На правах рукописи

КАПУСТИН Владимир Владимирович

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ, ИНТЕГРАЛЫ ТИПА КОШИ И МЕРЫ КЛАРКА

01.01.01 — вещественный, комплексный

и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена в лаборатории математического анализа федерального государственного бюджетного учреждения науки "Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН".

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики №2 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета

А.М. Коточигов

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа института математики и механики Казанского (Приволжского) федерального унисерситета

Д.Х. Муштари

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета

О.Г. Смолянов

Ведущая организация:

Кафедра математического анализа математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Защита диссертации состоится "___" _________ 2013 г. в ___ ч. ___ мин. на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова.

Автореферат разослан "___" _________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01,
доктор физико-математических наук А.Ю. Зайцев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Результаты диссертации относятся к области математического анализа, находящейся на стыке теории функций и теории операторов. Объекты, исследуемые в диссертации, появляются в уже ставшей классической теории функциональной модели сжимающих операторов в гильбертовом пространстве. Простейшим с точки зрения теории функциональной модели оператором является сжатие со скалярной внутренней характеристической функцией θ, действующее в модельном пространстве $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$, где H^2 – класс Харди в единичном круге, θ – внутренняя функция (то есть граничные значения функции $\theta \in H^2$ имеют модуль 1 почти всюду на окружности). Пространство θH^2 инвариантно относительно оператора одностороннего сдвига $f \mapsto zf$; более того, согласно теореме Бёрлинга, все инвариантные относительно сдвига подпространства описываются таким образом. Тем самым, подпространства вида K_θ инвариантны относительно сопряжённого оператора – обратного сдвига $f \mapsto \frac{f-f(0)}{z}$, сужение которого на подпространство K_θ является сопряжённым оператором к модельному сжатию в K_θ. Спектральная теория операторов усечённого сдвига[1] даёт богатую информацию о спектральных свойствах модельных сжатий в K_θ, которые в свою очередь являются частным случаем общей теории функциональных моделей сжатий в гильбертовом пространстве[2].

Общим положением теории функциональных моделей является утверждение о том, что любое сжатие в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентно своей функциональной модели, т.е. сжатию специального вида, действующему в модельном пространстве, которое строится по характеристической функции сжатия – сжимающей аналитической операторнозначной функции в единичном круге. Сжатия T, унитарно эквивалентные модельным сжатиям в пространствах K_θ, выделяются среди всех сжатий условием $T^n h \to 0$ для любого вектора h и тем, что ранг каждого из операторов $I - T^*T$ и $I - TT^*$ равен 1. Тем самым, модельные сжатия являются одномерными возмущениями некоторых унитарных операторов в K_θ.

Эти унитарные операторы рассматривались Д. Кларком[3]. Их действие совпадает с действием модельного сжатия и с умножением на независимую переменную на подпространстве коразмерности 1, и получаемая

[1] Н.К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, Москва, 1980.

[2] Б. Сёкефальфи-Надь, Ч. Фойаш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, Москва, 1970.

[3] D.N. Clark, *One dimensional perturbations of restricted shifts*, J. Anal. Math. **25** (1972), 169–191.

таким образом частичная изометрия (оператор, определённый лишь на некотором подпространстве и действующий на нём как изометрия) может быть достроена до унитарного оператора на всём пространстве разными способами, параметром расширения является комплексное число α с модулем 1. Кларк описал спектральные меры σ_α получающихся унитарных операторов U_α в пространстве K_θ; в важном частном случае, когда $\theta(0) = 0$, они описываются соотношением

$$\frac{\alpha + \theta(z)}{\alpha - \theta(z)} = \int \frac{1 + \bar{\xi} z}{1 - \bar{\xi} z}\, d\sigma_\alpha(\xi).$$

Мера Кларка σ_α сосредоточена на множестве нулевой меры Лебега, на котором угловые пределы функции θ равны α. Большой вклад в изучение мер Кларка был внесён А.Б. Александровым, в связи с чем они иногда также называются мерами Александрова–Кларка.

Дальнейшее развитие темы было связано с прояснением действия построенного Кларком унитарного оператора $V : K_\theta \to L^2(\sigma_\alpha)$, осуществляющего унитарную эквивалентность оператора U_α в K_θ и оператора умножения на независимую переменную в $L^2(\sigma_\alpha)$. А.Г. Полторацкий доказал[4], что у любой функции из K_θ существуют угловые граничные значения σ_α-почти всюду, и тем самым показал, что оператор V отображает функции из K_θ в их граничные функции, рассматриваемые как элементы пространства $L^2(\sigma_\alpha)$. Этот результат особо интересен тем, что в отличие от классических результатов о существовании угловых граничных значений у функций из классов Харди почти всюду относительно меры Лебега, здесь утверждается существование граничных значений на множествах нулевой меры Лебега. Обратный к V оператор задаётся формулой, содержащей интеграл типа Коши.

Аналогично можно рассматривать внутренние функции в верхней полуплоскости и их меры Кларка на вещественной прямой, конструкция которых получается из конструкции в круге с помощью конформного отображения. Отметим следующий известный факт, что получающаяся функциональная модель на вещественной прямой соответствует семейству одномерных возмущений вида $A_p = A + p(\cdot, 1)1$ оператора A умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\mu)$, где μ – конечная борелевская мера на вещественной прямой, сингулярная относительно меры Лебега, p – вещественный параметр; спектральные меры операторов A_p являются мерами Кларка некоторой внутренней функции в верхней полуплоскости.

[4]А.Г. Полторацкий, *Граничное поведение псевдопродолжимых функций*, Алгебра и анализ **5**:2 (1993), 189–210.

Таким образом, теория функций из классов Харди оказывается непосредственно связанной со спектральной теорией операторов, близких к изометрическим, а также с теорией возмущений унитарных или самосопряжённых операторов. Полезным и перспективным средством в развитии теории на этом стыке теории функций и теории операторов являются меры Кларка, которые играют значительную роль в диссертации. Хотя сама теория мер Кларка является "одномерной" и прямо связана с одномерными возмущениями операторов, уже в таком виде она позволяет решать некоторые задачи и о возмущениях из более широких классов, не переходя к аналогам теории мер Кларка для пространств векторнозначных функций и операторнозначных функций θ. По-видимому, меры Кларка могут служить удобным средством в решении задач спектральной теории самосопряжённых (или унитарных) операторов с сингулярными спектральными мерами в вопросах, где естественным образом появляется аналитическая структура.

Меры Кларка неоднократно неявно появлялись в литературе, предшествующей статье Кларка. Так, доказательство результата W.F. Donoghue[5] о том, что спектральные меры упоминаемых выше операторов A_p взаимно сингулярны при различных p, по существу совпадает с доказательством того, что эти спектральные меры являются ни чем иным, как мерами Кларка. Результат о том, что оператор, сопоставляющий функциям из пространства Пэли–Винера последовательности их значений в точках вещественной прямой, образующих арифметические прогрессии, является унитарным, представляет собой частный случай конструкции мер Кларка. Обобщением пространств Пэли–Винера являются пространства де Бранжа, для которых также существуют аналогичные унитарные операторы, переводящие функции – элементы гильбертова пространства целых функций – в последовательности их значений в точках некоторой последовательности, и это свойство играет существенную роль как в исследованиях самого Л. де Бранжа[6], так и в развитой в дальнейшем теории пространств, названных его именем.

Теория модельных подпространств класса Харди H^2 была и остаётся одним из наиболее важных направлений деятельности ленинградской–петербургской школы математического анализа, основанной В.П. Хавиным и Н.К. Никольским. Разные аспекты этой тематики интересуют многих математиков, являющихся или являвшихся ранее участниками

[5]W.F. Donoghue, *On the perturbation of spectra*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 559–579.

[6]L. de Branges, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1968.

семинара по анализу в Санкт-Петербурге, и значительное развитие это научное направление получило в результате достижений В.И. Васюнина, А.Л. Вольберга, К.М. Дьяконова, Н.Г. Макарова, А.Г. Полторацкого, С.Р. Треиля и других математиков. При этом если до недавнего времени большинство результатов такого рода касались в основном теоретико-функциональной стороны как теории самих модельных пространств, так и соответствующих им мер Кларка, то в последнее время появляется всё больше продвижений в теоретико-операторную область.

Цель работы. Целью диссертации является развитие теории и решение ряда задач, относящихся к области, связанной с модельными подпространствами пространства Харди H^2 и операторами в них, включая приложения, которые допускают естественные переформулировки в терминах пространств K_θ посредством мер Кларка. Основными направлениями работы являются исследование граничных операторов в пространствах K_θ; изучение преобразования Гильберта относительно сингулярной меры на прямой или окружности; исследование вопроса о существовании усреднённых волновых операторов на сингулярных спектральных подпространствах; вопросы спектрального анализа операторов, являющихся малыми возмущениями изометрических операторов в гильбертовом пространстве; исследование спектральной структуры возмущений изометрической полугруппы сдвигов на полупрямой и её дилатации – унитарной группы сдвигов на прямой при условиях, описывающих малость возмущения.

Научная новизна. Все результаты, включённые в диссертацию, являются новыми. Ниже приведён список наиболее существенных из них.

1. Установлена сходимость почти всюду интегралов типа Коши для операторов из одного L^2-пространства на единичной окружности в другое, коммутаторы которых с умножением на независимую переменную имеют ранг 1, т.е. показано, что любой такой оператор является преобразованием Коши в смысле угловых граничных значений.

2. Установлено линейное ограничение на операторы в L^2-пространстве относительно сингулярной борелевской меры, коммутаторы которых с оператором умножения на независимую переменную принадлежат классу Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_1$.

3. Получено описание усечённых операторов Тёплица в пространстве K_θ в терминах коммутатора с оператором умножения в пространстве L^2 по мере Кларка.

4. Для случая коммутатора ранга 2 получены достаточные условия существования усреднённых волновых операторов в терминах непрерывности символов усечённых операторов Тёплица и непрерывности функций, применяемых к унитарным операторам, соответствующим паре различных мер Кларка.

5. Показано, что для общего случая разности (или коммутатора) ранга 2 усреднённый слабый волновой оператор на сингулярном спектре может не существовать.

6. Установлена взаимная абсолютная непрерывность спектральных мер для пары унитарных операторов на подпространствах, на которых предел, определяющий волновой оператор, не существует.

7. Построено преобразование Гильберта относительно сингулярной меры, получены частичные описания классов функций, для которых оно определено, и показано, что ограниченность норм предпредельных выражений не влечёт существование предела.

8. Получены результаты, уточняющие скорость L^2-сходимости функций из K_θ к их граничным значениям.

9. Построена функциональная модель для операторов, являющихся малыми возмущениями унитарных операторов (и не являющихся сжатиями), на основе весовых пространств Харди и оператора умножения на z с последующим вычитанием значения на бесконечности.

10. Установлена локальность свойства модуля внешней функции, отвечающего за то, что заданная функция является выступающей точкой единичного шара пространства H^1.

11. Получено условие, равносильное подобию заданного почти унитарного оператора прямой сумме своих абсолютно непрерывной и сингулярной частей, в терминах весового преобразования Гильберта.

12. Исследована спектральная структура возмущений изометрической полугруппы сдвигов на полупрямой и унитарной группы, являющейся её дилатацией на всей прямой: показано, что добавления в виде прямого слагаемого любой унитарной группы с сингулярной мерой можно добиться для полугрупп с помощью ядерных возмущений, а для их дилатаций – с помощью возмущений из классов Шаттена–фон Неймана при $p > 1$.

Методы исследования. Область исследования – пересечение теории операторов и теории функций в связи с модельными пространствами K_θ – естественным образом задаёт методику исследований. Большинство задач из теории функций и теории операторов, решаемых в диссертации, связаны с их переформулировкой в терминах мер Кларка и интегралов типа Коши. При этом широко используются методы общей теории классов Харди и теории возмущений унитарных и самосопряжённых операторов; применяются методы, используемые в теории функциональной модели сжатий в гильбертовых пространствах.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании пространств K_θ и операторов, действующих в них; в задачах спектрального анализа операторов в гильбертовых пространствах, близких к изометрическим операторам; при дальнейшем прояснении действия преобразования Гильберта относительно сингулярной меры; в приложениях к дифференциальным операторам.

Апробация. Результаты диссертации были успешно представлены на российских и международных конференциях:

St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis – Санкт-Петербург (1997–2011); International Workshop on Operator Theory and its Applications – Регенсбург (Германия, 1995) и Бордо (Франция, 2000); Bela Szőkefalvi-Nagy Memorial Conference – Сегед (Венгрия, 1999); Journées Complexes du Sud – Марсель (Франция, 2008); Frames and Bases – Лион (Франция, 2010); Нелинейные уравнения и комплексный анализ – оз. Банное (РФ, Башкирия, 2010); Recent Trends in Analysis – Бордо (Франция, 2011); Теория функций, ее приложения и смежные вопросы – Казань (2011);

на семинарах по математическому анализу:

в Санкт-Петербургском отделении Математического института им.В.А. Стеклова (1992–2012); в Московском государственном университете на семинарах под руководством А.Г. Костюченко (2007), В.А. Садовничего (2013), А.М. Седлецкого (2007), О.Г. Смолянова (2011 и 2013), А.А. Шкаликова (2013); в МФТИ (2012); в Королевском техническом университете г. Стокгольм (2003); в университете г. Лунд (Швеция, 2000); в университете г. Гётеборг (Швеция, 2000); в университете А & M штата Техас (США, 2001); в университете MSU штата Мичиган (США, 2001); в техническом университете г. Вена (Австрия, 2008); в университете г. Сегед (Венгрия, 2010); в университете г. Уфа (2010); в университете г. Белград (Сербия, 2006–2011); в унивеситете г. Нови Сад (Сербия, 2011, 2012).

Публикации по теме диссертации. Результаты диссертации опубликованы в 16 статьях, список приведён ниже. Все эти публикации относятся к журналам из списка ВАК (13 статей в российских журналах и 3 статьи в ведущих зарубежных журналах). Из совместных работ в диссертации содержатся только результаты, полученные самим автором диссертации.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из четырёх частей. Общий объём диссертации 177 страниц. Библиография включает 102 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Глава 1. Введение.

Во введении приводятся основные определения и предварительные сведения, необходимые для понимания общего содержания диссертации, и затем приведены формулировки и обсуждения всех основных результатов диссертации.

Символ H^2 обозначает пространство Харди на единичной окружности, которое состоит из аналитических в круге функций вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ с комплексными коэффициентами c_k, удовлетворяющими условию $\sum |c_k|^2 < \infty$. Класс H^2 естественным образом отождествляется с подпространством пространства L^2 по мере Лебега на окружности. Функция $\theta \in H^2$ называется внутренней, если $|\theta|=1$ почти всюду на окружности; тогда подпространство θH^2 инвариантно относительно умножения на независимую переменную. Модельное пространство K_θ определяется как ортогональное дополнение

$$K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2.$$

Пусть α – комплексное число с модулем 1. Функция $\frac{\alpha+\theta}{\alpha-\theta}$ имеет неотрицательную вещественную часть в круге, а её граничные значения лежат на мнимой оси. Следовательно, вещественная часть представляется в виде интеграла Пуассона конечной неотрицательной борелевской меры на окружности, сингулярной относительно меры Лебега. Эта мера называется мерой Кларка σ_α функции θ.

Функции из K_θ имеют угловые граничные σ_α-почти всюду, причём оператор V_α, сопоставляющий функциям из K_θ их граничные значения, рассматриваемые как элементы пространства $L^2(\sigma_\alpha)$, является унитарным. Обратный оператор задаётся интегралом типа Коши:

$$f(z) = (1 - \bar{\alpha}\theta(z)) \int \frac{(V_\alpha f)(\xi)\, d\sigma_\alpha(\xi)}{1 - \bar{\xi} z}, \qquad |z| < 1.$$

Глава 2. Интегралы типа Коши и сингулярные меры.

В этой главе рассматриваются вопросы, связанные с пересадкой операторов, действующих в L^2-пространствах, в пространства K_θ с помощью интегралов типа Коши. Ряд первых результатов главы, помимо их прямого смысла, имеют подготовительное значение для дальнейших исследований усреднённых волновых операторов на сингулярном спектральном подпространстве. Эти результаты используются для естественного определения преобразования Гильберта относительно сингулярной меры через предельные значения интегралов типа Коши. Исследуется вопрос о существовании искомых граничных значений. В конце главы получены результаты о граничном поведении функций из K_θ.

Важную роль играет коммутатор изучаемого оператора из одного L^2-пространства в другое с умножением на независимую переменную. Связь между коммутаторами и интегралами типа Коши устанавливается следующим наблюдением: предположим, что оператор, действующий из одного L^2-пространства в другое, представляет собой преобразование Коши в каком-либо естественном смысле. Тогда его коммутатор с умножением на z легко вычисляется и имеет ранг 1.

В этой главе широко используется хорошо известная связь между усреднениями выражений, используемых при построении волновых операторов в теории рассеяния, и интегралов типа Коши, которые строятся через функции, появляющиеся в выражении для коммутатора. А именно, пусть $X : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ – ограниченный оператор (μ, ν – пара борелевских мер на единичной окружности); и пусть коммутатор $XM_z - M_zX$ с умножением M_z на независимую переменную представляется в виде $\sum(\cdot, u_k), v_k$ (часто сумма предполагается конечной; либо, если она бесконечна, считается, что она мала в каком-либо смысле, например $\sum \|u_k\| \cdot \|v_k\| < \infty$). Тогда абелевы средние операторов $M_z^n X M_z^{-n}$

выражаются через оператор, задаваемый интегралом типа Коши

$$\sum v(z)\cdot\int\frac{h(\xi)\overline{u(\xi)}\,d\mu(\xi)}{1-r\bar{\xi}z},\qquad h\in L^2(\mu).$$

В главе существенное внимание уделено случаям, дающим понимание общей картины, а именно, когда ранг коммутатора не превосходит 2. Так, в случае коммутатора ранга 1 слабый абелев волновой оператор на сингулярном спектральном подпространстве существует всегда; однако в случае ранга 2 (а следовательно и при ранге выше 2) он уже может не существовать. Также случай коммутатора ранга 2 связан с усечёнными операторами Тёплица; с определением преобразования Гильберта относительно сингулярной меры; с вопросами граничного поведения функций из K_θ. Эти темы и взаимосвязи между ними рассматриваются в диссертации. Поскольку на вопрос о существовании усреднённого волнового оператора в случае коммутатора ранга 2 в диссертации даётся отрицательный ответ, рассмотрение коммутаторов высших рангов в связи с рассматриваемыми задачами теряет смысл.

Теорема 1 ниже показывает, в каком смысле каждый оператор, коммутатор которого с умножением на z имеет ранг 1, задаётся через интеграл типа Коши. Важной частью утверждения является существование предельных значений интегралов при приближении к окружности; сам факт существования пределов даже и в более слабом смысле определяет абелев волновой оператор для указанного случая (при том, что в отличие от классических волновых операторов, изучаемых в теории рассеяния, спектральные меры унитарных операторов могут быть сингулярными), однако этот факт без утверждения о существовании граничных значений почти всюду может быть доказан значительно проще.

Теорема 1. *Пусть μ, ν – две положительные борелевские меры на единичной окружности $\mathbb{T}$, и пусть $X : L^2(\mu)\to L^2(\nu)$ – ограниченный линейный оператор, коммутатор которого с умножением на независимую переменную z является оператором ранга* 1 :

$$XM_z - M_zX = (\cdot,\varphi)\psi,\quad \varphi\in L^2(\mu),\ \psi\in L^2(\nu),$$

то есть, $X(zu)-zXu=(u,\varphi)\psi$ для любой функции $u\in L^2(\mu)$. Тогда для любой функции u из $L^2(\mu)$ интеграл типа Коши

$$\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(\lambda)=\int\frac{\bar{z}u(z)\overline{\varphi(z)}d\mu(z)}{1-\bar{z}\lambda}$$

имеет некасательные граничные значения $\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(z)$ *(изнутри единичного круга) при* ν*-почти всех* z *таких, что* $\psi(z) \neq 0$. *Определим оператор* $B : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ *формулой*

$$(Bu)(z) = \psi(z)\mathcal{K}_{\bar{z}u\bar{\varphi}\mu}(z), \quad u \in L^2(\mu)$$

(полагаем $(Bu)(z) = 0$, *если* $\psi(z) = 0$*).*

Тогда

1) B *— ограниченный оператор;*
2) $A = X - B$ *коммутирует с умножением на* z*:* $AM_z = M_zA$*;*
3) $||A|| \leq ||X||$*;*
4) *сужения сингулярных частей мер* μ *и* ν *на множества, где соответственно* $\varphi \neq 0$ *и* $\psi \neq 0$*, взаимно сингулярны.*

Поскольку для абсолютно непрерывной части меры ν это утверждение легко вытекает из хорошо известных результатов, интерес представляет случай сингулярной меры ν. Также раздельно рассматриваются абсолютно непрерывная и сингулярная части меры μ. Для доказательства строится внутренняя функция θ, для которой сингулярная часть меры μ является мерой Кларка σ_1. Далее применяется следующий результат о вложениях пространств K_θ в L^2-пространства на окружности, имеющий самостоятельное значение в теории пространств K_θ.

Пространством L^0 называется пространство измеримых функций с топологией сходимости по мере.

Теорема 2. *Возьмем произвольную внутреннюю функцию* θ. *Предположим, что* $Y : K_\theta \to L^0(\tau)$ *– линейное непрерывное отображение такое, что если* $h, zh \in K_\theta$, *то* $Y(zh) = zYh$.

Тогда существует такая функция $\gamma \in L^0(\tau)$, *что всякая функция* $h \in K_\theta$ *имеет конечные некасательные граничные значения* $h(z)$ *при* τ*-почти всех* $z \in \mathbb{T}$, *для которых* $\gamma(z) \neq 0$, *и для таких* z *имеем* $(Yh)(z) = \gamma(z)h(z)$ τ*-почти всюду. Для точек* z, *в которых* $\gamma(z) = 0$, τ*-почти везде* $(Yh)(z) = 0$.

Если $\theta(0) = 0$, *то* $\gamma = Y1$.

Ранее А.Б. Александровым был получен результат о непрерывных операторах вложения, характеризуемых, например, тем, что непрерывным функции из K_θ соответствуют функции, задаваемые их граничными значениями. Здесь рассматривается формально более широкий класс операторов вложения с последующим домножением на некоторую функцию. Значение этого результата состоит в том, что такие операторы характеризуются удобным для работы перестановочным свойством, приведённым в формулировке теоремы.

Ряд дальнейших результатов касается операторов в пространстве $L^2(\mu)$, где μ – сингулярная мера на окружности, коммутаторы которых с оператором умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$ являются малыми в некотором смысле.

Оказывается, на ядерные операторы (т.е. операторы из класса Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_1$), являющиеся коммутаторами ограниченных операторов в $L^2(\mu)$ с оператором умножения на z, имеется линейное ограничение. Условие сингулярности меры μ сингулярна относительно меры Лебега здесь существенно, а для абсолютно непрерывной меры μ аналогичный результат неверен.

Теорема 3. *Пусть μ – сингулярная мера на единичной окружности, U – оператор умножения на z в $L^2(\mu)$. Предположим, что K – ядерный оператор в $L^2(\mu)$, $K = \sum(\cdot, u_k)v_k$, $\sum \|u_k\| \cdot \|v_k\| < \infty$, причём $K = XU - UX$ для некоторого ограниченного оператора X в $L^2(\mu)$. Тогда μ-почти всюду имеем $\sum \bar{u}_k v_k = 0$.*

При исследовании усреднённых волновых операторов на сингулярном спектре и преобразования Гильберта относительно сингулярной меры требуется более подробное рассмотрение случая, когда коммутатор имеет ранг 2. В случае коммутаторов специального вида обнаруживается связь с так называемыми усечёнными операторами Тёплица в K_θ.

Для функции $\psi \in L^2$ усечённый оператор Тёплица A_ψ в K_θ определяется формулой
$$A_\psi h = P_\theta \psi h, \quad h \in K_\theta,$$
где P_θ – ортогональный проектор на K_θ. Этот оператор изначально определён на плотном множестве всех ограниченных функций из K_θ, и предполагается, что символ ψ таков, что A_ψ – ограниченный оператор, таким образом, определённый на всём пространстве. Основные свойства усечённых операторов Тёплица изучались Д. Сарасоном[7].

Возьмём внутреннюю функцию θ, для которой $\theta(0) = 0$, рассмотрим $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Унитарные операторы U_α в K_θ, $|\alpha| = 1$, действуют по формуле
$$U_\alpha f = \begin{cases} zf, & (f, \bar{z}\theta) = 0; \\ \alpha, & f = \bar{z}\theta. \end{cases}$$
Усечённые операторы Тёплица допускают описание в терминах коммутаторов. При $\alpha = 1$ имеем следующий результат.

[7]D. Sarason, *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators*, Oper. Matrices **1**:4 (2007), 491–526.

Теорема 4. *Пусть θ – внутренняя функция, $\theta(0) = 0$. Оператор A в K_θ является усечённым оператором Тёплица тогда и только тогда, когда для некоторой функции $\varphi \in K_\theta$ выполняется соотношение*

$$AU_1 - U_1 A = (\cdot, \bar{z}\theta)\varphi - (\cdot, \bar{z}\theta\bar{\varphi})1.$$

Это описание усечённых операторов Тёплица требуется для изучения поведения последовательности операторов вида $(U^n X U^{-n})_{n \geqslant 0}$, где U – унитарный оператор умножения на независимую переменную, а X – ограниченный оператор в $L^2(\mu)$. Изучение этих операторных последовательностей, в частности, потребуется далее для приложений. Абелевы средние этих операторов переписываются в виде интегрального оператора с ядром Коши, в подынтегральное выражение которого также входят функции, входящие в выражение для коммутатора $XU - UX$, имеющего ранг 2.

Имеем следующее достаточное условие сходимости.

Теорема 5. *Пусть μ – сингулярная вероятностная мера на единичной окружности, не имеющая точечных масс. Построим внутреннюю функцию θ, для которой μ является мерой Кларка σ_1, обозначим через V унитарный оператор $V_1 : K_\theta \to L^2(\sigma_1) = L^2(\mu)$, сопоставляющий функциям из K_θ их граничные значения μ-почти везде. Пусть q – ограниченная функция, непрерывная на открытом множестве, для дополнения e которого выполняется условие $\mu e = 0$, и предположим, что либо $X = VT_qV^*$, где T_q – усечённый оператор Тёплица с символом q, либо $X = q(U_\alpha)$, где $\alpha \neq 1$. Тогда средние Чезаро последовательности операторов $(U^n X U^{-n})_{n \geqslant 0}$ стремятся к оператору $q(U)$ в слабой операторной топологии.*

В случае, когда q – непрерывная функция на всей окружности, имеется сходимость в сильной операторной топологии.

Следующий результат показывает, что существуют ограниченные функции q, для которых усреднённой сходимости нет.

Теорема 6. *Пусть θ – внутренняя функция, причём $\theta(0) = 0$, и предположим, что $\mu = \sigma_1$ не имеет атомов; U – оператор умножения на z в $L^2(\mu)$.*

1) *Существует усечённый оператор Тёплица T_q в K_θ с ограниченным символом q, для которого абелевы средние последовательности операторов $(U^n X U^{-n})$, где $X = VT_qV^*$, не имеют предела в слабой операторной топологии.*

2) *Для любого комплексного числа $\alpha \neq 1$ с модулем 1 существуют функции $q \in L^\infty(\sigma_\alpha)$, для которых абелевы средние последовательности*

операторов $(U^n X U^{-n})$ *при* $X = Vq(U_\alpha)V^*$ *не имеют предела в слабой операторной топологии.*

Из этого результата вытекает следующее утверждение об отсутствии слабой усреднённой сходимости для операторов, определяемых выражениями, используемыми при построении волновых операторов в классической теории рассеяния, но в случае сингулярной спектральной меры у исходного невозмущенного унитарного оператора.

Теорема 7. *Для любого унитарного оператора* $U : H \to H$*, имеющего нетривиальную непрерывную сингулярную часть, существует такой унитарный оператор* U_* *в пространстве* H*, что* $\mathrm{rank}(U_* - U) = 2$*, и абелевы усреднения последовательности* $U^n U_*^{-n}$*,* $n \geqslant 0$*, не имеют предела в слабой операторной топологии.*

Аналогичное утверждение о паре самосопряжённых операторов выглядит следующим образом.

Теорема 8. *Пусть* A *– самосопряжённый оператор, не имеющий собственных векторов, спектральная мера которого сингулярна относительно меры Лебега. Тогда существует такой самосопряжённый оператор* A_**, что разность* $A_* - A$ *имеет ранг* 2 *и предел операторов*

$$\int_0^{+\infty} \exp(itA_*)\,\exp(-itA)\,\epsilon \exp(-\epsilon t)\,dt$$

при $\epsilon \to 0$ *не существует в слабой операторной топологии.*

Отметим, что в случае разности ранга 1 спектральные меры рассматриваемых унитарных (либо самосопряжённых) операторов взаимно сингулярны на приводящем подпространстве, определяемом одномерным оператором разности, из чего вытекает слабая сходимость изучаемых выражений, т.е. существование усреднённого слабого волнового оператора.

Одной из важных причин для изучения волновых операторов является то, что в классической теории рассеяния они осуществляют унитарную эквивалентность приводящих частей двух унитарных или самосопряжённых операторов. Некоторое более слабое свойство сохраняется даже в случаях, когда усреднённый волновой оператор не существует (в отличие от случая, когда он существует и равен нулевому оператору).

Теорема 9. *Пусть $U_1 : H_1 \to H_1$, $U_2 : H_2 \to H_2$ – унитарные операторы, $X : H_1 \to H_2$ – ограниченный оператор. Обозначим через C_n средние Чезаро последовательности $(U_2^n X U_1^{-n})$. Рассмотрим подпространства*

$$\{h \in H_1 :\ (C_n h, k) \to 0 \quad \forall k \in H_2\}$$

и

$$\{k \in H_2 :\ (C_n h, k) \to 0 \quad \forall h \in H_1\};$$

они приводят операторы U_1, U_2 соответственно. Тогда спектральные меры сужений операторов U_1, U_2 на ортогональные дополнения этих подпространств взаимно абсолютно непрерывны.

Следующий результат связан с вопросом о построении преобразования Гильберта относительно сингулярной меры μ. Стандартное определение преобразования Гильберта через интеграл вида $\int \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\mu(\xi)$ не годится, ибо значения такого интеграла часто (например, даже для постоянных функций) оказываются бесконечными. Естественно ввести разностную регуляризацию и отступить от единичной окружности на окружность меньшего радиуса. В результате получаются выражения следующего вида:

$$(\mathcal{H}_r f)(z) = \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi} z}\, d\mu(\xi).$$

Если они имеют предел в каком-либо естественном смысле при $r \nearrow 1$, то получающаяся функция, определённая μ-почти всюду, будет называться преобразованием Гильберта функции $f \in L^2(\mu)$ (относительно меры μ). Преобразование Гильберта не является ограниченным оператором в $L^2(\mu)$, более того, оно даже незамыкаемо. Тем не менее, вопрос о классе функций, для которых оно определено, оказывается весьма содержательным.

Особенность подхода состоит в рассмотрении регулярных интегральных операторов в $L^2(\mu)$ вида

$$h \mapsto \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi} z}\, h(\xi)\, d\mu(\xi),$$

зависящих от параметров $f \in L^2(\mu)$ и $r \in (0, 1)$, и естественно возникающих классов функций f: состоящего из функций f, для которых нормы этих операторов равномерно ограничены по r, и его подкласса, когда у этих операторов существует предел в слабой операторной топологии при $r \nearrow 1$. Для изучения поведения этих интегральных операторов при

$r \nearrow 1$ рассматриваются операторы в $L^2(\mu)$, для которых выражения, используемые при построении усреднённых абелевых волновых операторов, перепиываются через операторы указанного вида.

Из теоремы 5 вытекают достаточные условия существования предела в терминах непрерывности некоторого унитарного преобразования функции f, из которых видно, что класс функций f, для которых определено преобразование Гильберта, достаточно широк. Тем не менее, сходимость есть не для всех функций, определяющих операторы с равномерно ограниченными нормами.

Теорема 10. *Для любой сингулярной борелевской меры μ на единичной окружности, не имеющей атомов, существуют функции $f \in L^2(\mu)$ такие, что*

$$\left\| \int \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z} h(\xi)\, d\mu(\xi) \right\|_{L^2(\mu)} \leqslant \mathrm{const} \cdot \|h\|, \qquad h \in L^2(\mu),$$

с константой, зависящей от f и не зависящей от r (в частности, нормы функций $\mathcal{H}_r f$ в $L^2(\mu)$ равномерно ограничены по r), однако функции $\mathcal{H}_r f$ не имеют слабого предела в $L^2(\mu)$.

Заключительная группа результатов этой главы связана с изучением граничного поведения функций из K_θ. Пусть $\varphi \in K_\theta$. Тогда, согласно результату А.Г. Полторацкого, $\varphi(rz)$ имеет предел при $r \nearrow 1$ для σ_α-почти всех z. Для изучения скорости сходимости естественно определить функции g_r формулой

$$g_r(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(rz)}{\theta(z) - \theta(rz)}.$$

Если $\varphi = f$ μ-почти везде, где μ – мера Кларка σ_1 функции θ, то оказывается, что $g_r = \mathcal{H}_r f$. С помощью этого свойства выводятся следующие результаты.

Теорема 11. *Возьмём функцию $\varphi \in K_\theta$ и различные комплексные числа α_1, α_2 с модулем 1. Предположим, что φ совпадает с ограниченной функцией q σ_{α_1}-почти всюду. Тогда нормы g_r в $L^2(\sigma_{\alpha_2})$ ограничены равномерно по r.*

Условия сходимости рассматриваются отдельно для чисто точечной и непрерывной частей меры σ_{α_2}. Для случая, когда эта мера имеет нагрузку в некоторой точке единичной окружности, сходимость вблизи этой точки имеется всегда.

Теорема 12. *При условиях теоремы 11, если σ_{α_2} имеет атом в точке ω, то $g_r(\omega)$ имеет предел при $r \nearrow 1$,*

$$\lim\, g_r(\omega) = -\sigma_{\alpha_2}(\{\omega\})(\bar\alpha_2 - \bar\alpha_1) \int \frac{q(z)d\sigma_{\alpha_1}(z)}{|1-\bar z\omega|^2} - \bar\alpha_1 \int \frac{q(z)d\sigma_{\alpha_1}(z)}{1-\bar z\omega}.$$

Сходимости относительно непрерывной части меры σ_{α_2}, вообще говоря, может не быть. Однако не очень ограничительное достаточное условие для сходимости даётся в терминах непрерывности унитарной пересадки граничных значений функции из K_θ.

Теорема 13. *При условиях теоремы 11, если φ совпадает σ_{α_1}-почти всюду с непрерывной функцией q, то предел функций g_r при $r \nearrow 1$ существует в $L^2(\sigma_{\alpha_2})$ и совпадает с функцией $\frac{\varphi - q}{\alpha_2-\alpha_1}$ почти всюду относительно непрерывной части меры σ_{α_2}.*

Глава 3. Спектральный анализ почти унитарных операторов.

Глава посвящена изучению спектральных свойств операторов, близких к унитарным. Одной из типовых задач теории функциональных моделей является вопрос о построении удобной для работы функциональной модели заданного оператора, т.е. оператора в некотором пространстве стандартного вида, унитарно эквивалентного исходному оператору. В отличие от ставшей классической теории функциональных моделей для сжатий, для случая произвольных операторов (т.е. не обязательно являющихся сжатиями) функциональная модель универсального вида не построена. Для исследования вопроса о стабильности абсолютно непрерывного спектра[8] применялся подход С.Н. Набоко, основанный на записи изучаемого оператора как возмущения некоторого сжимающего (или диссипативного) оператора через функциональную модель последнего. Предлагаемый в диссертации подход основан на модельных операторах вида

$$f \mapsto zf - (zf)(\infty),$$

действующих в пространствах функций, аналитических в областях, содержащих бесконечно удалённую точку, причём предполагается, что

[8] N.G. Makarov, V.I. Vasyunin, *A model for noncontractions and stability of the continuous spectrum*, in: Complex Analysis and Spectral Theory, Seminar, Leningrad (1979/80), Lecture Notes Math. **864** (1981), 365–412.

функции – элементы пространства – имеют нулевой предел на бесконечности, а модельный оператор действует как умножение на независимую переменную и последующее вычитание константы, обеспечивающее принадлежность получающейся функции модельному пространству. Если элементы модельного пространства представляются как интегралы Коши мер или распределений, то действию модельного оператора соответствует умножение этих мер или распределений на независимую переменную.

Для операторов, близких к унитарным, оказывается возможным построение таких моделей в пространствах функций, мероморфных везде, кроме некоторого подмножества единичной окружности.

Теорема 14. *Пусть U – унитарный оператор со спектральной мерой, сингулярной относительно меры Лебега. Пусть x, y – векторы, причём порождённое ими подпространство, приводящее U, совпадает со всем пространством; и пусть $T = U + (\cdot, x)y$.*

Тогда существуют функции $\varphi, \psi \in H^2$ со следующими свойствами: $|\varphi| = |\psi|$ почти всюду на единичной окружности; $\psi(0) \neq 0$; функция θ, определённая на окружности как $\theta = \varphi/\bar{\psi}$, является внутренней, причём $\theta(0) = 0$; и при этом оператор T унитарно эквивалентен оператору вида $f \mapsto zf - (zf)(\infty)$ в пространстве $\frac{H^2}{\varphi} \cap \frac{H^2_-}{\bar{\psi}}$ с нормой $\|f\| = \|f\varphi\|_{H^2}$.

Отметим, что функции построенного модельного пространства мероморфны внутри круга и вне его, поскольку принадлежат пространствам $\frac{H^2}{\varphi}$ и $\frac{H^2_-}{\bar{\psi}}$ соответственно, а функции последнего пространства естественным образом продолжаются во внешность круга и имеют нулевой предел на бесконечности.

Полученный результат допускает естественное обобщение, если отказаться от требования о том, чтобы спектральная мера возмущаемого унитарного оператора была сингулярна. В таком случае граничные значения функций изнутри и извне круга уже могут не совпадать, а выражение для нормы в модельном пространстве теперь дополнительно содержит выражение, определяющее некоторый скачок на окружности.

Теорема 15. *Пусть U – унитарный оператор, x – его циклический вектор, $U + (\cdot, x)y$ – его одномерное возмущение. Тогда существует оператор специального вида, унитарно эквивалентный оператору $U + (\cdot, x)y$:*

– существует функция $\theta \in H^\infty$, $\|\theta\|_\infty \leqslant 1$, $\theta(0) = 0$, и такие функции $\varphi, \psi \in H^2$, что $\psi(0) = 1$, и $\theta\bar{\psi} - \varphi \in \Delta L^2$, где $\Delta = (1 - |\theta|^2)^{1/2}$;

– модельное пространство состоит из пар функций, первая из которых

мероморфна в единичном круге, а вторая – в его внешности:

$$\left\{f = [f_+, f_-] : f_+ \in \frac{H^2}{\varphi},\ f_- \in \frac{H^2_-}{\bar{\psi}},\ f_+\varphi - f_-\bar{\psi}\theta \in \Delta L^2\right\};$$

– норма в модельном пространстве определяется как

$$\|f\|^2 = \|f_-\bar{\psi}\|^2_{L^2} + \left\|\frac{f_+\varphi - f_-\bar{\psi}\theta}{\Delta}\right\|^2_{L^2};$$

– модельный оператор определяется формулой $f \mapsto zf - (zf)(\infty)$.

Случай одномерных возмущений унитарных операторов с сингулярной спектральной мерой связан с задачей, известной как вопрос об описании выступающих точек единичного шара пространства H^1. Этот вопрос допускает важную переформулировку. Пусть w – вес на единичной окружности: $w \geqslant 0$ почти всюду, $w \in L^1$, $\int w = 1$, и, кроме того, будем предполагать, что $\int |\log w| < \infty$. В весовом пространстве $L^2(w)$ рассмотрим два подпространства (аналитическое и антианалитическое) порождённых функциями z^n при $n \geqslant 0$ и $n < 0$ соответственно. Ответ на вопрос о том, когда угол между ними ненулевой, описывается классическими условиями Сегё и Макенхаупта; однако удовлетворительного описания весов, для которых пересечение этих пространств ненулевое, пока не найдено. Пусть φ – такая внешняя функция, что $|\varphi|^2 = w$, и рассмотрим пространство $I_\varphi = \frac{H^2}{\varphi} \cap \frac{H^2_-}{\bar{\varphi}}$, совпадающее с указанным пересечением замыканий множеств аналитических и антианалитических полиномов. Тогда функция φ^2, лежащая на единичной сфере пространства H^1, является выступающей точкой единичного шара в H^1 тогда и только тогда, когда это пересечение нулевое. В I_φ действует оператор $f \mapsto zf - (zf)(\infty)$; обозначим через σ_w его спектр, который пуст тогда и только тогда, когда $I_\varphi = \{0\}$. Из того, что этот оператор обладает большим запасом спектральных проекторов, вытекает следующий результат, из которого видно, что пересечение аналитического и антианалитического подпространств окажется нулевым тогда и только тогда, когда вес w будет локально малым во всех точках окружности в некотором смысле (прояснение которого остаётся открытым вопросом).

Теорема 16. *Справедливость утверждения о том, что некоторая точка ξ единичной окружности принадлежит спектру σ_w, зависит только от локального поведения веса w вблизи этой точки. Точнее, если два веса w_1 и w_2 совпадают в окрестности точки ξ, то либо ξ принадлежит обоим множествам σ_{w_1} и σ_{w_2}, либо не принадлежит ни одному из них.*

Следующий результат диссертации связан с вопросом о существовании ограниченного проектора на абсолютно непрерывное подпространство возмущения унитарного оператора.

Пусть $T : H \to H$ – возмущение унитарного оператора U оператором конечного ранга, причём спектр оператора T не покрывает единичный круг. Предположим, что T записывается в виде $T = (I - \Omega K \Omega^*)U$, где E – конечномерное гильбертово пространство, $K : E \to E$ и $\Omega : E \to H$ – некоторые операторы. Пусть $U = U_{ac} \oplus U_s$ – разложение оператора U в прямую сумму его абсолютно непрерывной (U_{ac}) и сингулярной (U_s) частей. Сингулярное пространство $H_s(T)$ оператора T состоит из всех таких векторов h, что слабая резольвента $((T - \lambda I)^{-1}h, f)$ не имеет скачка почти всюду на единичной окружности при всех $f \in H$. Сингулярная часть T_s есть сужение оператора T на его сингулярное подпространство. Функции Φ и F, значения которых – операторы в E, определяются формулами

$$\Phi(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1}U\Omega, \quad F(\lambda) = (I - K\Phi(\lambda))^{-1}K.$$

Для $h \in H$ положим

$$(Rh)(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1}Uh, \quad |\lambda| \neq 1.$$

Граничные значения функций Φ, F и Rh ($h \in H$) изнутри единичного круга и извне определены корректно почти всюду относительно меры Лебега m и будут обозначаться соответственно через Φ_+, Φ_-; F_+, F_-; R_+h, R_-h. Если рассмотреть спектральное представление $H_{ac} = \int \oplus H(z)dm(z)$ для оператора U_{ac}, то можно определить операторы $\Omega(z) : E \to H(z)$ соотношениями $\Omega(z)e = (\Omega e)(z)$ при m-почти всех z, где $e \in E$.

Для $h \in H$ определим функции $\mathcal{X}h$, $\mathcal{Y}h$ на единичной окружности формулами

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}h)(z) &= h(z) + \Omega(z)F_+(z)(R_+h)(z),\\ (\mathcal{Y}h)(z) &= h(z) - \Omega(z)F_-^*(z)(R_+h)(z).\end{aligned}$$

Это – $H(z)$-значные функции, определенные m-почти всюду для каждого $h \in H$.

Теорема 17. *При введённых выше обозначениях следующие утверждения равносильны.*

1) *Оператор T подобен прямой сумме $U_{ac} \oplus T_s$.*

2) *Оператор T подобен прямой сумме некоторого абсолютно непрерывного унитарного оператора и некоторого сингулярного (не обязательно унитарного) оператора.*

3) *Существуют такие ограниченные операторы* $X : H \to H_{ac}$ *и* $Y : H_{ac} \to H$, *что*

$$XT = U_{ac}X, \quad TY = YU_{ac} \quad \text{и} \quad XY = I.$$

4) *Отображения* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *– ограниченные операторы из* H *в* H_{ac}.

Отметим, что в спектральном представлении унитарного оператора U отображения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ переписываются в виде интегралов типа Коши, и, тем самым, изучаемый вопрос о подобии переписывается в терминах ограниченности двух весовых преобразований Коши.

Последний результат применён к склейке двух симметрических операторов, а именно, получены условия подобия самосопряжённому оператору для оператора, получающегося из пары симметрических операторов перемешиванием их граничных условий.

Глава 4. Возмущения изометрической полугруппы сдвигов на полуоси и группы сдвигов на оси.

В этой главе исследуется спектральная структура изометрических полугрупп и унитарных групп, получающихся малыми возмущениями полугруппы сдвигов на полупрямой и группы сдвигов на прямой соответственно. Из известных теорем о стабильности абсолютно непрерывного спектра вытекает, что при возмущениях класса Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_1$ структура абсолютно непрерывного спектра сохраняется. Сингулярная часть спектра, напротив, может быть достаточно подвижной. Основной вопрос, рассматриваемый в этой главе, состоит в изучении возможной спектральной структуры сингулярного унитарного слагаемого, возникающего при возмущении. Оказывается, что при таком возмущении полугруппы сдвигов, что разность элементов возмущенной и невозмущенной полугрупп с одинаковым индексом принадлежит классу $\mathfrak{S}_1$, у возмущенной полугруппы могут появиться любые сингулярные унитарные прямые слагаемые (в том числе – с любой кратностью). Если же рассматривать естественные унитарные дилатации таких полугрупп, то аналогичный результат будет верен только если позволить разности попадать в несколько более широкий класс: пересечение всех $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, тогда как для изучаемой модели прямой аналог с разностями класса $\mathfrak{S}_1$ оказывается невозможным.

Рассмотрим пространство $L^2(\mathbb{R})$ и его подпространство $L^2(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на левой полуоси. Операторы сдвига с параметром $t > 0$ действуют по формуле $f \mapsto f(x-t)$; в случае унитарной группы на прямой этой же формулой определяются сдвиги и при отрицательных t.

Теорема 18. *Пусть $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ — полугруппа сдвигов на $L^2(\mathbb{R}_+)$.*

1) *Если $(\tilde{\tau}_t)$ — такая изометрическая полугруппа, что $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$ при всех $t \geqslant 0$, то когенератор полугруппы $(\tilde{\tau}_t)$ унитарно эквивалентен прямой сумме оператора простого (т.е. однократного) сдвига и унитарного оператора с сингулярной спектральной мерой.*

2) *Для произвольного сингулярного унитарного оператора V с единственным ограничением, что число 1 не принадлежит его точечному спектру, существует изометрическая полугруппа $(\tilde{\tau}_t)$, когенератор которой унитарно эквивалентен прямой сумме оператора простого одностороннего сдвига в H^2 и оператора V, причём для всех $t \geqslant 0$ выполнено соотношение $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$.*

Если ослабить условие принадлежности классу $\mathfrak{S}_1$ до принадлежности всем классам $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, то условие сингулярности спектральной меры оператора V можно опустить.

Теперь рассмотрим унитарную дилатацию возмущённой полугруппы сдвигов на полуоси, которая сама уже будет возмущением унитарной группы сдвигов на всей оси.

Как и выше, $(\tau_t, t \geqslant 0)$ – полугруппа сдвигов на правой полуоси, и теперь $(\tau'_t, t \in \mathbb{R})$ – группа сдвигов на всей вещественной оси. Элементы возмущённой полугруппы и возмущённой группы будут обозначаться через $\tilde{\tau}_t$ и $\tilde{\tau}'_t$ соответственно. То, что возмущённая группа является дилатацией возмущенной полугруппы, означает, что $\tilde{\tau}'_t f = \tau'_t f$ при $t < 0$, если f обращается в нуль на правой полуоси. Возмущения с таким свойством называются марковскими. Коциклом $(W_t, t \geqslant 0)$ называется семейство операторов, обладающих свойством $W_{t+s} = W_t \tau'_t W_s \tau'_{-t}$, $t, s \geqslant 0$, причём элементы коцикла связывают элементы возмущенной и исходной полугрупп формулой $\tilde{\tau}_t = W_t \tau_t$. Полугруппу из предыдущей теоремы можно достроить до унитарной дилатации с заменой класса $\mathfrak{S}_1$ на пересечение всех $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, для разности элементов коцикла и тождественного оператора.

Теорема 19. *Для любой группы унитарных операторов $(U_t, t \in \mathbb{R})$ со спектральной мерой, сингулярной относительно меры Лебега, найдётся коцикл $(W_t, t \geqslant 0)$, для которого $W_t - I \in \mathfrak{S}_p$ при всех $p > 1$, возмущённая группа унитарно эквивалентна ортогональной прямой сумме невозмущенной группы и группы $(U_t, t \in \mathbb{R})$, причём разности их элементов обладают свойством $\tilde{\tau}'_t - \tau'_t \in \mathfrak{S}_1$.*

Естественно возникает предположение, что при нетривиальных коциклических возмущениях выполнение условия $W_t - I \in \mathfrak{S}_1$ невозможно, т.е. при таком условии возмущённая группа обязательно окажется унитарно эквивалентной исходной группе сдвигов на прямой.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] V. Kapustin, Hyperreflexivity of contractions close to isometries. Bolibruch, A. A. et al. (ed.), Mathematics in St. Petersburg. Providence, RI: American Mathematical Society. *Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc.* **174** (1996), 193–203.

[2] В.В. Капустин, Одномерные возмущения сингулярных унитарных операторов, *Зап. научн. семин. ПОМИ* **232** (1996), 118–122.

[3] В.В. Капустин, Характеристические функции и их факторизации, *Зап. научн. семин. ПОМИ* **247** (1997), 71–78.

[4] В.В. Капустин, Операторы, близкие к унитарным, и их функциональные модели. 1, *Зап. научн. семин. ПОМИ* **255** (1998), 82–91.

[5] В.В. Капустин, Вещественные функции в весовых пространствах Харди, *Зап. научн. семин. ПОМИ* **262** (1999), 138–146.

[6] В.В. Капустин, Спектральный анализ почти унитарных операторов, Алгебра и анализ **13**:5 (2001), 44–68.

[7] В.В. Капустин, Несамосопряжённые расширения симметрических операторов, *Зап. научн. семин. ПОМИ* **282** (2001), 92–105.

[8] В.В. Капустин, Граничные значения интегралов типа Коши, *Алгебра и анализ* **16**:4 (2004), 114–131.

[9] V. Kapustin, A. Poltoratski, Boundary convergence of vector-valued pseudocontinuable functions, *J. Funct. Anal.* **238**:1 (2006), 313–326.

[10] В.В. Капустин, Коммутаторы в модельных пространствах, *Зап. научн. семин. ПОМИ* **333** (2006), 54–61.

[11] Г.Г. Амосов, А.Д. Баранов, В.В. Капустин, О возмущениях изометрической полугруппы сдвигов на полупрямой, *Алгебра и анализ* **22**:4 (2010), 1–20.

[12] В.В. Капустин, О волновых операторах на сингулярном спектре, *Зап. научн. семин. ПОМИ* **376** (2010), 48–63.

[13] A. Baranov, R. Bessonov, V. Kapustin, Symbols of truncated Toeplitz operators, *J. Funct. Anal.* **261**:12 (2011), 3437–3456.

[14] Г.Г. Амосов, А.Д. Баранов, В.В. Капустин, О применении модельных пространств для построения коциклических возмущений полугруппы сдвигов на полупрямой, *Уфимск. матем. журн.* **4**:1 (2012), 17–28.

[15] В.В. Капустин, Усредненные волновые операторы на сингулярном спектре, *Функц. анализ и его прил.* **46**:2 (2012), 24–36.

[16] В.В. Капустин, Интегралы типа Коши и сингулярные меры, *Алгебра и анализ* **24**:5 (2012), 72–93.