Операторы, близкие к унитарным, и их функциональные модели.* 1, Зап. научн. сем. ПОМИ, **255** (1998), 82–91.

[91] В.В. Капустин, *Вещественные функции в весовых пространствах Харди*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **262** (1999), 138–146.

[92] В.В. Капустин, *Спектральный анализ почти унитарных операторов*, Алгебра и анализ, **13** (2001), №5, 44–68.

[93] В.В. Капустин, *Несамосопряжённые расширения симметрических операторов*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **282** (2001), 92–105.

[94] В.В. Капустин, *Граничные значения интегралов типа Коши*, Алгебра и анализ, **16** (2004), №4, 114–131.

[95] V. Kapustin, A. Poltoratski, *Boundary convergence of vector-valued pseudocontinuable functions*, J. Funct. Anal., **238** (2006), no. 1, 313–326.

[96] В.В. Капустин, *Коммутаторы в модельных пространствах*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **333** (2006), 54–61.

[97] Г.Г. Амосов, А.Д. Баранов, В.В. Капустин, *О возмущениях изометрической полугруппы сдвигов на полупрямой*, Алгебра и анализ, **22** (2010), №4, 1–20.

[98] В.В. Капустин, *О волновых операторах на сингулярном спектре*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **376** (2010), 48–63.

[99] A. Baranov, R. Bessonov, V. Kapustin, *Symbols of truncated Toeplitz operators*, J. Funct. Anal., **261** (2011), no. 12, 3437–3456.

[100] Г.Г. Амосов, А.Д. Баранов, В.В. Капустин, *О применении модельных пространств для построения коциклических возмущений полугруппы сдвигов на полупрямой*, Уфимск. матем. журн., **4** (2012), №1, 17–28.

[101] В.В. Капустин, *Усредненные волновые операторы на сингулярном спектре*, Функц. анализ и его прил., **46** (2012), №2, 24–36.

[102] В.В. Капустин, *Интегралы типа Коши и сингулярные меры*, Алгебра и анализ, **24** (2012), №5, 72–93.