На правах рукописи

Федоровский Константин Юрьевич

Аппроксимация функций полиномиальными решениями эллиптических уравнений

01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана»

Официальные оппоненты:

Александров Алексей Борисович
доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории математического анализа Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Аптекарев Александр Иванович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий математическим отделом Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук»

Коточигов Александр Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики №2 Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ” им. В. И. Ульянова (Ленина)»

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится «   »   2013 г. в   часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Автореферат разослан «   »   2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.202.01, д.ф.-м.н. Зайцев А. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория аппроксимации функций многочленами и аналитическими функциями (голоморфными, гармоническими, полианалитическими и др.) в нормах классических пространств функций (равномерной, C^m, L^p и др.) на замкнутых подмножествах в $\mathbb{R}^N$, $N > 1$, представляет собой сложившееся и актуальное направление в комплексном анализе.

Хорошо известны классические результаты М. А. Лаврентьева, М. В. Келдыша и Ж. Дени о равномерных гармонических аппроксимациях на компактах в $\mathbb{R}^N$ (1940-е годы), С. Н. Мергеляна (1952 г.) и А. Г. Витушкина (1967 г.) о полиномиальных и рациональных аппроксимациях голоморфными функциями на плоских компактах.

Ряд интересных и важных результатов о равномерной приближаемости функций многочленами и рациональными функциями комплексного переменного были получены в 1940–1980-х годах в работах Н. У. Аракеляна, Е. Бишопа, Д. Вермера, Т. Гамелина, Д. Гарнетта, И. Гликсберга, А. Глисона, А. А. Гончара, К. Гофмана, Е. П. Долженко, П. Кертиса, М. С. Мельникова, А. Рот, У. Рудина, Д. Уолша, В. П. Хавина и др.

С 1970–1980-х годов эта тематика приобретает еще большую актуальность. В ней начинают рассматриваться существенно более общие задачи аппроксимации функций решениями (полиномиальными, целыми, мероморфными с локализованными особенностями) однородных эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами. При этом аппроксимация рассматривается в метриках классических пространств функций (таких, как равномерная, C^m или L^p) на компактных (или на замкнутых) множествах на плоскости или в пространстве, а также в специальных абстрактных пространствах обобщенных функций (распределений). Надо отметить, что в рассматриваемом направлении теории приближений естественно выделились задачи, связанные с аппроксимацией функций полианалитическими и полигармоническими функциями и многочленами, естественно возникающими как в ряде разделов современного анализа, так и в прикладных задачах (например, в задачах плоской теории упругости). Кроме того, появились и были развиты новые глубокие методы исследования соответствующих емкостей (методы сингулярных интегралов и геометрической теории меры, метод спектрального синтеза и др.). Здесь необходимо отметить работы А. Буаве, С. Гардинера, Д. Вердеры, Г. Давида, П. М. Готье, Д. Кармоны, М. Я. Мазалова, Д. Матеу, П. Маттилы, М. С. Мельникова, Ю. В. Нетрусова, Д. Оробича, П. В. Парамонова, Х. Толсы, А. Г. О'Фаррела, В. П. Хавина, С. Я. Хавинсона, Д. Хавинсона, Н. А. Широкова и ряда других авторов, включая автора диссертации. Некоторые основные результаты, полученные в этом направлении теории приближений, будут сформулированы и кратко обсуждены в обзоре содержания диссертации ниже.

Несмотря на успешное и активное развитие рассматриваемой области теории приближений, в ней остается большое количество открытых вопросов и нерешенных задач. Одной из таких задач является, например, задача описания компактных подмножеств X комплексной плоскости таких, что всякая функция, непрерывная на X и n-аналитическая (т.е. полианалитическая порядка n, где $n \geqslant 1$ — целое число) во внутренних точках X может быть равномерно на X приближена последовательностью n-аналитических многочленов. Эта задача (которая интересует специалистов начиная в 1980-х годов) представляет интерес как в свете общего интереса к теории полианалитических функций, в которой за последние годы получен ряд интересных и важных результатов, так и в связи с недавно открывшейся связью этой задачи с другими активно развивающимися направлениями современного анализа, в частности, с теорией модельных пространств.

Изучение задачи о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами привело к возникновению нового интересного направления исследований в комплексном анализе, связанного с изучением свойств *неванлинновских областей*. Свойство области быть неванлинновской — это специальная аналитическая характеристика плоских односвязных областей, введенная автором и позволившая получить решение соответствующей аппроксимационной задачи для компактов Каратеодори. Понятие неванлинновской области имеет глубокие связи с теорией конформных отображений, с теорией модельных пространств (инвариантных относительно оператора обратного сдвига подпространств пространства Харди H^2), а также с теорией квадратурных областей.

Другое важное направление в рассматриваемой проблематике связано с изучением задач аппроксимации функций решениями (полиномиальными, целыми, мероморфными с локализованными особенностями) общих однородных эллиптических дифференциальных уравнений в нормах пространств C^m при $m \geqslant 0$.

В связи с обсуждаемыми задачами теории приближений естественно возникает также понятие множества (компакта и области) Каратеодори. Среди интересных и важных открытых вопросов о свойствах множеств Каратеодори выделяются вопросы об уточнении характера сходимости соответствующей последовательности конформных отображений в классической теореме Каратеодори о сходимости к ядру в случае, когда предельная область является областью Каратеодори, а также о распространении теоремы Каратеодори о продолжении с жордановых областей на области Каратеодори. Эти вопросы естественно возникают при изучении структуры мер, ортогональных к пространствам рациональных функций на компактах в $\mathbb{C}$.

Цель работы и задачи исследования. Получение новых необходимых и достаточных условий (критериев) C^m-приближаемости (при $m \geqslant 0$)

функций L-аналитическими многочленами на плоских компактах. Получение необходимых и достаточных условий (критериев) равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами, изучение характера зависимости этих условий от порядка полианалитичности. Изучение свойств неванлинновских областей, в частности, получение описания неванлинновских областей в терминах конформных отображений и результатов о возможной регулярности и иррегулярности границ таких областей. Получение новых результатов о существовании в модельных пространствах однолистных функций (эта задача тесно связана с задачей о свойствах неванлинновских областей). Изучение свойств множеств (компактов и областей) Каратеодори, в частности, уточнение классической теоремы Каратеодори о сходимости к ядру в случае, когда предельная область является областью Каратеодори и распространение теоремы Каратеодори о продолжении с жордановых областей на области Каратеодори. Применение полученных свойств областей Каратеодори к изучению мер, ортогональных к пространству рациональных функций и к задачам равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Для общего однородного эллиптического оператора L порядка n с постоянными комплексными коэффициентами получен критерий C^{n-1}-слабой приближаемости функций L-аналитическими многочленами на компактах в $\mathbb{C}$, идентичный классической теореме Мергеляна. Кроме того, установлены новые необходимые и достаточные условия равномерной и C^m-слабой приближаемости функций L-аналитическими многочленами при $m \geqslant n$, также формулируемые в терминах топологических свойств компактов, на которых рассматривается аппроксимация.

2. Получено обобщение классической теоремы Каратеодори о сходимости к ядру в случае, когда предельная область является областью Каратеодори. Теорема Каратеодори о продолжении распространена на области Каратеодори. Установлен ряд новых результатов о структуре мер, ортогональных к рациональным функциями на компактах в $\mathbb{C}$.

3. Получен критерий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами на плоских компактах Каратеодори. Введено понятие *неванлинновской области*, оказавшееся ключевым для изучения задачи о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами.

4. Найдено описание неванлинновских областей в терминах конформных отображений, и предложен метод построения неванлинновских областей, основанный на построении однолистных функций, принадлежа-

щих модельным пространствам вида K_B, где B — произведение Бляшке. Построены нетривиальные примеры, показывающие степень возможной нерегулярности границ неванлинновских областей.

5. В задаче о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами на плоских компактах, не являющихся компактами Каратеодори, получен ряд достаточных условий приближаемости, установлена зависимость условий приближаемости от порядка полианалитичности и получены результаты, показывающие характер этой зависимости.

Методы исследования. В работе использованы методы теории функции, комплексного анализа, теории приближений (среди которых необходимо выделить метод локализации А. Г. Витушкина и классические двойственные методы). При изучении свойств неванлинновских областей используются методы теории модельных пространств.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и использованные методы могут найти применение в различных областях комплексного анализа, в теории функций, в теории приближений и в теории модельных пространств. Ряд результатов диссертации может быть использован в специальных курсах для аспирантов и студентов университетов.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на международных конференциях по комплексному анализу и теории приближений, в частности, на следующих конференциях: “St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis” (2003–2009, 2011 и 2012, С.-Петербург, Россия); “Computational Methods and Function Theory” (2005, Йоенсу, Финляндия и 2009, Анкара, Турция); “New Trends in Complex and Harmonic Analysis” (2007, Восс, Норвегия); “The 12-th Romanian-Finnish Seminar”, International Conference in Complex Analysis and Related Topics (2009, Турку, Финляндия); “I Jaen Conference on Approximation” (2010, Хаен, Испания); “Journées d’Analyse” (2010, Бордо, Франция); “Complex Analysis and Potential Theory” (2011, Монреаль, Канада). Тезисы всех докладов опубликованы в сборниках тезисов соответствующих конференций.

Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на ряде семинаров по анализу, теории функций и теории приближений: на семинаре по комплексному анализу под руководством академика РАН А. А. Гончара, чл.-корр. РАН Е. М. Чирки и проф. А. И. Аптекарева в Математическом институте им В. А. Стеклова РАН, на семинаре по многомерному комплексному анализу (семинар Витушкина) под руководством проф. В. К. Белошапки, чл.-корр. РАН С. Ю. Немировского, проф. А. Г. Сергеева и чл.-корр. РАН Е. М. Чирки на механико-математическом факультете Московского государственного университета им М. В. Ломоносова, на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций под руководством проф. В. П. Хавина и чл.-корр. РАН С. В. Кислякова в С.-Петербургском отделении Математического института им В. А. Стеклова РАН, на семинарах по анализу университетов Хельсинки и Ювяскюля (Финляндия), на Барселонском семинаре по анализу (Барселона, Испания, семинар проводится совместно Университетом Барселоны и Автономным университетом Барселоны).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 работах, список которых приведен в конце автореферата. Работы [2, 3, 4, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18] опубликованы в российских журналах, включенных в список ВАК, а работы [1, 5, 8, 9, 11, 16] — в ведущих зарубежных изданиях, включенных в международные системы цитирования. Из совместных работ [2, 4, 5, 7, 12, 17, 18] в диссертацию включены только результаты автора.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, дополнения и списка литературы. Общий объем работы — 220 страниц, список литературы состоит из 143 наименований.

Обзор содержания диссертации

Во введении формулируются основные задачи, рассматриваемые в диссертации, рассказывается об истории вопроса, приводится обзор классических и современных результатов по теме диссертации, обсуждаются основные результаты и структура диссертации.

Перейдем к точной постановке и обсуждению интересующих нас задач. Всюду в дальнейшем через z обозначается как комплексное число x_1+ix_2, так и соответствующая точка плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть $\partial_1 := \partial/\partial x_1$, а $\partial_2 := \partial/\partial x_2$.

Пусть L — *однородный эллиптический дифференциальный оператор на плоскости с постоянными комплексными коэффициентами.* Это означает, что $L = M_L(\partial_1, \partial_2)$, где M_L — однородный многочлен от переменных x_1 и x_2 с *комплексными коэффициентами*, удовлетворяющий *условию эллиптичности*, которое состоит в том, что $M_L(x_1, x_2) = 0$ только при $x_1 = x_2 = 0$.

Для произвольного подмножества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{O}_L(E)$ совокупность всех комплекснозначных функций f, каждая из которых определена и удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению $Lf = 0$ на некотором (своем) открытом множестве, содержащем E. Функции класса $\mathcal{O}_L(E)$ будем называть *L-аналитическими* на E. Полиномиальные (по переменным x_1 и x_2) L-аналитические функции будем называть *L-аналитическими многочленами.* Пусть $\mathcal{P}_L$ — пространство всех L-аналитических многочленов.

Классическими примерами операторов рассматриваемого вида являются стандартные операторы Коши–Римана $\overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\big)$ и Лапласа Δ, а также их степени $\overline{\partial}^n$ и Δ^n, $n \in \mathbb{N}$. В этих случаях L-аналитические функции — это голоморфные, гармонические, полианалитические и полигармонические функции соответственно.

Обозначим через $C(X)$ пространство всех непрерывных на компакте $X \subset \mathbb{C}$ комплекснозначных функций с равномерной нормой, а через $C^m(X)$, $m > 0$, — пространство функций класса C^m типа Уитни на X (точное определение пространства $C^m(X)$ и его нормы, которое мы не приводим здесь в силу его громоздкости, можно найти, например, в [/1/]). Пусть также, $C^0(X) = C(X)$.

Пусть $P^m_L(X)$ и $R^m_L(X)$ — это пространства, состоящие из всех функций, которые могут быть приближены в норме пространства $C^m(X)$ последовательностями L-аналитических многочленов и функций класса $\mathcal{O}_L(X)$ соответственно. Из эллиптичности оператора L непосредственно вытекает, что

$$P^m_L(X) \subset R^m_L(X) \subset A^m_L(X),$$

где $A^m_L(X) = C^m(X) \cap \mathcal{O}_L(X^\circ)$ (символом E° обозначается внутренность множества E). Естественным образом возникает следующая задача, которую традиционно называют задачей L-аналитической C^m-аппроксимации для классов функций, и которая объединяет задачи 1 и 2 диссертации:

Задача 1. Пусть $m \geqslant 0$. Найти необходимые и достаточные условия на компакт $X \subset \mathbb{C}$, при которых

1. $R^m_L(X) = A^m_L(X)$ или, соответственно,

2. $P^m_L(X) = A^m_L(X)$.

Всюду в дальнейшем для упрощения обозначений при $m = 0$ или $L = \overline{\partial}$ соответствующий индекс у всех рассматриваемых пространств опускается. Кроме того, если $L = \overline{\partial}^n$, $n \geqslant 2$, то соответствующий индекс L заменяется на индекс n. Например, $P^0_{\overline{\partial}}(X) = P(X)$, $R^1_{\overline{\partial}^n}(X) = R^1_n(X)$ и т.д.

Заметим, что в задаче 1.1 в качестве приближающих функций достаточно рассматривать только конечные линейные комбинации функций вида $\Phi_L(z-a)$, $a \notin X$, где Φ_L — фундаментальное решение для оператора L. Другими словами, в задаче 1.1 речь идет об аппроксимации “мероморфными” L-аналитическими функциями с “простыми полюсами”, лежащими вне X.

Отметим, что задача 1 является непосредственным аналогом классических задач о равномерной аппроксимации функций многочленами и рациональными функциями комплексного переменного, восходящих к Вейерштрассу и Рунге. Эта задачи хорошо известны специалистам по комплексному анализу и теории приближений, см., например, обзорную статью [/1/]. Отметим также, что задача 1 в общем случае остается нерешенной.

[/1/] *Verdera J.* Removability, capacity and approximation // Complex potential theory. Dordrecht: Kluwer, 1993. NATO ASI Series C. Vol. 439, P. 419–473.

Приведем краткий обзор результатов, полученных ранее в задаче 1 (более полный обзор по рассматриваемой тематике приведен в основном тексте диссертации, см. также обзорную работу автора [18]).

Начнем с равномерного случая ($m = 0$), так как полученные в этом случае результаты были первыми в хронологическом порядке и во многом стали базой для дальнейших исследований. Решение задачи 1.1 при $m = 0$ в голоморфном случае было получено А. Г. Витушкиным[/2/] в терминах аналитической емкости. *Теорема Витушкина* утверждает, что $A(X) = R(X)$ *если и только если* $\boldsymbol{\alpha}(D \setminus X^{\circ}) = \boldsymbol{\alpha}(D \setminus X)$ *для любого открытого ограниченного множества* D *в* $\mathbb{C}$, где $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ — непрерывная аналитическая емкость множеств[/2/]. Смысл теоремы Витушкина состоит в том, что для возможности аппроксимации каждой функции из $A(X)$ необходимо и достаточно, чтобы множество особенностей класса приближающих функций было не менее "массивно", чем множество особенностей класса приближаемых функций, а непрерывная аналитическая емкость $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ является мерой этой массивности. Недавно Х. Толса[/3/] получил описание емкости $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ в терминах кривизны мер, обладающих нулевой линейной плотностью и доказал, что $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ является полуаддитивной функцией множеств.

Решение задачи 1.1 при $m = 0$ для гармонических функций было получено М. В. Келдышем[/4/] и Ж. Дени[/5/]. Соответствующий результат удобно сформулировать в следующем виде: $A_{\Delta}(X) = R_{\Delta}(X)$ *если и только если* $\mathrm{Cap}(B \setminus X^{\circ}) = \mathrm{Cap}(B \setminus X)$ *для любого открытого круга* B *в* $\mathbb{C}$, где $\mathrm{Cap}(\cdot)$ – стандартная гармоническая емкость множеств, рассматриваемая в классической теории потенциала.

Наиболее общим известным результатом, полученным в задаче 1.1 при $m = 0$ для общих операторов L, является недавно доказанная М. Я. Мазаловым[/6/] теорема: *если* X *— произвольный компакт в* $\mathbb{C}$, *а фундаментальное решение* Φ_L *оператора* L *локально ограничено, то* $A_L(X) = R_L(X)$. Условия этой теоремы выполняются, например, для оператора $\overline{\partial}^n$, $n \geqslant 2$, так как $\Phi_{\overline{\partial}^n}(z) = \overline{z}^{n-1}/(\pi z)$.

Перейдем к задаче 1.2 при $m = 0$. Полностью изучены здесь только голоморфный ($L = \overline{\partial}$) и гармонический ($L = \Delta$) случаи. При $L = \overline{\partial}$ имеет ме-

---

/2/ *Витушкин А. Г.* Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // Успехи матем. наук. 1967. Т. 22, №6. С. 141–199.

/3/ *Tolsa X.* The semiadditivity of continuous analytic capacity and the inner boundary conjecture // Amer. J. Math. 2004. V. 126. P. 523–567.

/4/ *Келдыш М. В.* О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле // Успехи матем. наук. 1941. Т. 8. С. 171–231.

/5/ *Deny J.* Systèmes totaux de fonctions harmoniques // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1949. V. 1. P. 103–113.

/6/ *Мазалов М. Я.* Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений // Матем. сб. 2008. Т. 199, №1. С. 15–46 сто следующая теорема, полученная С. Н. Мергеляном[7]: *равенство* $P(X) = A(X)$ *имеет место в том и только том случае, когда множество* $\mathbb{C} \setminus X$ *связно.* При $L = \Delta$ решение дает *критерий Уолша–Лебега*[8] равномерной аппроксимации функций гармоническими многочленами: $A_\Delta(X) = P_\Delta(X)$ *если и только если* $\partial X = \partial \widehat{X}$, где $\widehat{X}$ обозначает объединение компакта X и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$.

Заметим, что возникающие в задаче 1.2 условия *равномерной* аппроксимации функций голоморфными и гармоническими многочленами являются глобальными и формулируются в терминах топологических свойств компактов, на которых рассматривается аппроксимация. Интересно, что этот характер условий равномерной приближаемости функций L-аналитическими многочленами не сохраняется для более общих операторов L (см. ниже).

Значительный интерес у специалистов вызывает задача 1.2 при $m = 0$ для *полианалитических* функций[9] (т.е. случай $L = \overline{\partial}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), в которой речь идет об аппроксимации функций многочленами вида $\overline{z}^{n-1} p_{n-1}(z) + \cdots + \overline{z} p_1(z) + p_0(z)$, где $p_0, \ldots, p_{n-1}$ — многочлены комплексного переменного.

Этот интерес вызван тем, что теория полианалитических функций представляет собой актуальное и активно развивающееся направление комплексного анализа, а также тем, что при изучении задачи 1.2 при $m = 0$ для полианалитических функций возникают совершенно новые и неожиданные эффекты и результаты. Во-первых, в этой задаче (впервые в рассматриваемой тематике) возникают условия приближаемости, которые зависят от *аналитических* свойств компактов, на которых рассматривается аппроксимация, причем эти свойства по существу не могут быть выражены в терминах подходящих емкостей. Во-вторых, соответствующие аналитические характеристики плоских компактов (такие, как понятие *неванлинновской области*) естественно связывают задачу о равномерной аппроксимации функций полианалитическими многочленами с другими направлениями исследований в современном анализе, например, с теорией модельных пространств (т.е. инвариантных относительно оператора обратного сдвига подпространств пространства Харди H^2).

Задача 1.2 при $m = 0$ для полианалитических функций рассматривалась рядом авторов. Отметим работы Д. Кармоны[10] (где, в частности, доказано, что равенство $A_n(X) = P_n(X)$ имеет место для компактов X со связ-

[7] *Мергелян С. Н.* Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи матем. наук. 1952. Т. 7, №2. С. 31–122.

[8] *Walsh J. L.* The approximation of harmonic functions by polynomials and by harmonic rational functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1929. V. 35. P. 499–544.

[9] *Balk M. B.* Polyanalytic functions. Berlin: Academie Verlag, 1991. Mathematical Research. Vol. 63.

[10] *Carmona J. J.* Mergelyan approximation theorem for rational modules // J. Approx. Theory. 1985. V. 44. P. 113–126.

ным дополнением), В. В. Андриевского, В. И. Белого и В. В. Маймескула[11], А. Буаве, П. М. Готье и П. В. Парамонова[12], а также работы автора[13] и [1, 3, 4, 5, 7, 17].

Перейдем к обсуждению задачи 1 в случае $m > 0$. Пусть L — рассматриваемый оператор общего вида и пусть $n = \operatorname{ord}(L)$ — порядок оператора L. В работах А. Г. О'Фаррелла[14] и Д. Вердеры[15] получено следующее решение задачи 1.1 при $m > n-1$: *при* $m \in (n-1, n)$ *равенство* $A^m_L(X) = R^m_L(X)$ *имеет место тогда и только тогда, когда найдется константа* $A_0 > 0$ *такая, что для каждого ограниченного открытого множества* D *в* $\mathbb{C}$ *справедлива оценка* $\mathcal{M}^{m+2-n}_*(D \setminus X^\circ) \leqslant A_0\, \mathcal{M}^{m+2-n}(D \setminus X)$, где $\mathcal{M}^s(\cdot)$ — s-мерный обхват, а $\mathcal{M}^s_*(\cdot)$ — s-мерный нижний обхват по Хаусдорфу, а *при* $m \geqslant n$ *необходимым и достаточным условием выполнения равенства* $A^m_L(X) = R^m_L(X)$ *является условие* $\overline{X^\circ} = X$. Отметим также работу[16] в которой задача 1.1 (для общих операторов L) решена при $m \in (n-2, n-1)$. П. В. Парамонов[17] получил следующий критерий в задаче о C^1-приближаемости функций *гармоническими* функциями: *равенство* $A^1_\Delta(X) = R^1_\Delta(X)$ *имеет место тогда и только, когда* $\boldsymbol{\kappa}_1(D \setminus X^\circ) = \boldsymbol{\kappa}_1(D \setminus X)$ *для любой ограниченной области* D *в* $\mathbb{C}$, где $\boldsymbol{\kappa}_1(\cdot)$ — это гармоническая C^1-емкость[17]. Из результатов Толсы[3] вытекает, что емкости $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ и $\boldsymbol{\kappa}_1(\cdot)$ в $\mathbb{C}$ сравнимы.

Перейдем теперь к задаче 1.2 при $m > 0$. Основная часть известных результатов, полученных в этой задаче, основана на применении известного метода Рунге "выведения полюсов" L-аналитических функций. Этот метод позволяет *в случае связности множества* $\mathbb{C} \setminus X$ свести при всех $m \geqslant 0$ задачу 1.2 к задаче 1.1.

Так, при $L = \overline{\partial}$, $m > 0$ и при $L = \Delta$, $m > 1$ необходимым и достаточным условием совпадения пространств $A^m_L(X)$ и $P^m_L(X)$ является связность множества $\mathbb{C} \setminus X$ и условие $A^m_L(X) = R^m_L(X)$ (см. цитированный выше результат О'Фаррелла–Вердеры). При $L = \Delta$ и $m \in (0, 1]$ ситуация несколько сложнее

---

[11] *Андриевский В. В., Белый В. И., Маймескул В. В.* Прямые и обратные теоремы приближения функций для рациональных модулей в областях с квазиконформной границей // Матем. заметки. 1989. Т. 46, вып. 2. С. 12–20.

[12] *Буаве. А., Готье П. М., Парамонов П. В.* О равномерной аппроксимации n-аналитическими функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, №3. С. 15–28.

[13] *Федоровский К. Ю.* О равномерных приближениях функций n-аналитическими многочленами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59, вып. 4. С. 604–610.

[14] *O'Farrell A. G.* Rational approximation in Lipschits norms. II // Proc. Royal Irish. Acad. 1979. V. 79A. P. 104–114.

[15] *Verdera J.* C^m-approximation by solution of elliptic equations and Calderon–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55, №1. P. 157–187.

[16] *Mateu J., Netrusov Yu., Orobitg J., Verdera J.* BMO and Lipschitz approximation by solutions of elliptic equations // Ann. Inst. Fourier. 1996. V 46, №4. P. 1057–1081.

[17] *Парамонов П. В.* О гармонических аппроксимациях в C^1-норме // Матем. сб. 1990. Т. 181, №10. С. 1341–1365.

и интереснее. В работе П. В. Парамонова[18] решен вопрос о совпадении пространств $A^m_\Delta(X)$ и $P^m_\Delta(X)$ при $m \in (0, 1/2)$, причем ответ здесь оказывается таким же, как и в равномерном случае: необходимым и достаточным условием является условие $\partial X = \partial \widehat{X}$. Случай $m \in [1/2, 1)$ остается неизученным. При $m = 1$ имеет место следующий результат, идентичный критерию Мергеляна равномерной приближаемости функций многочленами комплексного переменного: *равенство* $A^1_\Delta(X) = P^1_\Delta(X)$ *имеет место тогда и только тогда, когда множество* $\mathbb{C} \setminus X$ *связно.* Этот результат был получен в[19] для так называемой C^1-нормы "слабого типа", а в работе[18] было отмечено, что справедливость соответствующего утверждения в требуемом виде сводится, по существу, к вопросу о справедливости утверждения о сравнимости величин $\boldsymbol{\kappa}_1(D)$ и $\operatorname{diam}(D)$ для любой ограниченной области D в $\mathbb{C}$. Положительный ответ на последний вопрос вытекает из результатов работы Х. Толсы[20].

Итак, задачи равномерной и C^m-аппроксимации функций L-аналитическими многочленами и связанные с ними задачи о свойствах неванлинновских областей и множеств Каратеодори, принадлежат к активно развивающемуся направлению в современном комплексном анализе и теории приближений. В этом направлении имеется целый ряд известных открытых задач и гипотез, изучение которых представляет значительный интерес.

Перейдем к обзору содержания и основных результатов диссертации по главам. Теоремы I–XII, приводимые ниже и содержащие формулировки основных результатов диссертации, даны в той форме, как они приведены во Введении (где они имеют такую же нумерацию). Эти теоремы, как правило, объединяют несколько утверждений из основного текста диссертации, номера которых (во внутренней нумерации диссертации) не приводятся для упрощения ссылок.

В первой главе диссертации рассматривается задача 1 для произвольного однородного эллиптического оператора L порядка $n \geqslant 2$ с постоянными комплексными коэффициентами, причем основное внимание уделяется задаче 1.2. Глава 1 состоит из пяти параграфов. В §1.1 уточняется постановка рассматриваемых задач. Для этого приводятся определения пространств функций класса C^m на компакте X — пространства $C^m(X)$ типа Уитни и пространства $C^m_w(X)$ "слабого" типа — и обсуждается их различие, определяются пространства $A^m_L(X)$, $P^m_L(X)$ и $R^m_L(X)$, а также их C^m-слабые версии $A^m_{w,L}(X)$, $P^m_{w,L}(X)$ и $R^m_{w,L}(X)$.

Напомним понятие пространства функций класса C^m "слабого" типа при

[18] *Парамонов П. В.* C^m-приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184, №2. С. 105–128.
[19] *Парамонов П. В.* О приближениях гармоническими полиномами в C^1-норме на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57, №2. С. 113–124.
[20] *Tolsa X.* Painleve's problem and the semiadditivity of analytic capacity // Acta Math. 2003. V. 190. P. 105–149.

целых $m > 0$. Говорят, что последовательность функций класса C^m в окрестности компакта X (у каждой функции — своя окрестность) сходится в смысле C^m_w (или в C^m-метрике слабого типа) на компакте X, если она равномерно сходится на X вместе со всеми своими частными производными порядка k, $k \leqslant m$. Ясно, что эта сходимость слабее (в общем случае), чем сходимость в пространстве $C^m(X)$ типа Уитни.

В §1.2 формулируются и обсуждаются основные результаты первой главы и их следствия. Для $z \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ определим величину $d(z, r, X)$ как верхнюю грань диаметров всех связных компонент множества $B(z, r) \setminus X$ и введем величины $\theta_X(z) := \inf_{r>0} d(z, r, X)/r$ и $\theta(X) := \inf_{z \in \partial X} \theta_X(z)$.

Основным результатом первой главы диссертации является следующее утверждение:

Теорема I. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$.*

1. *Если $\theta(X) > 0$, то $A^{n-1}_{w,L}(X) = R^{n-1}_{w,L}(X)$.*

2. *Равенство $A^{n-1}_{w,L}(X) = P^{n-1}_{w,L}(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.*

Второе утверждение теоремы I содержит критерий C^{n-1}_w-приближаемости функций L-аналитическими многочленами, идентичный теореме Мергеляна. Отметим также, что условие $\theta(X) > 0$ в этой теореме можно заменить на более просто проверяемое условие $d_c(X) > 0$, где через $d_c(X)$ обозначена нижняя грань диаметров всех связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$, или на условие состоящее в том, что компакт X является компактом Каратеодори, или на условие связности множества $\mathbb{C} \setminus X$.

Пусть $m \geqslant n$ — целое число. Из доказательства второго утверждения теоремы I и из цитированного выше результата О'Фаррелла–Вердеры вытекает следующее утверждение:

Равенство $A^m_{w,L}(X) = P^m_{w,L}(X)$ имеет место в том и только том случае, когда $\overline{X^\circ} = X$ и множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.

При $L = \overline{\partial}^n$, $n \geqslant 2$, результат теоремы I можно усилить — имеет место следующее утверждение, идентичное приведенным выше теоремам Мергеляна (о равномерной приближаемости функций многочленами комплексного переменного) и Парамонова (о C^1-приближаемости функций гармоническими многочленами):

Равенство $A^{n-1}_n(X) = P^{n-1}_n(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.

В первой главе диссертации устанавливаются также следующие достаточные условия *равномерной* приближаемости функций L-аналитическими функциями и многочленами:

Теорема II. *Пусть* X *— компакт в* $\mathbb{C}$, *а* $\partial_* X := \{z \in \partial X : \ \theta_X(z) > 0\}$.

1. *Если* $\theta(X) > 0$, *то* $A_L(X) = R_L(X)$.

2. *Если* $\mathrm{ord}(L) = 2$, *а* $\partial X = \partial_* X$, *то* $A_L(X) = R_L(X)$.

3. *Если множество* $\mathbb{C} \setminus X$ *связно, то* $A_L(X) = P_L(X)$.

Первое и второе утверждения этой теоремы являются новыми для операторов L, фундаментальное решение которых не является локально ограниченным (для операторов L, имеющих локально ограниченное фундаментальное решение, равенство $A_L(X) = R_L(X)$ выполнено для любого компакта X в силу цитированного выше результата Мазалова).

Доказательства теорем I и II основаны на применении специальным образом модифицированного локализационного метода А. Г. Витушкина. В §1.3 вводится локализационный оператор Витушкина для оператора L, изучаются его свойства, и доказывается ряд технических лемм, а в §1.4 приводятся основные доказательства. При этом в случае операторов порядка $n = 2$ существенным новшеством оказалось построение аппроксимант при помощи подходящих однозначных "склеек" специальных многозначных L-аналитических функций. В §1.5 обсуждается вышеприведенное дополнение к теореме I.

Во второй главе рассматриваются множества (области и компакты) Каратеодори. Такие множества естественно возникают во многих задачах теории приближений, а изучение их свойств представляет собой актуальное направление исследований в комплексном анализе.

Напомним, что компакт $X \subset \mathbb{C}$ называется *компактом Каратеодори*, если $\partial X = \partial \widehat{X}$, где $\widehat{X}$ — это объединение множества X и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$. Заметим, что множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно если и только если $X = \widehat{X}$.

Далее, ограниченная область Ω в $\mathbb{C}$ называется *областью Каратеодори*, если $\partial\Omega = \partial\Omega_\infty$, где Ω_∞ — это неограниченная связная компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$. Непосредственно проверяется, что любая область Каратеодори является односвязной и обладает тем свойством, что $\Omega = (\overline{\Omega})^\circ$.

Глава 2 состоит из 5 параграфов. В §2.1 приводится обзор задач и результатов теории приближений, в которых возникают множества Каратеодори. Например, условие, состоящее в том, что компакт X является компактом Каратеодори, возникает как необходимое и достаточное условие в критерии Уолша–Лебега равномерной приближаемости функций гармоническими многочленами. Во многих случаях это условие является только достаточным, причем множества Каратеодори не являются самыми общими множествами, на которые распространяются соответствующие результаты. Кроме того, в §2.1 приводится ряд примеров множеств Каратеодори, и устанавливаются их простые топологические свойства.

Множества Каратеодори естественно возникают и в теории конформных отображений. Пусть $\mathbb{D} := \{w \in \mathbb{C} : \ |w| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, а $\mathbb{T} := \{\xi \in \mathbb{C} : \ |\xi| = 1\}$ — единичная окружность. Напомним также, что через $H^\infty(U)$, где U — открытое множество в $\mathbb{C}$, обозначается пространство всех голоморфных ограниченных функций в U. Если функция $f \in H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ то для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ существуют конечные угловые предельные (граничные) значения $f(\xi)$ функции f в точке ξ. Всюду в дальнейшем под контуром понимается замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$ (не обязательно спрямляемая). Если $\mathit{\Gamma}$ — контур в $\mathbb{C}$, то $D(\mathit{\Gamma})$ — область, им ограниченная.

В §2.2 рассматривается следующий вопрос: *пусть Ω — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, пусть φ — некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω, а ψ — соответствующее обратное отображение; что можно утверждать о возможности продолжения функции φ в $\overline{\mathbb{D}}$ и, соответственно, о возможности продолжения функции ψ в $\overline{\Omega}$?*

Согласно *классической теореме Каратеодори о продолжении*, φ продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\Omega}$ если и только если Ω — жорданова область. Кроме того, φ непрерывно (не обязательно гомеоморфно) продолжается в $\overline{\mathbb{D}}$ если и только если множество $\partial\Omega$ является локально связным. В общем случае, в силу теоремы Каратеодори о простых концах, φ продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на объединение Ω и множества простых концов Ω, однако это объединение может существенно отличаться от $\overline{\Omega}$ в любом разумном геометрическом и/или топологическом смысле.

Рассмотрим множество $\partial_a\Omega$, состоящее из всех тех точек границы $\partial\Omega$ области Ω, которые являются достижимыми из Ω посредством некоторой кривой. Можно показать, что

$$\partial_a\Omega = \{\varphi(\xi) : \ \xi \in \mathcal{F}(\varphi)\},$$

где множество $\mathcal{F}(\varphi)$ (это множество обычно называют *множеством Фату* функции φ) состоит из всех тех точек $\xi \in \mathbb{T}$, в которых угловые предельные значения $\varphi(\xi)$ существуют. Известно, что множества $\mathcal{F}(\varphi)$ и $\partial_a\Omega$ являются борелевскими.

Определение. Множество $\partial_a\Omega$ называется *достижимой частью* границы области Ω. Область Ω называется *областью с достижимой границей*, если $\partial\Omega = \partial_a\Omega$.

Пусть Ω — область Каратеодори. Предположим, что φ выбрано так, чтобы $\varphi(0) = z_0 \in \Omega$, а $\varphi'(0) > 0$. Рассмотрим последовательность $\big(\mathit{\Gamma}_k\big)_{k=1}^\infty$ спрямляемых контуров таких, что $\Omega \subset D(\mathit{\Gamma}_k) \subset D(\mathit{\Gamma}_{k-1})$ и $\mathit{\Gamma}_k$ стремится к $\partial\Omega$ при $k \to \infty$. Пусть $\big(\varphi_k\big)_{k=1}^\infty$ — последовательность конформных отображений круга $\mathbb{D}$ на $D(\mathit{\Gamma}_k)$, таких, что $\varphi_k(0) = z_0$ и $\varphi_k'(0) > 0$. Так как все $D(\mathit{\Gamma}_k)$ являются жордановыми областями , то все функции φ_k продолжаются до соответствующих гомеоморфизмов замкнутого круга $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{D(\mathit{\Gamma}_k)}$.

Напомним, что из теоремы Каратеодори о сходимости к ядру вытекает, что $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$ локально равномерно в $\mathbb{D}$, а $\varphi_k^{-1} \to \varphi^{-1}$ при $k \to \infty$ локально равномерно в Ω (под локально равномерной сходимостью в области G понимается равномерная сходимость на компактных подмножествах G). Следующее утверждение объединяет основные результаты §2.2 (символом $\rightrightarrows_Y$ обозначается равномерная сходимость на компакте $Y \subset \mathbb{C}$):

Теорема III. *Пусть Ω — область Каратеодори, а функции φ, ψ и последовательности $\big(\Gamma_k\big)_{k=1}^{\infty}$ и $\big(\varphi_k\big)_{k=1}^{\infty}$ такие, как указано выше.*

1. *Для любой точки $\zeta \in \partial_a\Omega$ существует единственная точка $\xi(\zeta) \in F(\varphi) \subset \mathbb{T}$ такая, что $\zeta = \varphi(\xi)$.*

При $\zeta \in \partial_a\Omega$ пусть $\psi(\zeta) = \varphi^{-1}(\zeta) := \xi(\zeta)$.

2. *$\varphi_k^{-1}(\zeta) \to \varphi^{-1}(\zeta)$ при $k \to \infty$ для любой точки $\zeta \in \partial_a\Omega$. Кроме того, $|\varphi_k^{-1}| \rightrightarrows_{\overline{G}} 1$ при $k \to \infty$ для любой ограниченной связной компоненты G множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$.*

3. *Функции φ и ψ продолжаются до борелевских функций (обозначаемых также символами φ и ψ) на $\mathbb{D} \cup \mathcal{F}(\varphi)$ и на $\Omega \cup \partial_a\Omega$ соответственно, причем $\psi(\varphi(\xi)) = \xi$ и $\varphi(\psi(\zeta)) = \zeta$ для любых $\xi \in \mathcal{F}(\varphi)$ и $\zeta \in \partial_a\Omega$.*

4. *Если Ω — область Каратеодори с достижимой границей, то функция φ^{-1} принадлежит к первому классу Бэра в $\overline{\Omega}$.*

Первое и второе утверждения теоремы III являются уточнением классической теоремы Каратеодори о сходимости к ядру в случае, когда предельная область является областью Каратеодори, а третье и четвертое утверждения этой теоремы распространяют классическую теорему Каратеодори о продолжении с жордановых областей на области Каратеодори.

В завершении §2.2 приводится пример области Каратеодори с достижимой границей, не являющейся жордановой областью, и доказывается, что любая область Каратеодори с достижимой границей обладает тем свойством, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ является связным (предложение 2.4 и следствие 2.5 в основном тексте диссертации).

В §2.3 диссертации, при помощи методов теории конформных отображений, устанавливается ряд важных результатов о структуре мер (под мерой мы понимаем конечную комплексную борелевскую меру), ортогональных к пространству рациональных функций как на компактах Каратеодори, так и на компактах специального вида, не являющихся компактами Каратеодори. Так, имеет место следующее утверждение (символом $\widehat{\mu}$ обозначается преобразование Коши меры μ, символом $\mu_{|E}$ — ограничение меры μ на множество E, символом $\mathcal{R}(X)$ — пространство рациональных функций комплексного переменного с полюсами вне компакта X, символом $H^1 = H^1(\mathbb{D})$ — стандартное пространство Харди в круге $\mathbb{D}$ и, наконец, символом $\mathcal{CC}(E)$ — совокупность всех связных компонент множества E):

Теорема IV.

1. *Пусть Ω — область Каратеодори, φ — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω, а $\psi = \varphi^{-1}$. Пусть мера ω на $\partial\Omega$ определена соотношением $\omega = \varphi(d\xi)$. Тогда:*

а) если ν такая мера, что $\operatorname{Supp}(\nu) \subset \Omega$, то мера $\nu^* := \nu + (\widehat{\psi(\nu)} \circ \psi)\,\omega$ ортогональна пространству $A(\overline{\Omega})$;

б) если $K \subset \Omega$ — компакт, а μ — мера на $K \cup \partial\Omega$ такая, что $\mu \perp \mathcal{R}(\overline{\Omega})$, то существует функция $h \in H^1$ такая, что $\mu = (\mu_{|K})^* + (h \circ \psi)\,\omega$.

2. *Пусть X — компакт Каратеодори такой, что $X^\circ \neq \varnothing$, а $K \subset X^\circ$ — компакт. Пусть μ — мера на $K \cup \partial X$ такая, что $\mu \perp \mathcal{R}(X)$, тогда*

$$\mu = \sum_{\Omega \in \mathcal{CC}(X^\circ)} \mu_\Omega, \qquad \text{где} \quad \mu_\Omega = \mu_{|\overline{\Omega}} \perp \mathcal{R}(\overline{\Omega}),$$

а ряд сходится по норме в пространстве мер на ∂X.

Отметим, что утверждение (1б) теоремы IV в случае, когда μ — это мера на $\partial\Omega$, было доказано ранее в работе Э. Бишопа[21]. Утверждение (2) теоремы IV в случае, когда $K = \varnothing$ (за исключением важного обстоятельства $\mu_\Omega = \mu_{|\overline{\Omega}}$) было (в неявной форме) получено Э. Бишопом[22]. Центральной идеей работ[21],[22] является изучение понятие аналитического дифференциала, представляющего меру. Техника, связанная с использованием конформных отображений и основанная на использовании теоремы III, развитая во второй главе диссертации, позволила как получить существенно более простое доказательство этих результатов, так и доказать заметно более общее утверждение — теорему IV. Интересно отметить, что мера ν^*, определенная в первом утверждении теоремы IV, является естественным обобщением понятия "аналитического выметания" меры, введенного для областей с аналитическими границами в работе Д. Хавинсона[23].

В §2.4 диссертации понятие компакта Каратеодори рассматривается в связи со свойством максимальности подалгебры $P(X)$ алгебры $C(X)$, где X — компакт в $\mathbb{C}$. Напомним, что замкнутая подалгебра A алгебры $C(X)$ называется *максимальной*, если для любой замкнутой подалгебры B алгебры

[21] *Bishop E.* The structure of certain measures // Duke Math. J. 1958. V. 25, №.2. P. 283–289.
[22] *Bishop E.* Boudnary measures of analytic differentials // Duke Math. J. 1960. V. 27, №3. P. 331–340.
[23] *Khavinson D.* F. and M. Riesz theorem, analytic balayage, and problems in rational approximation // Constr. Approx. 1988. V. 4. P. 341–356.

$C(X)$ такой, что $B \supset A$ выполняется одно из двух условий: $A = B$ или $B = C(X)$. Изучение вопроса о максимальности алгебры $P(X)$ для различных компактов X в $\mathbb{C}$ восходит к Д. Вермеру, который доказал, что диск-алгебра $P(\mathbb{D})$ является максимальной в $C(\mathbb{T})$. Позже Э. Бишоп показал, что $P(X)$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\partial X)$, коль скоро компакт X имеет связное дополнение и связную внутренность. Оказывается, что имеет место следующий результат:

Теорема V. *Пусть $X \subset \mathbb{C}$ — компакт. Если $P(X)$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(X)$, то X является компактом Каратеодори и $X^\circ = \varnothing$. Если, более того, $X = \partial\Omega$, где Ω — непустое ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$, то множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ и $\mathbb{C} \setminus \Omega$ связны.*

В §2.5 получена характеристика функций, мероморфных в областях Каратеодори, в терминах специального "ослабленного" варианта принципа максимума модуля. Формулировка соответствующего результата (теоремы 2.13 основного текста диссертации) не приводится здесь, так как это требует определения ряда специальных дополнительных понятий.

Третья глава является центральной главой диссертации. В ней изучается задача о равномерной приближаемости функций полианалитическими функциями и многочленами.

Напомним, что функция f называется *полианалитической порядка n* (или, короче, *n-аналитической*) на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ если она имеет вид

$$f(z) = \overline{z}^{n-1} f_{n-1}(z) + \cdots + \overline{z} f_1(z) + f_0(z),$$

где $n \in \mathbb{N}$, а функции $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ (комплексного переменного z) голоморфны в U. Функции $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ называются *голоморфными компонентами* полианалитической функции f. Таким образом, n-аналитические функции — это L-аналитические функции при $L = \overline{\partial}^n$, $n \in \mathbb{N}$, а *n-аналитические многочлены* — это n-аналитические функции f, все голоморфные компоненты которых являются многочленами комплексного переменного. Обозначим $\mathcal{P}_n$ множество всех n-аналитических многочленов.

Далее, под n-аналитическими рациональными функциями мы будем понимать n-аналитические функции, все голоморфные компоненты которых — это рациональные функции комплексного переменного (отметим, что если $n \geqslant 2$, то n-аналитическая рациональная функция не является отношением двух n-аналитических многочленов). Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{R}_n(X)$ обозначим совокупность всех таких n-аналитических рациональных функций, голоморфные компоненты которых — это рациональные функции с полюсами вне X.

Пусть X и Y — компакты в $\mathbb{C}$, причем $X \subset Y$. Определим пространство $R_n(X, Y)$ как замыкание в $C(X)$ подпространства $\{g_{|X} : \ g \in \mathcal{R}_n(Y)\}$.

Напомним, что символами $A_n(X)$ и $P_n(X)$ обозначаются пространства $A^0_{\overline{\partial}^n}(X)$ и $P^0_{\overline{\partial}^n}(X)$ и соответственно.

Глава 3 состоит из 6 параграфов. В §3.1 приводится предварительный анализ рассматриваемой задачи. Основной вопрос, обсуждаемый в §3.1 — это вопрос о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$. Этот вопрос связан с тем, что если компакт X имеет связное дополнение, то $A_n(X) = P_n(X)$ (см. выше), а контуры — это простейшие компакты, имеющие несвязное дополнение. Приводятся примеры аналитических контуров $\mathit{\Gamma}$, для которых $P_n(\mathit{\Gamma}) \neq C(\mathit{\Gamma})$ при всех $n \geqslant 1$ (любая окружность), и примеры контуров $\mathit{\Gamma}$, для которых $P_n(\mathit{\Gamma}) = C(\mathit{\Gamma})$ при определенных значениях $n \geqslant 2$ (эллипс или кривая Ламе с подходящими параметрами). Далее, в §3.1 обсуждаются полученные в [13] необходимые и достаточные условия равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами на спрямляемых контурах общего вида. Эти условия формулируются в терминах специальных аналитических свойств рассматриваемых контуров, не выражающихся в терминах подходящих емкостей. Это обстоятельство существенно отличает рассматриваемую задачу от ранее рассматривавшихся задач полиномиальной аппроксимации.

В §3.2 вводится (см. определение 3.1) понятие *неванлинновской области*, которое выражает специальное аналитическое свойство, отвечающее за возможность аппроксимации в задаче 1.2 при $m = 0$ для полианалитических функций, и являющееся одним из центральных понятий диссертации.

Определение. Ограниченная односвязная область Ω в $\mathbb{C}$ называется *неванлинновской*, если существуют две функции $u, v \in H^\infty(\Omega)$ (причем $v \not\equiv 0$) такие, что равенство

$$\overline{z} = u(z)/v(z)$$

выполняется на $\partial\Omega$ *почти всюду в смысле конформного отображения*. Это означает, что для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ имеет место равенство *угловых граничных значений* $\overline{\varphi(\xi)} = (u \circ \varphi)(\xi)/(v \circ \varphi)(\xi)$, где φ — некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω.

Обозначим через ND совокупность всех неванлинновских областей.

Определение неванлинновской области корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора φ. Более того, если $\Omega \in ND$, то, по теореме единственности Лузина–Привалова, отношение u/v определено в Ω единственным образом. Заметим также, что если $\Omega \in ND$ — это жорданова область со спрямляемой границей, то равенство $\overline{z} = u(z)/v(z)$ может пониматься непосредственно как равенство угловых граничных значений почти всюду на $\partial\Omega$.

В §3.2 диссертации приводятся примеры неванлинновских областей и областей, не являющихся неванлинновскими, в классе жордановых областей с аналитическими границами. Так, любой круг является неванлинновской областью, а область, ограниченная невырожденным эллипсом — нет. Понятие неванлинновской области подробно изучается в главе 4 диссертации. Обзор соответствующих результатов приведен ниже.

В §3.3 задача 1.2 при $m = 0$ для полианалитических функций изучается в случае компактов Каратеодори. В этом случае получен следующий критерий приближаемости, который является одним из основных результатов третьей главы диссертации:

Теорема VI.

1. *Пусть* Ω *ограниченная односвязная область такая, что* $\Omega \in ND$. *Тогда* $R_n(\partial\Omega, \overline{\Omega}) \neq C(\partial\Omega)$ *для любого целого числа* $n \geqslant 1$.

2. *Если* Ω *– область Каратеодори, а* $n \geqslant 2$ *— натуральное число, то* $C(\partial\Omega) = R_n(\partial\Omega, \overline{\Omega})$ *если и только если* $\Omega \notin ND$.

3. *Пусть* X *– компакт Каратеодори, а* $n \geqslant 2$ *— натуральное число. Тогда* $A_n(X) = P_n(X)$, *если и только если каждая ограниченная компонента множества* $\mathbb{C} \setminus X$ *не является неванлинновской областью.*

В частности, если Ω — область Каратеодори такая, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно, то $C(\partial\Omega) = P_n(\partial\Omega)$ если и только если $\Omega \notin ND$.

В случае компактов X, не являющихся компактами Каратеодори, задача 1.2 при $m = 0$ для полианалитических функций оказалась существенно сложнее и остается нерешенной вплоть до настоящего времени. Этому случаю посвящены §§3.4-3.5 диссертации.

При изучении рассматриваемой задачи для компактов, не являющихся компактами Каратеодори, потребовались специальные модификации понятия неванлинновской области. Одним из таких понятия является понятие *локально неванлинновской области.*

Напомним (см. определение 3.6), что ограниченная односвязная область Ω в $\mathbb{C}$ называется *локально неванлинновской*, если существуют компакт $\Sigma \subset \Omega$ и две функции $u, v \in H^\infty(\Omega \setminus \Sigma)$, $v \not\equiv 0$, такие, что равенство $\overline{z} = u(z)/v(z)$ выполняется почти всюду на $\partial\Omega$ в смысле конформного отображения. Пусть LND — класс всех локально неванлинновских областей. Например, любая область, ограниченная эллипсом (не являющимся окружностью), принадлежит классу LND, но не классу ND. Так как для области $\Omega \in LND$ существует много различных способов определить требуемый компакт Σ, то для того, чтобы показать, какие Σ, u, v мы имеем в виду работая с Ω, мы будем использовать обозначение $\Omega \sim [\Sigma, u, v]$.

В §3.4 устанавливается ряд весьма общих достаточных условий приближаемости в задаче 1.2 при $m = 0$ для полианалитических функций для компактов, не являющихся компактами Каратеодори. Основные результаты относятся к следующему случаю. Пусть Ω — некоторая область Каратеодори с границей Γ, а $K \subset \overline{\Omega}$ — компакт с условием $A_n(K) = R_n(K, \overline{\Omega})$.

Спрашивается, при каких дополнительных условиях имеет место равенство $A_n(K\cup\Gamma) = R_n(K\cup\Gamma, \overline{\Omega})$? Важность этого случая обусловлена результатами работы [12]. Следующее утверждение дает достаточное условие приближаемости в этой задаче в случае, когда $K\subset\Omega$.

Теорема VII. *Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, Y — компакт Каратеодори, $Y^\circ \neq \varnothing$, а $K \subset Y^\circ$ — компакт с условием $A_n(K) = R_n(K, Y)$. Пусть для любой компоненты $\Omega \in \mathcal{CC}(Y^\circ)$ выполнено $\Omega \notin ND$ и, если $K_\Omega := K\cap\Omega \neq \varnothing$, то для Ω выполнено одно из двух условий:*

(i) *$\Omega \notin LND$;*

(ii) *$\Omega \in LND$ и $\Omega \sim [\Sigma, u, v]$, а функция u/v не может быть мероморфно продолжена из $\Omega \setminus \widehat{\Sigma \cup K_\Omega}$ на $\Omega \setminus \widehat{K}_\Omega$.*

Тогда $A_n(K \cup \partial Y) = R_n(K \cup \partial Y, Y)$.

Если же в рассматриваемой задаче предположить, что компакт K “выходит на границу” области Ω, то ситуация становиться заметно сложнее. Одно достаточное условие приближаемости в этой ситуации получено в теореме 3.12 (формулировка которой не приводится здесь в силу своей громоздкости). Другое достаточное условие похожей природы было получено в [12].

Важно отметить, что изучение условий приближаемости функций полианалитическими многочленами на компактах, не являющихся компактами Каратеодори, требует привлечения все более и более сложных аналитических свойств компактов, на которых рассматривается аппроксимация. Хорошую гипотезу о том, как может выглядеть окончательный критерий приближаемости, до сих пор не удается даже сформулировать.

Используя теорему VII, можно, в частности, показать, что если Γ — это эллипс с фокусами в точках ±1, то $P_3(\Gamma\cup[-1,1]) = C(\Gamma\cup[-1,1]) \neq P_2(\Gamma\cup[-1,1])$. Этот пример указывает на то, что условия равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами могут зависеть от порядка полианалитичности.

Изучению этой зависимости посвящен §3.5 диссертации. В этом параграфе доказывается следующее утверждение, являющееся одним из основных результатов третьей главы диссертации:

Теорема VIII. *Для каждого $n \geqslant 1$ существует компакт $X \subset \mathbb{C}$ такой, что $P_{2n}(X) = C(X) \neq P_n(X)$.*

Далее, в §3.5 изучается возможный характер зависимости условий приближаемости в задаче 1.2 при $m = 0$ для полианалитических функций от порядка полианалитичности. Теорема 3.19 (формулировка которой не приводится здесь в силу громоздкости возникающих в ней условий), полученная в этом параграфе, указывает на возможный характер этой зависимости.

Один из интересных и важных вопросов, возникающих в рассматриваемой проблематике — это вопрос о структуре пространства $P_n(X)$ в том случае, когда известно, что $P_n(X) \neq A_n(X)$.

В §3.6 диссертации этот вопрос рассматривается в случае, когда $X = \mathit{\Gamma}$ — это граница жордановой области G в $\mathbb{C}$, являющейся классической квадратурной областью (для класса $AL^1(G)$ голоморфных и интегрируемых по плоской мере Лебега функций в G). Отметим, что этот вопрос ставился Д. В. Якубовичем на 13-й и 16-й конференциях "St. Petersburg Summer Meeting in Mathematica Analysis" в 2004 и 2007 году.

Напомним, что ограниченная область $G \subset \mathbb{C}$ называется *классической квадратурной областью*, если существуют конечное число точек $a_1, \dots, a_m \in G$, числа $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ и комплексные коэффициенты $c_{k,j}$ (при $k = 1 \dots m$, а $j = 0 \dots n_k - 1$) такие, что для любой функции $f \in AL^1(G)$ имеет место равенство $\iint_G f\, dx_1 dx_2 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_k-1} c_{k,j} f^{(j)}(a_k)$, которое традиционно называется *квадратурным соотношением* для G.

Известно[/24/], что ограниченная область G является классической квадратурной областью, если и только если существует мероморфная в G функция S, непрерывная вплоть до ∂G и такая, что $\overline{z} = S(z)$ для всех $z \in \partial G$. Эта функция S называется (по аналогии с функцией Шварца для аналитической дуги) *односторонней функцией Шварца* для ∂G. Таким образом, любая односвязная классическая квадратурная область G является неванлинновской областью и, следовательно, $C(\partial G) \neq R_n(\partial G, \overline{G})$ для любого натурального n. Имеет место следующий результат:

Теорема IX. *Пусть G — жорданова классическая квадратурная область с границей $\mathit{\Gamma}$, пусть S — односторонняя функция Шварца для $\mathit{\Gamma}$ и пусть $v(z) := \prod_j (z - a_j)$, где произведение берется по всем полюсам a_j функции S в G (с учетом их кратности). Тогда*

$$P_n(\mathit{\Gamma}) = \left\{ h \in C(\mathit{\Gamma}) : \ \mathbb{P}[hv^{n-1}] \in A(\overline{G}) \right\},$$

где $n \geqslant 1$ — целое число, а $\mathbb{P}$ — оператор Пуассона для области G.

Этот результат интересен тем, что в нем изучен практически единственный случай, когда удается получить явное описание пространства $P_n(X)$ для нигде не плотного компакта X в случае, когда $P_n(X) \neq C(X)$.

Четвертая глава диссертации посвящена изучению понятия неванлинновской области. Это понятие было введено в главе 3 и позволило получить существенное продвижение в изучении задачи 1.2 для полианалитических функций. Однако изучение свойств неванлинновских областей (и связанных

[/24/] *Aharonov D., Shapiro H. S.* Domains in which analytic functions satisfy quadrature identities // J. Analyse Math. 1976. V. 30. P. 39–73.

вопросов о существовании однолистных функций в модельных пространствах и о свойствах таких функций) представляет значительный интерес не только в связи с обсуждаемыми аппроксимационными задачами, но и в контексте теории модельных пространств.

Глава 4 состоит из 6 параграфов. В §4.1 рассматриваются свойства "жесткости" понятия неванлинновской области, которые выводятся непосредственно из соответствующего определения. Первое из них состоит в том, что *граница неванлинновской области не может содержать аналитически независимых аналитических дуг*, а второе — в том, что свойство области быть неванлинновской является весьма ограничительным в следующем смысле:

Теорема X. *Пусть Ω — неванлинновская область, а $\mathfrak{L}$ — плоская алгебраическая кривая. Если найдется дуга $\gamma \subset \mathfrak{L} \cap \partial\Omega$ такая, что $\omega(\gamma) > 0$ (символом $\omega(\gamma)$ обозначена гармоническая мера дуги γ, вычисленная относительно Ω и некоторой точки $z \in \Omega$), то $\partial\Omega \subset \mathfrak{L}$.*

Кроме того, в §4.1 установлены следующие свойства неванлинновских областей, вытекающие, как и приведенные свойства "жесткости", непосредственно из соответствующего определения:

а) если $\Omega \in ND$ — жорданова область со спрямляемой границей Γ, то для всех допустимых функций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ из соответствующего определения функция $u - \overline{z}v$ непрерывно продолжается из области Ω на $\overline{\Omega}$, причем $u - \overline{z}v = 0$ на Γ;

б) существуют жордановы области $\Omega \in ND$ со спрямляемыми границами такие, что соответствующие функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ не могут быть выбраны (ни одна из них) принадлежащими пространству $A(\overline{\Omega})$.

Важной задачей является описание неванлинновских областей в терминах конформных отображений круга $\mathbb{D}$ на рассматриваемую область. Эта задача изучается в §§4.2–4.3 диссертации. Нам будет удобно обсудить результаты этих двух параграфов совместно, так как их разделение является в значительной степени условным.

Нам понадобится понятие *модельного пространства*. Пусть $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ — стандартное пространство Харди в круге $\mathbb{D}$, пусть Θ — внутренняя функция (т.е. $\Theta \in H^\infty$ и $|\Theta(\xi)| = 1$ для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$) и пусть пространство $K_\Theta \subset H^2$ определено следующим образом:

$$K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2.$$

В силу классической теоремы Берлинга подпространства $K_\Theta \subset H^2$ и только они являются инвариантными подпространствами для оператора обратного сдвига $\mathcal{B} : f \mapsto (f(z) - f(0))/z$ в H^2. Пространства K_Θ называют *модельными подпространствами.* Соответствующий термин был предложен Н. К. Никольским[25] и объясняется выдающейся ролью, которую эти пространства играют в функциональной модели Надя–Фойаша. Пространства K_Θ часто называют также $*$-*инвариантными подпространствами.*

Нам потребуются еще одно понятие. Пусть $\mathbb{D}_e := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Скажем, что функция $f \in H^\infty$ допускает *псевдопродолжение неванлинновского типа*, если существуют две функции $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}_e)$, $f_2 \not\equiv 0$, такие, что для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ выполняется равенство $f(\xi) = f_1(\xi)\big/f_2(\xi)$ угловых предельных значений, где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ — предельные значения функций f_1 и f_2 из $\mathbb{D}_e$.

Имеет место следующее важное утверждение:

Теорема XI.

1. *Ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbb{C}$ является неванлинновской тогда и только тогда, когда конформное отображение φ круга $\mathbb{D}$ на Ω допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.*

2. *Пусть Θ — внутренняя функция. Тогда любая ограниченная однолистная функция из пространства K_Θ конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на некоторую неванлинновскую область. Обратно, если однолистная функция $\varphi \in H^\infty$ отображает $\mathbb{D}$ конформно на некоторую неванлинновскую область, то существует внутренняя функция Θ такая, что $\varphi \in K_\Theta$.*

Отметим несколько простых следствий первого утверждения теоремы XI. Так, если Ω — неванлинновская область, а h — рациональная функция с полюсами вне $\overline{\Omega}$, однолистная в Ω, то область $h(\Omega)$ также будет неванлинновской. В частности, образ круга $\mathbb{D}$ под действием отображения $\big(z + 1/\sin(\pi/n)\big)^n$, $n \geqslant 3$, дает пример неванлинновской области, которая не является не только жордановой областью, но и областью Каратеодори. Кроме того, неванлинновские области обладают следующим свойством "плотности": в любой окрестности произвольного контура существует аналитический неванлинновский контур (т.е. граница жордановой неванлинновской области).

Второе утверждение теоремы XI позволяет предложить следующий метод построения неванлинновских областей, основанный на использовании понятия модельного пространства: *для построения неванлинновских областей с требуемыми свойствами в пространстве K_Θ (для некоторой специально выбранной внутренней функции Θ) необходимо найти однолистную функцию имеющую нужные аналитические свойства.* В диссертации этот метод назван «*метод МП*».

Дальнейшее изучение свойств неванлинновских областей в четвертой главе диссертации основано на использовании этого метода. В качестве его пер-

[25] *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.

вого применения в §4.3 доказывается свойство б) неванлинновских областей, приведенное при обзоре §4.1 выше.

Для построения неванлинновских областей при помощи метода МП необходимо уметь находить однолистные в круге $\mathbb{D}$ функции, принадлежащие пространствам K_Θ. Вопрос о существовании таких функций рассматривается в §4.3.

Хорошо известно, что всякая внутренняя функция Θ может быть представлена в виде $\Theta(z) = e^{ic}B(z)S(z)$, где $c \in \mathbb{R}$, а B и S — некоторые произведение Бляшке и сингулярная внутренняя функция соответственно. Так как $K_{\Theta_1\Theta_2} = K_{\Theta_1} \oplus (\Theta_1 K_{\Theta_2})$ для любых внутренних функций Θ_1 и Θ_2, то представляется целесообразным рассматривать вопросы о существовании однолистных функций в пространствах K_B и K_S по отдельности.

Очевидно, что для любого произведения Бляшке B в пространстве K_B существуют однолистные функции (например, функция $1/(1-\overline{a}_n z)$, где a_n — любой из нулей B). В случае же сингулярной внутренней функции S вопрос о существовании однолистных функций в K_S является открытым (и весьма нетривиальным).

В §4.3 получен частичный ответ на этот вопрос. Если S — сингулярная внутренняя функция, а $N \in \mathbb{N}$, то (сингулярная внутренняя) функция S_N определяется равенством

$$S_N(z) = S(z)S(\omega_N z)S(\omega_N^2 z)\cdots S(\omega_N^{N-1} z),$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Теорема 4.11 утверждает, что если S — сингулярная внутренняя функция, а μ — соответствующая положительная сингулярная мера на $\mathbb{T}$, то число $N \in \mathbb{N}$ такое, что пространство K_{S_N} содержит ограниченные однолистные функции существует в том и только том случае, если существует множество Карлесона $Y \subset \mathbb{T}$ такое, что $\mu(Y) > 0$.

Естественно возникает следующий вопрос: *для каких конечных положительных сингулярных мер* μ *на* $\mathbb{T}$*, для которых существует множество Карлесона* $Y \subset \mathbb{T}$ *с условием* $\mu(Y) > 0$*, в пространстве* K_{S_μ} *есть однолистные функции* (т.е. утверждение теоремы 4.11 верно при $N = 1$)? Как показано в §4.3, однолистные функции всегда существуют в пространстве $K_{S(w,Q)}$ для любых $w \in \mathbb{T}$ и $Q > 0$, где $S(w,Q)(z) = \exp\big(Q(z+w)/(z-w)\big)$.

Отметим, что в литературе рассматривались различные вопросы о существовании в модельных пространствах K_Θ функций, обладающих определенной регулярностью. Так, в работе[/26/] изучался вопрос о существовании гладких функций в таких пространствах. Вопрос о существовании в модельных пространствах однолистных функций впервые возник в работах автора в связи с рассматриваемыми задачами.

[/26/] *Dyakonov K., Khavinson D.* Smooth functions in star-invariant subspaces // Recent Advances in Operator-Related Function Theory. 2006. Contemporary Mathematics. Vol. 393. P. 59–66.

В §4.4 рассматривается вопрос о возможной иррегулярности границ неванлинновских областей. Прежде чем переходить к формулировкам основных результатов этого параграфа напомним, какие вопросы возникают в этом направлении и в каких терминах можно описывать регулярность или иррегулярность границ плоских областей. Во-первых, это вопрос о том, является ли граница жордановой неванлинновской области спрямляемой. С учетом теоремы XI этот вопрос сводится к следующему: существует ли внутренняя функция Θ такая, что в соответствующем пространстве K_Θ найдется однолистная функция f со свойством $f' \notin H^1$.

Естественно возникает также вопрос о конструкции неванлинновских областей с неаналитическими границами или, в более общем случае, с "достаточно негладкими" границами. Отметим, что построение неванлинновских областей, обладающих предписанными аналитическими или геометрическими свойствами, является достаточно трудной задачей, требующей использования весьма тонких аналитических конструкций и оценок. В связи с этим отметим, что первый пример неванлинновской области с нигде не аналитической границей был построен в работе[/27/].

Недавно Е. П. Долженко[/28/] ввел понятие модуля спрямляемости спрямляемой жордановой кривой. Эту характеристику регулярности границ жордановых областей также представляется интересным использовать при изучении вопроса о возможной иррегулярности границ неванлинновских областей. Пусть Γ — спрямляемая жорданова кривая (замкнутая или разомкнутая, с концами или без них). Модулем спрямляемости $\varrho(\Gamma, \delta)$, $\delta > 0$, называется величина $\varrho(\Gamma, \delta) := \sup\{d(\Gamma; z, w) : \ z, w \in \Gamma, \ |z - w| \leqslant \delta\}$, где $d(\Gamma; z, w)$ обозначает либо длину дуги $\Gamma(z, w)$ кривой Γ с концами z и w — в случае разомкнутой кривой Γ, либо меньшую из длин двух дуг $\Gamma(z, w)$ кривой Γ с этими концами — в случае замкнутой кривой Γ. Определим, при $k \in (0, 1]$, класс $\mathcal{G}_0^k$, состоящий из всех спрямляемых жордановых кривых Γ таких, что $\varrho(\Gamma, \delta) \leqslant c\delta^k$ при всех $\delta \in (0, \delta_0)$ для некоторых $c > 1$ и $\delta_0 > 0$. Таким образом, в классе $\mathcal{G}_0^k$ лежат кривые, в определенном смысле "близкие" к неспрямляемым.

Основным методом, используемым в §4.4, является метод построения неванлинновских областей, основанный на использовании техники модельных пространств, предложенный выше. Пусть B — бесконечное произведение Бляшке с нулями $\{a_1, a_2, \dots\}$ и пусть B_n, при целых $n \geqslant 1$, — это произведение первых n множителей произведения B. Хорошо известно, что система функций $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

[/27/] *Мазалов М. Я.* Пример непостоянной бианалитической функции, обращающейся в нуль всюду на нигде не аналитической границе // Матем. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3–4. С. 524–526.

[/28/] *Долженко Е. П.* Оценки модулей непрерывности конформных отображений об- ластей вблизи их достижимых граничных дуг // Матем. сб. 2011. Т. 202, №12. С. 57–106.

$$g_n(z) := \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}B_{n-1}(z)}{1-\overline{a}_n z},$$

образует ортонормированный базис в пространстве K_B. Если же B — это интерполяционное произведение Бляшке, то система функций $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$\psi_n(z) = \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{1-\overline{a}_n z}$$

образует базис Рисса в пространстве K_B. Следующее утверждение объединяет основные результаты §4.4:

Теорема XII.

1. *Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность Бляшке, причем $a_1 \in (0, 1/\sqrt{2})$ и $|a_k| \leqslant |a_m|$ при $k \leqslant m$, а B — соответствующее произведение Бляшке. Для любой последовательности коэффициентов $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям $c_1 = 1$ и*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| c_n \sqrt{\frac{1+|a_n|}{1-|a_n|}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1+|a_k|}{1-|a_k|} \right| < \frac{a_1\sqrt{1-a_1^2}(1-2a_1^2)}{(1+a_1)^4},$$

функция $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n$ принадлежит $H^2 \cap C^1(\overline{\mathbb{D}})$, однолистна в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ конформно на некоторую неванлинновскую область с неаналитической границей.

2. *Пусть (a_n) — интерполяционная последовательность Бляшке такая, что $d := \min_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \operatorname{Re} \psi_1'(z) > 0$. Тогда для любой последовательности коэффициентов $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|c_k|}{(1-|a_k|^2)^{3/2}} < \frac{dc_1}{4},$$

функция $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$ принадлежит $H^2 \cap C^1(\overline{\mathbb{D}})$, однолистна в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ конформно на некоторую неванлинновскую область с неаналитической границей.

3. *Для любого $\alpha \in (0,1)$ и для любого замкнутого множества $E \subseteq \mathbb{T}$ существует интерполяционная последовательность Бляшке $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что множество ее предельных точек равно E, а в пространстве K_B, где B — соответствующее произведение Бляшке, существует однолистная функция f вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$ такая, что $\Omega = f(\mathbb{D}) \in ND$, а граница области Ω принадлежит классу C^1, но не классу $C^{1,\alpha}$.*

4. *Для любого $k \in (0,1]$ существует жорданова неванлинновская область Ω такая, что $\partial\Omega \notin \mathcal{G}_0^k$. При этом $\Omega = f(\mathbb{D})$, где f — однолистная функция вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$.*

Также можно показать, что в пространстве K_B, где B — соответствующим образом подобранное произведение Бляшке, можно найти такую однолистную функцию f вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$, для которой $f' \notin H^p$ ни при каком $p > 1$. Таким образом, существуют неванлинновские области с "почти неспрямляемыми" границами. Однако поставленный выше вопрос о существовании неванлинновских областей с неспрямляемыми границами остается открытым.

Оказывается, что понятия неванлинновской области и псевдопродолжения неванлинновского типа естественно возникают и в других аппроксимационных задачах, связанных с задачей 1 при $m = 0$. Этому посвящены §§4.5–4.6.

В §4.5 обсуждается вопрос о плотности в пространстве $L^p(\mathbb{T})$, при $1 \leqslant p < \infty$ (рассматриваемом относительно нормированной меры Лебега на $\mathbb{T}$), подпространства

$$M_n^p(\mathbb{T}, f) = H^p(\mathbb{T}) + \overline{f}\, H^p(\mathbb{T}) + \cdots + \overline{f}^{\,n-1}\, H^p(\mathbb{T}),$$

где $n \geqslant 2$ — целое число, $f \in H^\infty$ — данная функция, а $H^p(\mathbb{T})$ — соответствующие пространства Харди на $\mathbb{T}$. Оказывается (теорема 4.24), что пространство $M_n^p(\mathbb{T}, f)$ плотно в L^p если и только если функция f не допускает псевдопродолжения неванлинновского типа. Кроме того, в §4.5 рассматривается вопрос о структуре пространства $M_n^2(\mathbb{T}, f)^\perp$, связанный со специальными свойствами операторов Теплица, однако формулировки соответствующих результатов здесь не приводятся в силу их громоздкости.

В §4.6 рассматривается задача о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами вида $p + \overline{z}^k q$, где p, q — многочлены комплексного переменного, а $k \geqslant 2$ — заданное целое число. В этой задаче доказан критерий приближаемости для компактов Каратеодори (теорема 4.30), который формулируется в терминах так называемых *k-неванлинновских областей* (определение k-неванлинновской области получается из определения неванлинновской области заменой функции $\overline{z}$ на $\overline{z}^k$) и, по своей форме, идентичен теореме VI. В §4.6 обсуждаются основные свойства k-неванлинновских областей. В частности, показано, что для любого целого $k \geqslant 2$ существуют k-неванлинновские области, которые не являются неванлинновскими.

В дополнении, состоящем из одного параграфа (§5.1), рассматривается взаимосвязь задачи Дирихле для бианалитических функций и задачи о равномерной приближаемости функций бианалитическими многочленами на границах плоских односвязных областей. Показано, что свойства общей разрешимости и единственности решения в классической задаче Дирихле для бианалитических функций в жордановой области G не эквивалентны свойству $P_2(\partial G) = C(\partial G)$ (в отличие от аналогичной ситуации для голоморфных и гармонических функций). Так, основной результат §5.1 (теорема 5.4) утверждает, что если $\Omega \in ND$ — область Каратеодори, то найдется такая функция $f \in A_2(\overline{\Omega})$, что $f|_{\partial\Omega} = 0$, а $f \not\equiv 0$ в Ω, но существует жорданова область $G \notin LND$ со спрямляемой границей и функция f с теми же свойствами, что и выше, причем граница указанной области G может даже быть аналитической всюду, за исключением одной точки. Доказательство этого результата основано на применении специальной модификации метода МП.

Работы автора по теме диссертации

[1] Fedorovskiy K. Yu. On uniform approximations by polyanalytic polynomials on compact subsets of the plane // Anal. Univ. M. Curie-Skłdowska. Sectio A. 1999. V. LIII, №3. P. 27–39.

[2] Парамонов П. В., Федоровский К. Ю. О равномерной и C^1-приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1999. Т. 190, №2. С. 123–144.

[3] Федоровский К. Ю. Аппроксимация и граничные свойства полианалитических функций // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 235. С. 262–271.

[4] Кармона Х. Х., Парамонов П. В., Федоровский К. Ю. О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций // Матем. сб. 2002. Т. 193, №10. С. 75–98.

[5] Carmona J. J., Fedorovskiy K. Yu. Coformal maps and uniform approximation by polyanalytic functions // Selected Topics in Complex Analysis. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag. 2005. Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 158. P. 109–130.

[6] Федоровский К. Ю. О некоторых свойствах и примерах неванлинновских областей // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 253. С. 204–213.

[7] Кармона Дж. Дж., Федоровский К. Ю. О зависимости условий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами от порядка полианалитичности // Матем. заметки. 2008. Т. 83, вып. 1. С. 32–38.

[8] Fedorovskiy K. Yu. Nevanlinna domains in problems of polyanalytic polynomial approximation // Analysis and Mathematical Physics. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag, 2009. Trends in Mathematics. P. 129–140.

[9] Fedorovskiy K. Yu. Uniform approximation problems // Uzbek Math. J. 2009. №1. P. 33–44.

[10] Федоровский К. Ю. О характеризации мероморфных функций в плоских областях Каратеодори в терминах слабого принципа максимума // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. «Прикладная математика». С. 185–193.

[11] Fedorovskiy K. Yu. C^m-approximation by polyanalytic polynomials on compact subsets of the complex plane // Complex Anal. Oper. Theory. 2011. V. 5, №3. P. 671–681.

[12] Баранов А. Д., Федоровский К. Ю. Регулярность границ неванлинновских областей и однолистные функции в модельных подпространствах // Матем. сб. 2011. Т. 202, №12. С. 3–22.

[13] Федоровский К. Ю. О C^m-приближаемости функций полиномиальными решениями эллиптических уравнений на плоских компактах // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, №4, С. 201–219.

[14] Федоровский К. Ю. О равномерной аппроксимации функций решениями эллиптических уравнений на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. №3. С. 3–15.

[15] Федоровский К. Ю. Области и компакты Каратеодори в теории приближений аналитическими функциями // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2012. Спец. вып. №1 «Прикладная математика и механика». С. 36–45.

[16] Fedorovskiy K. Yu. Uniform and C^m-approximation by polyanalytic polynomials // Complex Analysis and Potential Theory. Providence, RI. American Mathematical Society. 2012. CRM Proceedings and Lecture Notes. Vol. 55. P. 323-329.

[17] Carmona J. J., Fedorovskiy K. Yu. New conditions for uniform approximation by polyanalytic polynomials // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2012. Т. 279. С. 227–241.

[18] Мазалов М. Я., Парамонов П. В., Федоровский К. Ю. Условия C^m-приближаемости функций решениями эллиптических уравнений // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67, вып. 6. С. 53–100.